

ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ LAGRANGE'A DRUGIEGO RODZAJU W ZAGADNIENIU DYNAMICZNYM BELKI TIMOSHENKI POD RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM INERCYJNYM

WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

Przedmiotem rozważań w rozprawie jest zastosowanie równań Lagrange'a drugiego rodzaju do wyprowadzenia równań ruchu belki Timoshenki pod wpływem ruchomego skupionego obciążenia inercyjnego. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju zastosowano zarówno do modelu ciągłego belki swobodnie podpartej, jak również do modelu dyskretnego belki o dowolnych warunkach brzegowych. Wyprowadzone przekształcone równanie ruchu modelu ciągłego jest czwartego rzędu ze względu na zmienną czasową i przestrzenną o zmiennych współczynnikach przy wszystkich pochodnych. Podano również warianty tego równania. Analizę modelu dyskretnego ograniczono do dwóch wariantów metody aproksymacyjnej.

1. WSTĘP

Koncepcja wprowadzenia współrzędnych uogólnionych do zagadnienia dynamiki belki pod wpływem ruchomej siły skupionej i obciążenia ciągłego bezmasowego i równomiernie rozłożonego nie należy, jak się powszechnie sądzi, do TIMOSHENKI [2]. Już w roku 1899 RADAKOWIC w zapomnianej pracy [1] wyprowadził prawidłowo równanie ruchu belki Eulera we współrzędnej uogólnionej, stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Historia problemu omówiona jest szczegółowo przez PANOWKĘ w pracy przeglądowej [3]. Następnie wielu autorów w różnych pracach rozszerza tę ideę do przypadku ruchomego obciążenia masowego. Należy w tym miejscu przede wszystkim wymienić obszerne rozprawy KONASZENKI [4-6] poświęcone belce Bernoulliego-Eulera-Kryłowa. Belka Timoshenki pod wpływem ruchomego obciążenia

inercyjnego była przedmiotem analizy w pracy MORGAJEWSKIEGO i KORZEMIAKINY [7]. Do wyprowadzenia równań ruchu modelu ciągłego belki w tej pracy zastosowano jednak metodę ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina. FILIPPOW, KOCHMANIUK stosując podejście SCHALLENKAMPA [8] wykorzystują w wielu pracach i opracowaniach monograficznych uogólnione współrzędne i siły Lagrange'a [9-11]. Z polskich opracowań poświęconych tej tematyce wymienimy rozprawę NALESZKIEWICZA [12], LANGERA i Jego Szkoły [13-15] i [52], KRASIŃSKIEGO i NIZIOŁA [16] i wiele innych. NALESZKIEWICZ w [12] wyprowadza równania ruchu belki Eulera również przy wykorzystaniu równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Wyprowadzenie tam jest jednak inne i bardziej skomplikowane od proponowanego w niniejszej pracy. Energia kinetyczna została tam bowiem wyznaczona łącznie dla belki i ruchomej masy.

2. DYNAMICZNE RÓWNIANIA RUCHU BELKI TIMOSHENKI – MODEL CIAĞŁY

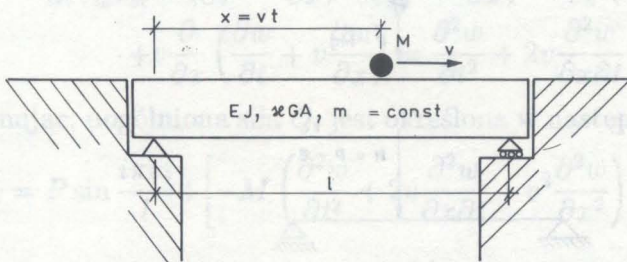
Rozważania rozpoczniemy od wyprowadzenia równań ruchu swobodnie podpartej, przyrzatycznej belki Timoshenki obciążonej skupioną masą ruchomą M . Zgodnie z rysunkiem 1 zakłada się, że ruchoma masa M przemieszcza się po belce ze stałą prędkością v . Warunki brzegowe swobodnego podparcia spełnimy, jeśli ugięcie belki w i kąt obrotu przekroju ψ wyrazimy przez współrzędne uogólnione $q_i(t)$ i $\tilde{q}_i(t)$ w następujący sposób

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \alpha_i x, \\ \psi(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i(t) \cos \alpha_i x, \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Układ równań Lagrange'a drugiego rodzaju opisujący dwumodalny model belki podaje się w następujący sposób:



Rys. 1. Schemat dynamiczny rozważanego zagadnienia

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{Q}_i, \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Energia kinetyczna w belce jest określona w następujący sposób:

$$(2.3) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l m [\dot{w}(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l m r^2 [\dot{\psi}(x, t)]^2 dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l}{4} (m \dot{q}_i^2 + m r^2 \dot{\tilde{q}}_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{l}{4} (m \dot{q}_i^2 + J \rho \dot{\tilde{q}}_i^2),$$

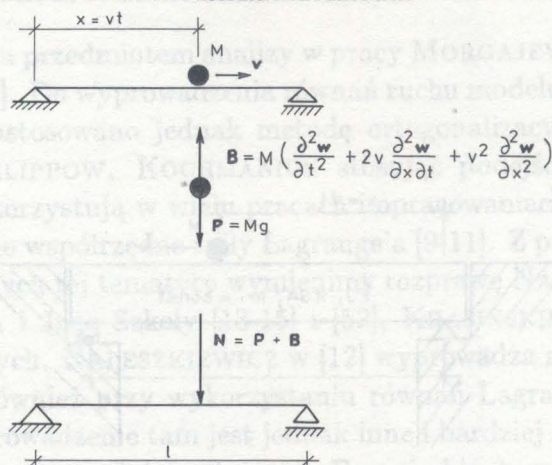
gdzie $r^2 = \frac{J}{A}$ jest kwadratem promienia bezwładności przekroju belki, $m r^2 = J \rho$, ρ zaś gęstością materiału, z którego zbudowana jest belka.

Energia potencjalna belki jest określona w następujący sposób:

$$(2.4) \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right]^2 dx =$$

$$= \frac{l}{4} \sum_{i=1}^{\infty} [EJ \alpha_i^2 \tilde{q}_i^2 + \kappa GA (\alpha_i q_i - \tilde{q}_i)^2],$$

gdzie $\beta = \frac{\partial w}{\partial x} - \psi$ jest równaniem więzów wewnętrznych.

Rys. 2. Zastępcza siła N działająca na belkę Timoshenki

Uogólniona siła Q_i może być wyznaczona z następującego rozumowania. Działanie ruchomego obciążenia na belkę składa się z ciężaru $P = Mg$ i siły bezwładności B , a ściślej z jej składowej pionowej. Mamy zatem

$$(2.5) \quad N = P + B.$$

Zasada pracy wirtualnej zapisana w następujący sposób:

$$(2.6) \quad N \delta w = Q_i \delta q_i, \quad \delta w = \delta q_i \sin \frac{i\pi vt}{l}$$

proceedzi do wzoru określającego uogólnioną siłę Q_i :

$$(2.7) \quad Q_i = N \sin \frac{i\pi vt}{l} = (P + B) \sin \frac{i\pi vt}{l}.$$

Uogólniona siła \tilde{Q}_i w tym przypadku obciążenia jest równa zero, co oznacza, że masa jest skupiona w jednym punkcie. Siła bezwładności B jest określona wzorem RENAUDOTA [40] w następujący sposób:

$$(2.8) \quad B = -M \left(\frac{d^2 w}{dt^2} \right) \Big|_{x=vt} = -M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=vt}.$$

W definicji (2.8) wykorzystano:

$$x = vt, \quad dx = v dt, \quad dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{dw(x, t)}{dt} \Big|_{x=vt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=vt}, \\ \frac{d^2w}{dt^2} \Big|_{x=vt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &+ v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=vt}. \end{aligned}$$

Reasumując, uogólniona siła Q_i jest określona w następujący sposób:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Q_i &= P \sin \frac{i\pi vt}{l} + \left[-M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=vt} \sin \frac{i\pi vt}{l}, \\ \tilde{Q}_i &= 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.3), (2.4), (2.10) układ równań Lagrange'a określający ruch belki Timoshenki podaje się w następujący sposób:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} m\ddot{q}_i + \kappa GA(\alpha_i q_i - \tilde{q}_i)\alpha_i &= \frac{2}{l} Q_i, \\ J\rho\ddot{\tilde{q}}_i + EJ\alpha_i^2 \tilde{q}_i - \kappa GA(\alpha_i q_i - \tilde{q}_i) &= \frac{2}{l} \tilde{Q}_i. \end{aligned}$$

Układ równań (2.11) można przekształcić tak, aby otrzymać jedno przekształcone równanie różniczkowe ruchu, zależne tylko od jednej współrzędnej uogólnionej np. od q_i

$$(2.12) \quad \begin{aligned} q_i^{IV} + \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_i^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] \ddot{q}_i + \alpha_i^4 c_1^2 c_2^2 q_i &= \\ = \frac{2}{ml} \left[(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2}) Q_i + \ddot{Q}_i + \frac{c_2^2 \alpha_i}{r^2} \tilde{Q}_i \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\kappa G}{\rho}.$$

Przekształcone równanie ruchu można również wyrazić we współrzędnej $\tilde{q}_i(t)$ w następujący sposób:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_i^{IV} + \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_i^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] \ddot{\tilde{q}}_i + \alpha_i^4 c_1^2 c_2^2 \tilde{q}_i &= \\ = \frac{2}{ml} \left[\frac{c_2^2 \alpha_i}{r^2} (Q_i - \alpha_i \tilde{Q}_i) + \frac{1}{r^2} \ddot{\tilde{Q}}_i \right] \end{aligned}$$

różniące się od proponowanego (2.12) tylko prawą stroną. W dalszej części pracy określimy szczegółowo uogólnioną siłę $Q_i(t)$.

Podstawiając do (2.10) przyjęte przemieszczenie (2.1) otrzymamy

$$(2.14) \quad Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt - M \left[\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{q}_j \sin \alpha_j vt + 2v \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j \alpha_j \cos \alpha_j vt - v^2 \sum_{j=1}^{\infty} q_j \alpha_j^2 \sin \alpha_j vt \right] \sin \alpha_i vt.$$

Wyrażenie (2.14) wygodniej jest podać w nieco innej formie z różniczeniem czynników pobocznych $i \neq j$ sprzęgających nieskończony układ równań ruchu

$$(2.15) \quad Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt - M(\ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt + \dot{q}_i v \alpha_i \sin 2\alpha_i vt - q_i v^2 \alpha_i^2 \sin^2 \alpha_i vt) - M \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \ddot{q}_j \sin \alpha_j vt \sin \alpha_i vt + 2v \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \dot{q}_j \alpha_j \cos \alpha_j vt \sin \alpha_i vt - v^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} q_j \alpha_j^2 \sin \alpha_j vt \sin \alpha_i vt \right]$$

albo

$$(2.16) \quad Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt - M(\ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt + \dot{q}_i v \alpha_i \sin 2\alpha_i vt - q_i v^2 \alpha_i^2 \sin^2 \alpha_i vt) - \frac{M}{2} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \ddot{q}_j \left\{ \cos \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \cos \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} + 2v \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \alpha_j \dot{q}_j \left\{ \sin \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] + \sin \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} - v^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \alpha_j^2 q_j \left\{ \cos \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \cos \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} \right].$$

Do określenia przekształconego równania ruchu potrzebna jest druga pochodna uogólnionej siły $Q_i(t)$ względem czasu, którą podaje się w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad \ddot{Q}_i(t) = & -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt - M [q_i^{IV} \sin^2 \alpha_i vt + \\
 & + 3\alpha_i v \ddot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + \alpha_i^2 v^2 \ddot{q}_i (6 \cos 2\alpha_i vt - \sin^2 \alpha_i vt) - \\
 & - 6\alpha_i^3 v^3 \dot{q}_i \sin 2\alpha_i vt - 2\alpha_i^4 v^4 q_i \cos 2\alpha_i vt] - \\
 & - \frac{M}{2} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} q_j^{IV} \left\{ \cos \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \cos \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} + \right. \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \ddot{q}_j \left\{ 2 \left[\frac{\pi v}{l} (i+j) + v\alpha_j \right] \sin \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \right. \\
 & \left. \left. - 2 \left[\frac{\pi v}{l} (i-j) - v\alpha_j \right] \sin \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} + \right. \\
 & + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \ddot{q}_j \left\{ \left[(i+j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} + 4v\alpha_j (i+j) \frac{\pi v}{l} + v^2 \alpha_j^2 \right] \cos \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \right. \\
 & \left. - \left[(i-j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} - 4v\alpha_j (i-j) \frac{\pi v}{l} - v^2 \alpha_j^2 \right] \cos \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\} - \\
 & - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \dot{q}_j \left\{ 2 \left[v\alpha_j (i-j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} - v^2 \alpha_j^2 (i-j) \frac{\pi v}{l} \right] \cdot \sin \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] + \right. \\
 & + 2 \left[v\alpha_j (i+j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} + v^2 \alpha_j^2 (i+j) \frac{\pi v}{l} \right] \sin \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \left. \right\} - \\
 & - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} q_j v^2 \alpha_j^2 \left\{ (i-j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \cos \left[(i-j) \frac{\pi vt}{l} \right] - \right. \\
 & \left. - (i+j)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} \cos \left[(i+j) \frac{\pi vt}{l} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Wprowadzamy pewne wielkości bezwymiarowe

$$\xi = \frac{vt}{l}, \quad \mu = \frac{M}{ml}, \quad \frac{d(-)'}{d\xi} = (-)'.$$

