

STATECZNOŚĆ PODWÓJNIE ZAKRZYWIONYCH POWŁOK KOMPOZYTOWYCH

ALEKSANDER M U C (KRAKÓW)

Praca jest syntetycznym przeglądem badań teoretycznych i eksperymentalnych stateczności podwójnie zakrzywionych powłok kompozytowych. Szczegółowo przedyskutowano różnorodne warianty analizy stateczności dotyczące stosowanych hipotez kinematycznych w teorii powłok kompozytowych jak i postaci macierzy sztywności oraz wpływ tych czynników na wartość obciążeń krytycznych. Powyższe rozważania zilustrowano przykładami analizy numerycznej oraz eksperymentalnej.

1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się gwałtowny rozwój zastosowań różnorodnych materiałów kompozytowych w technice. W niniejszej pracy poprzez materiały kompozytowe rozumiemy ciągle włókna umieszczone w osnowie polimerowej. Podstawowymi zaletami tych materiałów są: niski stosunek gęstości do wytrzymałości, możliwość wykorzystania anizotropii materiału w celu zapewnienia odpowiednich własności wytrzymałościowych konstrukcji oraz łatwość formowania kształtu tej konstrukcji. Wadami ich są: jeszcze stosunkowo wysoki koszt w porównaniu z materiałami tradycyjnymi (najniższy dla kompozytów wzmacnianych włóknami szklanymi) oraz duży rozrzut własności wytrzymałościowych zależny od powtarzalności procesu wytwórczego. Stateczność jest dla kompozytów, podobnie jak dla materiałów izotropowych, jednym z istotnych czynników, który musi być uwzględniany przy projektowaniu konstrukcji. Jednakże, anizotropia rozważanego materiału powoduje, iż analiza tego typu konstrukcji, nawet w zakresie sprężystym, pociąga za sobą dużo więcej trudności niż dla materiałów izotropowych.

Przedmiotem poniższej pracy jest charakterystyka podstawowych czynników oraz ich wpływ na obciążenia krytyczne osiowo-symetrycznych, sprężystych powłok kompozytowych o podwójnej krzywiznie. Przedyskutowane będą również pewne aspekty analizy teoretycznej, numerycznej oraz eksperymentalnej tego problemu.

2. ZWIĄZKI KINEMATYCZNE

Istota relacji geometrycznych w problemach stateczności powłok polega na konieczności dokładnego opisu przemieszczeń i naprężeń w stanie przedwyboczeniowym. Generalnie, dla izotropowych, sprężystych powłok cienkościennych, przyjmuje się, że teoria SANDERSA [1], oparta na hipotezie Love'a-Kirchoffa i uwzględniająca duże przemieszczenia, umiarkowane obroty normalnej względem powierzchni środkowej i małe odkształcenia, daje wystarczającą zgodność z eksperymentem. Istnieją oczywiście przypadki (niektóre z nich dyskutowane są przez UDDINE'A [2]), gdzie jest konieczne rozróżnienie konfiguracji odkształconej i nieodkształconej, tzn. wprowadzenie dużych odkształceń; są one jednak sporadyczne.

Dla powłok kompozytowych problem ten nie jest jednoznacznie rozstrzygnięty. Podstawową kwestią jest sam charakter powłoki. Jest ona mianowicie budowana z wielu warstw posiadających różne własności mechaniczne w pewnym globalnym układzie współrzędnych. W celu opisu tych własności stosuje się najczęściej dwa podejścia globalne i lokalne. W ujęciu globalnym związki kinematyczne wyprowadza się w jednym globalnym układzie współrzędnych, związanym z powierzchnią środkową powłoki. Różne własności mechaniczne warstw uwzględniane są dopiero na etapie tworzenia macierzy sztywności. Ujęcie lokalne pozostaje w większej zgodzie z intuicją i polega na budowaniu relacji kinematycznych, w pewnym lokalnym układzie współrzędnych, dla każdej z warstw laminatu oddzielnie. Jednakże tutaj przejście do globalnego opisu laminatu jako całości zbudowanej z wielu warstw, wymaga wykorzystania związków fizycznych lub równań równowagi, w celu uśrednienia wielkości kinematycznych wzdłuż grubości powłoki.

W zagadnieniach statyki i stateczności powłok kompozytowych stosuje się z reguły dwie hipotezy kinematyczne: Love'a-Kirchoffa (teoria

trójparametrowa) oraz Timoshenki, uwzględniającą poprzeczne ścinanie (teoria pięcioparametrowa). Hipotezy te mogą być wprowadzone zarówno w ujęciu lokalnym jak i globalnym; to w jakim ujęciu są wprowadzane implikuje bezpośrednio liczbę parametrów kinematycznych opisujących deformację powłok. Hipoteza Love'a–Kirchhoffa w ujęciu lokalnym wprowadza $3N$ zmiennych (N oznacza liczbę warstw). Takie ujęcie zostało zaproponowane np przez ŁAŻKO [3]. W ujęciu globalnym zastosowanie tej hipotezy prowadzi do 3 zmiennych (przemieszczeń) definiujących deformację powierzchni środkowej powłoki. Hipoteza kinematyczna uwzględniająca ściśliwość i obroty elementu normalnego do powierzchni środkowej w ujęciu lokalnym prowadzi do $6N$ zmiennych, zaś eliminując ściśliwość elementu normalnego otrzymamy $5N$ zmiennych - patrz LIBRESCU [4]. Narzucając warunki kontaktu na przemieszczenia na sąsiednich warstwach laminatu $6N$ zmiennych redukuje się do $3N+3$ zaś $5N$ do $2N+3$. Ostatni przypadek zwany jest hipotezą linii łamanej i jest szeroko omówiony w pracach GRIGOLJUKA i KULIKOVA [5, 6] oraz w monografii GRIGORENKI, VASILENKI [7]. W globalnym ujęciu hipoteza linii łamanej sprowadza się do kinematycznej hipotezy Timoshenki, która żąda jedynie 5 zmiennych (3 przemieszczeń i 2 kątów obrotu elementu normalnego do powierzchni środkowej) do opisu deformacji powłoki kompozytowej. Należy tutaj jeszcze wspomnieć o ciekawej propozycji hipotezy kinematycznej dla warstwowych konstrukcji kompozytowych, przedstawionej przez NIEMIROVSKIEGO i REZNIKOVA [8], których model jest uogólnieniem zarówno hipotez Love'a–Kirchhoffa jak i Timoshenki. W problemach stateczności dla warstwowych powłok kompozytowych stosuje się trój- lub pięcio-parametrowe teorie powłok bazujące odpowiednio na hipotezach Love'a–Kirchhoffa i Timoshenki.

