

NOWA METODA WYZNACZANIA KRZYWEJ NAPRĘŻENIE — ODKSZTAŁCENIE PRZY ŚCINANIU

JACEK LITOŃSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

W celu wyznaczenia dla jakiegoś materiału zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem przy prostym ścinaniu [tj. krzywej $\tau(\text{tg } \gamma)$ lub krzywej umocnienia $\tau(\text{tg } \gamma_{pl})$, gdzie τ jest naprężeniem stycznym, a γ i γ_{pl} są odpowiednio kątami całkowitego i plastycznego ścinania] dotychczas stosuje się skręcanie

- 1) cienkościennej rurki o stałym kołowym przekroju;
- 2) pełnościennego pręta o stałym kołowym przekroju (metodę tę opisuje np. NADAI w pracy [1]);
- 3) płaskiej kołowej tarczy o stałej grubości (metodę tę opracował MARCINIAK [2 i 3]).

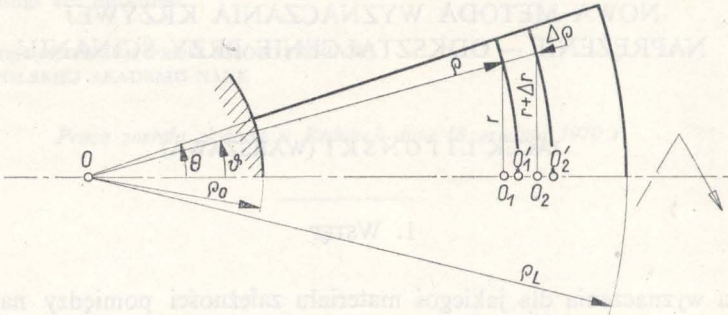
Dalej zostanie omówiona nowa metoda wyznaczenia krzywych $\tau(\text{tg } \gamma)$ lub $\tau(\text{tg } \gamma_{pl})$, wykorzystująca skręcanie smukłego, stożkowego pręta.

2. UWAGI O SKRĘCANIU STOŻKOWYCH PRĘTÓW. NOWA METODA WYZNACZANIA KRZYWEJ $\tau(\text{tg } \gamma)$

Rozważany jest pręt stożkowy o przekroju kołowym i o kącie rozwarcia 2θ , zamocowany na jednym końcu. Pręt został plastycznie skręcony wskutek przyłożenia na drugim jego końcu powoli wzrastającego momentu skręcającego od O do M lub powoli wzrastającego kąta obrotu od O do Φ . Rysunek 1 przedstawia połowę przekroju pręta. Interesuje nas stan równowagi w skręconym pręcie przy ustalonej wartości M lub Φ .

Obieramy układ współrzędnych kulistych ρ, ϑ, φ z początkiem umieszczonym w wierzchołku pręta O . Zakładamy, że pręt odkształcał się w taki sposób, że jego kuliste przekroje o promieniach ρ ($\rho_0 \leq \rho < \rho_L$) jedynie obracały się sztywno dookoła osi pręta. W pręcie skręconym kąty sztywnych obrotów tych przekrojów określa pewna funkcja $\varphi(\rho)$. Przy podanym założeniu w pręcie występuje tylko jedno odkształcenie: proste ścinanie w płaszczyźnie przechodzącej przez wektory jednostkowe osi ρ i φ . Kątem ścinania jest kąt γ (rys. 2). Przy małych odkształceniach za miarę odkształcenia przyjmujemy sam kąt γ (wtedy $\gamma \equiv \gamma_{\rho\varphi}$), a przy większych — $\text{tg } \gamma$. Dla skrócenia zapisu obie te miary oznaczать będziemy łącznie jako $\bar{\gamma}$.

Weźmy pod uwagę w nieodkształconym pręcie dwa przekroje kuliste pręta o promieniach ρ i $\rho + \Delta\rho$, a na nich A i B będące punktami przebicia przekrojów przez prostą L , wychodzącą z wierzchołka O (rys. 2). W wyniku skrzywienia pręta



Rys. 1

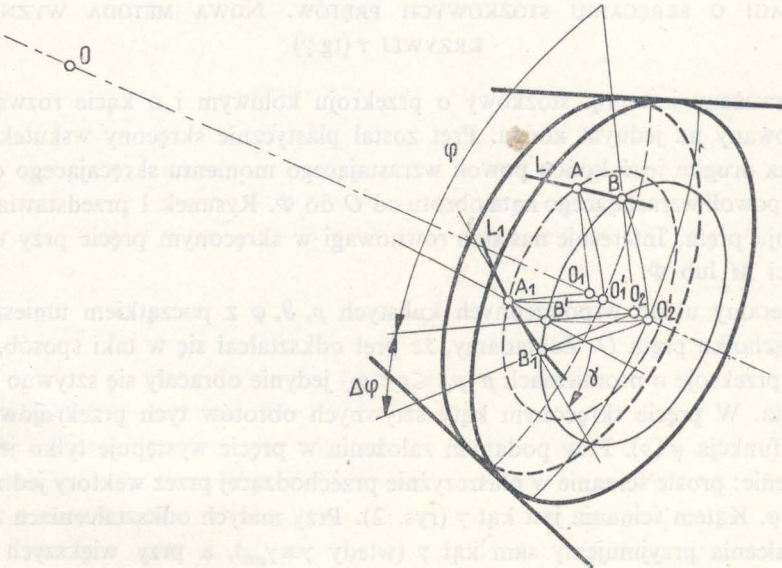
przekroje zostały obrócone o kąty φ i $\varphi + \Delta\varphi$, punkty A i B przeszły w punkty A_1 i B_1 , a prosta L — w krzywą L_1 . Łatwo zauważyć, że wtedy

$$\text{tg} \sphericalangle B' A_1 B_1 = \frac{\widehat{B' B_1}}{\Delta\rho} = (\rho + \Delta\rho) \sin \vartheta \frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho},$$

gdyż łuk $\widehat{B' B_1} = (r + \Delta r) \Delta\varphi = (\rho + \Delta\rho) \sin \vartheta \Delta\varphi$.

Dla $\Delta\rho \rightarrow 0 \sphericalangle B' A_1 B_1 \rightarrow \gamma$ $a (\rho + \Delta\rho) \sin \vartheta \Delta\varphi / \Delta\rho \rightarrow \rho \sin \vartheta d\varphi / d\rho$; w granicy będzie więc

$$\text{tg} \gamma = \rho \sin \vartheta \varphi'.$$



Rys. 2

Dalej przyjmować będziemy, że m jest równe momentowi M , który występuje na swobodnym końcu pręta oraz że uzyskany wzór jest spełniony dla dowolnego ρ pręta; zatem

$$(2.3) \quad M = 2\pi\rho^3 \int_0^{\vartheta=\theta} \tau \sin^2 \vartheta \, d\vartheta.$$

Wzór (2.3) jest całkowym warunkiem równowagi.