Podstawiając (2.16) i (2.17) do (2.12) otrzymamy ostatecznie przekształcone równanie ruchu belki we współrzędnych uogólnionych q_i

$$(2.18) \quad A_i(\xi)q_i^{IV}(\xi) + B_i(\xi)q_i'''(\xi) + C_i(\xi)q_i''(\xi) + D_i(\xi)q_i'(\xi) + \\ + E_i(\xi)q_i(\xi) + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} [a_{ij}(\xi)q_j^{IV}(\xi) + b_{ij}(\xi)q_j'''(\xi) + C_{ij}(\xi)q_j''(\xi) + \\ + d_{ij}(\xi)q_j'(\xi) + e_{ij}(\xi)q_j(\xi)] = F_i(\xi),$$

gdzie

$$A_i(\xi) = 1 + 2\mu \sin^2 i\pi\xi, \quad B_i(\xi) = 6\mu\pi i \sin 2\pi i\xi,$$

$$C_i(\xi) = \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_i^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + 2\mu \left[\frac{l^2}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \sin^2 i\pi\xi \right] + \\ + \alpha_i^2 l^2 (6 \cos 2\pi i\xi - \sin^2 i\pi\xi),$$

$$D_i(\xi) = 2\mu \left[\frac{l^3}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \alpha_i - 6l^3 \alpha_i^3 \right] \sin 2\pi i\xi,$$

$$E_i(\xi) = \alpha_i^4 c_1^2 c_2^2 \frac{l^4}{v^4} - 2\mu \left[\frac{l^4}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \alpha_i^2 \sin^2 \pi i\xi + \right. \\ \left. + 2l^4 \alpha_i^4 \cos 2\pi i\xi \right],$$

$$F_i(\xi) = \frac{2Pl^3}{mv^4} \left[\left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) - \alpha_i^2 v^2 \right] \sin i\pi\xi,$$

$$(2.19) \quad a_{ij}(\xi) = \mu \{ \cos [(i-j)\pi\xi] - \cos [(i+j)\pi\xi] \},$$

$$b_{ij}(\xi) = 2\mu l \left\{ \left[\frac{\pi}{l}(i+j) + \alpha_j \right] \sin [(i+j)\pi\xi] - \right. \\ \left. - \left[\frac{\pi}{l}(i-j) - \alpha_j \right] \sin [(i-j)\pi\xi] \right\},$$

$$c_{ij}(\xi) = \mu l^2 \left\{ \left[(i+j)^2 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{4\pi}{l} \alpha_j (i+j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_j^2 - \frac{1}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \right] \cos [(i+j)\pi\xi] - \left[(i-j)^2 \frac{\pi^2}{l^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{\pi}{l} \alpha_j (i-j) - \alpha_j^2 + \frac{1}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \right] \cos [(i-j)\pi\xi] \right\},$$

$$(2.19) \quad \begin{aligned} d_{ij}(\xi) = 2\mu l^3 & \left[\left\{ \frac{\alpha_j}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) - \frac{\pi}{l}(i+j)\alpha_j \left[\frac{\pi}{l}(i+j) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \alpha_j \right] \right\} \sin [(i+j)\pi\xi] + \left\{ \frac{\alpha_j}{v^2} \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{l}(i-j)\alpha_j \left[\frac{\pi}{l}(i-j) - \alpha_j \right] \right\} \sin [(i-j)\pi\xi] \right], \\ e_{ij}(\xi) = \mu l^4 & \left\{ \alpha_j^2 \left[\frac{\pi^2}{l^2}(i-j)^2 - \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \frac{1}{v^2} \right] \cos [(i-j)\pi\xi] - \right. \\ & \left. - \alpha_j^2 \left[\frac{\pi^2}{l^2}(i+j) + \left(\alpha_i^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \frac{1}{v^2} \right] \cos [(i+j)\pi\xi] \right\}. \end{aligned}$$

W przypadku $i = 1$ znikają człony sprzęgające równanie (2.19) i po wprowadzeniu oznaczenia

$$(2.20) \quad f(\xi) = \frac{q(\xi)}{f_0},$$

gdzie $f_0 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}$ jest bliskie statycznemu ugięciu środka belki Bernoulliiego-Eulera od skupionej siły P działającej w jej środku, równanie (2.18) można napisać w następującej bezwymiarowej formie:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} A(\xi)f^{IV}(\xi) + B(\xi)f'''(\xi) + C(\xi)f''(\xi) + D(\xi)f'(\xi) + \\ + E(\xi)f(\xi) = F(\xi), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2\mu \sin^2 \pi\xi, \quad B = 6\mu\pi \sin 2\pi\xi, \\ C &= \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + 2\mu \left[\frac{l^2}{v^2}(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2}) \sin^2 \pi\xi + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_1^2 l^2 (6 \cos 2\pi\xi - \sin^2 \pi\xi) \right], \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \begin{aligned} D &= 2\mu \left[\frac{l^3}{v^2}(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2})\alpha_1 - 6l^3\alpha_1^3 \right] \sin 2\pi\xi, \\ E &= \alpha_1^4 c_1^2 c_2^2 \frac{l^4}{v^4} - 2\mu \left[\frac{l^4}{v^2}(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2})\alpha_1^2 \sin^2 \pi\xi + 2l^4\alpha_1^4 \cos 2\pi\xi \right], \\ F &= \frac{\pi^4 EJ}{mv^4} \left[\left(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) - \alpha_1^2 v^2 \right] \sin \pi\xi, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{l}. \end{aligned}$$

W równaniu tym wszystkie wielkości pozostają bezwymiarowe. Morgajewski i Koźmiakina w pracy [7] otrzymali na innej drodze równanie (2.21).

Uzasadnienie pominięcia członów sprzęgających $i \neq j$ w odniesieniu do belki Eulera znajduje się w pracy [18].

3. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI RÓWNIANIA RUCHU BELKI TIMOSHENKI

Wzór (2.8), który określa siły bezwładności ruchomego skupionego obciążenia masowego wynikające ze złożenia ruchu względnego masy M i ruchu unoszenia belki, jego poszczególne trzy składniki mają prostą interpretację fizyczną

$$(3.1) \quad B = B_{\text{dod}} + B_{\text{Cor}} + B_{\text{odś}},$$

gdzie

$$B_{\text{dod}} = -M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad - \text{oznacza dodatkową poprzeczną siłę bezwładności,}$$

$$B_{\text{Cor}} = -2Mv \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \quad - \text{siłę Coriolisa,}$$

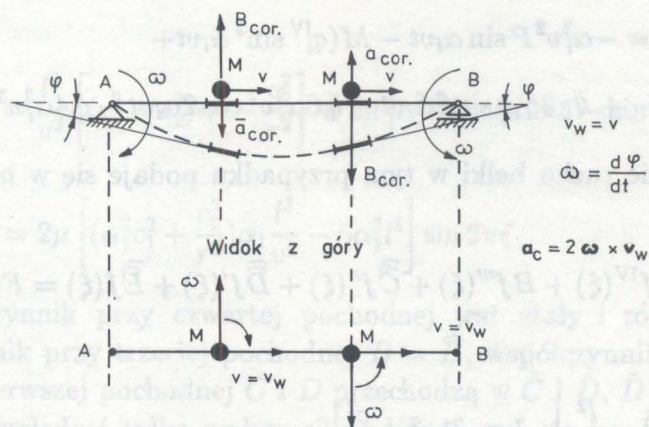
$$B_{\text{odś}} = -Mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad - \text{siłę odśrodkową.}$$

W celu wyjaśnienia roli, jaką odgrywa siła Coriolisa podaje się przekształcone równanie ruchu belki bez jej udziału. Odpowiednio zmienia się w takim przypadku uogólniona siła Lagrange'a

$$(3.2) \quad Q_i = P \sin \frac{i\pi vt}{l} + \left[- \left(M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Mv^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=vt} \sin \alpha_i vt.$$

Po wykorzystaniu (2.1) otrzymamy po pominięciu członów sprzęgających następujący wzór na ową siłę i jej drugą pochodną względem czasu:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Q_i &= P \sin \frac{i\pi vt}{l} - M(\ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt - q_i v^2 \alpha_i^2 \sin^2 \alpha_i vt), \\ \ddot{Q}_i &= -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt - M [q_i^{\text{IV}} \sin^2 \alpha_i vt + \\ &\quad + 2\alpha_i v \ddot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + \alpha_i^2 v^2 \ddot{q}_i (2 \cos 2\alpha_i vt - \sin^2 \alpha_i vt) - \\ &\quad - 2\alpha_i^3 v^3 \dot{q}_i \sin 2\alpha_i vt - 2\alpha_i^4 v^4 q_i \cos 2\alpha_i vt]. \end{aligned}$$



Rys. 3. Siły i przyspieszenia Coriolisa działające na belkę Timoshenki jako efekt ruchu złożonego — ruchoma masa i drgająca belka

Równanie ruchu belki (2.21) przy $i = 1$ podaje się w następujący sposób:

$$(3.3)_1 \quad A f^{IV}(\xi) + \widehat{B} f'''(\xi) + \widehat{C} f''(\xi) + \widehat{D} f'(\xi) + E f(\xi) = F(\xi),$$

gdzie

$$\widehat{B} = 2\mu\pi \sin 2\pi\xi,$$

$$(3.3)_2 \quad \widehat{C} = \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + 2\mu \left\{ \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] \sin^2 \pi\xi + \alpha_1^2 l^2 (2 \cos \pi\xi - \sin^2 \pi\xi) \right\},$$

$$\widehat{D} = -4\mu\alpha_1^3 l^3 \sin 2\pi\xi.$$

Brak siły Coriolisa wpłynął na zmianę współczynników B , C i D przy $f'''(\xi)$, $f''(\xi)$ i $f'(\xi)$ w stosunku do podanych wzorami (2.22). W dalszym ciągu mamy jednak do czynienia z równaniem różniczkowym czwartego rzędu o zmiennych wszystkich współczynnikach.

Jeśli pominąć siłę odśrodkową, to uogólniona siła bezwładności jest określona, po pominięciu członów sprzęgających, w następujący sposób:

$$(3.4) \quad Q_i = P \sin \frac{i\pi vt}{l} + \left[-M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right] \Big|_{x=vt} \sin \alpha_i vt,$$

$$Q_i = P \sin \frac{i\pi vt}{l} - M(\ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt + \dot{q}_i v \alpha_i \sin 2\alpha_i vt),$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \ddot{Q}_i &= -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt - M(q_i^{IV} \sin^2 \alpha_i vt + \\ &+ \ddot{q}_i 3\alpha_i v \sin 2\alpha_i vt + \ddot{q}_i 6\alpha_i^2 v^2 \cos 2\alpha_i vt - \dot{q}_i 4\alpha_i^3 v^3 \sin 2\alpha_i vt). \end{aligned}$$

Równanie ruchu belki w tym przypadku podaje się w następujący sposób:

$$(3.5) \quad Af^{IV}(\xi) + Bf'''(\xi) + \widehat{C}f''(\xi) + \widehat{D}f'(\xi) + \widehat{E}f(\xi) = F(\xi),$$

gdzie

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \widehat{C} &= \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + \\ &+ 2\mu \left[\frac{l^2}{v^2} \left(\alpha_1^2 c_1^2 - \frac{c_2^2}{r^2} \right) \sin^2 \pi \xi + 6\alpha_1^2 l^2 \cos 2\pi \xi \right] \\ \widehat{D} &= 2\mu \left[\frac{l^3}{v^2} (\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2}) \alpha_1 - 4\alpha_1^3 l^3 \right] \sin 2\pi \xi, \\ \widehat{E} &= \alpha_1^4 c_1^2 c_2^2 \frac{l^4}{v^4}. \end{aligned}$$

Współczynnik \widehat{E} przy $f(\xi)$ jest stały w czasie w tym przypadku. Nie uległy zmianie zaś współczynniki przy $f^{IV}(\xi)$ i $f'''(\xi)$ w stosunku do pełnego równania (2.21).

Wreszcie przy pominięciu dodatkowej siły bezwładności poprzecznej, jaką wnosi ruchoma masa, uogólniona siła $Q_i(t)$ i jej druga pochodna względem czasu dają się zapisać w następujący sposób:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} Q_i &= P \sin \frac{i\pi vt}{l} + \left[-M \left(2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=vt} \sin \alpha_i vt, \\ Q_i &= P \sin \frac{i\pi vt}{l} - M(\dot{q}_i v \alpha_i \sin 2\alpha_i vt - q_i v^2 \alpha_i^2 \sin^2 \alpha_i vt), \\ \ddot{Q}_i &= -\alpha_i^2 v^2 P \sin \frac{i\pi vt}{l} - M[\alpha_i v \ddot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + \alpha_i^2 v^2 (4 \cos 2\alpha_i vt - \\ &- \sin^2 \alpha_i vt) \ddot{q}_i - 6\alpha_i^3 v^3 \dot{q}_i \sin 2\alpha_i vt - 2\alpha_i^4 l^4 q_i \cos 2\alpha_i vt]. \end{aligned}$$

Równanie ruchu belki Timoshenki przy $i = 1$ można podać w tym przypadku w następujący sposób:

$$(3.7) \quad f^{IV}(\xi) + \widehat{B}f'''(\xi) + \widetilde{C}f''(\xi) + \widetilde{D}f'(\xi) + Ef(\xi) = F(\xi),$$

gdzie

$$\tilde{C} = \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2) \alpha_1^2 - \frac{c_2^2}{r^2} \right] + 2\mu \left[\alpha_1^2 l^2 (4 \cos 2\pi\xi - \sin^2 \pi\xi) \right],$$

(3.7)₁

$$\tilde{D} = 2\mu \left[(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2}) \alpha_1 \frac{l^3}{v^2} - 6\alpha_1^3 l^3 \right] \sin 2\pi\xi.$$

Współczynnik przy czwartej pochodnej jest stały i równy jeden. Współczynnik przy trzeciej pochodnej $B = \tilde{B}$, współczynniki zaś przy drugiej i pierwszej pochodnej C i D przechodzą w \tilde{C} i \tilde{D} , $\tilde{D} = D$.