Generalnie, stwierdza się (patrz DONG i TSO [9], REDDY [10], GALIMOV [11]), że hipoteza Love'a–Kirchhoffa daje wystarczająco dokładne rezultaty, jeśli: (a) wartość ilorazu promienia do grubości powłoki (R/t) jest duża, (b) własności mechaniczne nie zmieniają się gwałtownie od warstwy do warstwy, (c) wartość ilorazu modułu Younga w kierunku włókien do modułu Kirchhoffa jest mała. Przeprowadzone obliczenia obciążeń krytycznych na podstawie liniowej teorii stateczności, zarówno dla kompozytowych płyt — NOOR [12] jak i małowyniosłych powłok — MUC [13], wykazały, że dla $R/t \leq 50$ różnica w obciążeniach krytycznych, przy zastosowaniu różnych hipotez kinematycznych, przekracza

5%. Obciążenia krytyczne wyznaczone za pomocą pięcioparametrowej teorii powłok są zawsze niższe od określonych przy użyciu hipotezy Love'a-Kirchhoffa. Zatem, z punktu widzenia obliczeń inżynierskich, konieczne jest stosowanie hipotezy kinematycznej Timoshenki nawet dla umiarkowanie cienkich struktur kompozytowych. Jednakże, pierwsze prace SZTAJERMANA [14] - 1924 i MUSZTARIEGO [15] - 1938, dotyczące związków geometrycznych dla anizotropowych powłok, opierały się na hipotezie Love'a-Kirchhoffa. Podobne założenia uczynił AMBARCUMJAN [16], którego praca uchodzi za pionierską w tej dziedzinie. Jednakże, należy zaznaczyć, że jego praca dotyczy tylko warstwowych powłok ortotropowych, a nie anizotropowych, z uwagi na przyjęte założenia upraszczające. Związki geometryczne wprowadzone w pracach dotyczących warstwowych powłok anizotropowych są uogólnieniem analogicznych relacji dla powłok izotropowych. AMBARCUMJAN [16] stosuje teorię Novozilova, DONG, PISTER i TAYLOR [17] teorię małowyniosłych powłok Donnella zaś CHENG i HO [18] równania teorii Flüggego. Podobnie sytuacja przedstawia się dla związków geometrycznych powłok warstwowych uwzględniających poprzeczne ścinanie, są one po prostu uogólnieniem identycznych relacji wyprowadzonych dla ciał izotropowych. Spośród interesujących i podstawowych prac w tej dziedzinie można wymienić prace: WHITNEY i SUN [19,20], DONG i Tso [9], REDDY [10] oraz GRIGORENKI i in. [21,22]. W podsumowaniu można stwierdzić, że z punktu widzenia analizy stateczności włóknistych powłok kompozytowych należy stosować nieliniowe związki geometryczne wyprowadzone przez SANDERSA [1] uwzględniając także efekty poprzecznego ścinania.

3. MACIERZ SZTYWNOŚCI

W analizie stateczności izotropowych powłok występuje w zasadzie jednoznaczność co do formy macierzy sztywności \mathbf{C} wiążącej naprężenia σ (lub siły wewnętrzne) z odkształceniami ϵ .

$$(3.1) \quad \sigma = \mathbf{C}\epsilon.$$

Dla kompozytowych powłok nie ma tej jednoznaczności, występują tu rozmaite postacie macierzy sztywności \mathbf{C} , które z gorszym lub lep-

szym przybliżeniem opisują deformacje konstrukcji. W ogólnym przypadku ciał anizotropowych symetryczna macierz \mathbf{C} ma 21 składowych. Jeżeli założymy symetrię ciała anizotropowego względem trzech prostopadłych płaszczyzn, to otrzymamy przypadek ciała ortotropowego. Wówczas macierz sztywności \mathbf{C} ma następującą postać:

$$(3.2) \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

i charakteryzuje się dziewięcioma niezależnymi składowymi.

Stosuje się generalnie dwa podejścia do analizy stateczności powłok kompozytowych. Pierwsze z nich, wprowadzone przez GUZA i jego współpracowników, jest szczegółowo omówione w monografii [23]. W celu opisu powłoki kompozytowej proponuje się model ciała poprzecznie izotropowego, które jest szczególnym przypadkiem ciała ortotropowego (3.2) (jedna z płaszczyzn ortotropii jest izotropowa). Macierz \mathbf{C} ma wówczas następujące składowe:

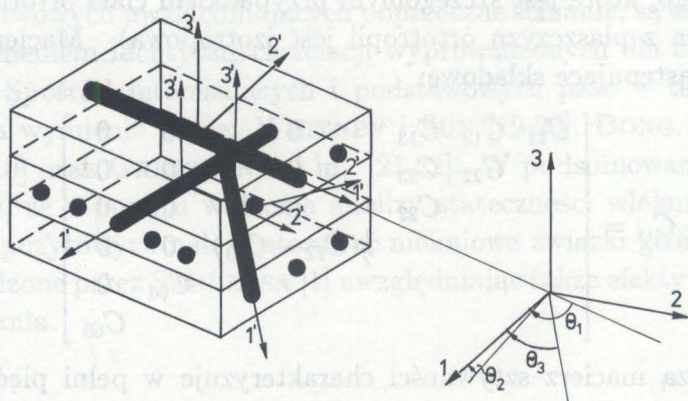
$$(3.3) \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Powyższą macierz sztywności charakteryzuje w pełni pięć stałych materiałowych: $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}$. Podejście to ma istotną zaletę, ponieważ jak przedstawiono w [23], możliwa jest trójwymiarowa analiza stateczności powłok bez stosowania jakichkolwiek upraszczających hipotez kinematycznych omawianych w paragrafie 2. Istotny problem stanowi jednak praktyczne otrzymanie dla laminatu zbudowanego z warstw włóknistego kompozytu płaszczyzny izotropii. Każda z kolejnych warstw laminatu (będąca materiałem ortotropowym) musi być przesunięta względem poprzedniej o kąt $\pi/2N$, lecz dobór liczby warstw N dający quasiizotropię jest arbitralny. Zatem realizacja techniczna modelu ciała poprzecznie izotropowego nie jest w pełni możliwa i dlatego też otrzy-

mane za pomocą tego modelu obciążenia krytyczne są również pewnym przybliżeniem rzeczywistej wartości. Jest to główny powód, że warstwę kompozytu włóknistego w laminacie opisuje się częściej jako płaskie ciało ortotropowe, tzn. eliminuje się w tym przypadku trzeci wymiar (grubość). Wymiar ten jest uwzględniony poprzez wprowadzenie określonej hipotezy kinematycznej, które są omawiane w p. 2 niniejszej pracy. W tym przypadku macierz sztywności \mathbf{C} - (3.2) redukuje się do następującej postaci:

$$(3.4) \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{66} \end{bmatrix},$$

którą otrzymano poprzez założenie, że zarówno naprężenia jak i odkształcenia w kierunku trzecim (tu normalnym do powierzchni środkowej powłoki — patrz rys.1) są równe zero. Założenie powyższe jest



Rys. 1. Orientacja włókien warstwowego laminatu w lokalnym (primowanym) i globalnym układzie współrzędnych

automatycznie równoważne przyjęciu określonej hipotezy kinematycznej, mianowicie założeniu nieściśliwości elementu normalnego do powierzchni środkowej. Po przyjęciu określonej hipotezy kinematycznej, transformacji układu współrzędnych z lokalnego związanego z kierunkiem włókna w warstwie laminatu (primowanego — patrz rys.1) do globalnego i scałkowaniu wzdłuż grubości powłoki (kierunek 3 na rys.1),

związek (3.1) po przyjęciu macierzy sztywności w formie (3.4) przyjmie postać:

$$(3.5) \quad \mathbf{N} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

\mathbf{N} określa wektor sił i momentów wewnętrznych, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ odkształcenia i zmiany krzywizny powierzchni środkowej, zaś elementy macierzy $\bar{\mathbf{C}}$ są dane następującym wzorem:

$$(3.6) \quad \bar{\mathbf{C}}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & 0 & 0 & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & & & D_{66} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k - t_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k^2 - t_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (t_k^3 - t_{k-1}^3), \\ t_o &= -\frac{t}{2}, \quad t_N = \frac{t}{2}, \quad i, j = 1, 2, 6, \\ A_{ij} &= \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(t_k - t_{k-1} - \frac{4t_k^3 - t_{k-1}^3}{t^2} \right), \quad i, j = 4, 5, \\ (\bar{Q}_{11})_k &= U_1 + U_2 \cos 2\vartheta_k + U_3 \cos 4\vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{22})_k &= U_1 - U_2 \cos 2\vartheta_k + U_3 \cos 4\vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{12})_k &= U_4 - U_3 \cos 4\vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{44})_k &= Q_{44} \cos^2 \vartheta_k + Q_{55} \sin^2 \vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{55})_k &= Q_{44} \sin^2 \vartheta_k + Q_{55} \cos^2 \vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{45})_k &= (Q_{55} - Q_{44})_k \sin \vartheta_k \cos \vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{66})_k &= U_5 - U_3 \cos 4\vartheta_k, \\ (\bar{Q}_{16})_k &= -\frac{1}{2} U_2 \sin 2\vartheta_k - U_3 \sin 4\vartheta_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{Q}_{26})_k &= -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\vartheta_k + U_3 \sin 4\vartheta_k, \\
 (3.7) \quad U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
 [cd.] \quad U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), \\
 U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\
 U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
 Q_{44} &= G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12},
 \end{aligned}$$

gdzie ϑ_k jest kierunkiem włókna k -tej warstwy laminatu w globalnym układzie współrzędnych. Własności mechaniczne tej warstwy określone są w przyjętym układzie przez sześć niezależnych stałych materiałowych $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$. W odróżnieniu od materiałów izotropowych, macierz sztywności (3.6) posiada elementy B_{ij} , które wiążą ze sobą w siłach i momentach wewnętrznych zarówno odkształcenia, jak i zmiany krzywizny powierzchni środkowej. Dodatkowo należy podkreślić, że w elementach A_{44}, A_{45}, A_{55} wykorzystano kwadratowe rozkłady odkształceń wzdłuż grubości (niezależnie dla każdej warstwy kompozytu w laminacie) analogicznie do postulowanego przez VINSONA i CHOU [24]. Drugą istotną kwestią jest wartość współczynnika ścinania w elementach A_{44}, A_{45}, A_{55} . Klasycznie dla powłok izotropowych (patrz np. [11]) $k = 5/6$ i taką wartość często zakłada się w analizie stateczności powłok kompozytowych. Inne podejście do określenia wartości współczynnika ścinania poprzecznego k proponuje WHITNEY [25], poprzez rozważanie ortotropowych laminatów poddanych zginaniu. Współczynniki te, określone dla każdej warstwy laminatu, są zależne od jego konfiguracji i nierówne nawet w przypadku symetrycznego ułożenia warstw powłoki.

W analizowanych zagadnieniach stateczności bardzo rzadko stosuje się macierz sztywności (3.6) w pełnej postaci. Stosowane uproszczenia zmieniają wartość obciążenia krytycznego (zwykle zawyżają je). Podstawowe założenie dotyczy hipotez kinematycznych, tzn uwzględnienia

lub nieuwzględnienia sił poprzecznych. Eliminacja ich (przyjęcie hipotezy Love'a–Kirchhoffa) prowadzi do zlikwidowania czwartej i piątej kolumny i wierszy w macierzy sztywności (3.6).

Drugi typ uproszczeń, całkowicie niezależny od poprzedniego, dotyczy wszystkich elementów macierzy \bar{C} . Zwykle rozważa się tutaj dwa przypadki:

powłoki ortotropowej

$$(3.8) \quad A_{k6} = D_{k6} = 0, \quad B_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 6, \quad k = 1, 2,$$

powłoki o takiej konfiguracji warstw, w której wyeliminowano efekty giętno-skrętne

$$(3.9) \quad A_{k6} = B_{k6} = D_{k6} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Równanie (3.8) pokazuje w evidentny sposób różnice pomiędzy powłoką ortotropową i anizotropową. Otrzymanie takich zależności jest możliwe dla specjalnych konfiguracji warstw w laminacie, np dla laminatów symetrycznych — patrz (3.7)₂ lub dla laminatów, w których wszystkie warstwy kompozytu mają identyczny kierunek — patrz rys.1. Drugi z warstwami ułożonymi pod kątami $\pm\vartheta_k$. Wpływ tych uproszczeń (tzn (3.8) lub (3.9)) na wartość siły krytycznej określono w evidentny sposób jedynie dla ściskanych płyt kompozytowych — SAWYER [26]; nieuwzględnienie wyrazów macierzy sztywności zwiększyło wartość siły krytycznej.

4. ANALIZA STATECZNOŚCI

4.1. Uwagi wstępne

Zarówno w ujęciu liniowej teorii stateczności (zerowanie się wyznacznika), jak i nieliniowej teorii stateczności (badanie znaku drugiej pochodnej funkcjonu całkowitej energii potencjalnej układu), podstawową rolę odgrywa założenie postaci funkcji opisującej odkształcenie powłoki w stanie krytycznym (odpowiadającym utracie stateczności). Dla osiowo-symetrycznych (przed wyboczeniem) powłok przyjęte jest standardowe rozwiązanie, tzn założenie fali wyboczenia w formie pełnego szeregu Fouriera ze stałymi (liniowa teoria stateczności) lub zmiennymi (nieliniowa teoria stateczności) współczynnikami:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} w(\alpha, \phi) &= w_n(\alpha) \cos n\phi + w_m(\alpha) \sin m\phi, \\ u(\alpha, \phi) &= u_n(\alpha) \sin n\phi + u_m(\alpha) \cos m\phi, \\ v(\alpha, \phi) &= v_n(\alpha) \sin n\phi + v_m(\alpha) \cos m\phi, \end{aligned}$$

gdzie α oznacza zmienną w kierunku południkowym, zaś ϕ w kierunku równoleżnikowym (obwodowym). Oczywiście postać fali wybożenia (4.1) przyjęto dla najprostszej hipotezy kinematycznej powłok, tzn Love'a–Kirchhoffa, co w tym przypadku nie zawęzi ogólności rozważań. Dla powłok izotropowych lub poprzecznie izotropowych, z macierzą sztywności \bar{C}_{ij} opisaną wzorem (3.3), istnieje możliwość separacji części sinusowej i cosinusowej szeregów Fouriera (4.1). Można w ten sposób wyznaczyć niezależnie obciążenie krytyczne dla fali wybożenia określonej parametrami n i m . W teorii laminowanych, anizotropowych powłok określonych macierzą sztywności (3.6), analogiczna operacja jak poprzednio jest możliwa tylko po dodatkowym wyeliminowaniu wpływu skręcania, tzn po uwzględnieniu zależności (3.9) (niezależnie od przyjętej hipotezy kinematycznej dla powłok). Niezerowe wyrazy A_{k6} , B_{k6} , D_{k6} ($k = 1, 2$) w macierzy sztywności \bar{C}_{ij} – (3.6) implikują bowiem automatyczne sprzężenie wyrazów cosinusowych i sinusowych fali wybożenia (4.1). Poszukiwanie obciążeń krytycznych jest wówczas podobne do rozważania problemu stateczności skręcanych, izotropowych powłok cylindrycznych (patrz np VOLMIR [27]) i możliwe jest tylko poprzez wprowadzenie podwójnych szeregów Fouriera. Inne podejście, dogodne do numerycznego rozwiązania tego problemu (poprzez metodę rzutowania), zaproponowali NOOR i PETERS [28]. Cytowani powyżej autorzy przedstawili jednakże rozwiązania tylko dla zagadnień statyki warstwowych powłok anizotropowych z pełną macierzą sztywności (3.6).