W obecnej pracy zajmować się będziemy skręcaniem smukłego pręta stożkowego czyli pręta o małym kącie rozwarcia 2θ . Dla takiego pręta dla $0 \leq \vartheta \leq \theta$ można przyjąć $\sin \vartheta = \vartheta$. Ze wzorów (2.1), (2.2) i (2.3) otrzymujemy

$$(2.4) \quad \bar{\gamma} = \psi(\rho) \vartheta, \quad \tau = \tau(\bar{\gamma}), \quad M = 2\pi\rho^3 \int_0^{\vartheta=\theta} \tau \vartheta^2 \, d\vartheta.$$

Dla wybranej wartości $\rho = \rho_K$ pręta [za pomocą zależności (2.4)₁ i (2.4)₂] we wzorze (2.4)₃ zamieniamy zmienną ϑ przez zmienną $\bar{\gamma}$. Nowe granice całkowania otrzymujemy z (2.4)₁ przyjmując $\vartheta=0$ i $\vartheta=\theta$; są one równe odpowiednio 0 i $\psi(\rho_K)\theta$. Ponieważ także $\vartheta^2 \, d\vartheta = \bar{\gamma}^2 \, d\bar{\gamma} / \psi^3(\rho_K)$, mamy zatem

$$(2.5) \quad M = \frac{2\pi\rho_K^3}{\psi^3(\rho_K)} \int_0^{\psi(\rho_K)\theta} \tau(\bar{\gamma}) \bar{\gamma}^2 \, d\bar{\gamma}.$$

Przyjmując oznaczenie $\bar{\Gamma}(\rho)$ na odkształcenie ścinające na powierzchni bocznej skręconego stożkowego pręta w punkcie ρ z (2.4)₁ otrzymujemy

$$(2.6) \quad \bar{\Gamma}(\rho) = \psi(\rho) \theta.$$

Posługując się wzorem (2.6), do którego podstawiono $\rho = \rho_K$, ze związku (2.5) otrzymujemy

$$(2.7) \quad M = \frac{2\pi\rho_K^3 \theta^3}{\bar{\Gamma}^3(\rho_K)} \int_0^{\bar{\Gamma}(\rho_K)} \tau(\bar{\gamma}) \bar{\gamma}^2 \, d\bar{\gamma}.$$

Ponieważ wzór (2.4)₃ jako warunek równowagi jest spełniony dla każdego promienia ρ pręta, zatem i związek (2.7) jest spełniony dla dowolnego ρ pręta, czyli ostatecznie

$$(2.8) \quad M = \frac{2\pi\rho^3 \theta^3}{\bar{\Gamma}^3(\rho)} \int_0^{\bar{\Gamma}(\rho)} \tau(\bar{\gamma}) \bar{\gamma}^2 \, d\bar{\gamma}.$$

Ze związku (2.8) dla danej funkcji $\tau(\bar{\gamma})$ można wyznaczyć funkcję $\bar{\Gamma}(\rho)$, czyli rozkład odkształcenia na poboczniczy skręconego stożkowego pręta. Ponadto znając $\bar{\Gamma}(\rho)$ ze wzoru

$$(2.9) \quad \bar{\gamma} = \bar{\Gamma} \frac{\vartheta}{\theta},$$

wynikającego z podzielenia zależności (2.4)₁ przez (2.6), uzyskać można rozkład odkształcenia w skręconym stożkowym pręcie $\bar{\gamma}(\rho, \vartheta)$; z ostatniego zaś i z funkcji $\tau(\bar{\gamma})$ — rozkład naprężenia $\tau(\rho, \vartheta)$ w tym pręcie.

Dla przykładu wyznaczmy funkcję $\Gamma(\rho)$ dla materiału idealnie sprężystego. Podstawiając do (2.8) $\tau = G\gamma$, mamy

$$M = \frac{2\pi\rho^3 \theta^3}{\Gamma^3} \int_0^{\Gamma} G\gamma^3 d\gamma,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$(2.10) \quad \Gamma = \frac{2M}{\pi G \rho^3 \theta^3}.$$

Natomiast dla pręta wykazującego potęgową krzywą $\tau(\bar{\gamma})$, tj. krzywą $\tau = K\bar{\gamma}^n$, gdzie K i n są stałymi, z zależności (2.8) otrzymujemy funkcję $\bar{\Gamma}(\rho)$ o postaci

$$(2.11) \quad \bar{\Gamma} = \left[\frac{M(n+3)}{2\pi K \theta^3} \right]^{1/n} \rho^{-3/n}.$$

Można wykazać, że wyniki uzyskane w teorii sprężystości dla skręconego stożkowego pręta (podane np. przez HUBERA [6]) w przypadku małego kąta θ prowadzą do wzoru (2.10). Można również wykazać, że wyniki uzyskane przez SOKOŁOWSKIEGO [7] na gruncie deformacyjnej teorii plastyczności dla skręconego stożkowego pręta o potęgowej zależności między intensywnościami naprężenia i odkształcenia, w przypadku gdy kąt θ jest mały, prowadzą do wzoru (2.11), w którym $\bar{\Gamma}$ zastąpiono przez Γ .

Z równania (2.8) wyznaczmy teraz τ . W tym celu wzór (2.8) mnożymy stronami przez $\bar{\Gamma}^3(\rho)/2\pi\rho^3\theta^3$ i otrzymaną równość różniczkujemy stronami względem ρ , pamiętając, że $M = \text{const}$. Uzyskujemy związek

$$\frac{M}{2\pi\theta^3} \left[\frac{3\bar{\Gamma}^2(\rho) \bar{\Gamma}'_\rho(\rho) \rho^3 - 3\rho^2 \bar{\Gamma}^3(\rho)}{\rho^6} \right] = \tau[\bar{\Gamma}(\rho)] \bar{\Gamma}^2(\rho) \bar{\Gamma}'_\rho(\rho),$$

które po uproszczeniach przyjmuje postać

$$(2.12) \quad \tau[\bar{\Gamma}(\rho)] = \frac{3M}{2\pi\rho^3\theta^3} \left[1 - \frac{\bar{\Gamma}(\rho)}{\bar{\Gamma}'_\rho(\rho)\rho} \right].$$

W równaniu tym $\tau[\bar{\Gamma}(\rho)]$ jest naprężeniem w przypowierzchniowej warstwie stożkowego pręta w punkcie ρ ; dalej naprężenie to oznaczajmy przez $T(\rho)$.