Jeśli uwzględnić tylko wpływ siły odśrodkowej, to uogólniona siła $Q_i(t)$ i jej druga pochodna daje się napisać w następujący sposób:

$$Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt + M \alpha_i^2 v^2 q_i \sin^2 \alpha_i vt,$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i(t) = & -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt + M \alpha_i^2 v^2 (\ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt + \\ & + 2\alpha_i v \dot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + 2\alpha_i^2 v^2 q_i \cos 2\alpha_i vt). \end{aligned}$$

Przekształcone równanie ruchu belki przy $i = 1$ można napisać w następujący sposób:

$$f^{IV}(\xi) + C^* f''(\xi) + \widehat{D} f'(\xi) + E f(\xi) = F(\xi),$$

gdzie

$$C^* = \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2) \alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] - 2\mu \alpha_1^2 l^2 \sin^2 \pi\xi.$$

W tym przypadku w równaniu ruchu (3.9) znika trzecia pochodna $f'''(\xi)$. Współczynnik D przechodzi w \widehat{D} , a współczynnik C w równaniu (2.21) przechodzi w C^* .

Jeśli uwzględnić tylko wpływ dodatkowej siły bezwładności od ruchomej masy na belce, to uogólniona siła i jej druga pochodna względem czasu wyrażą się w następujący sposób:

$$Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt - M \ddot{q}_i \sin^2 \alpha_i vt,$$

(3.10)

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_i(t) = & -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt - M (q_i^{IV} \sin^2 \alpha_i vt + \\ & + 2\alpha_i v \ddot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + 2\alpha_i^2 v^2 \ddot{q}_i \cos 2\alpha_i vt). \end{aligned}$$

Równanie ruchu belki w takim przypadku daje się napisać w następujący sposób:

$$(3.11) \quad Af^{IV}(\xi) + \bar{B}f'''(\xi) + \bar{C}f''(\xi) + \widehat{E}f(\xi) = F(\xi),$$

gdzie

$$(3.11)_1 \quad \begin{aligned} \bar{B} &= 2\widehat{B}, \\ \bar{C} &= \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + 2\mu \left[\frac{l^2}{v^2} \left(\alpha_1 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) \sin^2 \pi\xi + 2\alpha_1^2 l^2 \cos 2\pi\xi \right]. \end{aligned}$$

Wreszcie jeśli uwzględnić tylko siłę Coriolisa, to uogólnioną siłę $Q_i(t)$ i jej drugą pochodną względem czasu można napisać w następujący sposób:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} Q_i(t) &= P \sin \alpha_i vt - M\dot{q}_i v \sin 2\alpha_i vt, \\ \ddot{Q}_i(t) &= -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt - M\alpha_i v (\ddot{q}_i \sin 2\alpha_i vt + \\ &\quad + 4\dot{q}_i \alpha_i v \cos 2\alpha_i vt - 4\alpha_i^2 v^2 \dot{q}_i \sin 2\alpha_i vt). \end{aligned}$$

Równanie ruchu belki Timoshenki w takim przypadku podaje się w następujący sposób:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} f^{IV}(\xi) + Bf'''(\xi) + \bar{C}f''(\xi) + \widehat{D}f'(\xi) + \widehat{E}f(\xi) &= F(\xi), \\ \bar{C} &= \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] + 8\mu\alpha_1^2 l^2 \cos 2\pi\xi. \end{aligned}$$

Jeśli mamy do czynienia z ruchomą siłą bezmasową na belce Timoshenki, zagadnienie analizowane w wielu pracach [19-21], to uogólniona siła $Q_i(t)$ i jej druga pochodna względem czasu są opisane w następujący sposób:

$$(3.14) \quad Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt, \quad \ddot{Q}_i(t) = -\alpha_i^2 v^2 P \sin \alpha_i vt.$$

Równanie ruchu belki w tym przypadku obciążenia ma wszystkie stałe współczynniki i jest podane w następujący sposób:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} f^{IV}(\xi) + \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2)\alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] f''(\xi) + \\ + \alpha_1^4 c_1^2 c_2^2 \frac{l^4}{v^4} f(\xi) = \frac{\pi^4 EJ}{mv^4} \left[\left(\alpha_1^2 c_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right) - \alpha_1^2 v^2 \right] \sin \pi\xi. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, wszystkie przekształcone równania ruchu belki Timoshenki (2.21) - (3.15) są czwartego rzędu ze względu na zmienną czasową i mają jednakowe prawe strony $F(\xi)$. WOL'PER i MORGAJEWSKI w pracy [22] analizują swobodnie podpartą belkę Bernoulliego-Eulera obciążoną ruchomą skupioną masą. Równanie ruchu takiej belki w identycznych bezwymiarowych współrzędnych podane jest w tej pracy przy wykorzystaniu algorytmu Bubnowa-Galerkina, przy $i = 1$ jest określone w następujący sposób:

$$(3.16) \quad \frac{\kappa^2}{\pi^2}(1 + \mu - \mu \cos 2\pi\xi) f''(\xi) + \frac{2\mu\kappa^2}{\pi} \sin 2\pi\xi f'(\xi) + [1 - \mu\kappa^2(1 - \cos 2\pi\xi)] f(\xi) = \sin \pi\xi,$$

gdzie

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu}} \frac{v}{v_{kr}}, \quad v_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu}}, \quad \mu = \frac{M}{ml},$$

$$\xi = \frac{vt}{l} = \frac{\omega_1 \kappa t}{\pi}, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Równanie to podane było po raz pierwszy przez INGLISA [23] w 1934 roku, następnie BOŁOTINA [24-25]. W pracy [22] można również znaleźć warianty równania (3.16) w zależności od uwzględnienia lub nie sił Coriolisa, odśrodkowej i dodatkowej siły bezwładności od ruchomego skupionego obciążenia masowego. W pracy [18] podane jest pełne równanie ruchu belki Eulera ze sprzęgającymi członami $i \neq j$. Dla kompletu podamy warianty równania ruchu belki (3.16). I tak, jeśli nie uwzględniać siły Coriolisa, to (3.16) redukuje się do równania

$$(3.17) \quad \frac{\kappa^2}{\pi^2} [1 + \mu(1 - \cos 2\pi\xi)] f''(\xi) + [1 - \mu\kappa^2(1 - \cos 2\pi\xi)] f(\xi) = \sin \pi\xi.$$

Jeśli w równaniu (3.16) nie uwzględnić siły odśrodkowej, to otrzymamy

$$(3.18) \quad \frac{\kappa^2}{\pi^2} (1 + \mu - \mu \cos 2\pi\xi) f''(\xi) + \frac{2\mu\kappa^2}{\pi} \sin 2\pi\xi f'(\xi) + f(\xi) = \sin \pi\xi.$$

Jeśli w (3.16) pominąć siły Coriolisa i odśrodkową, to otrzymamy

$$(3.19) \quad \frac{\kappa^2}{\pi^2} (1 + \mu - \mu \cos 2\pi\xi) f''(\xi) + f(\xi) = \sin \pi\xi.$$

Wszystkie te równania są ważne w przedziale $\xi \in (0, 1)$. W chwili $\xi = 1$ ruchoma masa opuszcza belkę. Mamy do czynienia z drganiami swobodnymi. Równanie ruchu belki Timoshenki w drugiej fazie (drżania swobodne) we wszystkich jego wariantach jest podane w następujący sposób:

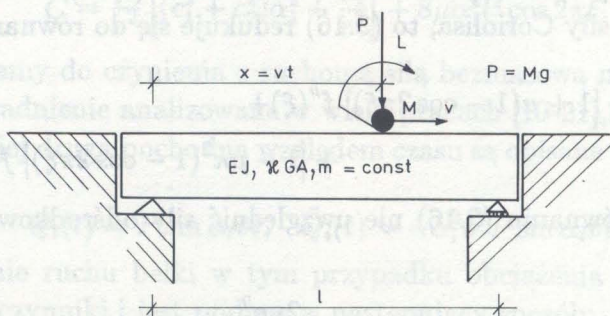
$$(3.20) \quad f_1^{IV}(\xi) + \frac{l^2}{v^2} \left[(c_1^2 + c_2^2) \alpha_1^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \right] f_1''(\xi) + \alpha_1^4 c_1^2 c_2^2 \frac{l^4}{v^4} f_1(\xi) = 0,$$

przy $\xi \geq 1$.

Równanie (3.20) ma stałe współczynniki i jest jednorodne. Warunki początkowe, które decydują o jego rozwiązaniu, wynikają z poprzedniego rozwiązania (2.21) lub innych wariantowych równań ruchu w chwili $\xi = 1$. W przypadku modelu bezfalowego belki równanie drgań swobodnych jest określone w następujący sposób [22]:

$$(3.21) \quad f_1''(\xi) + \frac{\pi^2}{\kappa^2} f_1(\xi) = 0, \quad \text{przy } \xi \geq 1.$$

4. RUCHOMY MOMENT SKUPIONY NA BELCE. MASOWE OBCIĄŻENIE RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONE. WPŁYW NIERÓWNOŚCI JEZDNI BELKI NA DRŻANIA

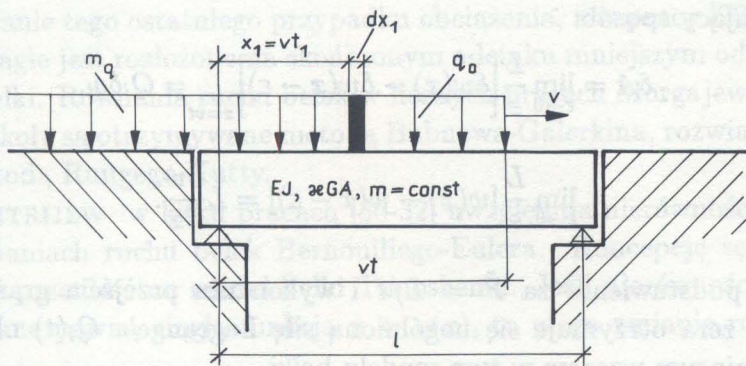


Rys. 4. Skupiony ruchomy moment L związany z masą jako dodatkowe obciążenie belki

Jeśli uwzględnić w obciążeniu inercyjnym dodatkowo moment skupiony L działający wraz z ruchomą skupioną masą (rys.4), to w rozważa-

nym wcześniej zagadnieniu ulegają zmianie uogólnione siły $\tilde{Q}_i(t)$ i $Q_i(t)$ oraz odpowiednio drugie pochodne tych wielkości względem czasu. Uogólnioną siłę $\tilde{Q}_i(t)$ wyznacza się z zasady pracy wirtualnej zapisanej w następujący sposób:

$$(4.1) \quad \delta A = L\delta\psi - \tilde{Q}_i\delta\tilde{q}_i = 0.$$



Rys. 5. Inercyjne, ruchome obciążenie ciągle na belce Timoshenki

Zważywszy na (2.1)₂, $\delta\psi$ określa się w następujący sposób:

$$(4.2) \quad \delta\psi = \delta\tilde{q}_i(t) \cos \alpha_i vt.$$

Podstawiając (4.2) do (4.1) wyznaczamy uogólnioną siłę $\tilde{Q}_i(t)$ określoną w następujący sposób:

$$(4.3) \quad \tilde{Q}_i(t) = L \cos \alpha_i vt, \quad \ddot{\tilde{Q}}_i(t) = -\alpha_i^2 v^2 L \cos \alpha_i vt.$$

Siła $Q_i(t)$ jest w tym przypadku równa zero, chyba że wraz ze skupionym momentem działa jeszcze ciężar własny ruchomej masy; wówczas $Q_i(t)$ jest określona wzorem (2.7).

Inaczej jest określana uogólniona siła $Q_i(t)$ w przypadku działania skupionego momentu na belkę Bernoulliego-Eulera. Moment skupiony L można zapisać w następujący sposób:

$$(4.4) \quad L = \tilde{P}\epsilon,$$

gdzie ϵ jest małym ramieniem pomiędzy pionową parą sił \tilde{P} .

Część uogólnionej siły Lagrange'a (bez udziału sił bezwładności od ruchomej masy) daje się zapisać następującym wzorem:

$$(4.4)_1 \quad Q_i(t) = \tilde{P} \sin \frac{i\pi vt}{l} - \tilde{P} \sin \frac{i\pi(vt - \varepsilon)}{l} = \\ = 2\tilde{P} \cos \frac{i\pi}{l}(vt - \frac{\varepsilon}{2}) \sin \frac{i\pi\varepsilon}{2l}.$$

Wzór ten wynika również z zasady pracy wirtualnej zapisanej w następujący sposób:

$$(4.4)_2 \quad \delta A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L}{\varepsilon} \left[\delta w(x) - \delta w(x - \varepsilon) \right]_{x=vt} = Q_i \delta q_i, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L}{\varepsilon} [w(x) - w(x - \varepsilon)] = L \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Po podstawieniu za $\tilde{P} = L/\varepsilon$ i wykonaniu przejścia granicznego z ε do zera otrzymuje się uogólnioną siłę Lagrange'a $Q_i(t)$ określoną następującym wzorem w tym modelu belki

$$(4.4)_3 \quad Q(t) = \frac{i\pi}{l} L \cos \frac{i\pi vt}{l}, \quad \ddot{Q}_i(t) = -\frac{i^3 \pi^3}{3} v^2 L \cos \frac{i\pi vt}{l}.$$

Jeśli na belkę działa ciągle, równomiernie rozłożone obciążenie inercyjne o masie m_q , to uogólniona siła Lagrange'a daje się określić z następującego rozumowania:

Zgodnie z rys. 5 elementarna zastępcza siła dN działająca na odcinku dx_1 jest zapisana w następujący sposób:

$$(4.5) \quad dN = \left[q_0 - m_q \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dx_1,$$

gdzie

$$x_1 = vt_1, \quad dx_1 = v dt_1, \quad x_1 \in (0, vt).$$

Po scałkowaniu (4.5) w granicach $(0, vt)$ oraz wykorzystaniu (2.6) otrzymamy

$$(4.6) \quad Q_i(t) = \int_0^{vt} \left[q_0 - m_q \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \sin \frac{i\pi x_1}{l} dx_1, \\ \ddot{Q}_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (Q_i(t)),$$

gdzie

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \sin \frac{j\pi x_1}{l}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

W tym przypadku przekształcone równanie różniczkowe belki Timoshenki ma inne współczynniki $A_i(\xi) - E_i(\xi)$, jak również inne $a_{ij}(\xi) - e_{ij}(\xi)$ niż omawiane już (2.18). Jest ono przedmiotem innej pracy autora [27] i tu nie będziemy go bliżej omawiać. W odniesieniu do belki Eulera, MORGAJEWSKI w obszernej rozprawie [28] podał szczegółowe rozwiązanie tego ostatniego przypadku obciążenia, a w pracy [29] obciążenie ciągle jest rozłożone na skończonym odcinku mniejszym od rozpiętości belki. Równania ruchu belek w licznych pracach Morgajewskiego i Jego Szkoły są otrzymywane metodą Bubnowa-Galerkina, rozwiązywane zaś metodą Rungego-Kutty.