Odmianą koncepcję, zmierzającą do uwzględnienia pełnej macierzy sztywności \bar{C}_{ij} , bez konieczności wprowadzenia podwójnych szeregów Fouriera, przedstawił COHEN [29]. Zakłada on mianowicie następującą postać fali wybożenia:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w(\alpha, \phi) &= w_n(\alpha) \cos(n\phi - \sigma), \\ u(\alpha, \phi) &= u_n(\alpha) \sin(n\phi - \gamma), \\ v(\alpha, \phi) &= v_n(\alpha) \sin(n\phi - \eta), \end{aligned}$$

gdzie σ, γ, η są nieznanymi parametrami wyznaczonymi z warunku mi-

nimum wyznacznika (teoria liniowa) lub funkcjonału (teoria nieliniowa). Jest to jednak zawężenie ogólnego przypadku fali wyboczenia (4.1), z uwagi na narzucenie w (4.2) a priori związku pomiędzy nieznanymi amplitudami fali wyboczenia $w_n(\alpha)$ i $w_m(\alpha)$, poprzez przyjęcie pewnego przesunięcia fazowego σ . Jednakże, według rozeznania autora, nie zostały jak na razie opublikowane prace dotyczące stateczności powłok, które uwzględniałyby pełną macierz sztywności (3.6) wraz z kompletną formą fali wyboczenia (4.1).

Jak dotąd, najpełniejszy przegląd literatury z dziedziny stateczności powłok anizotropowych jest zaprezentowany w pracy ALMROTHA [30]. Jednakże większość z cytowanych tam prac dotyczy wyboczenia anizotropowych płyt i powłok cylindrycznych, a jedynie dwie prace [31, 32] - anizotropowych powłok o podwójnej krzywiznie. Podobnie wygląda sytuacja w literaturze radzieckiej. W podstawowej pracy, jaką jest monografia RIKARDA i TETERSA [33] poświęcono niewiele miejsca jedynie anizotropowym powłokom sferycznym. W dalszej części pracy postaramy się usystematyzować podstawowe prace dostępne w literaturze, dotyczące zagadnień wyboczenia anizotropowych powłok o podwójnej krzywiznie.

4.2. Liniowa teoria stateczności

W liniowej teorii stateczności powłok zakłada się, że stan przedwyboczeniowy scharakteryzowany jest związkami geometrycznie liniowymi. Dopiero w stanie krytycznym przyjmuje się związki geometrycznie nieliniowe w celu określenia obciążeń krytycznych. Analizę tę przeprowadza się w większości przypadków dla brzegów swobodnie podpartych (warunki brzegowe typu S_3) w celu uzyskania analitycznej formy wzoru na obciążenia krytyczne. Podejście takie prowadzi do zawyżenia wartości obciążeń krytycznych, w porównaniu z otrzymanymi na podstawie teorii geometrycznie nieliniowej powłok (dla stanów przed wyboczeniem) oraz wynikami eksperymentalnymi.

Większość prac w tej dziedzinie dotyczy powłok małowyniosłych, z uwagi na możliwość eliminacji funkcji trygonometrycznych w układzie równań podstawowych. DULACSKA [34] przedstawił rozwiązanie dla ortotropowych powłok parabolicznych (założenie (3.8)) korzystając z hipotezy Love'a-Kirchhoffa. W rozdziale 7 pracy [35] DULACSKA i KOL-

LAR wyprowadzili równania na obciążenia krytyczne dla powłok obrotowo-symetrycznych o dowolnym kształcie, korzystając z identycznych założeń jak poprzednio. Stateczność ortotropowych, rozciąganych dennic badali MITKIEWICZ i CZAPLIN [36]. Wzory na obciążenia krytyczne dla anizotropowych powłok małowyniosłych, przy założeniu (3.9), wyprowadzono stosując trójparametrową teorię powłok w pracach [31, 32], a pięcioparametrową w pracy [13]. Należy jeszcze tutaj wspomnieć o pracy GRACZEVA [37], który przyjmując model ciała izotropowego badał wpływ ścinania poprzecznego na stateczność powłok sferycznych. CHAO i in. [38] zastosowali model ciała ortotropowego (3.8) do analizy stateczności hemisferycznych i pełnych sferycznych powłok w ujęciu teorii pięcioparametrowej. Rozwiązań poszukiwano za pomocą stowarzyszonych wielomianów Legendre'a.

Trójwymiarową analizę stateczności obrotowo-symetrycznych powłok kompozytowych, przy zastosowaniu modelu ciała poprzecznie-izotropowego (3.3) przedstawiono w pracach [23, 39-42]. W pracach tych zamieszczono również porównanie wyników dla pięcio- i trój-parametrowych teorii powłok.

Odrębną grupę zagadnień stanowi analiza stateczności trójwarstwowych powłok kompozytowych typu sandwicz. Pierwsza i trzecia warstwa tych powłok wykonana jest z kompozytowych materiałów włóknistych, które są rozdzielone grubym wypełniaczem. Powłoki tego typu modeluje się jako ciała ortotropowe. Analiza tych zagadnień przedstawiona jest w pracach [43-48], dla różnego kształtu powłok obrotowo-symetrycznych. W pracy [49] rozwiązano zadanie stateczności sandwiczowych powłok sferycznych traktowanych jako ciała poprzecznie-izotropowe.

4.3. Nieliniowa teoria stateczności

Analiza stateczności powłok kompozytowych w tym ujęciu charakteryzuje się założeniem nieliniowej geometrycznej teorii powłok (duże ugięcia i małe odkształcenia) do opisu stanu przedwyboczeniowego. Nie można więc tutaj uzyskać zamkniętego, analitycznego wyrażenia na siły krytyczne.

Obciążenia krytyczne dla małowyniosłych, ortotropowych (3.8) powłok sferycznych, przy założeniu hipotezy Love'a-Kirchhoffa, określono w pracach [50-52]. W pracy [50] analizowane jest dodatkowo pokry-

tyczne odkształcenie powłok. Stateczność małowyniosłych powłok sferycznych wykonanych z materiału poprzecznie izotropowego badano w pracy [53]. Wpływ parametrów materiałowych na formę wybożenia i wartość ciśnień krytycznych dla ortotropowych (3.8) hemi- i tori-sferycznych powłok w ujęciu trójparametrowej teorii powłok rozważano w pracach [54, 55]. Dyskusję wpływu orientacji włókien kompozytu i ich własności materiałowych dla różnorodnych, anizotropowych (model (3.9) powłok na wartość ciśnień krytycznych przedstawiono w pracach [56, 57]. Analizowano tam również wpływ imperfekcji geometrycznych na utratę stateczności. Dla powłok warstwowych istotny jest również wpływ częściowej delaminacji (rozdzielenia) warstw na wartość obciążeń krytycznych. Efekt ten analizowali: BOŁOTIN i ZABIELJAN [58] dla izotropowych hemisfer oraz ANDRIEJEV et al [59] dla segmentów sferycznych (model (3.9)), stosując trójparametrową teorię powłok.

