

## OPTYMALNA NIEJEDNORODNOŚĆ PLASTYCZNA SKRĘCANEGO WYCINKA TORUSA

ANDRZEJ MIODUCHOWSKI (WARSZAWA)

### 1. PROBLEM

Coraz większego znaczenia w praktyce inżynierskiej nabiera problematyka optymalnego projektowania elementów konstrukcji, w szczególności optymalnego wyboru własności stosowanych materiałów. Takimi elementami są m.in. skręcane pręty jednorodne lub niejednorodne (niejednorodność ta może być spowodowana np. złożeniem pręta z kilku przyrządnych części o różnych granicach plastyczności; może się też ona zmieniać w sposób ciągły wskutek zabiegów technologicznych). Z punktu widzenia zastosowań praktycznych interesującymi mogą być następujące zagadnienia:

a) chcemy wzmocnić pręt skręcany wkładkami materiału o wyższej granicy plastyczności; powstaje pytanie, jak je rozmieścić, aby zapewnić maksymalną nośność graniczną pręta;

b) mamy do czynienia ze skręcanym prętem niejednorodnym; interesujący jest tu też problem optymalnego rozkładu granicy plastyczności w danym przekroju poprzecznym, tzn. taki jej rozkład, który zapewni maksymalną nośność graniczną tego pręta. Rozwiązanie tego problemu da bezpośrednie wskazówki dla inżyniera. Oczywiście, nie zawsze możemy (z innych względów — technologicznych, użytkowych itp.) zrealizować taki idealny rozkład, będziemy jednak wiedzieli, w jakim kierunku powinny iść zmiany i ulepszenia.

Problematyka związana z tymi zagadnieniami w odniesieniu do skręcanych prętów przyrządnych znalazła już częściowe opracowanie. Pewne rozwiązania, uzyskane na drodze analitycznej, przedstawiono w pracy [1]. W pracy [2] przedstawiono wyniki otrzymane na drodze numerycznej dla całego zakresu parametrów zadania.

Niniejsza praca poświęcona jest problemowi optymalnej, poprzecznej, ciągłej niejednorodności pręta o kształcie wycinka torusa (np. fragment zwoju sprężyny). Jest ona kontynuacją publikacji [2]; kontynuacja ta dotyczy sposobu postawienia problemu i zastosowanej metody numerycznej do jego rozwiązania.

Problem wariacyjny, opisujący ten typ zadania, postawimy tak, jak poprzednio [2]. Wprowadźmy cylindryczny układ współrzędnych  $r, \psi, z$  w taki sposób, aby oś  $z$  była skierowana prostopadle do płaszczyzny torusa (rys. 1). Biorąc pod uwagę równania plastycznego skręcania wycinka torusa [3] o poprzecznej ciągłej niejedno-

rodności plastycznej [4], możemy łatwo sformułować problem ekstremalny następująco.

W obszarze  $D$  poszukujemy takiej ciągłej funkcji naprężeń  $u(x, y)$  i takiego rozkładu granicy plastyczności  $k(x, y)$ , dla których przy spełnieniu warunków

$$(1.1) \quad \frac{|\text{grad } u(r, z)|}{r^2} = k(r, z), \quad [u(r, z)]_c = 0,$$

$$k_1 \leq k(r, z) \leq k_2, \quad \frac{1}{S(D)} \int_D k(r, z) dr dz = A,$$

osiąga maksimum funkcjonał

$$(1.2) \quad I(u, k) = \int_D \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} dr dz,$$

gdzie  $D$  oznacza przekrój poprzeczny rozpatrywanego pręta,  $c$  brzeg  $D$ ,  $k_1$  i  $k_2$  odpowiednio dolną i górną dopuszczalną wartość granicy plastyczności,  $S(D)$

pole przekroju poprzecznego  $D$  oraz  $A$  pewną stałą. Przyjmijmy poza tym, że wprowadzone w (1.1) i (1.2) wielkości są wielkościami bezwymiarowymi (są odniesione do odpowiednich parametrów, np. górną granicę plastyczności  $k_2$  przyjmować będziemy stałe za równą jedności, a dolną  $k_1$  odpowiednio 0,75; 0,50; ... itp.). Stała  $A$  ma sens średniej granicy plastyczności, przy czym