Jeżeli dla skręconego stożkowego pręta znany jest moment skręcający M oraz odpowiadający mu rozkład odkształcenia ścinającego na pobocznicy $\bar{\Gamma}(\rho)$, to po wyznaczeniu rozkładu pochodnej $\bar{\Gamma}'_\rho(\rho)$ z zależności (2.12) można otrzymać rozkład naprężenia $T(\rho)$. Z niego zaś i z $\bar{\Gamma}(\rho)$ funkcję $T(\bar{\Gamma})$, identyczną z funkcją $\tau(\bar{\gamma})$.

Łatwo stwierdzić, że funkcje (2.10) i (2.11) spełniają równość (2.12). Na przykład dla funkcji (2.10) lewa strona zależności (2.12) ma postać $T(\rho) = G\Gamma(\rho) = 2M/\pi\rho^3\theta^3$. Podstawiając do prawej strony równości (2.12) funkcję (2.10) i jej pochodną $\Gamma'_\rho = -6M\rho^{-4}/\pi G\theta^3$ stwierdzamy, że strona ta jest identyczna z lewą.

W podanych rozważaniach nie uwzględniono różniczkowego warunku równowagi. Z tego powodu wzory (2.8), (2.9) i (2.12) na ogół będą prowadzić do wyników przybliżonych. W szczególnym jednak przypadku, mianowicie dla potęgowej krzywej $\tau(\bar{\gamma})$, przy tych założeniach, które doprowadziły do wzorów (2.8), (2.9) i (2.12), różniczkowy warunek równowagi jest spełniony (por. Uzupełnienie A). Zatem dla materiałów o potęgowej krzywej $\tau(\bar{\gamma})$ wzory (2.8), (2.9) i (2.12) będą prowadzić do wyników ścisłych.

Znaczenie przytoczonych rozważań polega na tym, że dla skreconych smukłych stożkowych prętów pozwalają wyznaczyć rozkłady naprężenia i odkształcenia ścisłe — dla funkcji $\tau = K \operatorname{tg}^n \gamma$ i przybliżone dla innych funkcji $\tau(\bar{\gamma})$. Ponadto wyjaśniają, w jaki sposób odkształcają się pręty z materiałów scharakteryzowanych związkami $\tau = G\gamma$ i $\tau = K\bar{\gamma}^n$. Najważniejszym jednak rezultatem jest wzór (2.12), który dla $\bar{\Gamma} = \operatorname{tg} \Gamma$, a więc w postaci

$$(2.13) \quad T = \frac{3M}{2\pi\rho^3\theta^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma}{(\operatorname{tg} \Gamma'_\rho \rho)} \right],$$

stanowi podstawę nowej metody wyznaczania krzywej $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$, wykorzystującej skrećanie smukłego stożkowego pręta. Do wyznaczenia krzywej $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ przy pomocy wzoru (2.13) wystarczy znajomość momentu skrećającego pręt stożkowy M oraz odpowiadający temu momentowi rozkład całkowitego kąta ścinania na pobocznicy pręta $\Gamma(\rho)$. Metoda ta prowadzi będzie do praktycznie ścisłych wyników tylko dla materiałów o krzywej $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ zbliżonej do potęgowej.

Występowanie krzywej $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ zbliżonej do krzywej $\tau = K \operatorname{tg}^n \gamma$ stwierdził KLEPACZKO [8] dla aluminium i MARCINIAK [2] dla miedzi. Ponadto istnieją podstawy do przypuszczania, że krzywą taką wykazują również inne metale (por. Uzupełnienie B). Zatem zastosowanie metody skrećania stożkowego pręta, przynajmniej do niektórych metali, wydaje się możliwe.

Powstaje pytanie, w jaki sposób można poznać, czy dany metal, który zamierzamy badać podaną metodą, charakteryzuje się zależnością $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$, zbliżoną do potęgowej. Otóż dla skreconego stożkowego pręta z materiału charakteryzującego się krzywą $\tau = K \operatorname{tg}^n \gamma$ [zgodnie ze związkiem (2.11)] rozkład odkształcenia na pobocznicy $\operatorname{tg} \Gamma(\rho)$ przedstawiony we współrzędnych $\ln \rho$, $\ln \operatorname{tg} \Gamma$ jest linią prostą. Jeżeli więc krzywa $\ln \operatorname{tg} \Gamma = f(\ln \rho)$, uzyskana z pomiarów skreconego metalowego pręta, będzie niewiele odbiegać od linii prostej, będzie to świadczyć o tym, że materiał pręta wykazuje krzywą $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ zbliżoną do potęgowej. Pozwoli to oczekiwać, że posłużenie się dla takiego materiału zależnością (2.13) da wyniki zgodne z rzeczywistością.

W przypadku idealnym, w którym doświadczalna linia $\ln \operatorname{tg} \Gamma = f(\ln \rho)$ byłaby prostą (rys. 4), krzywą $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ można by wyznaczyć na podstawie znajomości

współczynników c i $b = |\operatorname{tg} \beta|$ tej prostej oraz momentu skręcającego pręt M . Istotnie, z rys. 4 wynika $\ln \operatorname{tg} \Gamma = c - b \ln \rho$, skąd

$$(2.14) \quad \operatorname{tg} \Gamma = C \rho^{-b},$$

gdzie stała $C = e^c$. Podstawiając funkcję (2.14) i jej pochodną $(\operatorname{tg} \Gamma)'_{\rho}$ do formuły (2.13) otrzymujemy

$$(2.15) \quad T = \frac{3M(b+1)}{2\pi\theta^3 b} \rho^{-3}.$$

Natomiast z podstawienia do (2.15) zmiennej ρ , wyznaczonej z funkcji (2.14), otrzymujemy związek $T(\operatorname{tg} \Gamma)$ w postaci

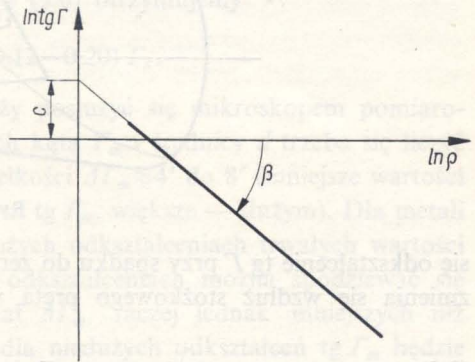
$$T = \frac{3M(b+1) C^{-3/b}}{2\pi\theta^3 b} \operatorname{tg}^{3/b} \Gamma.$$

Funkcja $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ jest identyczna z $T(\operatorname{tg} \Gamma)$, ma zatem postać

$$(2.16) \quad \tau = \frac{3M(b+1) C^{-3/b}}{2\pi\theta^3 b} \operatorname{tg}^{3/b} \gamma.$$

Omawiana metoda wykazuje pewne podobieństwo z metodą skręcania tarczy. W obydwu bowiem do wyznaczenia

krzywej $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$ wystarczy znajomość rozkładu kąta ścinającego odkształcenia (wzdłuż pobocznic pręta lub wzdłuż promienia tarczy) oraz końcowy moment skręcający przy obciążeniu.