4.4. Analiza numeryczna

Istnieje wiele znanych programów numerycznych, które mają włączoną opcję umożliwiającą analizę stateczności nieliniowych geometrycznie, obrotowo-symetrycznych, warstwowych powłok anizotropowych. Spośród nich jako najważniejsze można wymienić programy [60-67]. Zacytowane powyżej programy opierają się na metodzie elementów [60-66] lub różnic [67] skończonych. Posiadają one różne modele materiałowe oraz stosują różne hipotezy kinematyczne, które są ciągle aktualizowane. Mają one przede wszystkim charakter komercyjny, o czym najlepiej świadczy fakt, że jedna firma Lockheed posiada trzy takie programy [65-67].

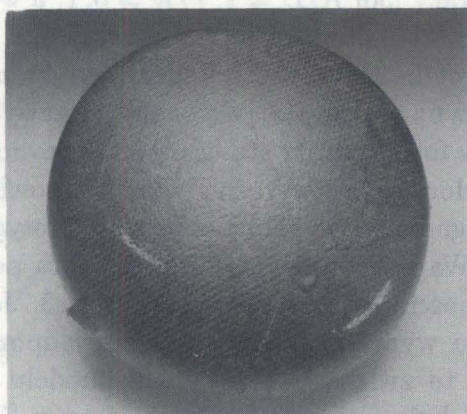
Istnieje również wiele programów o charakterze badawczym, jak np. [29, 54, 68-70]. Interesujący jest tu zwłaszcza program pisany w pracy [69], umożliwiający analizę pokrytycznego zachowania powłok.

W cytowanych wyżej pracach prezentowane są różne przykłady numeryczne, głównie dotyczą one jednak anizotropowych powłok cylindrycznych lub segmentów sferycznych. Generalnie, rysuje się tendencja zmierzająca do zastosowania pięcioparametrowej teorii powłok (uwzględniającej poprzeczne ścinanie) wraz z pełną macierzą sztywności \bar{C}_{ij} - (3.6) dla warstwowych powłok kompozytowych. Zjawisko to można także zaobserwować w rozwoju postaci elementu skończonego (tzn liczby

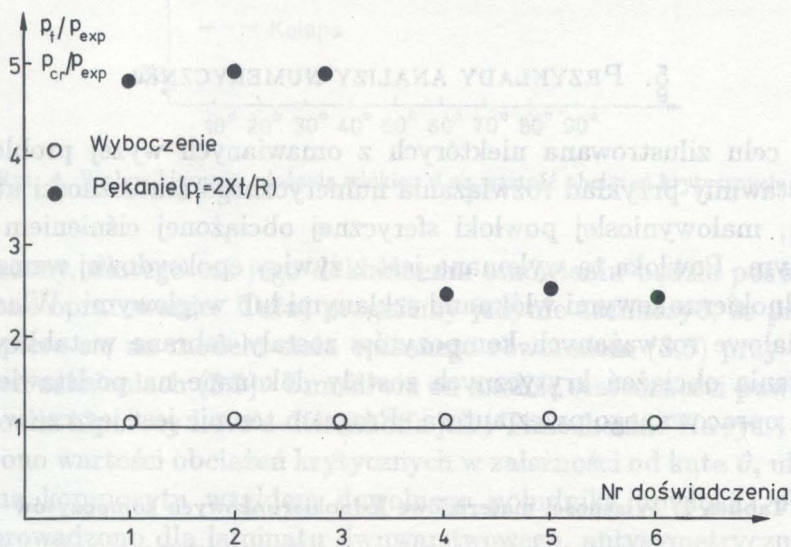
węzłów, zmiennych węzłowych, funkcji kształtu), który ma na celu uwzględnienie wymienionych efektów [71-76]. Niektóre z prac, jak np [71, 75], uwzględniają nawet ścislenie elementu normalnego do powierzchni środkowej (sześcioparametrowa teoria powłok), aczkolwiek proponowane elementy skończone nie zostały użyte do analizy stateczności. Dodatkowo, cytowane w pracach przykłady analizy stateczności dotyczą takich konfiguracji warstw kompozytu, które w rezultacie prowadzą do uproszczeń typu (3.9) (patrz np [68, 69]). Jednakże, bardziej dokładne elementy skończone opisujące więcej efektów posiadają coraz więcej zmiennych (element opisany w pracy [76] ma 64 stopnie swobody), a zatem wydłużają czas obliczeń i wymagają zastosowania dużych maszyn cyfrowych. Należy wobec tego zastanowić się, czy ta droga opisu i rozwiązywania zadań stateczności powłok kompozytowych jest wystarczająca. Istnieją bowiem również modele globalno-lokalne powłok kompozytowych (patrz PAGANO, SONI [77]), które mogą uprościć i przyspieszyć analizę numeryczną.

4.5. Badania eksperymentalne

Jak dotąd, najmniej prac zostało opublikowanych w dziedzinie badań doświadczalnych stateczności podwójnie zakrzywionych powłok kompozytowych. Pierwsze z nich zostały już przeprowadzone w latach sześćdziesiątych i były sponsorowane przez Marynarkę Wojenną USA. Dotyczyły one przede wszystkim budowy konstrukcji podmorskich, między innymi batyskafów. Wyniki badań doświadczalnych batyskafów, traktowanych jako sferyczne konstrukcje trójwymiarowe wykonane z włókien szklanych, przedstawiono w pracach [78, 79]. W pracach IVANOVA i in. [80, 81] omówiono wyniki jednej grupy doświadczeń dotyczących wyboczenia epoksydowo-szklanych powłok elipsoidalnych, obciążonych ciśnieniem zewnętrznym. Ivanov wraz ze współpracownikami badał również stateczność kompozytowych dennic z wypełniaczem [44] oraz kompozytowych, trójwarstwowych dennic [46] obciążonych ciśnieniem zewnętrznym. Należy tutaj zwrócić uwagę na fakt, iż powłoki lub warstwy powłok sandwichowych, zbudowane z kompozytów włóknistych, wykonano metodą nawijania. Prowadzi to do dość znacznej niejednorodności grubości powłok, co przedyskutowano w pracy [80]. Problemów tych



Rys. 2. Forma zniszczenia powłoki torisferycznej wzmacnianej włóknami węglowymi,
 $R/D = 1, r/D = 0,1, R/t = 168,9, t = 1,61\text{mm}, D = 227\text{mm}$ (z pracy MUC [56])



Rys. 3. Porównanie wyników eksperymentalnych dla powłok torisferycznych z teoretycznymi
 odpowiadającymi utracie stateczności lub kruchemu pękaniu (z pracy MUC [56])