$$(1.3) \quad k_1 \leq A \leq k_2,$$

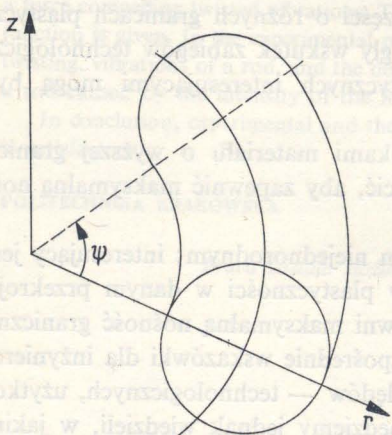
tzn. jest zawarta pomiędzy wartościami, które odpowiadają przypadkom występowania w polu przekroju poprzecznego tylko materiału jednorodnego o granicy plastyczności  $k_1$  lub  $k_2$ .

Ten sposób zapisu zwiększy jego przejrzystość i pozwoli na prostą interpretację danych wejściowych i otrzymanych wyników.

## 2. METODA ROZWIĄZANIA

Obliczenia numeryczne tak jak w [2] przeprowadzono dwoma etapami. Zastosowanie «niepełnej metody gradientowej» pozwoliło na łatwe zbudowanie rozwiązania zerowego, spełniającego wszystkie warunki (dla pewnych parametrów buduje się go w sposób trywialny).

Otrzymane rozwiązanie traktujemy jako przybliżone, znajdujące się w klasie rozwiązań dopuszczalnych. Jest ono rozwiązaniem wyjściowym dla otrzymania



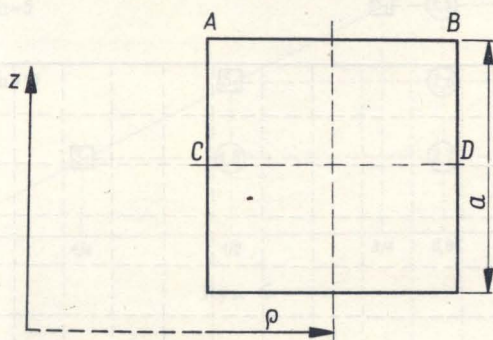
Rys. 1

dokładniejszych wyników w oparciu o «zmodyfikowaną metodę lokalnych wariacji».

Sposób podziału rozpatrywanego obszaru  $D$  i technikę przeprowadzonych obliczeń omówimy bliżej przy okazji omawiania konkretnego przykładu.

### 3. PRZYKŁAD

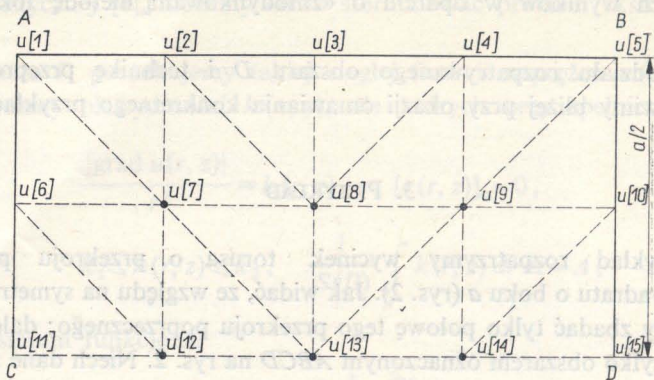
Jako przykład rozpatrzmy wycinek torusa o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu o boku  $a$  (rys. 2). Jak widać, ze względu na symetrię względem osi  $r$  wystarczy zbadać tylko połowę tego przekroju poprzecznego; dalej zajmować się będziemy tylko obszarem oznaczonym  $ABCD$  na rys. 2. Niech dane z góry parametry zadania wynoszą odpowiednio:  $k_1=0,75$ ;  $k_2=1,00$ ;  $A=0,85$ . Oczywiście wielkość  $A$ , która jest tzw. funkcją kosztu, spełnia warunek (1.3):  $0,75 \leq A \leq 1,00$ . Parametrem zadania jest też wielkość  $\rho/a$ , która, mówiąc nieprecyzyjnie, określa «stopień zwinięcia» wycinka torusa. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że  $\rho/a=5$ .