Rys. 4

3. MOŻLIWOŚĆ ZASTOSOWANIA METODY SKRĘCANIA STOŻKOWEGO PRĘTA

Ponieważ pomiar promienia wodzącego ρ danego punktu na powierzchni stożkowego pręta jest trudniejszy niż pomiar średnicy d w tym punkcie, dla wygody w zależności (2.13) zamieniamy zmienną ρ przez zmienną d . Odkształcenie całkowite $\operatorname{tg} \Gamma$ będzie teraz funkcją d . Z oczywistego związku $d = 2\rho \sin \theta$ (kąt θ jest mały) otrzymujemy $d = 2\rho\theta$. Mamy także

$$(\operatorname{tg} \Gamma)'_{\rho} \rho = (\operatorname{tg} \Gamma)'_d d'_{\rho} \rho = (\operatorname{tg} \Gamma)'_d 2\theta \rho = (\operatorname{tg} \Gamma)'_d d,$$

zatem

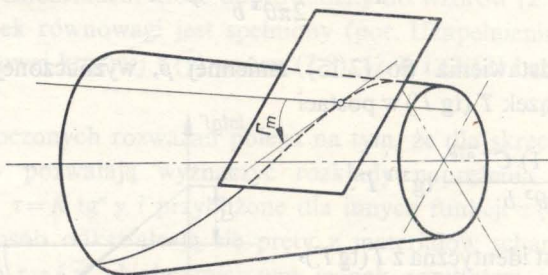
$$(3.1) \quad T = \frac{12M}{\pi d^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma}{(\operatorname{tg} \Gamma)'_d d} \right].$$

Przyjmijmy, że na pobocznic stożkowego pręta przed skręceniem naniesiona została prostoliniowa tworząca. W wyniku plastycznego skręcenia pręta i następującego po nim odciążenia (ściślej — zmniejszenia momentu skręcającego do wartości

równej zeru) tworząca zamienia się w pewną przestrzenną spiralną linię. Kąt stycznej do tej linii Γ_m (rys. 5) jest kątem trwałego ścinającego odkształcenia na pobocznicy. Kąt Γ_m jest związany z kątem całkowitego ścinającego odkształcenia przez równanie

$$(3.2) \quad \operatorname{tg} \Gamma = \operatorname{tg} \Gamma_m + \Gamma_s,$$

spełnione dla każdej wartości d stożkowego pręta. Odkształcenie Γ_s jest odkształceniem sprężystym na powierzchni bocznej stożkowego pręta, o które zmniejszyło



Ryf. 5

się odkształcenie $\operatorname{tg} \Gamma$ przy spadku do zera momentu skręcającego. Odkształcenie Γ_s zmienia się wzdłuż stożkowego pręta wg zależności

$$(3.3) \quad \Gamma_s = \frac{16M}{\pi G d^3},$$

którą uzyskuje się ze wzorów (2.10) oraz $d = 2\rho\theta$.

Przy pomocy wzorów (3.2) i (3.3) oraz (3.1) uzyskujemy formułę

$$(3.4) \quad T = \frac{12M}{\pi d^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma_m + \Gamma_s}{(\operatorname{tg} \Gamma_m)'_d d - 3\Gamma_s} \right].$$

Znając rozkład kąta Γ_m na pobocznicy skręconego stożkowego pręta, czyli funkcję $\Gamma_m(d)$ oraz końcowy moment skręcający przy obciążeniu M z zależności (3.4) i (3.3) wyznaczyć można krzywą $T(d)$, a z niej oraz z funkcji $\operatorname{tg} \Gamma(d) = \operatorname{tg} \Gamma_m(d) + 16M/\pi G d^3$ linię $T(\operatorname{tg} \Gamma)$. Ta ostatnia linia jest identyczna z krzywą: naprężenie styczne-całkowite ścinające odkształcenie $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$. Gdyby ponadto wykorzystać zależność

$$(3.5) \quad \operatorname{tg} \Gamma_{p1} = \operatorname{tg} \Gamma - \frac{T}{G},$$

gdzie $\operatorname{tg} \Gamma_{p1}$ jest plastycznym ścinającym odkształceniem na pobocznicy pręta, można by jeszcze uzyskać krzywą $T(\operatorname{tg} \Gamma_{p1})$ identyczną z krzywą: naprężenie styczne-plastyczne ścinające odkształcenie $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{p1})$, czyli krzywą umocnienia przy ścinaniu.

Przyjęcie za podstawowy rozkład funkcji $\Gamma_m(d)$ zamiast $\Gamma(d)$ jest uzasadnione tym, że rozkład $\Gamma_m(d)$ łatwiej można uzyskać z pomiarów skręconego stożkowego pręta.

Związek (3.5) po uwzględnieniu (3.2) przyjmuje postać

$$(3.6) \quad \operatorname{tg} \Gamma_{\text{pl}} = \operatorname{tg} \Gamma_m + \Gamma_s - \frac{T}{G}.$$

Spróbujemy teraz ocenić wielkość różnicy odkształceń $\operatorname{tg} \Gamma_{\text{pl}} - \operatorname{tg} \Gamma_m$. Ze wzoru (2.11) wynika $M = 2\pi\theta^3 \rho^3 K \bar{\Gamma}^n / n + 3$, skąd po podstawieniu $\bar{\Gamma} = \operatorname{tg} \Gamma$, $T = K \operatorname{tg}^n \Gamma$ i $d = 2\rho\theta$ otrzymujemy $M = \pi d^3 T / 4 (n+3)$. Porównując ten wzór ze wzorem $M = \pi d^3 G \Gamma_s / 16$ wynikającym z (3.3) otrzymujemy $\Gamma_s = 4T / (n+3) G$. Dla metali wyżarzonych wykładnik umocnienia n , wyznaczany przy rozciąganiu, zawiera się w przedziale (0,2, 0,5). Takich samych wartości n oczekiwać można przy ścinaniu. Zatem $\Gamma_s = (1,14 - 1,25) T/G$ i ostatecznie z (3.6) otrzymujemy

$$(3.7) \quad \operatorname{tg} \Gamma_{\text{pl}} - \operatorname{tg} \Gamma_m = (0,12 - 0,20) \Gamma_s.$$