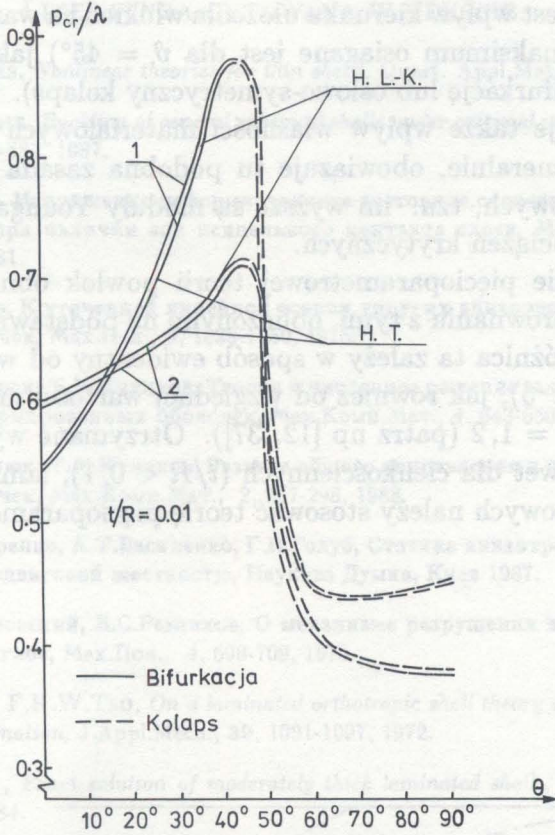
można uniknąć wykonując powłoki z tkanin rowingowych metodami ciśnieniowymi, tak jak uczyniono to w pracach [56, 82]. Badano tam stateczność epoksydowo-węglowych i szklanych, torisferycznych powłok obciążonych ciśnieniem zewnętrznym. Powłoki te miały różne parametry geometryczne, w pracy [56] $R/D = 1$, $r/D = 0,1$, a w [84] $R/D = 0,6$, $r/D = 0,24$, gdzie: R — promień części sferycznej, r — promień toroidu, D — średnica cylindra. Wyniki eksperymentów zaprezentowane w pracach [56, 82] oraz np w pracy [81] eksponują ciekawy i zarazem istotny problem związany z formą utraty stateczności w powłokach kompozytowych. Na rys.2 widoczne jest wyraźne pęknięcie powłoki torisferycznej mimo ewidentnej zgodności wyników obliczeń teoretycznych z eksperymentem — rys.3. Wartość ciśnienia odpowiadająca pękaniu powłoki, a nie utracie stateczności, jest dużo wyższa — rys. 3. Jednakże, w pracy [81] zaobserwowano wyraźną falę wyboczenia, odpowiadającą utracie stateczności. Jest to związane z wielkością modelu powłoki; modele analizowane w [81] były znacznie większe niż te w [56, 82]. Podobny efekt i analogiczną interpretację wyników dla ściskanych, kompozytowych cylindrów przedstawiono w pracy TASI i in. [83].

5. PRZYKŁADY ANALIZY NUMERYCZNEJ

W celu zilustrowania niektórych z omawianych wyżej problemów przedstawimy przykład rozwiązania numerycznego stateczności utwierdzonej, małowyniosłej powłoki sferycznej obciążonej ciśnieniem zewnętrznym. Powłoka ta wykonana jest z żywicy epoksydowej wzmocnionej jednokierunkowymi włóknami szklanymi lub węglowymi. Własności materiałowe rozważanych kompozytów zostały zebrane w tablicy 1. Obliczenia obciążeń krytycznych zostały dokonane na podstawie programu opracowanego przez autora. Program ten nie jest jeszcze w pełni

Tablica 1. Własności materiałowe jednokierunkowych kompozytów

Nr	Materiał	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
1	CFRP	203	11,2	8,4	0,32
2	GFRP	38,6	8,27	4,14	0,26



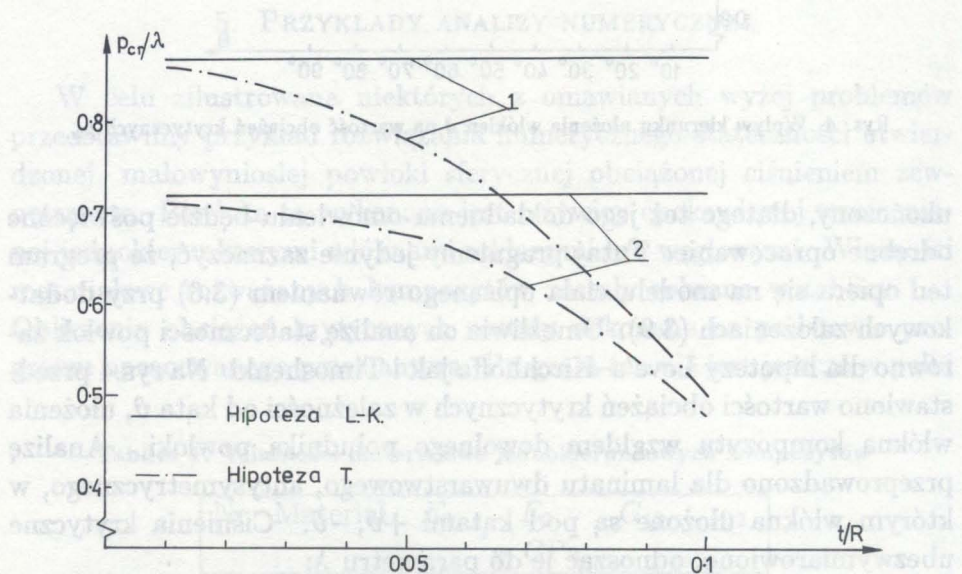
Rys. 4. Wpływ kierunku ułożenia włókien ϑ na wartość obciążeń krytycznych p_{cr}

ukończony, dlatego też jego dokładnemu omówieniu będzie poświęcone odrębne opracowanie. Tutaj pragniemy jedynie zaznaczyć, że program ten opiera się na modelu ciała opisanego równaniem (3.6) przy dodatkowych założeniach (3.9). Umożliwia on analizę stateczności powłok zarówno dla hipotezy Love'a-Kirchhoffa jak i Timoshenki. Na rys.4 przedstawiono wartości obciążeń krytycznych w zależności od kąta ϑ , ułożenia włókna kompozytu względem dowolnego południka powłoki. Analizę przeprowadzono dla laminatu dwuwarstwowego, antysymetrycznego, w którym włókna ułożone są pod kątami $+\vartheta, -\vartheta$. Ciśnienia krytyczne ubezwymiarowano, odnosząc je do parametru λ :

$$(5.1) \quad \lambda = \frac{2\sqrt{E_1 E_2}}{\sqrt{3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}} \left(\frac{t}{R}\right)^2$$

Widoczny jest wpływ kierunku ułożenia włókien na wartość obciążenia krytycznego (maksimum osiągane jest dla $\vartheta = 45^\circ$) jak też na formę wyboczenia (bifurkację lub osiowo-symetryczny kolaps). Przedstawiony wykres obrazuje także wpływ własności materiałowych na obciążenia krytyczne. Generalnie, obowiązuje tu podobna zasada jak dla materiałów izotropowych, tzn. im wyższe są moduły Younga, tym większa jest wartość obciążeń krytycznych.

Zastosowanie pięcioparametrowej teorii powłok obniża obciążenia krytyczne w porównaniu z tymi, obliczonymi na podstawie teorii trójparametrowej. Różnica ta zależy w sposób ewidentny od wartości ilorazu t/R (patrz rys. 5), jak również od względnej wartości modułów Kirchhoffa $G_{i3}/E_1, i = 1, 2$ (patrz np [12, 37]). Otrzymane wyniki wskazują (rys. 5), że nawet dla cienkościennych ($t/R < 0,1$), laminowanych powłok anizotropowych należy stosować teorię pięcioparametrową.