DMITRIJEW w kilku pracach [30-32] uwzględnia nierówności jezdni w równaniach ruchu belek Bernoulliego-Eulera. Koncepcję tę można również przenieść na model belki Timoshenki. Jeśli nierówności jezdni są opisane pewną ciągłą funkcją $\eta = \eta(x)$, to ulega zmianie równanie (2.8):

$$(4.7) \quad B = -M \left(\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) \Big|_{x=vt} = \\ = -M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] \Big|_{x=vt}.$$

W związku z (4.7) uogólniona siła Lagrange'a (2.14) ulega zmianie

$$(4.8) \quad Q_i(t) = P \sin \alpha_i vt - M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \right. \\ \left. + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] \Big|_{x=vt} \sin \alpha_i vt.$$

Znaną funkcję $\eta(u)$ zwykle rozkłada się w pełny szereg Fouriera

$$(4.9) \quad \eta(u) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos j\pi u + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin j\pi u, \\ \frac{d^2 \eta(u)}{du^2} = -\pi^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^2 A_j \cos j\pi u + \sum_{j=1}^{\infty} j^2 B_j \sin j\pi u \right),$$

gdzie

$$u \in (0, \xi).$$

Tak więc wpływ nierówności jezdni zmienia jedynie całość szczególnej rozwiązania. Komplikacji ulega jej wyznaczenie, a więc i ostateczne rozwiązanie problemu.

5. WPLYW TŁUMIENIA ZEWNĘTRZNEGO I WEWNĘTRZNEGO NA RÓWNANIE RUCHU BELKI. WPLYW NIERÓWNOMIERNEJ PRĘDKOŚCI RUCHOMEGO OBCIĄŻENIA MASOWEGO NA RÓWNANIE RUCHU BELKI TIMOSHENKI

Zakładając, że mamy do czynienia z tłumieniem wewnętrznym i zewnętrznym według liniowego reologicznego modelu ciała lepkosprężystego typu Kelwina-Voigta zmianie ulega wyjściowy układ ruchu (2.2) i (2.11). Układ równań Lagrange'a opisujący ruch belki można zapisać w następujący sposób:

$$(5.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j - R_j, \quad j = 1, 2,$$

gdzie R_j są to uogólnione siły tłumienia skierowane przeciwnie do Q_j .

Zakładając dwa różne czasy retardacji w modelu reologicznym Voigta, naprężenia w belce dadzą się opisać w następujący sposób:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x + \eta \dot{\varepsilon}_x = E(\varepsilon_x + \tau \dot{\varepsilon}_x), \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}, \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} + \eta_G \dot{\gamma}_{xz} = G(\gamma_{xz} + \tau_G \dot{\gamma}_{xz}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\tau = \frac{\eta}{E}, \quad \tau_G = \frac{\eta_G}{G}.$$

Siły wewnętrzne, po scałkowaniu (5.2) względem z , można zapisać w następujący sposób:

$$(5.3) \quad M_x = -EJ(\psi + \tau \dot{\psi}), \quad T_z = \kappa GA(\beta + \tau_G \dot{\beta}).$$

Układ równań Lagrange'a (5.1) po uwzględnieniu dodatkowych sił uogólnionych R_j prowadzi do dwóch równań ruchu belki:

$$(5.1) \quad m\ddot{q}_i + (1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}) \kappa G A (\alpha_i q_i - \tilde{q}_i) \alpha_i + c\dot{q}_i = \frac{2}{l} Q_i,$$

$$J\rho\ddot{\tilde{q}}_i + (1 + \tau_G \frac{\partial}{\partial t}) E J \alpha_i^2 \tilde{q}_i - \kappa G A (\alpha_i q_i - \tilde{q}_i) + c_\psi \dot{\tilde{q}}_i = \frac{2}{l} \tilde{Q}_i,$$

gdzie c, c_ψ – są odpowiednio współczynnikami tłumienia zewnętrznego w belce odpowiadającym odpowiednio prędkościom uogólnionym \dot{q}_i i $\dot{\tilde{q}}_i$. KĄCZKOWSKI w monografii [33] wyprowadził te same równania stosując metodę kinetostatyki. Przyjmując równanie więzów geometrycznych przekroju belki w następujący sposób:

$$(5.4) \quad \beta = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi$$

oraz definiując moment M_x w następujący sposób:

$$(5.5) \quad M_x = EJ(\psi + \tau\dot{\psi}),$$

następnie przyjmując w układzie równań (1.12) podanych w monografii [33] s. 188, że $\varphi_y = -\psi$ oraz wykorzystując (1.1), otrzymamy układ naszych równań (5.3). Układ równań (5.3) daje się również doprowadzić do jednego przekształconego równania ruchu czwartego rzędu ze względu na zmienną czasową. Równanie takie przy pewnym szczególnym przypadku $\tau = \tau_G$, podane jest w pracy autora [34].

Jeśli założyć w stanie lepkim nieściśliwość materiału, z którego jest zbudowana belka, to wzory (5.2) można zapisać w następujący sposób:

$$(5.6) \quad \sigma_x = E\varepsilon_x + 3\eta_G \dot{\varepsilon}_x, \quad \eta = 3\eta_G;$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} + \eta_G \dot{\gamma}_{xz}.$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia (tarcza) i nieściśliwości stanu lepkiego otrzymamy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + 2\eta_G (2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + 2\eta_G (2\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} + \eta_G \dot{\gamma}_{xy}. \end{aligned}$$

Ostatnim punktem tego rozdziału jest wyprowadzenie równań ruchu belki Timoshenki w przypadku, kiedy ruchome inercyjne obciążenie

przesuwa się po konstrukcji ze zmienną prędkością. W odniesieniu do klasycznej belki Eulera znany jest szereg pracy z tego zakresu [35-36], a szczególnie godne odnotowania rozprawy KONASZENKI [5] i DMITRIJEWA [37]. Analizuje się w nich dynamikę prostej przegubowo podpartej belki, na której znajduje się bezmasowa siła skupiona lub bezmasowe obciążenie ciągle przemieszczające się po konstrukcji ruchem jednostajnie przyspieszonym lub jednostajnie opóźnionym. Rozwiązanie analityczne w tym przypadku sprowadza się do rozwiązania całki

$$(5.8) \quad S_n(t) = \frac{2P}{m l \omega_n} \int_0^t \sin \left[\frac{n\pi}{l} \left(v_0 t \pm \frac{a}{2} t^2 \right) \right] \sin \omega_n (t_1 - t) dt,$$

gdzie a jest przyspieszeniem z jakim porusza się siła skupiona.

Wynik całkowania (5.8) przedstawia się w postaci tzw. funkcji Fresnela [35-36] i [5]. W przypadku zaś obciążenia ciągłego, całka (5.8) daje się zapisać w następujący sposób [36]:

$$(5.9) \quad S_n(t) = -\frac{2q}{m n \pi \omega_n} \int_0^t \cos \left[\frac{n\pi}{l} \left(v_0 t_1 \pm \frac{a}{2} t_1^2 \right) \right] \sin \omega_n (t - t_1) dt_1.$$

Inna metoda rozwiązania tego problemu w odniesieniu do prostej belki przegubowo podpartej podana jest w pracy DMITRIJEWA [37]. Wszystkie te opracowania, jak już wspomniano, odnoszą się do bezinercyjnego obciążenia. Uwzględnienie masy obciążenia w przegubowo podpartej belce Eulera znajduje się w interesującej rozprawie NIKITINA [38]. Należy również odnotować pracę DMITRIJEWA [39] z tego zakresu. Wzorując się na pracy [38] przyspieszenie belki określa się w następujący sposób:

$$(5.10) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2(v_0 \pm at) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (v_0 \pm at)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm a \frac{\partial w}{\partial x},$$

gdzie

$$v = v_0 \pm at, \quad x = v_0 t \pm \frac{a}{2} t^2.$$

Pewnego komentarza wymaga ostatni składnik wzoru (5.10). Reprezentuje on iloczyn wektorowy wektorów \mathbf{a} i $\boldsymbol{\phi} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}$. Czynniki ten odgrywa istotną rolę w tym przypadku ruchu i należy go uwzględnić w obliczeniach.

Składnik ten zniknie jeśli $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, a więc w przypadku ruchu jednostajnego ruchomego obciążenia. Wzór (5.10) przechodzi wówczas w następujący podany przez RENAUDOTA [40]:

$$(5.11) \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\partial^2w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2w}{\partial x^2}.$$

Zgodnie z (5.10) uogólniona siła $Q_i(t)$ jest określona w następujący sposób:

$$(5.12) \quad Q_i(t) = P \sin \frac{i\pi vt}{l} - M \left[\frac{\partial^2w}{\partial t^2} + 2(v_o \pm at) \frac{\partial^2w}{\partial t^2} + (v_o \pm at)^2 \frac{\partial^2w}{\partial t^2} \pm a \frac{\partial w}{\partial x} \right] \sin \frac{i\pi vt}{l},$$

$$\tilde{Q}_i = 0, \quad x = v_o t \pm \frac{a}{2} t^2, \quad v = v_o \pm at.$$

Komplikacji ulegnie więc przekształcone równanie ruchu belki Timoshenki (2.18). W cytowanej pracy NIKITINA [38] można znaleźć również przypadek ruchomego równomiernie rozłożonego inercyjnego obciążenia, którego czoło przemieszcza się po belce Eulera ze zmienną prędkością. Równania ruchu belki w tej pracy wyprowadza się metodą Bubnowa-Galerkina. W rozwiązaniu szczegółowym zakłada się udział trzech pierwszych postaci drgań własnych, całkowanie numeryczne prowadzono metodą Rungego-Kutty. Rezultaty obliczeń wskazują na bardziej niekorzystny przypadek ruchu jednostajnie opóźnionego na przeciążenie dynamiczne konstrukcji belki Eulera. Przeciążenie to ma charakter oscylacyjny i jest funkcją średniej prędkości obciążenia.

6. MODEL DYSKRETNY KONSTRUKCJI, KOMPUTEROWE METODY ROZWIĄZANIA PROBLEMU

Pojawienie się w końcu lat pięćdziesiątych komputera spowodowało w dynamice konstrukcji pod ruchomymi obciążeniami przewartościowanie metod obliczeniowych w kierunku algorytmizacji przebiegu procesu obliczeniowego oraz wyszukanie modelu adekwatnego do tej techniki. Takim skutecznym modelem ośrodka ciągłego stał się model dyskretny jako jedyny pozwalający na ogół przy skomplikowanej geometrii konstrukcji prowadzić obliczenia z wystarczającą dokładnością w odniesie-

niu do praktyki inżynierskiej. Jedną z pierwszych prac, w której zastosowano model dyskretny w odniesieniu do belki Timoshenki jest publikacja HURTY'EGO i RUBINSTEINA [41], jak również monografia [42] tych samych autorów. W pracy [41], jak również w monografii [42], podstawą algorytmu aproksymacyjnego jest równanie więzów geometrycznych w belce podane w następujący sposób:

$$(6.1) \quad w = w_M + w_T,$$

gdzie w jest całkowitym ugięciem belki Timoshenki, w_M – ugięciem belki wywołanym czystym zginaniem oraz w_T – ugięciem belki wywołanym czystym ścinaniem.

W pracy autora [54] określono przekształcone równania różniczkowe opisujące odpowiednio funkcje w_M i w_T . Pomysł równania więzów w postaci (6.1) należy do ANDERSONA i MIKLOWITZA [55-56]. Jak łatwo zauważyć w pracy [54], przekształcone równania różniczkowe opisujące funkcje w_M i w_T są czwartego rzędu ze względu na zmienną czasową. Lewe strony tych równań są identyczne jak w przypadku przekształconego równania różniczkowego opisującego całkowite ugięcie belki w . Identyczne muszą być również trzy całki ogólne przypisane tym równaniom. Kąt obrotu przekroju ψ wywołany czystym zginaniem jest pierwszą pochodną geometryczną ugięcia w_M

$$(6.2) \quad \psi = \frac{\partial w_M}{\partial x}.$$

KLASZTORNY i LANGER w pracy [52] zastosowali metodę aproksymacyjną do rozwiązania problemu belki Timoshenki pod ruchomą siłą bezmasową lub grupą sił. Równanie więzów w tej pracy przyjęte jest w postaci (6.1). Funkcje aproksymujące przyjęto takie same odnośnie do przemieszczeń w_M i w_T . Uogólnione współrzędne q_M i q_T po wyznaczeniu energii kinetycznej, potencjalnej i siły uogólnionej, w wyniku spełnienia równań Lagrange'a drugiego rodzaju, prowadzą do układu równań

$$(6.3) \quad \beta^2 \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}'' + \beta \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{2}{P_0} \text{grad} \mathbf{L} = \bar{\mathbf{V}}(\tau),$$

gdzie

$$\beta = vl\sqrt{\frac{m}{EJ}}, \quad \tau = \frac{vt}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{v}{l}\mathbf{q}', \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_T \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C} = \gamma \lambda_i \mathbf{B}$ jest macierzą tłumienia proporcjonalną do macierzy bezwładności.