Dla wyznaczenia rozkładu $\Gamma_m(d)$ należy posłużyć się mikroskopem pomiarowym. Przy tym przy dokładnych pomiarach kąta Γ_m i średnicy d trzeba się liczyć z błędem wyznaczania krzywej $\Gamma_m(d)$ o wielkości $\Delta \Gamma_m \approx 4'$ do $8'$ (mniejsze wartości odpowiadają małym odkształceniom trwałym $\operatorname{tg} \Gamma_m$, większe — dużym). Dla metali w warunkach normalnych przy niezbyt dużych odkształceniach trwałych wartości Γ_s będą mniejsze niż $\Delta \Gamma_m$. Przy dużych odkształceniach można spodziewać się wartości Γ_s wykraczających poza przedział $\Delta \Gamma_m$, raczej jednak mniejszych niż $2\Delta \Gamma_m$. Zatem błąd $\Delta \operatorname{tg} \Gamma_m = \Delta \Gamma_m / \cos^2 \Gamma_m$ dla niedużych odkształceń $\operatorname{tg} \Gamma_m$ będzie większy od Γ_s , a przy większych odkształceniach — niezbyt wiele mniejszy od Γ_s . Z drugiej strony wielkość $3\Gamma_s$ będzie znacznie mniejsza od błędu iloczynu $(\operatorname{tg} \Gamma_m)'_d d$. Jest zatem celowe pominięcie Γ_s we wzorze (3.4) i przyjęcie zależności uproszczonej

$$(3.8) \quad T = \frac{12M}{\pi d^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma_m}{(\operatorname{tg} \Gamma_m)'_d d} \right].$$

Dalszą konsekwencją istnienia błędu $\Delta \Gamma_m$ oraz oszacowania (3.7) jest możliwość przyjęcia, że $\operatorname{tg} \Gamma_{\text{pl}} = \operatorname{tg} \Gamma_m$. Zatem jeżeli dla skrzyżowanego stożkowego pręta znany jest rozkład $\Gamma_m(d)$ i moment M , to przy pomocy wzoru (3.8) można wyznaczyć krzywą $T(d)$, a na jej podstawie i z funkcji $\Gamma_m(d)$ — krzywą $T(\operatorname{tg} \Gamma_m)$ pokrywającą się z krzywą umocnienia $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{\text{pl}})$. Gdyby ponadto wykorzystać wzór (3.2), można by otrzymać krzywą $T(\operatorname{tg} \Gamma)$ identyczną z krzywą $\tau(\operatorname{tg} \gamma)$.

Przyjmując oznaczenie

$$(3.9) \quad \underline{T} = \frac{\pi T}{12M}$$

ze wzoru (3.8) otrzymujemy wzór

$$(3.10) \quad \underline{T} = \frac{1}{d^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma_m}{(\operatorname{tg} \Gamma_m)'_d d} \right].$$

Znając ze skrzyżowanego stożkowego pręta tylko rozkład $\Gamma_m(d)$, przy pomocy wzoru (3.10) można wyznaczyć krzywą $\underline{T}(\operatorname{tg} \Gamma_m)$, pokrywającą się z krzywą

$\pi \tau (\text{tg } \gamma_{p1}) / 12M$. Ta ostatnia krzywa, którą dalej oznaczać będziemy przez $\underline{\tau} (\text{tg } \gamma_{p1})$ jest geometrycznie podobną do krzywej umocnienia. Gdyby bowiem każdą rzędną linii $\underline{\tau} (\text{tg } \gamma_{p1})$ pomnożyć przez stały współczynnik $12M/\pi$, to uzyskana nowa krzywa pokryłaby się z krzywą $\tau (\text{tg } \gamma_{p1})$. Znajomość krzywej $\underline{\tau} (\text{tg } \gamma_{p1})$ uważamy za równoznaczną ze znajomością kształtu krzywej umocnienia.

Jak wiadomo (np. Mc Gregor TEGART [9]) za miarę umocnienia przy rozciąganiu oprócz $d\sigma/d\varepsilon_{p1}$ używa się wyrażenia

$$n = \frac{d \ln \sigma}{d \ln \varepsilon_{p1}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_{p1}} \frac{\varepsilon_{p1}}{\sigma},$$

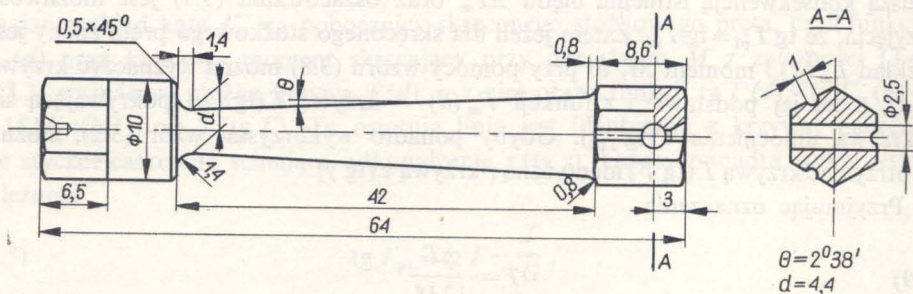
gdzie σ jest rzeczywistym naprężeniem rozciągającym, a ε_{p1} — plastycznym odkształceniem osiowym, wyrażonym w mierze logarytmicznej. Przy ścinaniu analogiczną miarą umocnienia będzie wyrażenie

$$n = \frac{d \ln \tau}{d \ln \text{tg } \gamma_{p1}}.$$

Wobec istnienia związku $\underline{\tau} = \pi\tau/12M$ zachodzi $d \ln \underline{\tau} / d \ln \text{tg } \gamma_{p1} = d \ln \tau / d \ln \text{tg } \gamma_{p1}$. A więc na podstawie funkcji $\underline{\tau} (\text{tg } \gamma_{p1})$ można uzyskać wykres zależności miary umocnienia n od odkształcenia plastycznego $\text{tg } \gamma_{p1}$.

Zatem jeżeli dla skręconego stożkowego pręta znany jest tylko rozkład kąta trwałego ścinającego odkształcenia na poboczniccy (czyli funkcja $\Gamma_m(d)$), to przy pomocy wzoru (3.10) oprócz krzywej $\underline{\tau} (\text{tg } \gamma_{p1})$ uzyskać można dane o wielkości umocnienia materiału pręta.