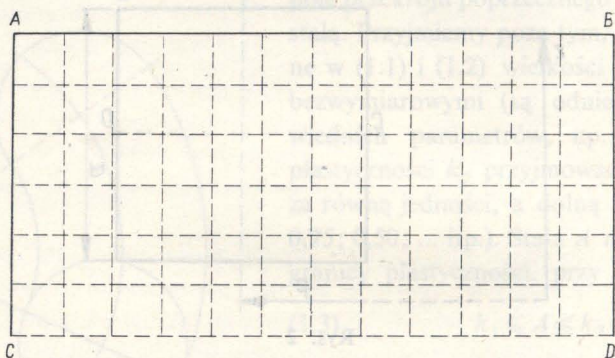
Rys. 2

Ze względu na mały stosunek  $\rho/a$  jako rozwiązania zerowego nie możemy przyjąć funkcji  $u(r, z)$  w postaci płaszczyzny przechodzącej przez kontur przekroju poprzecznego i nachylonej do tego przekroju pod kątem  $\alpha$ , gdzie  $\operatorname{tg} \alpha=0,85$ . Takie rozwiązanie zerowe spełnia wszystkie ograniczenia (1.1) z wyjątkiem (1.1)<sub>1</sub>. Ponieważ dla przeprowadzenia obliczeń numerycznych w/g niepełnej metody gradientowej przyjęto podział rozpatrywanego obszaru tak jak na rys. 3, to rzędne funkcji  $u(r, z)$  w punktach od  $u(7)$  do  $u(14)$  (w pozostałych wynoszą zero) obliczono przyjmując za wartość  $r$  jej faktyczną wartość w danym punkcie obszaru  $ABCD$  (np. przyjmując  $a=4$  mamy  $r=19$  dla  $u(7)$  itd.). Otrzymane w ten sposób rzędne są danymi wyjściowymi dla obliczeń numerycznych. W trakcie obliczeń przyjmowano wartość  $r$  dla każdego trójkąta równą odległości pomiędzy początkiem układu współrzędnych a środkiem jego ciężkości.

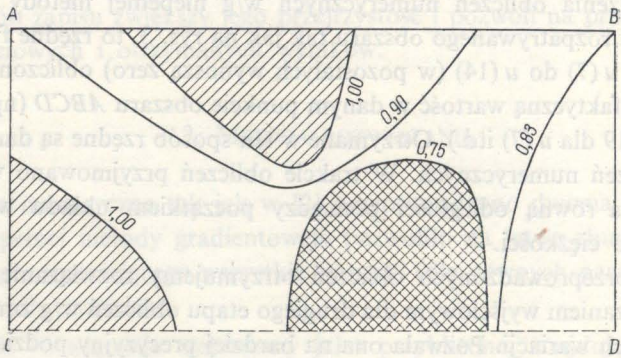
W efekcie przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy rozwiązanie przybliżone. Jest ono rozwiązaniem wyjściowym dla drugiego etapu obliczeń w/g zmodyfikowanej metody lokalnych wariacji. Pozwala ona na bardziej precyzyjny podział (wymagana jest mniejsza pamięć); bok kwadratu dzielimy na 12 części (każdy z boków trójkąta



Rys. 3



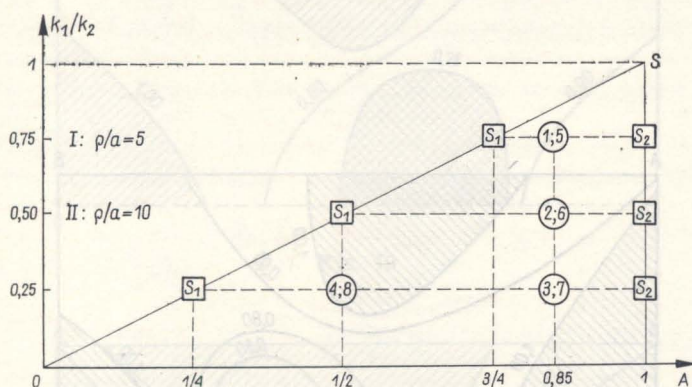
Rys. 4



Rys. 5

na 3) (rys. 4). Tym razem zmienna  $r$  odnoszona będzie do środka każdego z małych kwadracików. Jako wynik przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy poszukiwane wielkości rzędnych funkcji naprężenia  $u(r, z)$  odniesione do węzłów siatki i wartości funkcji granicy plastyczności  $k(r, z)$  odniesione do środków oczek siatki. Rezultaty dla naszego przykładu przedstawione są na rys. 5, gdzie liniami ciągłymi zaznaczono poziomice modułu gradienta funkcji  $u(r, z)$ , tzn. poziomice funkcji  $k(r, z)$ .