Po rozwiązaniu zagadnienia własnego belki, na równaniu (6.4) dokonana jest transformacja własna. Wprowadzając zamianę zmiennych $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{r}}$, gdzie $\mathbf{N} = \sqrt{\mathbf{K}^{-1}} = \mathbf{N}^T$ a \mathbf{R} jest ortonormalną macierzą własną, równanie (6.4) przechodzi w następujące:

$$(6.4) \quad \beta^2 \{\rho\} \bar{\mathbf{y}}'' + \pi^2 \beta \gamma \{\rho\} \bar{\mathbf{y}}' + \mathbf{I} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{R}^T \mathbf{N} \mathbf{V},$$

gdzie $\{\rho\}$ jest widmem wartości własnych, określonych w następujący sposób:

$$(6.5) \quad \{\rho\} = \mathbf{R}^T \mathbf{N} \mathbf{B} \mathbf{N} \mathbf{R}, \quad \rho_i = \frac{1}{\lambda_i^2}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{EJ}{ml^4 \rho_i}}.$$

Wprowadzając następnie zwężenie bazy \mathbf{y} do $\hat{\mathbf{y}}$ o liczebności zbioru q_M , autorzy wyłączyli przebiegi wysokoczęstotliwościowe uzyskując rozwiązanie wystarczająco dokładne przy istotnej efektywności realizacji komputerowej. Jak już wspomniano, obciążenie ruchome w tej pracy jest bezmasowe. Macierz bezwładności, macierz tłumienia i macierz sztywności są w związku z tym stałe w czasie. Dyskretne sformułowanie zagadnienia statycznego i dynamicznego odnośnie do belki Timoshenki znajduje się również w pracach CHENGA [43] i KĄCZKOWSKIEGO [44]. W odniesieniu do ruchomych obciążeń bezmasowych i masowych dyskretny model konstrukcji jest stosowany w kilkudziesięciu rozprawach LANGERA [13-15] i [45-47], KLASZTORNEGO [48], BOROWICZA [49-51] i szeregu innych. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju zastosowane w tym modelu, szczególnie prosto i efektywnie prowadzą do macierzowych równań ruchu współrzędnych uogólnionych przestrzeni konfiguracyjnej, a następnie do równań we współrzędnych naturalnych po dokonaniu na tych równaniach transformacji własnej. W niniejszym rozdziale uogólnimy rozwiązanie KLASZTORNEGO i LANGERA [52] na przypadek ruchomego obciążenia inercyjnego. Do dyspozycji mamy przede wszystkim równanie więzów geometrycznych w dwóch postaciach

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \beta$$

lub

$$(6.6) \quad w = w_M + w_T.$$

W cytowanych pracach [52] i [41-42] korzystano z drugiego równania (6.6)₂. Jest to uzasadnione w przypadku, gdy mamy do czynienia

z bezinercyjnym dynamicznym obciążeniem ruchomym. Jeśli z ruchomym obciążeniem jest związana masa, bardziej racjonalne jest przyjęcie do rozważań równania (6.6)₁ i tak też postąpimy w dalszej części tego rozdziału.

Istotą postępowania dyskretnego jest przyjęcie rozwiązania w postaci skończonego szeregu odnośnie do ugięcia w i kąta obrotu ψ . Przyjmując owe wielkości w następujący sposób:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q}, \\ \psi(x, t) &= \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i(x) \tilde{q}_i(t) = \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\boldsymbol{\phi}}^T \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

określamy energię kinetyczną i potencjalną w taki sam sposób jak w rozdziale 1. Dla prostoty wyprowadzeń pominiemy w układzie tłumienie. Zakładając, że mamy do czynienia z innymi warunkami brzegowymi niż swobodne podparcie, energia kinetyczna konstrukcji daje się określić w następujący sposób:

$$(6.8) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{w}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^l m r^2 \dot{\psi}^2(x, t) dx.$$

Uwzględniając (6.7) określimy odpowiednio $\partial T / \partial \dot{q}_i$ i $\partial T / \partial \dot{\tilde{q}}_i$ jako niezbędne składniki równań ruchu Lagrange'a

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \int_0^l m \left[\sum_{i=1}^n \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \right] \phi_r(x) dx, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} &= \int_0^l m r^2 \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i(x) \dot{\tilde{q}}_i(t) \right] \tilde{\phi}_r(x) dx, \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde{q}_i} = 0. \end{aligned}$$

Energia potencjalna daje się określić w następujący sposób:

$$(6.10) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \psi(x, t) \right]^2 dx, \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \int_0^l \kappa GA \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i(x) q_i(t) - \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i(x) \tilde{q}_i(t) \right] \phi'_r(x) dx, \end{aligned}$$

$$(6.10) \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_i} = \int_0^l EJ \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\phi}'_i(x) \tilde{q}_i(t) \right] \tilde{\phi}'_r(x) dx - \int_0^l \kappa GA \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i(x) q_i(t) - \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_i(x) \tilde{q}_i(t) \right] \tilde{\phi}_r(x) dx, \\ \frac{\partial(-)}{\partial x} = (-)' \quad \frac{\partial(-)}{\partial t} = (\dot{-}).$$

Uogólnione siły Lagrange'a Q_i i \tilde{Q}_i przy powyższym założeniu dają się określić w następujący sposób:

$$(6.11) \quad Q_i = \sum_{i=1}^n P \phi_i(vt) - M \left[\sum_{i=1}^n (\ddot{q}_i \phi_i(x) + 2v \dot{q}_i \phi'_i(x) + \right. \\ \left. + v^2 q_i \phi''_i(x)) \right] \Big|_{x=vt} \phi_r(x), \\ \tilde{Q}_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Wykorzystanie (6.1) - (6.11) w równaniach Lagrange'a (2.2) prowadzi do układu równań ruchu określonego w następujący sposób:

$$(6.12) \quad \ddot{q}_i \sum_{i=1}^n \int_0^l m \phi_r(x) \phi_i(x) dx + q_i \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \phi'_r(x) \phi'_i(x) dx - \\ - \tilde{q}_i \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \tilde{\phi}_i(x) \phi'_r(x) dx = \sum_{i=1}^n P \phi_i(vt) - M \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i \phi_r(vt) \times \right. \\ \left. \times \phi_i(vt) + 2 \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \phi_i(vt) \phi_r(vt) + \sum_{i=1}^n q_i \ddot{\phi}_i(vt) \phi_r(vt) \right], \\ \ddot{q}_i \sum_{i=1}^n \int_0^l m r^2 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\phi}_r(x) dx + \tilde{q}_i \sum_{i=1}^n \int_0^l EJ \tilde{\phi}'_i(x) \tilde{\phi}'_r(x) dx - \\ - q_i \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \phi'_i(x) \tilde{\phi}_r(x) dx + \tilde{q}_i(t) \sum_{i=1}^n \kappa GA \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\phi}_r(x) dx = 0.$$

Wprowadzamy dalej następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= [q_1(t), q_2(t), \dots]^T, & \tilde{\mathbf{q}} &= [\tilde{q}_1(t), \tilde{q}_2(t), \dots]^T, \\
 \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^n \int_0^l m \phi_r(x) \phi_i(x) dx, & \mathbf{K}_s &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} dx, \\
 \mathbf{K}_s &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \tilde{\phi}_r(x) \phi_i'(x) dx, & \mathbf{P} &= P \phi_i(vt), x \in (0, 1), \\
 \mathbf{K}_\beta &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \kappa GA \tilde{\phi}_r(x) \tilde{\phi}_i(x) dx, & \mathbf{K}_\psi &= \sum_{i=1}^n \int_0^l EJ \frac{\partial \tilde{\phi}_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}_r(x)}{\partial x} dx, \\
 \mathbf{B}_\psi &= \sum_{i=1}^n \int_0^l m r^2 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\phi}_r(x) dx, & \tilde{\mathbf{B}} &= M \sum_{i=1}^n \phi_r(vt) \phi_i(vt), \\
 \tilde{\mathbf{K}} &= M \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_r(vt) \phi_i(vt), & \tilde{\mathbf{C}} &= 2M \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_r(vt) \phi_i(vt).
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

Macierze $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ i $\tilde{\mathbf{B}}$ są w ogólnym przypadku zależne od czasu, a więc ich elementy są zmienne. Oznaczenia wszystkich macierzy (6.13) można zapisać również w innej formie:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= m \phi \phi^T, & \mathbf{B}_\psi &= m r^2 \tilde{\phi} \tilde{\phi}^T, & \mathbf{B} &= M \chi \chi^T, \\
 \tilde{\mathbf{C}} &= 2M \chi \chi^T, & \mathbf{K}_s &= \kappa GA \phi' \phi'^T, & \mathbf{K}_\psi &= EJ \tilde{\phi}' \tilde{\phi}'^T, \\
 \mathbf{K}_s &= \kappa GA \tilde{\phi} \phi'^T, & \mathbf{K}_\beta &= \kappa GA \tilde{\phi} \tilde{\phi}^T, & \tilde{\mathbf{K}} &= M \ddot{\chi} \chi^T, \\
 \mathbf{P} &= P \chi, & \chi &= \phi(vt).
 \end{aligned}
 \tag{6.14}$$

Równania ruchu (6.12) po wykorzystaniu oznaczeń (6.13) lub (6.14) można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}) \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_s + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{q} - \mathbf{K}_s \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{P}, \\
 \mathbf{B}_\psi \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_\beta) \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_s \mathbf{q} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

Układ równań (6.15) można również przekształcić do jednego równania UFLAND [57] czwartego rzędu ze względu na uogólnioną współzrzedną \mathbf{q}_i lub $\tilde{\mathbf{q}}_i$. Przykładowo przekształcone równanie ruchu w modelu dyskretnym na uogólnione współzrzedne \mathbf{q}_i można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_\psi (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})^T \mathbf{q}^{IV} + \mathbf{B}_\psi \tilde{\mathbf{C}}^T \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{B}_\psi (\mathbf{K}_s + \tilde{\mathbf{K}})^T + \\
 + (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_\beta) (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})^T] \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_\beta) \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{q} + [(\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_\beta) \cdot \\
 \cdot (\mathbf{K}_s + \tilde{\mathbf{K}})^T - \mathbf{K}_s^2] \mathbf{q} = \mathbf{B}_\psi \ddot{\mathbf{P}}^T + (\mathbf{K}_\psi + \mathbf{K}_\beta) \mathbf{P}^T.
 \end{aligned}
 \tag{6.16}$$

Równanie (6.16) otrzymano z układu (6.15) wykonując następujące operacje. Pierwsze z układu równań (6.15)₁ mnożymy prawostronnie

przez odwróconą macierz K_s^{-1} . Otrzymujemy w wyniku wektor \tilde{q} (po wykorzystaniu $K_s K_s^{-1} = I$). Wstawiając wektor \tilde{q} do drugiego równania (6.15)₂ i wykonując mnożenie lewostronne równania przez K_s otrzymamy (6.16). Układ równań (6.15) można jeszcze zapisać w następujący sposób:

$$(6.17) \quad \tilde{B}^* \dot{q}^* + \tilde{C}^* q^* + \tilde{K}^* q^* = P^*,$$

gdzie

$$q^* = \begin{bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^* = \begin{bmatrix} B + \tilde{B} & 0 \\ 0 & B_\psi \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix},$$

(6.17)₁

$$\tilde{C}^* = \begin{bmatrix} \tilde{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}^* = \begin{bmatrix} K_s + \tilde{K} & -K_s \\ -K_s & K_\psi + K_\beta \end{bmatrix}.$$

Równanie (6.17) jest szczególnie przydatne do zastosowania konkretnej realizacji komputerowej. Ponadto bardzo łatwo daje się w tym momencie wprowadzić do układu tłumienia. Zakładając model tłumienia według reologicznego modelu Kelwina-Voigta macierz tłumienia liniowego można wyrazić przez macierz bezwładności i sztywności

$$(6.18) \quad \tilde{C}^* = \alpha \tilde{B}^* + \beta \tilde{K}^*.$$

Współczynniki α i β dają się wyznaczyć na drodze postępowania standardowego.

Zauważmy również, że mimo nieuwzględnienia tłumienia układ równań (6.15) zawiera macierz \tilde{C} zmienną w czasie, mnożoną przez wektor uogólnionych prędkości \dot{q} . Jest to rezultat uwzględnienia siły bezwładności CORIOLISA [22], która w ogólności wprowadza własności tłumiące rozwiązanie. Założymy [42] również, że funkcja aproksymująca kąt obrotu przekroju ψ jest pierwszą pochodną geometryczną funkcji aproksymującej ugięcie całkowite belki

$$(6.19) \quad \tilde{f} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Jest to założenie usprawiedliwione wtedy, gdy mamy do czynienia z warunkami brzegowymi w belce Timoshenki odpowiadającymi swobodnemu podparciu przegubowemu. W innych przypadkach warunków brzegowych tak być nie musi. Równanie (6.17) z uwagi na to,

że wszystkie trzy macierze $\tilde{\mathbf{B}}^*$, $\tilde{\mathbf{C}}^*$ i $\tilde{\mathbf{K}}^*$ są zmienne w czasie, ma wartości własne i wektory własne również zmienne w czasie. Częstości drgań własnych układu są również zmienne w czasie. Pozbawiona jest więc sensu transformacja własna układu (6.17) do współrzędnych naturalnych, tak jak postąpiono w pracy [52] w przypadku siły bezmasowej. Jedyną drogą możliwą do zastosowania i uzyskania wyników jest bezpośrednio całkowanie numeryczne owego równania.