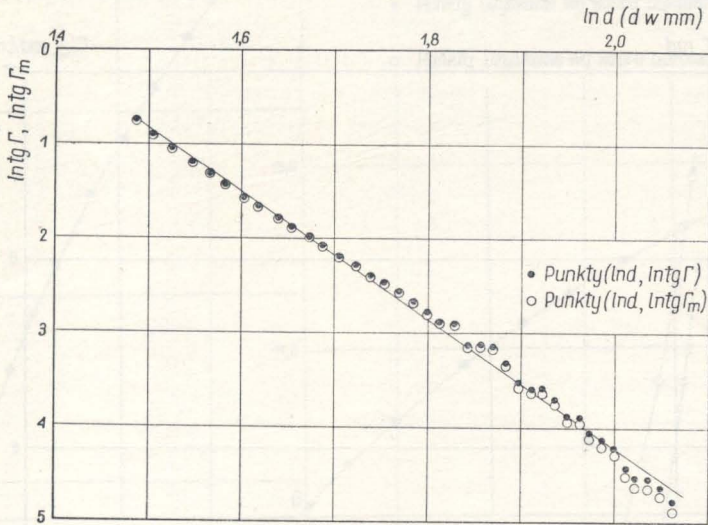
Wyprowadzone zależności były wykorzystane praktycznie. I tak z ciągniętego pręta z miedzi M1(Cu99,9) wykonano m.in. stożkową próbkę, której wygląd przedstawia rys. 6. Próbkę, po wyżarzeniu w czasie 45 minut w temperaturze 560°C skręcono z pomiarem momentu na specjalnej skręcarce zbudowanej w IPPT. Przed



Rys. 6

skręceniem na poboczniccy próbki naniesiono dwie przeciwległe rysy wzdłużne oraz 40 przecinających je co 1 mm poprzecznych rysek. W wyniku skręcania rysy wzdłużne zamieniły się w odcinki przestrzennych spiral. Po wyjęciu próbki ze skręcarci z pomiarów na mikroskopie średnicy i kąta stycznej do każdej ze spiral w punktach przecięcia rys uzyskano pary liczb d, Γ_m . Za pomocą wzorów (3.2) otrzymano także

pary liczb d, Γ . Na rys. 7 przedstawione są punkty $(\ln d, \ln \operatorname{tg} \Gamma_m)$ i $(\ln d, \ln \operatorname{tg} \Gamma)$, uzyskane z par d, Γ_m i d, Γ . Jak widać, sposób układania się tych punktów jest zbliżony do linii prostej. Pozwala to oczekiwać, że stosując wzory (3.4), (3.8) i (3.10),



Rys. 7

wynikające z zależności (2.13), można będzie uzyskać wyniki ściśle. Krzywą $\Gamma_m(d)$ uzyskano, prowadząc przez punkty (d, Γ_m) linię w możliwie wysokim stopniu gładką. Po stabelaryzowaniu tej linii wyznaczono krzywą pochodną $\Gamma'_{md}(d)$ jako linię gładką łączącą punkty $(d, \Delta\Gamma_m/\Delta d)$ uzyskane z obliczeń. Wspomniane punkty, kilka punktów (d, Γ) oraz funkcje $\Gamma_m(d)$ i $\Gamma'_{md}(d)$ pokazane są na rys. 8. Natomiast na rys. 9 przedstawione są punkty $(\operatorname{tg} \Gamma_{p1}, \tau)$ uzyskane z wykresów $\Gamma_m(d)$ i $\Gamma'_{md}(d)$ za pomocą zależności uproszczonej (3.10) i dokładnej

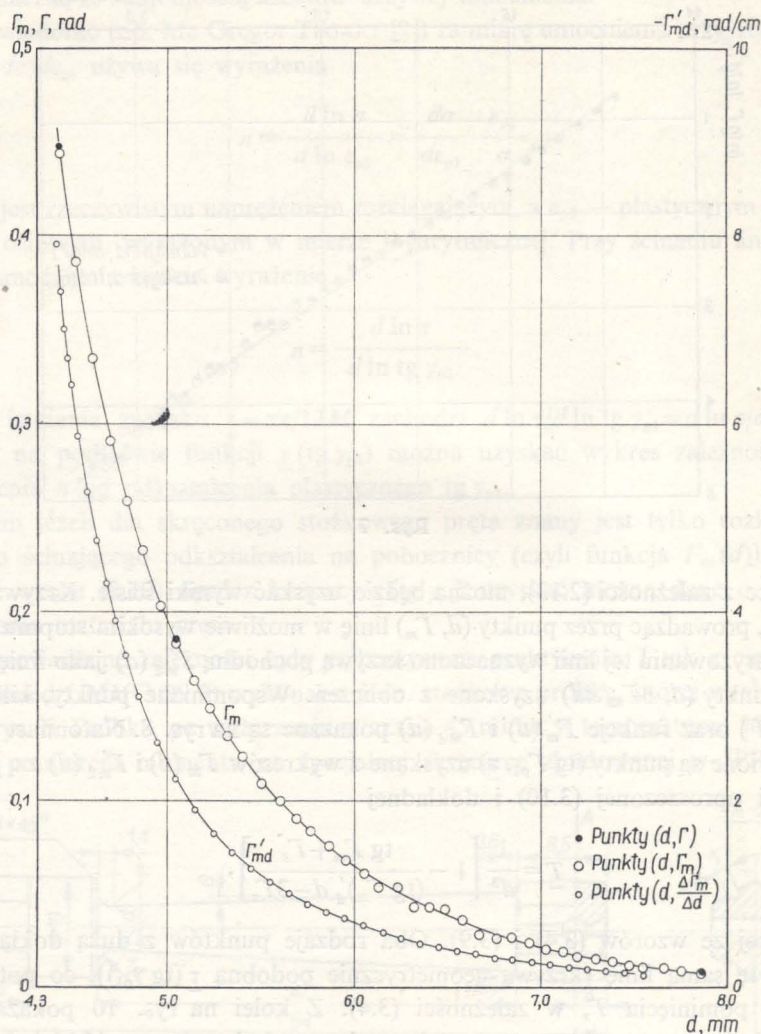
$$(3.11) \quad \tau = \frac{1}{d^3} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \Gamma_m + \Gamma_s}{(\operatorname{tg} \Gamma_m)'_d d - 3\Gamma_s} \right],$$

wynikającej ze wzorów (3.4) i (3.9). Oba rodzaje punktów z dużą dokładnością określają tę samą linię (krzywą geometrycznie podobną $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{p1})$), co potwierdza słuszność pominięcia Γ_s w zależności (3.4). Z kolei na rys. 10 pokazana jest krzywa, którą otrzymano przez połączenie punktów $(\operatorname{tg} \gamma_{p1}, 12M\tau/\pi)$ — czyli krzywa umocnienia $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{p1})$ materiału próbki. Wygląd i położenie tej krzywej wydają się możliwymi do przyjęcia dla miedzi.