Jak widać z (1.1), posługując się wielkościami bezwymiarowymi, możemy dla ustalonego  $\rho/a$  rodzinę parametrów wyjściowych zadania przedstawić jako pewien zbiór dwuwymiarowy:  $k_1/k_2$  i  $A$  (por. rys. 6). Powierzchnia trójkąta  $O, S, I$  zawiera wszystkie możliwe kombinacje danych wyjściowych. Litery  $S_1$  i  $S_2$ , umieszczone



Rys. 6

w małych kwadracikach, oznaczają oczywiście rozwiązania trywialne, gdy w całym polu przekroju poprzecznego występuje jeden materiał. Cyfrą 1 oznaczono w tym zbiorze rozwiązanie przedstawione na rys. 5. Przeprowadzono poza tym obliczenia dla szeregu różnych przypadków (m.in. gdy  $\rho a = 10$ ); wszystkie one odpowiadają następującym danym wyjściowym:

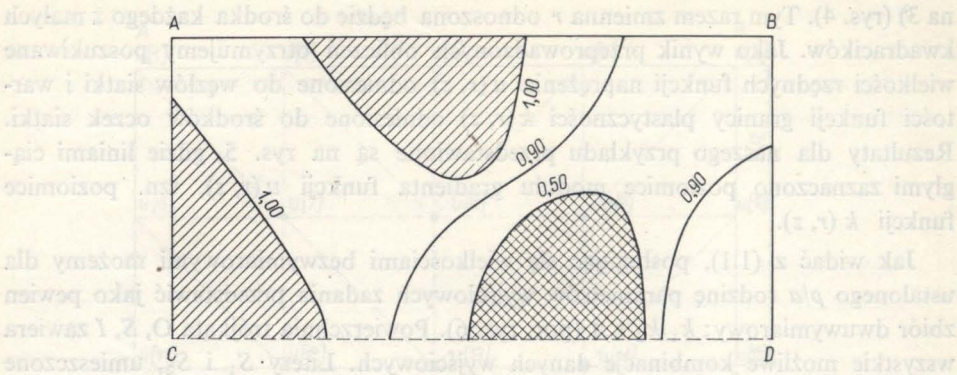
w przypadku I:  $\rho/a = 5$

- 1)  $k_1/k_2 = 0,75$ ,  $A = 0,85$  (rys. 5),
- 2)  $k_1/k_2 = 0,50$ ,  $A = 0,85$  (rys. 6),
- 3)  $k_1/k_2 = 0,25$ ,  $A = 0,85$  (rys. 7),
- 4)  $k_1/k_2 = 0,25$ ,  $A = 0,50$  (rys. 8);

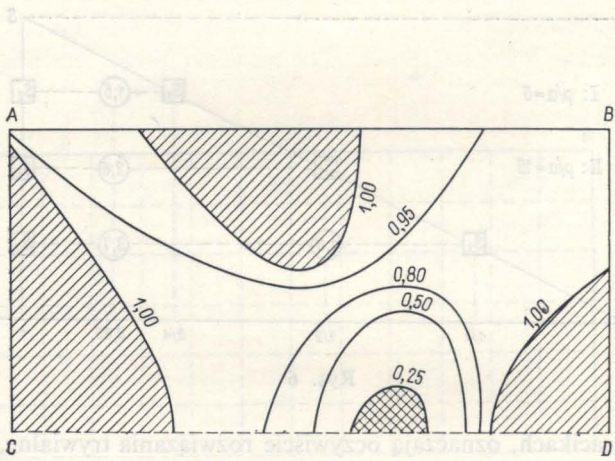
W przypadku II:  $\rho/a = 10$

- 1)  $k_1/k_2 = 0,75$ ,  $A = 0,85$  (rys. 10),
- 2)  $k_1/k_2 = 0,50$ ,  $A = 0,85$  (rys. 11),
- 3)  $k_1/k_2 = 0,25$ ,  $A = 0,85$  (rys. 12),
- 4)  $k_1/k_2 = 0,25$ ,  $A = 0,50$  (rys. 13).