Jeśli przyjąć do rozwiązania problemu równanie więzów w alternatywnej postaci (6.1) lub (6.6)₂, to układ równań różniczkowych modelu ciągłego podany w pracach [54, 55 i 56] jest określony w następujący sposób:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} EJ \frac{\partial^3 w_M}{\partial x^3} + \kappa GA \frac{\partial w_T}{\partial x} - J\rho \frac{\partial^3 w_M}{\partial x \partial t^2} &= 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 w_M}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w_T}{\partial t^2} - \kappa GA \frac{\partial^2 w_T}{\partial x^2} &= q(x, t). \end{aligned}$$

Układ ten otrzymano przy wykorzystaniu następujących równań i związków:

$$(6.21) \quad w = w_M + w_T, \quad \psi = \frac{\partial w_M}{\partial x}, \quad M = -EJ \frac{\partial^2 w_M}{\partial x^2}, \quad T = \kappa GA \frac{\partial w_T}{\partial x}.$$

Dwa ostatnie wyrażenia określające siły wewnętrzne są podane przy założeniu zwrotu osi z w dół. Równania (6.20) można wyprowadzić na wiele sposobów, również przy zastosowaniu równań Lagrange'a drugiego rodzaju.

Zakładając rozwiązanie zagadnienia dyskretnego podobnie jak (7.6)

$$(6.22) \quad \begin{aligned} w_M &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i^M(t) = \Phi^T \mathbf{q}_M = \mathbf{q}_M^T \Phi, \\ w_T &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i^T(t) = \Phi^T \mathbf{q}_T = \mathbf{q}_T^T \Phi \end{aligned}$$

określamy energię kinetyczną i potencjalną belki oraz uogólnione siły Q_i . Równania Lagrange'a doprowadzają w takim przypadku do układu równań względem uogólnionych współrzędnych $q_i^M(t)$ i $q_i^T(t)$. W równaniach (6.22) zakładamy te same funkcje aproksymacyjne odnośnie do przemieszczeń w_M i w_T [42 i 52]. Układ równań można zapisać w następujący

sposób:

$$(6.23) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1)\ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_T + \mathbf{K}_1\mathbf{q}_M = \tilde{\mathbf{Q}}_i^M,$$

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_T + \mathbf{K}_s\mathbf{q}_T = \tilde{\mathbf{Q}}_i^T,$$

gdzie

$$\mathbf{q}_M = [q_1^M(t), q_2^M(t), \dots], \quad \mathbf{q}_T = [q_1^T(t), q_2^T(t), \dots]^T,$$

$$(6.23)_1 \quad \mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^l m r^2 \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x} dx,$$

$$\mathbf{K}_1 = \sum_{i=1}^n \int_0^l EJ \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_r(x)}{\partial x^2} dx,$$

macierze \mathbf{B} i \mathbf{K}_s są określone tak jak poprzednio, oznaczenia (6.13).

Uogólnione siły $\tilde{\mathbf{Q}}_i$ są określone w następujący sposób:

$$(6.24) \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_i^M \\ \tilde{\mathbf{Q}}_i^T \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_M \\ \ddot{\mathbf{q}}_T \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_M \\ \dot{\mathbf{q}}_T \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_T \end{bmatrix}.$$

Układ (6.23) daje się więc opisać w następujący sposób z uwzględnieniem związku (6.24):

$$(6.25) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1 + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_T + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_M + (\mathbf{K}_1 + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q}_M = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_M + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}_T + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_T + (\mathbf{K}_s + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q}_T = \mathbf{P}.$$

Macierze $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$ są takie same jak w (6.13) i (6.14). Układ (6.25) można zapisać w następujący sposób:

$$(6.26) \quad \tilde{\mathbf{B}}^{**}\ddot{\mathbf{q}}^{**} + \tilde{\mathbf{C}}^{**}\dot{\mathbf{q}}^{**} + \tilde{\mathbf{K}}^{**}\mathbf{q}^{**} = \mathbf{P}^{**},$$

gdzie

$$(6.27) \quad \tilde{\mathbf{B}}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}_1 + \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_T \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{**} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_s + \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}.$$

W przypadku kiedy ruchome obciążenie inercyjne pozbawione jest masy, mamy do czynienia z ruchomą bezmasową siłą skupioną. Wszystkie macierze ze znakiem tyldy są wówczas równe zeru. Układy równań ruchu mają stałe współczynniki-macierze.

Nadmienimy również, że metoda aproksymacyjna nie jest jedyną możliwą do zastosowania w przypadku omawianego zadania. Z powodzeniem można rozwiązać problem przy użyciu metody elementów skończonych, elementów brzegowych i różnic skończonych. Przedstawiony algorytm metody aproksymacyjnej jest ważny dla przypadku, gdy $x < vt$. Jeżeli $x > vt$, to belka wykonuje drgania swobodne z warunkami początkowymi w chwili $t = l/v$. Warunki te wynikają z poprzedniego rozwiązania. Równania ruchu w tym przypadku mają stałe macierze.

7. ANALIZA NUMERYCZNA NIELINIOWYCH WSPÓLCZYNNIKÓW $A(\xi) - F(\xi)$ W PRZEKSZTAŁCONYM RÓWNIANIU RUCHU BELKI TIMOSHENKI

Jak już zaznaczono w rozdziale pierwszym, dynamiczne zagadnienie belki Timoshenki w bogatej literaturze przedmiotu nie jest nowe. W pracy przeglądowej [58] do połowy 1971 roku omawia się 352 pozycje z zakresu belek oraz 232 pozycje z zakresu dynamiki płyty o średniej grubości. W języku polskim znana jest praca przeglądowa WILMAŃSKIEGO [59] oraz obszerne trzy opracowania BYSTRZYCKIEGO [60-62].

Oddzielną liczną grupę prac z zakresu zarówno drgań stacjonarnych jak i niestacjonarnych nieskończonej belki Timoshenki na podłożu sprężystym, stanowią rozprawy BOGACZA i jego szkoły [63-71]. Przeglądową pracą odnośnie do problemu ruchomych obciążeń inercyjnych na belkach i płytach jest obszerna rozprawa autora [72]. Elementy tego zagadnienia przewijają się również w klasycznej już dzisiaj monografii FRYBY [73].

W tej licznej literaturze poświęconej ruchomym obciążeniom przewija się ciągle problem prędkości krytycznej obciążenia. Przynajmniej dwie definicje tej wielkości da się jednoznacznie ustalić. Jeśli mamy do czynienia z ruchomym ciągłym obciążeniem inercyjnym, to przy pewnej prędkości ruch belki jest niestateczny, a owa prędkość wyznaczona po raz pierwszy przez BOŁOTINA [24-25] nosi nazwę prędkości krytycznej w sensie dynamicznej utraty stateczności. Zatem mamy do czynienia z dwoma

różnymi pojęciami prędkości krytycznej: prędkości rezonansowe wyznaczone przez KRYŁOWA [74-75] i TIMOSHENKĘ [76-77], po przekroczeniu których drgania konstrukcji są w dalszym ciągu stateczne, i prędkości krytyczne Bołotina określające pewne strefy rozwiązania, w których ruch konstrukcji jest niestateczny. Te ostatnie prędkości zależą zarówno od masy konstrukcji, jak również od masy ruchomego obciążenia.

W przypadku belki Timoshenki rozpatrywanej w pracy, prędkości krytyczne w sensie Bołotina zostały wyznaczone w pracy autora [78]. Opierając się na wynikach badań JAKUSZEWA zawartych w rozprawie [79], uogólnioną siłę $Q_i(t)$ w pracy [78] nie wyznaczono ze wzoru (2.10)₁ niniejszej rozprawy, a określono ją z następującego rozumowania. Zastępczą siłę N podaną wzorem (2.5) zmodyfikowano w ten sposób, że siłę bezwładności B nie wyznaczono przy zastosowaniu wzoru Renaudota (2.8), ale zgodnie z różniczkową postacią zasady zachowania pędu założono mianowicie, że siła bezwładności równa jest zmianie pędu $M \frac{dw}{dt}$ w czasie dt

$$(7.1) \quad N = P\delta(x - vt) - \frac{d}{dt} \left[M\delta(x - vt) \frac{dw}{dt} \right],$$

gdzie $\delta(x - vt)$ oznacza funkcję Diraca.

W takim podejściu uwzględnia się pełną zmienność poruszającego się po belce ruchomego obciążenia inercyjnego.

Uwzględniając (7.1) w równaniach (2.2) otrzymuje się ostatecznie, tak samo jak (2.21), przekształcone równanie ruchu, jednak o innych współczynnikach $A(\xi) - F(\xi)$ niż te w (2.22). Co więcej, równanie ruchu w tym przypadku ma łatwo wyznaczalną całkę szczególną. Analiza tej całki prowadzi do wyznaczenia dwu pasm prędkości krytycznych ruchomej masy określonych w pracy [78] w następujący sposób:

$$(7.2) \quad v_{kr}^2 = 2(c_1 c_2)^2 [A \pm \sqrt{B}]^{-1},$$

$$A = \left[c_1^2 + c_2^2 + \frac{l^2 c_2^2}{r^2 \pi^2} + 2\mu \left(c_1^2 + \frac{l^2 c_2^2}{r^2 \pi^2} \right) \right],$$

$$B = \left[c_1^2 + c_2^2 + \frac{l^2 c_2^2}{r^2 \pi^2} + 2\mu \left(c_1^2 + \frac{l^2 c_2^2}{r^2 \pi^2} \right) \right]^2 - 4(1 + 2\mu)c_1^2 c_2^2.$$

Łatwo zauważyć, że to ostatnie wyrażenie jest funkcją współczynnika $\mu = M/ml$, zależy więc od masy obciążenia i masy belki. Wprowadzając

wielkości bezwymiarowe

$$(7.3) \quad c_0 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\kappa G}{E} = \frac{\kappa}{2(1+\nu)},$$

$$\sigma_0 = 1 + \frac{l^2 c_2^2}{r^2 c_1^2 \pi^2}.$$

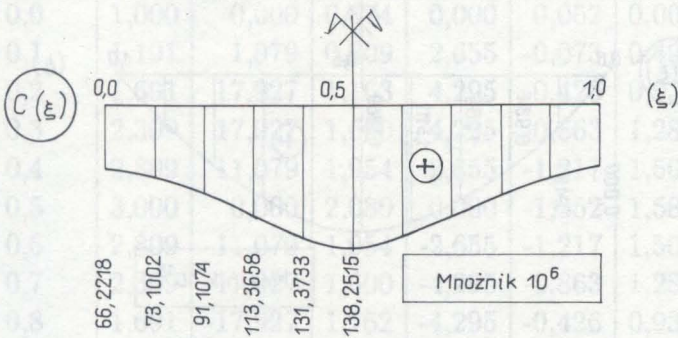
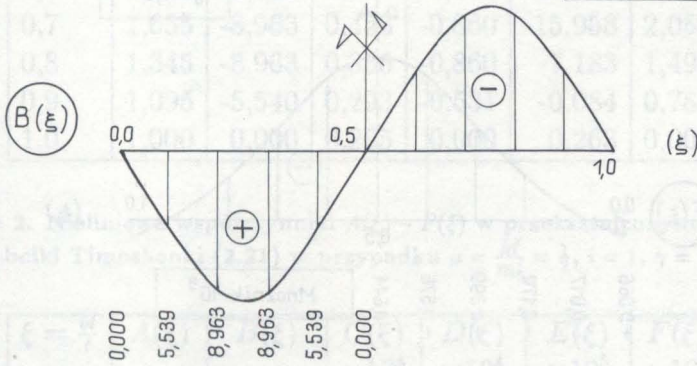
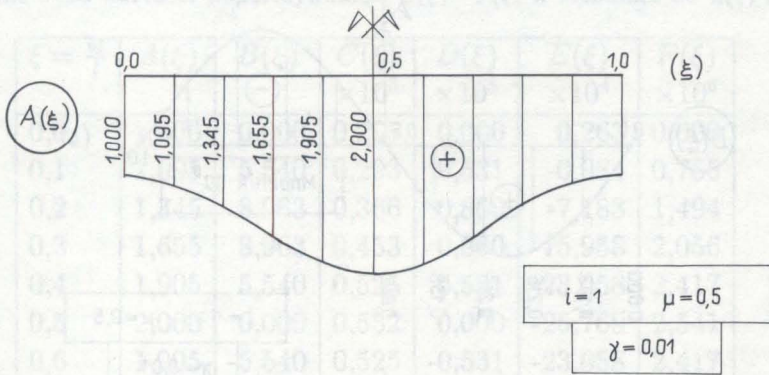
Wyrażenie (7.2) można napisać w następującej postaci przydatnej do konkretnych obliczeń i zastosowań:

$$(7.4) \quad v_{kr}^2 = \frac{2c_2^2}{(1+2\mu)\sigma_0 + c_0 \pm \sqrt{[(1+2\mu)\sigma_0 + c_0]^2 - 4(1+2\mu)c_0}}.$$

Zasadniczym celem tego podrozdziału rozprawy jest numeryczne rozeznanie wartości i kształtu nieliniowych współczynników $A(\xi) - F(\xi)$ w przekształconym równaniu ruchu, opisanych wzorami (2.22) w funkcji takich bezwymiarowych parametrów jak ξ , μ i $\gamma = v/v_{kr}^1$.