Z uwagi na występowanie pochodnej we wzorach (3.4), (3.8) i (3.10) uzyskanie dobrych wyników za pomocą skręcania stożkowego pręta wymaga dokładnie wyznaczonej krzywej $\Gamma_m(d)$ ⁽²⁾. Pociąga to za sobą konieczność dokonywania dużej ilości dokładnych pomiarów kąta Γ_m i średnicy d . Ponadto samo wyznaczenie krzywych

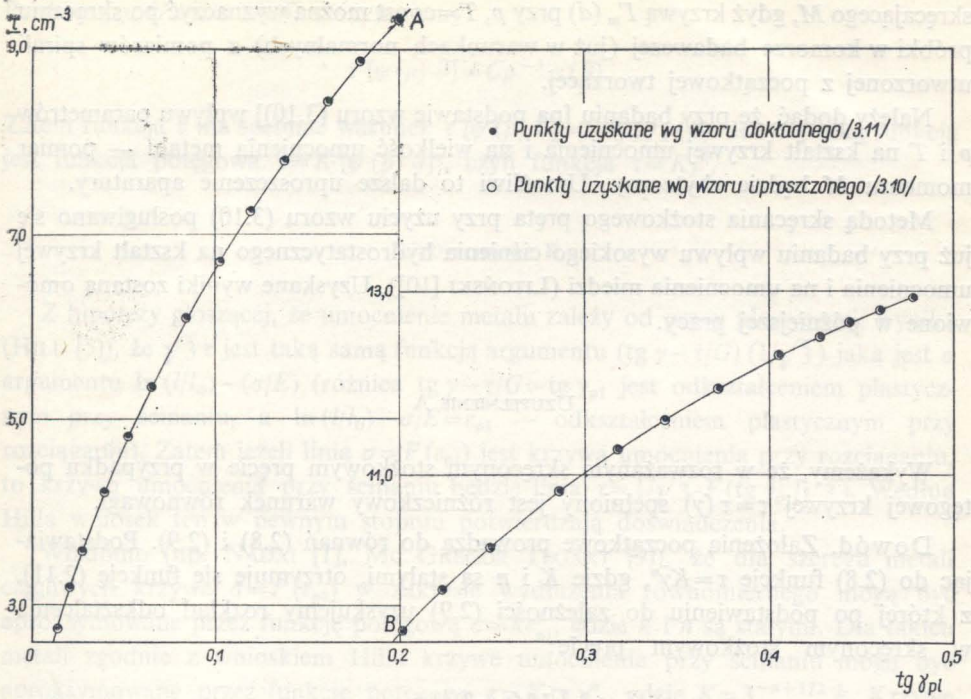
⁽²⁾ Aby uniknąć znacznych błędów pochodnej, krzywą różniczkowaną należy wyznaczać z małym błędem.

$\tau(\operatorname{tg} \gamma)$, $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{p1})$ lub $\tau(\operatorname{tg} \gamma_{p1})$ wymaga sporo obliczeń. Z tych powodów posługiwanie się metodą skręcania stożkowych prętów w badaniach prowadzonych w normalnych warunkach jest niezbyt celowe. Natomiast wydaje się, że metoda ta oparta na wzorze ścisłym (3.4) lub na wzorach przybliżonych (3.8) i (3.10) (ostatnich

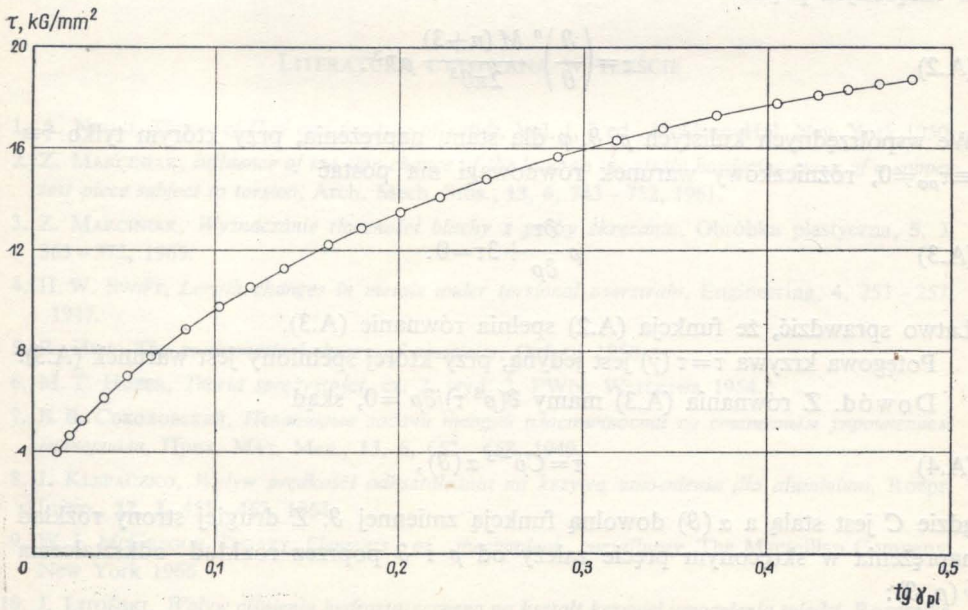


Rys. 8

można użyć, gdy odkształcenie sprężyste Γ_s nie jest wiele większe od $\Delta \operatorname{tg} \Gamma_m$) może być przydatna przy badaniu wpływu obniżonego lub wysokiego ciśnienia $p = \text{const}$, obniżonej lub podwyższonej temperatury $T = \text{const}$, ewentualnie obu tych parametrów łącznie — na krzywą naprężenie-odkształcenie oraz na umocnienie metalu przy ścinaniu. W tych bowiem badaniach metoda skręcania stożkowego pręta pozwoli na znaczne uproszczenie aparatury. Istotnie, we wspomnianych zastosowaniach potrzebny będzie pomiar w komórce badawczej tylko jednej wielkości — momentu



Rys. 9



Rys. 10
 [497]

skracającego M , gdyż krzywą $\Gamma_m(d)$ przy $p, T = \text{const}$ można wyznaczyć po skróceniu próbki w komorze badawczej (już w warunkach normalnych) z pomiarów spirali utworzonej z początkowej tworzącej.

Należy dodać, że przy badaniu [na podstawie wzoru (3.10)] wpływu parametrów p i T na kształt krzywej umocnienia i na wielkość umocnienia metalu — pomiar momentu M będzie zbyteczny. Umożliwi to dalsze uproszczenie aparatury.

Metodą skracania stożkowego pręta przy użyciu wzoru (3.10) posługiwano się już przy badaniu wpływu wysokiego ciśnienia hydrostatycznego na kształt krzywej umocnienia i na umocnienia miedzi (LITOŃSKI [10]). Uzyskane wyniki zostaną omówione w późniejszej pracy.

UZUPEŁNIENIE A

Wykażemy, że w rozważanym skróconym stożkowym pręcie w przypadku potęgowej krzywej $\tau = \tau(\bar{\gamma})$ spełniony jest różniczkowy warunek równowagi.