Rys. 5. Porównanie wartości ciśnienia krytycznego p_{cr} dla trój- i pięcioparametrowej teorii powłok ($\vartheta = 45^\circ$)

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J.L.SANDERS, *Nonlinear theories for thin shells*, Quart. Appl.Math., **21**, 21-36, 1963.
2. Md.W.UDDIN, *Buckling of general spherical shells under external pressure*, Int.J.Mech. Sc., **29**, 469-481, 1987.
3. В.А.Лазько, Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев, *Мех.Комп.Мат.*, **5**, 832-836, 1981.
4. Л.Либреску, К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек, *Мех.Пол.*, **6**, 1038-1050, 1975.
5. Э.И.Григолук, Т.М.Куликов, Теория и численное решение задач статики многослойных армированных оболочек, *Мех.Комп.Мат.*, **4**, 643-650, 1986.
6. Э.И.Григолук, Т.М.Куликов, Развитие общего направления в теории многослойных оболочек, *Мех.Комп.Мат.*, **2**, 287-298, 1988.
7. Я.М.Григоренко, А.Т.Василенко, Г.П.Голуб, Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, Наукова Думка, Киев 1987.
8. Ю.Б.Немировский, Б.С.Резников, О механизме разрушения армированных балок при изгибе, *Мех.Пол.*, **4**, 698-709, 1973.
9. S.B.DONG, F.K.W.TSO, *On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation*, J.Appl.Mech., **39**, 1091-1097, 1972.
10. J.N.REDDY, *Exact solution of moderately thick laminated shells*, J.Eng.Mech., **110**, 794-809, 1984.
11. Ш.К.Галимов, Теория оболочек с учетом поперечного сдвига, Изд-во Казанского гос. ин-та, Казань 1977.
12. A.K.NOOR, *Stability of multilayered composite plates*, Fibre Sc. Techn., **8**, 81-89, 1975.
13. A.MUC, *Transverse shear effects in stability problems of laminated shallow shells*, Composite Str., **12**, 171-180, 1989.
14. И.Я.Штаерман, К теории симметрических деформаций анизотропных упругих оболочек, *Изв. Киев политехн. и сельск. ин-та*, **1**, 54-72, 1924.
15. Х.М.Муштари, Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия, *Изв.физ.-мат. об-ва при Каз. ун-те*, **9**, 71-150, 1938.
16. С.А.Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, Москва 1961.
17. S.B.DONG, K.S.PISTER, R.L.TAYLOR, *On the theory of laminated anisotropic shells and plates*, J.Aerospace Sc., **29**, 969-975, 1962.
18. S.CHENG, В.П.НО, *Stability of heterogeneous aelotropic cylindrical shells under combined loading*, AIAA J., **1**, 892-898, 1963.

19. J.M.WHITNEY, C.T.SUN, *A higher order theory for extensional motion of laminated anisotropic shells and plates*, J.Sound Vibr., **30**, 85-98, 1973.
20. J.M.WHITNEY, C.T.SUN, *A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells*, J.Appl.Mech., **41**, 471-476, 1974.
21. Я.М.Григоренко, А.Т.Василенко, *Теория оболочек переменной жесткости, Методы расчета оболочек*, 4, Наукова Думка, Киев 1981.
22. Я.М.Григоренко, Н.Н.Крюков, *Численное решение задач статики гибких оболочек с переменными параметрами*, Наукова Думка, Киев 1983.
23. *Механика композитных материалов*, Наукова Думка, Киев 1983.
24. J.R.VINSON, T.W.CHOU, *Composite materials and their use in structures*, Appl. Sc.Publishers Ltd., London 1975.
25. J.M.WHITNEY, *Shear correction factor for orthotropic laminates under static loads*, J.Appl.Mech., **40**, 302-307, 1973.
26. J.W.SAWYER, *Flutter and buckling of general laminated plates*, J. Aircraft, **14**, 387-391, 1977.
27. А.С.Вольмир, *Устойчивость упругих систем*, Физматгиз, Москва 1963.
28. А.К.NOOR, J.M.PETERS, *Analysis of laminated anisotropic shells of revolution*, J.Eng. Mech., **113**, 49-65, 1987.
29. G.A.СОНЕН, *FASOR - A second generation shell of revolution code*, Comp. Str., **10**, 301-309, 1978.
30. В.О.АЛМРОТН, *Design of composite material structures for buckling - an evaluation of the state-of-art*, Technical Report AWFAL - TR - 81 - 3102, 1981.
31. J.A.McELMAN, A.C.KNOELL, *Vibration and buckling analysis of composite plates and shells*, J.Comp.Mat., **5**, 529-532, 1971.
32. J.F.OYLER, C.F.DYM, *The dynamics and stability of composite shells*, Proc. 13th Midwestern Conf., Developments in Mechanics, **7**, 475-498, 1973.
33. Р.Б.Рикардс, Г.А.Тетерс, *Устойчивость оболочек из композиционных материалов*, Зинатне, Рига 1974.
34. E.DULACSKA, *Stability of anisotropic hyperbolic paraboloidal shells*, Acta Techn. Ac. Sc. Hungaricae, **59**, 123-130, 1967.
35. L.KOLLAR, E.DULACSKA, *Buckling of shells for engineers*, J.Wiley Sons, Chichester 1981.
36. А.Б. Миткевич, П.А.Чаплин, *Устойчивость оболочек вращения из композиционных материалов при осевом растяжении*, Мех.Комп.Мат., 721-726, 1988.
37. О.А.Грачев, *О влиянии сдвиговых деформации на величину критического внешнего давления сферической оболочки*, Прикл.Мех., **16**, 119-122, 1980.

38. C.C. CHAO, T.P. TUNG, Y.C. CHERN, *Buckling of thick orthotropic shell*, Composite Str., 9, 113-139, 1988.
39. А.Н.Гузь, Устойчивость трехмерных упругих тел, Наукова Думка Киев 1971.
40. А.Н.Гузь, И.Ю.Бабич, Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек, Вища Школа, Киев 1980.
41. I.YU. BAVICH, A.N. GUZ, *Stability of rods, plates and shells of composite materials (three-dimensional formulation): survey*, Sov. Appl. Mech., 10, 81-89, 1975.
42. И.Ю. Бабич, Л.В.Дериглазов, И.И.Чернушенко, О влиянии свойств материала сферической оболочки на величину критической нагрузки, Мех.Комп.Мат., 2, 281-285, 1980.
43. А.О.Расказов, И.И.Соколовская, Н.А.Шульга, Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек, Вища Школа, Киев 1986.
44. О.Н.Иванов, В.И.Тарасюк, Устойчивость стеклопластиковых днищ с наполнителем, Мех.Пол., 5, 866-871, 1978.
45. А.В.Петровский, Об устойчивости сферической оболочки из слоисто композиционного материала, Мех.Пол., 3, 459-464, 1976.
46. О.Н.Иванов, Л.С.Орловский, Д.А.Мысык, Устойчивость трехслойных стеклопластиковых оболочек вращения, Прикл.мех., 20, 212-218, 1984.
47. А.А.Савиченко, Н.П.Семенюк, Об устойчивости и рациональном проектировании неоднородных сферических оболочек, Прикл.Мех., 16, 53-57, 1980.
48. И.К.Кошевой, Об устойчивости неоднородных сферических оболочек, Прикл. Мех., 18, 39-44, 1982.
49. М.А.Ильгамов, В.А.Иванов, Б.В.Гулин, Расчет оболочек с упругим наполнителем, Наука Москва 1987.
50. И.М.Бермус, Неосесимметричное выпучивание ортотропных сферических оболочек, Мех.Комп.Мат., 6, 1056-1061, 1980.
51. P.C. DUMIR, M.L. GANDHI, Y. NATH, *Axisymmetric static and dynamic buckling of orthotropic shallow spherical caps with flexible supports*, Acta Mechanica, 52, 93-106, 1984.
52. Y. NATH., O. MAHRENHOLTZ, *On dynamic buckling of orthotropic shallow spherical shells supported by non-linear elastic subgrade*, Proc. ECCCS Colloquium on Stability of plate and shell structures, 341-346, Ghent 1987.
53. В.А.Крысько, А.Н.Куцемако, Динамическая и статическая потеря устойчивости гибких сферических оболочек из композитного материала, Мех.Пол., 6, 1108-1111, 1975.
54. S.K. RADHAMOHAN, A.D. SHIRODE, *Buckling of orthotropic torispherical pressure vessels*, Comp.Str., 5, 155-158, 1975.
55. S.K. RADHAMOHAN, A.V. SETLUR, *Buckling of orthotropic and nonhomogeneous spherical shells*, Ing.Archive, 45, 91-97, 1976.