Do rozważań przyjmuje się belkę Timoshenki o przekroju prostokątnym oraz o $h/l = 0,2$, gdzie h jest wysokością przekroju poprzecznego. Następnie wylicza się prędkości krytyczne v_{kr}^1 opisane wzorem (7.4) dla $\nu = 0,167$ (żelbet) i $\nu = 0,3$ (stal) oraz dla kilku wartości $\mu = M/ml$. W przypadku belki żelbetowej np. przy $\mu = 10$, $c_2 = 2,240,6$ [m/s] otrzymuje się $v_{kr}^1 = 510,9$ [km/h], co może już stanowić rzeczywistą prędkość współczesnych super szybkich pojazdów komunikacyjnych. Współczynnik $\mu = 10$ jest jednak nierealny w praktyce inżynierskiej. Wyliczenia współczynników $A(\xi) - F(\xi)$ przeprowadza się ustalając $\mu = \frac{1}{2}$ oraz $\gamma = 0,01$ i $\gamma = 0,5$; te dwie ostatnie wielkości odpowiadają odpowiednio małej i dużej prędkości ruchomej, skupionej masy na belce. Przy $\mu = \frac{1}{2}$ i $\nu = 0,3$ ze wzoru (7.4) otrzymuje się $v_{kr} = 0,2143c_2$. Przyjmując $\gamma = 0,01$, otrzymujemy prędkość rzeczywistą $v = 11,2$ [m/s] = 40,5 [km/h], a przy $\gamma = 0,5$ mamy $v = 562$ [m/s] = 2,023 [km/h]. Współczynnik κ przyjęto równy $5/6$, zaś $r = h/\sqrt{12}$. Obliczenia współczynników $A(\xi) - F(\xi)$ przeprowadzono na mikrokomputerze układając odpowiedni program.

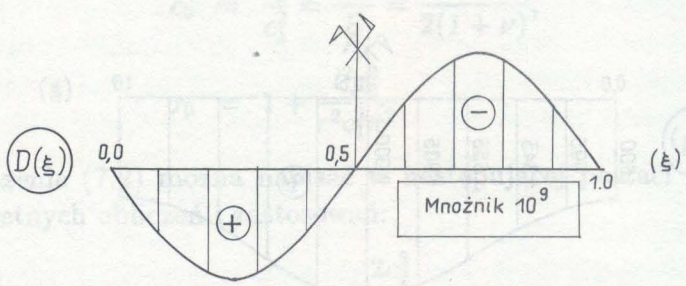
Na rysunkach 6 i 7 podano przykładowo wykresy funkcji $A(\xi) - F(\xi)$ przy założeniu $\mu = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0,01$ oraz $i = 1$. Jak widać, współczynniki $A(\xi)$, $C(\xi)$, $E(\xi)$ i prawa strona równania (2.21) określona współczynnikiem $F(\xi)$ są wykresami symetrycznymi względem $\xi = 0,5$. Współczynniki $B(\xi)$ i $D(\xi)$ stojące przed nieparzystymi pochodnymi trzeciego



Rys. 6. Wykresy funkcji $A(\xi)$, $B(\xi)$ i $C(\xi)$. Są to współczynniki przy czwartej, trzeciej i drugiej pochodnej w przekształconym równaniu ruchu (2.21) belki Timoshenki

wielkości bezwymiarowe

(7.3)



(7.4)

0,000
0,133
0,215
0,215
0,133
0,000

$i = 1$ $\mu = 0,5$

$\gamma = 0,01$

Zasadniczym elementem tego podręcznika jest wyliczenie wartości i kształtu funkcji $A(\xi) = Z(\xi)$ w przekształconym równaniu ruchu (2.22) w funkcji takich bezwymiarowych parametrów $\mu = M/l$ i $\gamma = \rho l \omega^2$.

Do rozwiązania tych równań użyto metody różnicowej (2.18) z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$.

Następnie wyliczono wartości funkcji $B(\xi)$ i $C(\xi)$ dla $\mu = 0,167$ i $\gamma = 0,5$ (stała $\omega = 10,5$ [rad/s] otrzymano z $\omega = 10,5$ [rad/s] przy $\mu = M/l$).

W przypadku belki $\mu = 10$ jest jedyną operacją arytmetyczną. Wyznaczenie współczynników super-ejczyk jest powolnym i kosztownym procesem.

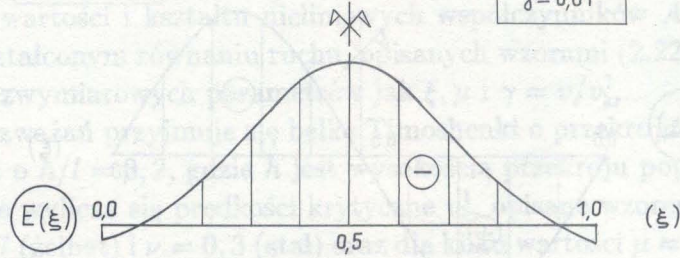
Współczynnik $\mu = 10$ jest jedyną operacją arytmetyczną. Wyznaczenie współczynników super-ejczyk jest powolnym i kosztownym procesem.

Przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$ otrzymujemy $\omega = 0,2143$ [rad/s] i $\omega = 40,5$ [rad/s] przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$.

Przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$ otrzymujemy $\omega = 0,2143$ [rad/s] i $\omega = 40,5$ [rad/s] przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$.

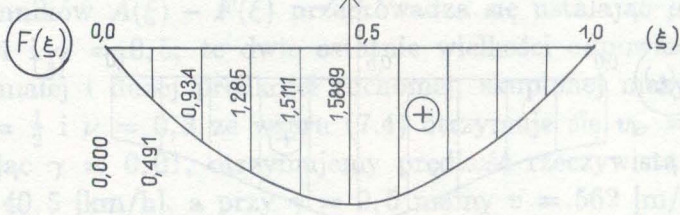
Przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$ otrzymujemy $\omega = 0,2143$ [rad/s] i $\omega = 40,5$ [rad/s] przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$.

Przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$ otrzymujemy $\omega = 0,2143$ [rad/s] i $\omega = 40,5$ [rad/s] przy $\mu = 10$ i $\gamma = 0,01$.



+0,066
-0,017
-0,179
-0,399
-0,576
-0,644

Mnożnik 10^9



0,000
0,491
0,934
1,285
1,511
1,5899

Mnożnik 10^{13}

Rys. 7. Wykresy funkcji $D(\xi)$, $E(\xi)$ i $F(\xi)$. Są to współczynniki przy pierwszej pochodnej, samej funkcji $f(\xi)$ i po prawej stronie w przekształconym równaniu ruchu (2.21) belki Timoshenki

Tablica 1. Nieliniowe współczynniki $A(\xi) - F(\xi)$ w przekształconym równaniu ruchu belki Timoshenki (2.21) w przypadku $\mu = \frac{M}{ml} = 1,0$, $i = 1$, $\gamma = \frac{v}{v_{kr}} = 0,5$.

Widoczne duże wartości współczynników $C(\xi) - F(\xi)$ w stosunku do $A(\xi)$ i $B(\xi)$.

$\xi = \frac{vt}{l}$	$A(\xi)$	$B(\xi)$	$C(\xi)$ $\times 10^5$	$D(\xi)$ $\times 10^5$	$E(\xi)$ $\times 10^4$	$F(\xi)$ $\times 10^6$
0,0	1,000	0,000	0,265	0,000	0,263	0,000
0,1	1,095	5,540	0,293	0,531	-0,084	0,785
0,2	1,345	8,963	0,366	0,860	-7,183	1,494
0,3	1,655	8,963	0,453	0,860	-15,958	2,056
0,4	1,905	5,540	0,525	0,531	-23,058	2,417
0,5	2,000	0,000	0,552	0,000	-25,769	2,541
0,6	1,905	-5,540	0,525	-0,531	-23,058	2,417
0,7	1,655	-8,963	0,453	-0,860	-15,958	2,056
0,8	1,345	-8,963	0,366	-0,860	-7,183	1,494
0,9	1,095	-5,540	0,293	-0,531	-0,084	0,785
1,0	1,000	0,000	0,265	0,000	0,263	0,000

Tablica 2. Nieliniowe współczynniki $A(\xi) - F(\xi)$ w przekształconym równaniu ruchu belki Timoshenki (2.21) w przypadku $\mu = \frac{M}{ml} = \frac{1}{2}$, $i = 1$, $\gamma = \frac{v}{v_{kr}} = 1,0$.

$\xi = \frac{vt}{l}$	$A(\xi)$	$B(\xi)$	$C(\xi)$ $\times 10^4$	$D(\xi)$ $\times 10^4$	$E(\xi)$ $\times 10^5$	$F(\xi)$ $\times 10^5$
0,0	1,000	0,000	0,674	0,000	0,062	0,000
0,1	1,191	1,079	0,809	2,655	-0,073	0,490
0,2	1,691	17,927	1,163	4,295	-0,426	0,933
0,3	2,309	17,927	1,600	4,295	-0,863	1,284
0,4	2,809	11,079	1,954	2,655	-1,217	1,509
0,5	3,000	0,000	2,089	0,000	-1,352	1,587
0,6	2,809	-11,079	1,954	-2,655	-1,217	1,509
0,7	2,309	-17,927	1,600	-4,295	-0,863	1,284
0,8	1,691	-17,927	1,162	-4,295	-0,426	0,933
0,9	1,191	-11,079	0,809	-2,655	-0,073	0,490
1,0	1,000	0,000	0,674	0,000	0,062	0,000

i pierwszego rzędu są antysymetryczne względem $\xi = 0,5$. Zwraca również uwagę fakt małych wartości rzędnych $A(\xi)$ i $B(\xi)$ w stosunku do rzędnych pozostałych wykresów. Ze wzrostem "i" wszystkie współczynniki zachowują oscylacyjny charakter zmniejszając odpowiednio "okres", zwiększając "częstotliwość" przy nie zmienionej maksymalnej lub minimalnej amplitudzie.

W tablicy 1 i 2 podaje się wartości numeryczne tych współczynników dla $\mu = 0,5$, $\gamma = 0,5$ i $i = 1$ odpowiednio – tablica 1 oraz $\mu = 1$, $\gamma = 1$ i $i = 1$ – tablica 2.

Tablica 2 określa wartości tych współczynników przy $v = v_{kr}^1$ bowiem $\gamma = 1$. Również i w tych przypadkach charakter oscylacyjny funkcji $A(\xi) - F(\xi)$ nie ulega zmianie, a wykresy ich są podobne do tych podanych na rys. 6 i 7.

8. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy wykazano uniwersalność zastosowania równań Lagrange'a drugiego rodzaju do określenia równań ruchu belki Timoshenki pod wpływem ruchomego masowego obciążenia skupionego. Owa uniwersalność polega na tym, że równania Lagrange'a stosuje się z powodzeniem do modelu ciągłego opisanego układem równań różniczkowych i do modelu dyskretnego belki opisanego układem równań o skończonym wymiarze współrzędnej uogólnionej. Równania różniczkowe mają zmienne współczynniki i macierze przy wszystkich pochodnych i jedyną drogą ich rozwiązania jest całkowanie numeryczne. Ramy tej pracy nie pozwalają na przykład obliczeniowy będący próbą porównania wyników rozwiązania modelu ciągłego i dyskretnego. Przykład taki będzie przedmiotem innej pracy. W opracowaniu podano również sposób UFLANDA [57], który zezwala na zastąpienie układu równań różniczkowych drugiego rzędu jednym przekształconym równaniem ruchu belki czwartego rzędu ze względu na czas i współrzędną geometryczną. Model ciągły belki rozważano również w przypadku, kiedy nie uwzględnia się pełnego członu sił bezwładności ruchomej masy. Zastosowany model uwzględnienia inercji ruchomego obciążenia, to tzw. podejście Inglisa-Bołotina-Morgajewskiego. W zakończeniu należy nadmienić, że wszystkie szczególne przypadki rozwiązań od takich czy innych obciążeń oraz dodatkowe wpływy podane w pierwszej części pracy dają się przenieść

bez problemu do modelu dyskretnego. Metodę aproksymacyjną w modelu dyskretnym zastosowano przy dwóch różnych sformułowaniach równania więzów geometrycznych przekroju belki. Pierwszy z tych sposobów wydaje się być bardziej racjonalny i łatwiejszy do konkretnej realizacji komputerowej.

W opracowaniu badano również numerycznie nieliniowe bezwymiarowe współczynniki $A(\xi) - F(\xi)$ w przekształconym równaniu ruchu opisującym drgania belki. Przytoczono również wzory na prędkości krytyczne belki Timoshenki w sensie Bołotina.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. RADAKOVIC, *Über die Bewegung einer Saite unter der Entwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt*, "Sitzungsberichte der mathematische - naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften ("Wiener Berichte") 108, 577-612, Wien 1899.
2. С.П. Тимошенко, О вынужденных колебаниях призматических стержней, Изд. Киевского политехн. ин-та, 4, 205-248, 1909.
3. Я.Г.Пановко, Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки, Труды Ленинградской Краснознаменной военно-воздушной инженерной Академии, вып. 17, 8-38, 1948.
4. С.И. Конашенко, К вопросу о вынужденных поперечных колебаниях простой балки при равномерном движении по балке силы и группы сил, Труды Днепропетровского ин-та инж. ж-д. транспорта, вып. 25, 275-300, 1956.
5. С.И. Конашенко, О вынужденных поперечных колебаниях простой балки при неравномерном движении по ней постоянной силы, Научные сообщения, No 3(7), Днепропетровского ин-та инж. ж-д. транспорта, Днепропетровск, 3-15, 1958.
6. С.И. Конашенко, Приближенное рассмотрение задачи о колебаниях балки при движении по ней груза, Труды Днепропетровского ин-та инж. ж-д. транспорта, 31, стр. 55-92, 1961.
7. А.Б.Моргачевский, И.Ф.Кожемякина, Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения, Динамика и прочность машин, 23, 23-27, 1976.
8. A.SCHALLENKAMP, *Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten*, Ing.-Arch., 8, 3, 182-198, 1937.
9. А.А.Филлипов, Динамическое действие на балку с шарнирно-опертыми концами груза и гармонической силы, движущаяся с постоянной скоростью, Изд.АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 4, 120-125, 1964.

