

PLASKIE DRGANIA SWOBODNE NIEPODPARTYCH PIERŚCIENI KOŁOWYCH CZĘŚĆ III. FORMY JEDNOCZĘSTOŚCIOWYCH DRGAŃ SWOBODNYCH

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

Na podstawie poprzednich opracowań [1,2] w niniejszej pracy omówiono charakterystyczne cechy jednoczęstościowych drgań swobodnych, powstających w modelu pierścienia uściślonym w sensie Timoshenki, związane z występowaniem dwuwymiarowych podprzestrzeni własnych. Dodatkowo omówiono również ogólny przypadek drgań swobodnych i wymuszonych.

1. WSTĘP

Przestrzenie swobodne pierścienie kołowe, wykonujące drgania w płaszczyźnie wyznaczonej przez ich oś teoretyczną, są układami o dość specyficznych własnościach dynamicznych. Własności te wynikają z charakterystycznej dla takich pierścieni struktury przestrzeni ich form drgań, będącej sumą prostą dwuwymiarowych podprzestrzeni własnych, odpowiadających kolejnym częstościom własnym [1,2]. Dzięki swoim właściwościom, pierścienie bez podpór mogą wykonywać jednoczęstościowe drgania swobodne o jakościowo różnych formach, zależnych od aktualnych warunków początkowych ruchu. Drgania te w dwu skrajnych przypadkach szczególnych przybierają prostą postać fali stojącej (z ustalonym położeniem węzłów na obwodzie pierścienia) lub biegnącej (z węzłami poruszającymi się po obwodzie ze stałą prędkością liniową $v = \pm \omega R/n$). W przypadku natomiast ogólnym, takie jednoczęstościowe drgania swobodne przybierają postać fali pulsującej, stanowiącej pewną pośrednią formę ruchu, zawierającą się pomiędzy wymienionymi dwiema formami szczególnymi.

Celem niniejszej pracy jest analiza jednoczęstościowych form drgań swobodnych uściślonego modelu pierścienia w aspekcie ich różnorodności związanej z dwuwymiarowością podprzestrzeni własnych.

2. JEDNOCZĘSTOŚCIOWE DRGANIA SWOBODNE

Jako podstawę dalszych rozważań przyjmijmy macierzowe równanie różniczkowe cząstkowe

$$(2.1) \quad \mathbf{x}'(\beta, t) = \bar{\mathbf{L}}(D)\mathbf{x}(\beta, t),$$

opisujące drgania swobodne modelu pierścienia i omówione szczegółowo w pracy [1]. Rozwiązaniem tego równania jest każda funkcja o postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{x}(\beta, t) = \mathbf{X}_c(\beta) \cos \omega t + \mathbf{X}_s(\beta) \sin \omega t$$

pod warunkiem, że $\omega = \omega_{nk}$ jest dowolną częstością własną rozważanego modelu pierścienia, a obie funkcje amplitudowe $\mathbf{X}_c, \mathbf{X}_s$ są okresowymi rozwiązaniami o okresie $2n\pi$, tego samego równania różniczkowego zwyczajnego

$$(2.3) \quad \mathbf{X}'(\beta) = \mathbf{L}(\omega)\mathbf{X}(\beta),$$

w którym

$$\mathbf{X}(\beta) = [U(\beta), W(\beta), \Phi(\beta), Q(\beta)N(\beta), M(\beta)]^T$$

jest bezwymiarowym wektorem stanu przekroju poprzecznego.

Na podstawie analiz przeprowadzonych w pracach [1,2] wiadomo, że całka ogólna równania (2.3), odpowiadająca ustalonej parze liczbowej (n, ω_{nk}) , jest kombinacją liniową

$$(2.4) \quad \mathbf{X}(\beta) = A_1 \mathbf{G}_1(\beta) + A_2 \mathbf{G}_2(\beta)$$

o dowolnych współczynnikach A_1, A_2 , utworzoną z dwu liniowo niezależnych rozwiązań równania (2.3)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{G}_1(\beta) &= \mathbf{F}_1 \cos(n\beta) + \varepsilon \mathbf{F}_2 \sin(n\beta), \\ \mathbf{G}_2(\beta) &= \mathbf{F}_1 \sin(n\beta) - \varepsilon \mathbf{F}_2 \cos(n\beta). \end{aligned}$$

Funkcje (2.5) tworzą bazę w dwuwymiarowej podprzestrzeni własnej Ω_{nk} , odpowiadającej częstości własnej ω_{nk} . We wzorach (2.5) posłużono się oznaczeniami

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_1^T &= (e_{11}, 0, 0, 0, e_{12}, e_{13}), \\ \mathbf{F}_2^T &= (0, e_{21}, e_{22}, e_{23}, 0, 0), \end{aligned}$$

przy czym wektory

$$\mathbf{e}_1^T = (e_{11}, e_{12}, e_{13}), \quad \mathbf{e}_2^T = (e_{21}, e_{22}, e_{23})$$

oraz stała ε są określone tak samo jak w [2] i odpowiadają ustalonej parze liczbowej (n, ω_{nk}) .