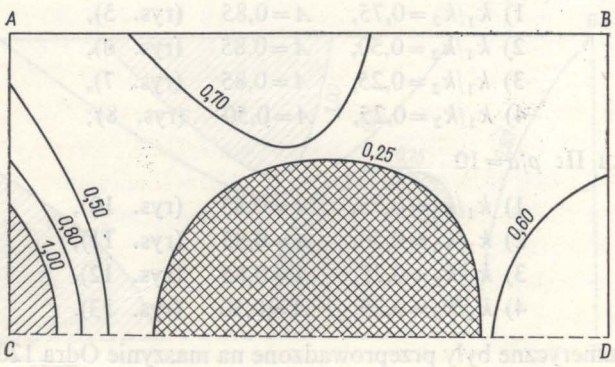
Obliczenia numeryczne były przeprowadzone na maszynie Odra 1204 w Zakładzie Obliczeń Numerycznych IPPT PAN.



Rys. 7



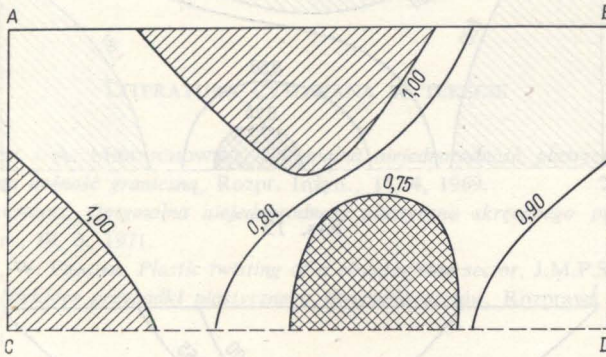
Rys. 8



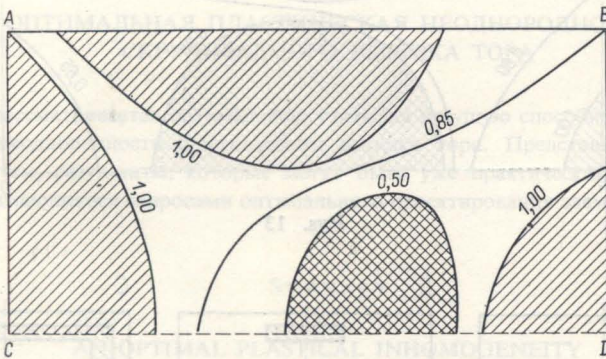
Rys. 9

## 4. Dyskusja

Jak widać, otrzymaliśmy rozwiązanie problemu optymalnej niejednorodności plastycznej dla różnych z góry danych parametrów. Wyniki te wykazują, jak dla konkretnych danych należy zbudować rozwiązanie, aby nośność była maksymalna a z drugiej strony pozwalają na wyciągnięcie ważnych wniosków natury jakościowej. Analizę tę przeprowadzimy dla dwu grup otrzymanych wyników oddzielnie: dla  $\rho/a=5$  i dla  $\rho/a=10$ .



Rys. 10

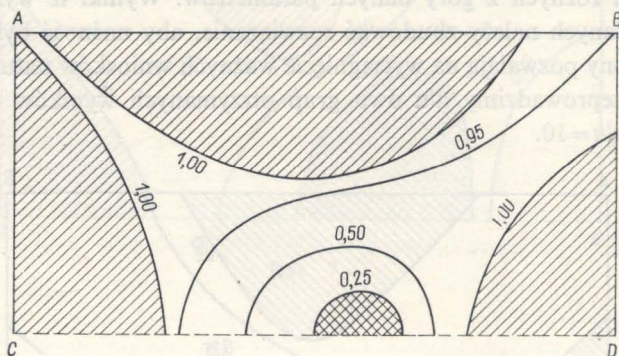


Rys. 11

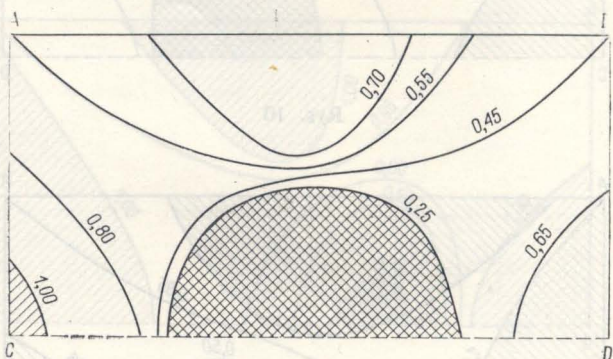
W przypadku kiedy mamy do czynienia z dużym zwinięciem ( $\rho/a=5$ ), obserwujemy zdecydowane przesunięcie stref materiału «mocniejszego» w kierunku wewnętrznych warstw zwoju. W związku z tym, kiedy mamy wzmocnić skręcany wycinek torusa niewielką wkładką z materiału mocniejszego, to powinna być ona umieszczona od strony wewnętrznej zwoju (rys. 14a). W miarę zwiększania ilości materiału o wyższej granicy plastyczności rozmieszczenie i kształt tych wkładek powinny być projektowane tak jak na rys. 14b i 14c.