10. А.А.Филлипов, С.С.Кохманюк, Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни, Наукова Думка, Киев 1967.
11. А.А.Филлипов, Колебания деформируемых систем, Машиностроение, Москва 1970.
12. J.NALESZKIEWICZ, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch.Mech.Stos., 5, 2, 517-544, 1953.
13. J.LANGER, *Analiza dynamiczna przęsla mostowego obciążonego ruchomym pojazdem*, Arch.Inż.Łąd., 20, 4, 591-599, 1974.
14. J.LANGER, M.KLASZTORNY, *Dynamika belki mostowej obciążonej masą ruchomą rozłożoną nierównomiernie*, Arch.Inż.Łąd., 26, 4, 657-667, 1980.
15. J.LANGER, *Dynamika budowlı*, Wyd.Polit.Wrocławskiej, Wrocław 1980.
16. M.KRASIŃSKI, J.NIZIOŁ, *Drgania belki z uwzględnieniem ruchomej masy*, Czasopismo Techniczne, 81, 8, 20-27, 1977.
17. А.Ц.Димитриев, Колебания балки Тимошенко при движении сосредоточной силы, Труды Ленинградского Инж. Строит.Инст., 41-48, 1983.
18. А.Б.Моргаевский, Л.П.Карпов, Г.Ф.Никитин, Об исследовании величины динамического воздействия подвижной нагрузки с учетом высших гармоник, Исследования по теории сооружений, 16, 15-14, 1968.
19. А.Ц.Димитриев, Поперечные колебания шарнирно опертой балки под действием движущейся силы с учетом волновых процессов, Труды Ленинградского Института Железно-дорожного Транспорта, вып. 343, 131-140, 1972.
20. S.CHONAN, *Moving harmonic load on an elastically supported Timoshenko beam*, ZAMM, 59, 9-15, 1978.
21. S.CHONAN, *The elastically supported Timoshenko beam subjected to an axial force and a moving load*, Int.J.Mech.Sci., 17, 573-581, 1975.
22. Д.Б.Вольпер, А.Б.Моргачевский, О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения, Исследования по теории сооружений, 12, 21-42, 1963.
23. С.Е.INGLIS, *A mathematical treatise on vibrations in railway bridges*, Cambridge University Press, 1934.
24. В.В.Волотин, О воздействии подвижной нагрузки на мосты, Труды МИИТ, 74, 269-296, 1950.
25. В.В.Волотин, О динамическом расчете железнодорожных мостов с учетом массы подвижной нагрузки, Труды МИИТ 76, 87-107, 1952.
26. А.Ц.Димитриев, Поперечные колебания однопролетной балки при движении изгибающего момента, Прикладная Мех., 14, 1, 111-115, 1978.
27. W.SZCZEŚNIAK, *Drgania belki Timoshenki pod wpływem równomiernie rozłożonego, inercyjnego, ciągłego obciążenia ruchomego*, Prace Nauk. Polit.Warszawskiej, Budown., z.112, 77-118, Warszawa 1990.

28. А.Б.Моргаевский, Исследование колебаний балки под действием подвижной нагрузки в виде полуполосы при больших скоростях, Исследования по теории сооружений, 13, 105-120, 1964.
29. А.Б.Моргаевский, Т.К.Кучма, О динамическом воздействии подвижной нагрузки, распределенной на участке конечной длины, Динамика и прочность машин, 12, 72-81, 1971.
30. А.Ц.Дмитриев, Вертикальные колебания простой балки под действием движущегося груза с учетом неровностей пути, Труды Ленинградского Института Инж.Ж.-д. Транспорта, 257, 54-64, 1967.
31. А.Ц.Дмитриев, Вертикальные колебания простой балки под действием движущегося системы сил с учетом неровностей пути, Труды Ленинградского Института Инж.Ж.-д. Транспорта, 169-179, 1966.
32. А.Ц.Дмитриев, Влияние начальных неровностей пути на динамику балки при движении нагрузки, Строит.механика и расчет сооружений, 5, 64-66, 1970.
33. Z.KĄCZKOWSKI, *Dynamika prętów i ustrojów prętowych, cz.II*, Mechanika Techniczna, tom IX, Wytrzymałość elementów konstrukcyjnych, PWN, s.188, Warszawa 1988.
34. W.SZCZEŚNIAK, *Drgania swobodne lepkosprężystej belki Timoshenki i tarczy*, Rozpr.Inż., 22, 4, s. 669-687, 1974.
35. М.Майзель, Колебания балки при неравномерном движении распределенной нагрузки, Научные Труды Днепропетровского Металлургического Института, 12, 121-124, 1959.
36. М.Ю.Майзель, Колебания балок под действием нагрузки двигающейся с переменной скоростью, Сб. Научных Трудов Днепропетровского Metallург. Института, 34, 63-71, 1958.
37. А.Ц.Дмитриев, Вертикальные колебания шарнирной балки при движении по ней сосредоточенной силы с переменной скоростью, Труды Ленинградского Инст.Инж.Ж.-д. транспорта, 305, 156-172, 1970.
38. Г.Ф.Никитин, О динамическом эффекте подвижной нагрузки при больших переменных скоростях движения с учетом высших гармоник, Сопротивление материалов и теория сооружений, 6, 77-85, Киев 1968.
39. А.Ц.Дмитриев, Динамика балки при движении сосредоточенной нагрузки с изменяющимися параметрами, Динамика и прочность машин, 32, 63-69, Харьков 1980.
40. RENAUDOT, *Etude de l'influence des charges en mouvement sur la résistance, des ponts métallique a poutres droites*, Annales des Ponts et Chaussées, 1, p. 145, 1861.
41. W.C.HURTY, M.F.RUBINSTEIN, *On the effect of rotatory inertia and shear in beam vibration*, J.of the Franklin Inst., 278, 2, p.124-132, 1964.
42. W.C.HURTY, M.F.RUBINSTEIN, *Dynamics of structures*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1964.

43. F.Y.CHENG, *Vibrations of Timoshenko beams and frameworks*, J. of the Struct. Div. Proc. of the ASCE, ST 3, p.551-571, 1970.
44. Z.KĄCZKOWSKI, *O rozwiązaniu pewnego dynamicznego problemu kontaktowego metodą elementów czasoprzestrzennych*, Zesz. Nauk. Pol.Poz., Budown., 31, s. 63-72, 1988.
45. J.LANGER, *Studium dynamiki przęśła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem*, Arch.Inż.Ląd., 19, 2, s. 255-262, 1973.
46. J.LANGER, M.KLASZTORNY, *Drgania złożonego układu belkowego pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym*, Arch.Inż.Ląd., 27, 2, 261-279, 1981.
47. J.LANGER, *Thumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu*, Arch.Inż.Ląd., 23, 3, 359-369, 1979.
48. M.KLASZTORNY, *Drgania jednotorowych mostów kolejowych wywołane ruchem pociągów z dużymi prędkościami*, Prace naukowe Inst. I. L. Nr 36, Monografie 13, Polit. Wrocł., Wrocław 1987.
49. T.BOROWICZ, *Metoda elementów skończonych w analizie drgań konstrukcji poddanych działaniu obciążeń ruchomych*, Zesz. Nauk. Polit. Świętokrzyskiej, budown., 15, Kielce 1983.
50. T.BOROWICZ, *Wybrane zagadnienia dynamiki konstrukcji poddanych działaniu obciążeń ruchomych*, Zesz.Nauk. Polit. Świętokrzyskiej, budown., 25, Kielce 1988.
51. T.BOROWICZ, *Wytężenie belek pod obciążeniem ruchomym*, Arch. Inż. Ląd., 24, 2, 219-235, 1978.
52. M.KLASZTORNY, J.LANGER, *Drgania belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem*, Prace Nauk. Inst.Inż.Ląd. Polit. Wrocławskiej, Nr 26, Konferencje, Nr 8, 105-112, 1978.
53. P.ŚNIADY, *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*, Prace Nauk. Inst. Inż. Ląd. Polit. Wrocławskiej Nr 21, Monografie Nr 5, 1976.
54. W.SZCZEŚNIAK, *Warunki początkowe w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki*, Zesz.Nauk. Politechniki Warszawskiej, Budown., z. 108, 99-143, Warszawa 1990.
55. R.A.ANDERSON, *Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory of bending*, J.Appl.Mech. 20, 4, p.504-510, 1953 (and discussion J.Appl.Mech., 1954).
56. J.MILKOWITZ, *Flexural wave solution of coupled equations representing the more exact theory of bending*, J.Appl.Mech., 20, 75, 511-514 (and discussion J.Appl.Mech., 1954).
57. Я.С.Уфлянд, *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикл.Мат. и Мех., 12, 287-300, 1949.
58. Э.И.Григолюк, Т.И.Селезов, *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*, Итоги Науки и Тех. Твердых Деформируемых, Тел, Москва 1973.
59. K.WILMAŃSKI, *Obciążenie dynamiczne belek. Belka Timoshenki*, Mech. Teor. i Stos., 2, 2, s. 83-96, 1964.

60. J. BYSTRZYCKI, *Równania ruchu belek sprężystych. Belka Timoshenki*, IPPT PAN, Warszawa 1977.
61. J. BYSTRZYCKI, *Metody rozwiązywania równań belki Timoshenki*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1977.
62. J. BYSTRZYCKI, A. PIELORZ, *Wyznaczanie naprężeń w belce sprężystej obciążonej silami krótkotrwałymi*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1978.
63. R. BOGACZ, S. KALISKI, *Stability of motion of nonlinear oscillators moving along a beam on an elastic foundation*, Proc. Vibr.Probl., 5, 1964.
64. R. BOGACZ, K. POPP, *Dynamics and stability of train-track-systems*, Proc. of the second Intern. Conf. on "Recent Advances in Struct. Dyn.", p. 709-721, Southampton 1984.
65. R. BOGACZ, *On dynamics and stability of continuous systems subjected to a distributed moving load*, Ing.-Arch., 53, 243-255, 1983.
66. R. BOGACZ, S. NOWAKOWSKI, *On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system*, Acta Mechanica, 61, 117-127, 1986.
67. R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, *O belce Bernoulliego-Eulera spoczywającej na lepkosprężystym podłożu poddanej działaniu ruchomego oscylacyjnego obciążenia*, Prace IPPT PAN, 38, 1986.
68. R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, *On the wave solution for beam on a viscoelastic foundation subjected to a travelling and oscillating force*, Lect. Notes in Engin., Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and Their Applic. Proc. Euromech. Colloq. 219, 245-260, 1987.
69. R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP, *On the generalization of Mathews' problem of the vibrations of a beam on elastic foundation*, ZAMM, 69, 8, 243-252, 1989.
70. R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP, *Influence of beam models on the solutions of the generalized Mathews' problem*, ZAMM, 69, 5, 320-321, 1989.
71. R. BOGACZ, T. KRZYŻYŃSKI, K. POPP, *On the group-phase velocity relations for continuous systems under moving loads*, ZAMM, 70, 4, 202-203, 1990.
72. W. SZCZEŚNIAK, *Inercyjne obciążenia ruchome na belkach i płytach. Przegląd podstawowych pozycji literatury*, Prace Nauk. PW, Budown., 112, 7-75, Warszawa 1990.
73. L. FRYBA, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Academia, Prague 1972.
74. A. KRILOFF, *Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben*, Mathematische Annalen, 61, 211-234, 1905.
75. А.Н. Крылов, *О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах*, Известия морской Акад., ОПБ, 2, 1913.
76. С.П. Тимошенко, *Прочность и колебания элементов конструкции*, Избранные работы под редакцией Э.И. Григолюка, Наука, Москва, 1975.

77. С.П.Тимошенко, Статические и динамические проблемы теории упругости, избранные работы под ред. Э.И.Григолюка, Наука, Москва 1975.
78. W.SZCZEŚNIAK, *O uściślonym modelu uwzględnienia ruchomego inercyjnego obciążenia na belce Timoshenki*, Prace Nauk. PW, Budown., (w druku).
79. Н.З.Якушев, Некоторые задачи динамики балок под действием нагрузок, Исследования по теории пластин и оболочек, Сборник, 12, 199-220, Издат. Казанского Университета, 1974.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ БАЛКИ ТИМОШЕНКО С ПОДВИЖНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ

В работе предметом анализа является применение уравнения Лагранжа второго рода к выводу уравнения движения балки Тимошенко с подвижной сосредоточенной инерционной нагрузкой. Уравнения Лагранжа второго рода применяются к постоянной и приглушенной (дискретной) модели балки, удовлетворяющей граничным или другим условиям. Уравнение движения в постоянной модели является дифференциальным уравнением четвертого порядка в частых производных, все коэффициенты которого изменяются во времени. В работе приводятся тоже варианты этого уравнения. В приглушенной (дискретной) модели уравнения имеют матрицы, которые изменяются во времени. Метод решения дискретной задачи заключается в аппроксимационном способе обобщенных координат.

SUMMARY

APPLICATION OF THE SECOND KIND-LAGRANGE EQUATIONS TO DYNAMIC PROBLEMS OF A TIMOSHENKO BEAM UNDER MOVING INERTIAL LOAD

Problem of a mass moving at a constant velocity along a Timoshenko beam of constant cross-section is analyzed. Inertia effects of the moving mass and of the beam itself are applied to the continuous and discrete models of the beam. The resulting equation describing the vibration of the beam is a linear differential equation with variable coefficients.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1990 r.