56. A. MUC, *Failure modes of laminated axisymmetric shells of revolution subjected to external pressure*, Proc.ICCS-V (Edt. I.H.Marshall), 115-129, Elsevier, 1989.
57. A. MUC, *On the buckling of laminate axisymmetric shells of revolution under external pressure*, Int.J.Solid Str. (wyslano do redakcji).
58. В.В.Болотин, З.Х.Забелян, Устойчивость упругих сферических оболочек с раслоениями, *Расчеты на прочность*, 22, 150-165, Москва 1981.
59. Л.В.Андреев, И.П.Железко, Н.И.Ободан, О бифуркации павновесия сферических оболочек с пасслоениями, *Пр.Прочности*, 2, 49-53, 1986.
60. K.J. BATHIE, *On the current state of finite element methods and our ADINA endeavors*, Adv.Eng.Software, 2, 59-65, 1980.
61. P. КОHNKE, *ANSYS Theoretical Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. Houston, Pennsylvania, 1979.
62. *Marc User Information Manuals*, MARC Analysis Research Corp., Palo Alto, California 1980.
63. R.H. MCNEAL [Ed.], *NASTRAN theoretical manual*, NASA, 1984.
64. S.A.M.C.E.F., *Systeme d'Analyse des Milieux Continus par Elements Finis*, Manuels d'Utilisation, L.T.A.S. 1979.
65. *User Manual for DIAL*, Lockheed Missiles & Space Co., 1980.
66. *Theoretical Manual for NEPSAP*, Lockheed Missiles & Space Co., 1976.
67. D. BUSHNELL, *BOSOR4 — program for stress, buckling and vibrations of complex shells of revolution*, Str.Mech. Software Series, 1, 11-143, 1977.
68. I. SHEINMAN, S. GREIF, *Dynamic analysis of laminated shells of revolution*, J.Comp. Mat., 18, 200-215, 1984.
69. C.L. LIAO, J.N. REDDY, *Continuum-based stiffened composite shell element for geometrically nonlinear analysis*, AIAA J., 27, 95-101, 1989.
70. S.A. ABI-SHAHEEN, *Buckling of composite shells of revolution*, Ph. D. thesis, Univ. of London, 1979.
71. Р.Б.Рикардс, А.К.Чате, Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко, *Мех.Комп.Мат.*, 3, 453-460, 1981.
72. A. VANKETSCH, K.P. RAO, *A doubly curved quadrilateral finite element for the analysis of laminated thin shells of revolution*, Comp.Str., 12, 825-832, 1980.
73. Б.Л.Нарусберг, А.И.Рекстыньш, М.Б.Голдманис, Конечный элемент трехслойной оболочки вращения с легким наполнителем, *Мех.Комп.Мат.*, 6, 1100-1105, 1988.
74. A. BHIMARRADDI, A.J. CARR, P.J. MOSS, *A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution*, Comp. Str., 31, 299-308, 1988.

75. J.N.REDDY, K.CHANDRASHEKHARA, *Geometrically-nonlinear transient analysis of laminated doubly-curved shells*, Int. J.Non-Linear Mech., **20**, 79-90, 1985.
76. T.Y.CHAO, R.SAWAMIPHAKDI, *Large deformation analysis of laminated shells by finite element method*, Comp. Str., **13**, 331-340, 1980.
77. N.J.PAGANO, S.R.SONI, *Global-local laminate variational model*, Int.J.Solid Str., **19**, 207-228, 1983.
78. К.НОМ, *Fiber-reinforced plastics for hydrospace applications*, Proc. 5th. Symp. Naval Str.Mech., 455-466, Pergamon Press, Oxford 1967.
79. C.W.BERT, *Analysis of radial-filament-reinforced spherical shell under deep submergence condition*, 2nd Conf.Pressure Vessel Technology, 529-534, ASME, 1973.
80. В.М.Перевозчикова, О.Н.Иванов, Экспериментальное исследование устойчивости оболочек вращения из композитных материалов при действии внешнего давления, *Мех. Комп. Мат.*, **6**, 1985, 1120-1121.
81. О.Н.Иванов, В.М.Перевозчикова, Исследование устойчивости подкрепленных оболочек вращения из композиционного материала при действии внешнего давления, *Московск. Ин-т Хим. Машиностроения, ВИНТИ*, No. 7651-84, 1984.
82. G.D.GALLETLY, A.MUC, *Buckling of externally-pressurised composite torispherical shells*, Proc.I.Mech.Engrs., **203**, 41-56, 1989.
83. J.TASI, A.FELDMAN, D.A. STANG, *The buckling strength of filament-wound cylinders under azial compression*, NASA-CR-226, NASA, July 1965.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВОЙСКРИВЛЕННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ОБОЛОЧЕК

Работа являясь синтетическим обзором теоретических и экспериментальных исследований устойчивости doubly-curved композиционных оболочек. Подробно обсуждены разнообразные варианты анализа устойчивости, касающиеся кинематических гипотез примененных в теории композиционных оболочек, принятых форм матриц жесткости и влияния этих факторов на величину критических нагрузок. Вышеуказанные рассуждения иллюстрируются примерами численного и экспериментального анализа.

SUMMARY

STABILITY OF DOUBLY-CURVED COMPOSITE SHELLS

The present paper is a synthetic review of theoretical and experimental investigations concerning the stability of doubly-curved composite shells. Various approaches to the stability analysis dealing with the applied kinematical hypothesis in composite shell theories, forms of the assumed stiffness matrices, and their influence on the values of buckling loads are discussed in detail. The considerations are illustrated by numerical and experimental examples.

**POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN, KRAKÓW**

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1990 r.

75. S. A. ABUSHAAR, *Buckling of composite shells of revolution*, Ph. D. thesis, Univ. of London, 1976.
76. S. J. HARTIGER, A. B. FERGUSON, M. E. GEDDIS, *Formulation of a finite element model for the analysis of general shells of revolution*, *Comp. Str.*, 3, 1139-1165, 1964.
77. A. MURAKAWA, A. J. GALL, F. J. MOYER, *A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution*, *Comp. Str.*, 31, 287-302, 1988.
78. I. S. SHEN, S. CHEN, *Dynamics of laminated shells of revolution*, *J. Comp. Str.*, 15, 303-313, 1984.
79. D. D. COSCH, *Stability of composite shells of revolution*, *Stress Analysis of Composite Structures*, Vol. 1, 11-143, 1977.
80. J. TANI, J. A. FREDMAN, D. A. STANG, *Stability of laminated shells of revolution under axial compression*, NASA CR-225, NASA, July 1962.
81. O. D. KALITKIN, A. M. BUKHARIN, *Stability of laminated shells of revolution*, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 41-56, 1982.
82. J. O. WANG, *Stability of laminated shells of revolution*, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 41-56, 1982.
83. M. J. MURPHY, *Stability of laminated shells of revolution*, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 41-56, 1982.
84. M. J. MURPHY, *Stability of laminated shells of revolution*, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 41-56, 1982.