Dowód. Założenia początkowe prowadzą do równań (2.8) i (2.9). Podstawiając do (2.8) funkcję $\tau = K\bar{\gamma}^n$, gdzie K i n są stałymi, otrzymuje się funkcję (2.11), z której po podstawieniu do zależności (2.9) uzyskujemy rozkład odkształcenia w skróconym stożkowym pręcie:

$$(A.1) \quad \bar{\gamma} = \frac{\vartheta}{\theta} \left[\frac{M(n+3)}{2\pi K \theta^3} \right]^{1/n} \rho^{-3/n}.$$

Podstawiając funkcję (A.1) do związku $\tau = K\bar{\gamma}^n$ otrzymujemy rozkład naprężenia w skróconym pręcie:

$$(A.2) \quad \tau = \left(\frac{\vartheta}{\theta} \right)^n \frac{M(n+3)}{2\pi \theta^3} \rho^{-3}.$$

We współrzędnych kulistych ρ, ϑ, φ dla stanu naprężenia, przy którym tylko $\tau \equiv \tau_{\rho\varphi} \neq 0$, różniczkowy warunek równowagi ma postać

$$(A.3) \quad \rho \frac{\partial \tau}{\partial \rho} + 3\tau = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja (A.2) spełnia równanie (A.3).

Potęgową krzywą $\tau = \tau(\bar{\gamma})$ jest jedyną, przy której spełniony jest warunek (A.3).

Dowód. Z równania (A.3) mamy $\partial(\rho^3 \tau)/\partial \rho = 0$, skąd

$$(A.4) \quad \tau = C\rho^{-3} \alpha(\vartheta),$$

gdzie C jest stałą a $\alpha(\vartheta)$ dowolną funkcją zmiennej ϑ . Z drugiej strony rozkład naprężenia w skróconym pręcie zależy od ρ i ϑ poprzez rozkład odkształcenia $\bar{\gamma}(\rho, \vartheta)$:

$$(A.5) \quad \tau[\bar{\gamma}(\rho, \vartheta)] = \tau[\psi(\rho) \vartheta] = f(\rho, \vartheta).$$

Porównując (A.5) z (A.4) otrzymujemy

$$\tau [\psi(\rho) \vartheta] = C\rho^{-3} \alpha(\vartheta).$$

Zatem funkcja τ ma spełniać warunek $\tau [\psi(\rho) \vartheta] = f_1(\rho) f_2(\vartheta)$. Jedyłą taką funkcją jest funkcja potęgowa $\tau = K [\psi(\rho) \vartheta]^n$, czyli funkcja $\tau = K\gamma^n$.

UZUPEŁNIENIE B

Z hipotezy głoszącej, że umocnienie metalu zależy od pracy plastycznej, wynika (HILL [5]), że $\sqrt{3}\tau$ jest taką samą funkcją argumentu $(\operatorname{tg} \gamma - \tau/G) (1/\sqrt{3})$ jaką jest σ argumentu $\ln(l/l_0) - (\sigma/E)$ (różnica $\operatorname{tg} \gamma - \tau/G = \operatorname{tg} \gamma_{p1}$ jest odkształceniem plastycznym przy ścinaniu, a $\ln(l/l_0) - \sigma/E = \varepsilon_{p1}$ — odkształceniem plastycznym przy rozciąganiu). Zatem jeżeli linia $\sigma = F(\varepsilon_{p1})$ jest krzywą umocnienia przy rozciąganiu, to krzywą umocnienia przy ścinaniu będzie linia $\tau = 1/\sqrt{3} F(\operatorname{tg} \gamma_{p1}/\sqrt{3})$. Według Hilla wnioski ten w pewnym stopniu potwierdzają doświadczenia.

Wiadomo (np. NÁDAI [1], Mc GREGOR TEGART [9]), że dla szeregu metali ciągliwych krzywe $\sigma = F(\varepsilon_{p1})$ w zakresie wydłużenia równomiernego mogą być aproksymowane przez funkcję potęgową $\sigma = k\varepsilon_{p1}^n$, gdzie k i n są stałymi. Dla takich metali zgodnie z wnioskiem Hilla krzywe umocnienia przy ścinaniu mogą być aproksymowane przez funkcję potęgową $\tau = K \operatorname{tg} \gamma_{p1}^n$, gdzie $K = 3^{-n+1/2} k$. Krzywe $\tau = \tau(\operatorname{tg} \gamma)$ tych metali, określone równaniem $\operatorname{tg} \gamma = \tau/G + (\tau/K)^{1/n}$ są również zbliżone do krzywej $\tau = K \operatorname{tg} \gamma_{p1}^n$, bowiem z wyjątkiem zakresu najniższych naprężeń odkształcenie sprężyste τ/G jest bardzo małe w porównaniu z odkształceniem plastycznym $(\tau/K)^{1/n}$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. NADAI, *Theory of flow and fracture of solids*, Vol. I, 2 ed., McGraw-Hill, New York 1950.
2. Z. MARCINIAK, *Influence of the sign change of the load on the strain hardening curve of a copper test piece subject to torsion*, Arch. Mech. Stos., **13**, 6, 743 – 752, 1961.
3. Z. MARCINIAK, *Wyznaczanie tłochności blachy z próby skręcania*, Obróbka plastyczna, **5**, 3, 363 – 372, 1965.
4. H. W. SWIFT, *Length changes in metals under torsional overstrain*, Engineering, **4**, 253 – 257, 1947.
5. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
6. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, cz. 2, wyd. 2, PWN, Warszawa 1954.
7. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Некоторые задачи теорий пластичности со степенным упрочнением материала*, Прик. Мат. Мех., **13**, 6, 657 – 658, 1949.
8. J. KLEPACZKO, *Wpływ prędkości odkształcania na krzywą umocnienia dla aluminium*, Rozpr. Inżyn., **12**, 3, 455 – 467, 1964.
9. W. J. MCGREGOR TEGART, *Elements of mechanical metallurgy*, The Macmillan Company, New York 1966.
10. J. LITOŃSKI, *Wpływ ciśnienia hydrostatycznego na kształt krzywej umocnienia miedzi*, Rozprawa Doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1970.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВОЙ
НАПРЯЖЕНИЕ — ДЕФОРМАЦИЯ, ПРИ СДВИГЕ

Выводится зависимость (формула (2.13)), дающая возможность определить кривую напряжение — деформация, при простом сдвиге, когда известны распределение угла полного сдвига на боковой поверхности пластически скрученного, конусообразного стержня и конечный скручивающий момент, при нагружении. Эта зависимость приводит к практически точным результатам, для материалов кривая которых $\tau = \tau(\text{tg } \gamma)$ близка к степенной. Для других материалов результаты получаются приближенными. Показаны некоторые возможные применения метода кручения конусообразного стержня, основанные на модификациях формулы (2.13).

SUMMARY

NEW METHOD OF DETERMINING OF THE STRESS—STRAIN CURVE FOR SHEAR

A simple formula (Eq. 2.13), is derived which enables determination of the stress — strain curve for simple shear from the known distribution of the angle of the total shear on the lateral surface of the plastically twisted conical bar and measured final torque. This formula gives good results for materials whose $\tau(\text{tg } \gamma)$ diagram can be well fitted by a power type curve. For other materials the method gives approximate results. Certain possible applications of the above mentioned formula and its modifications are indicated.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1971 r.