W przypadku kiedy mamy do czynienia z małym zwinięciem ( $\rho/a=10$ ) opisane zjawisko przesunięcia zaznacza się zdecydowanie słabiej: rozkład stref materiału o różnych granicach plastyczności jest częściowo zbliżony do tego, jaki otrzymano

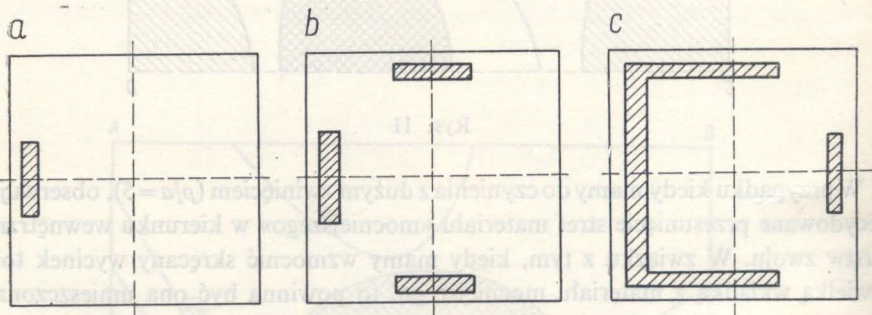
dla pręta pryzmatycznego o tym samym przekroju poprzecznym (rys. 10, 11 i 12 w pracy [2]). Wynik ten możemy łatwo zrozumieć, jeśli zwrócimy uwagę na następujący fakt: o ile w przypadku  $\rho/a=5$  nie można było zbudować rozwiązania ze-



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

rowego w postaci płaszczyzny, o tyle w tym przypadku ( $\rho/a=10$ ) można, gdyż warunek (1.1)<sub>1</sub> jest spełniony; świadczy to o zmniejszaniu się wpływu promienia krzywizny  $\rho$  na rozwiązanie, gdy wartość  $\rho/a$  rośnie. W związku z tym możemy po-



wiedzieć, że «dla słabo zwiniętych zwojów»: a) gdy chcemy zwiększyć nośność graniczną niewielką ilością materiału mocniejszego, to wkładka z tego materiału powinna być umieszczona od strony wewnętrznej zwoju (rys. 14a); b) gdy chcemy zwiększyć nośność graniczną dużą ilością materiału mocniejszego, to wkładki z tego materiału powinny być umieszczone symetrycznie wzdłuż wszystkich boków rozpatrywanego przekroju  $D$  tak, jak dla pręta pryzmatycznego (rys. 13 i 14 z [2]).

Autor dziękuje prof. J. RYCHLEWSKIEMU za pomoc w opracowaniu tego zagadnienia.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. MAJERCZYK i A. MIODUCHOWSKI, *Optymalna niejednorodność plastyczna skręcanego pręta ze względu na nośność graniczną*, Rozpr. Inżyn., **17**, 4, 1969.
2. A. MIODUCHOWSKI, *Optymalna niejednorodność plastyczna skręcanego pręta pryzmatycznego*, Rozpr. Inżyn., **19**, 3, 1971.
3. A. J. WANG, W. PRAGER, *Plastic twisting of a circular ring sector*, J.M.P.S., **3**, 169 – 175 1955.
4. M. GALOS, *Niektóre przypadki plastycznego skręcania prętów*, Rozprawa doktorska, Kraków 1968.

#### Резюме

#### ОПТИМАЛЬНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ СКРУЧИВАЕМОГО ВЫРЕЗКА ТОРА

В работе рассматривается оптимальное, учитывая несущую способность, распределение пластической неоднородности скручиваемого вырезка тора. Представляются полученные численным путем, результаты, которые могут быть уже практическими указаниями для инженера, занимающегося вопросами оптимального проектирования элементов конструкции.

#### SUMMARY

#### AN OPTIMAL PLASTICAL INHOMOGENEITY OF A TWISTED SCRAP OF TORUS

In this paper an optimal dissolution of plastic inhomogeneity of a twisted scrap of torus is considered. Results were obtained by numerical means can be considered as practical suggestions for an engineer dealing with optimal problems in designing elements of constructions.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1971 r.