Każda z funkcji amplitudowych $\mathbf{X}_c, \mathbf{X}_s$, jako całka ogólna tego samego równania (2.3), może być zapisana w postaci (2.4), dzięki czemu otrzymujemy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_c(\beta) &= A_c \mathbf{G}_1(\beta) + B_c \mathbf{G}_2(\beta), \\ \mathbf{X}_s(\beta) &= A_s \mathbf{G}_1(\beta) + B_s \mathbf{G}_2(\beta), \end{aligned}$$

przy czym A_c, B_c, A_s, B_s są dowolnymi stałymi liczbowymi. Zamiast (2.2) otrzymujemy zatem

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(\beta, t) &= [A_c \mathbf{G}_1(\beta) + B_c \mathbf{G}_2(\beta)] \cos \omega t + \\ &\quad + [A_s \mathbf{G}_1(\beta) + B_s \mathbf{G}_2(\beta)] \sin \omega t = \\ &= [(A_c \mathbf{F}_1 - B_c \varepsilon \mathbf{F}_2) \cos(n\beta) + (B_c \mathbf{F}_1 + A_c \varepsilon \mathbf{F}_2) \sin(n\beta)] \cos \omega t + \\ &\quad + [(A_s \mathbf{F}_1 - B_s \varepsilon \mathbf{F}_2) \cos(n\beta) + (B_s \mathbf{F}_1 + A_s \varepsilon \mathbf{F}_2) \sin(n\beta)] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Wynikają stąd następujące wzory dla przemieszczeń

$$(2.9) \quad u(\beta, t) = e_{11} \{ [A_c \cos(n\beta) + B_c \sin(n\beta)] \cos \omega t + \\ + [A_s \cos(n\beta) + B_s \sin(n\beta)] \sin \omega t \},$$

$$(2.10) \quad w(\beta, t) = \varepsilon e_{21} \{ [A_c \sin(n\beta) - B_c \cos(n\beta)] \cos \omega t + \\ + [A_s \sin(n\beta) - B_s \cos(n\beta)] \sin \omega t \},$$

$$(2.11) \quad \varphi(\beta, t) = (e_{22}/e_{21}) w(\beta, t),$$

na podstawie których można zaproponować wygodną interpretację geometryczną drgań swobodnych dla poszczególnych składowych wektora stanu $\mathbf{x}(\beta, t)$. Omówienie tej interpretacji ograniczymy jednak dla uproszczenia tylko do jednej, mianowicie radialnej składowej stanu przemieszczenia.

3. GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA DRGAŃ JEDNOCZĘSTOŚCIOWYCH

Funkcję (2.9) opisującą składową radialną drgań swobodnych pierścienia można zapisać nieco inaczej

$$(3.1) \quad u(\beta, t)/e_{11} = (A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t) \cos(n\beta) + \\ + (B_c \cos \omega t + B_s \sin \omega t) \sin(n\beta) = \\ = E \sin \Phi \cos(n\beta) + E \cos \Phi \sin(n\beta) = E \sin(n\beta + \Phi),$$

posługując się oznaczeniami

$$(3.2) \quad \begin{aligned} E \cos \Phi &= B_c \cos \omega t + B_s \sin \omega t, \\ E \sin \Phi &= A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t, \end{aligned}$$

z których wynika, że

$$(3.3) \quad E^2(t) = r_c^2 \cos^2 \omega t + r_s^2 \sin^2 \omega t + (r_c, r_s) \sin 2\omega t,$$

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \Phi(t) = y(t)/x(t),$$

przy czym

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{r}(t) = r_c \cos \omega t + r_s \sin \omega t, \quad r_c = \begin{bmatrix} B_c \\ A_c \end{bmatrix}, \quad r_s = \begin{bmatrix} B_s \\ A_s \end{bmatrix},$$

$$(3.6) \quad |\mathbf{r}(t)| = E(t), \quad (r_c, r_s) = A_c A_s + B_c B_s.$$

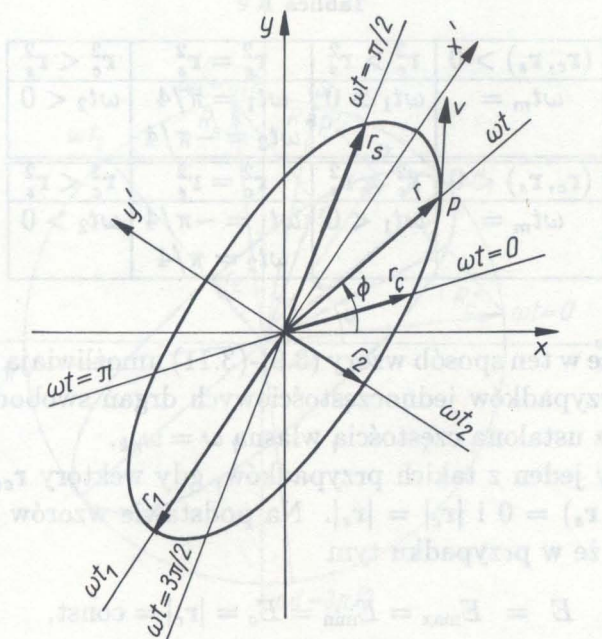
Zapis (3.1) przedstawia funkcję u/e_{11} w postaci quasisinusoidalnej o zmieniających się w czasie amplitudzie E i fazie Φ . Związek (3.5) jest parametrycznym równaniem pewnej elipsy (rys.1) na płaszczyźnie kartezjańskiego układu współrzędnych Oxy , o osiach głównych wyznaczonych przez dwa wektory r_1, r_2 , $r_1^2 > r_2^2$, $(r_1, r_2) = 0$ określone wzorami

$$(3.7) \quad r_i = r_c \cos \omega t_i + r_s \sin \omega t_i, \quad i = 1, 2,$$

w których ωt_1 i $\omega t_2 = \omega t_1 + \pi/2$ są pierwiastkami równania

$$(3.8) \quad \operatorname{tg}(2\omega t) = 2(r_c, r_s)/(r_c^2 - r_s^2),$$

wynikającego z warunku $(d/dt)(E^2(t)) = 0$. Jeżeli przez ωt_m oznaczymy pierwiastek główny równania (3.8), tzn. taki, że $-\pi/4 \leq \omega t_m \leq \pi/4$, to ωt_1 i ωt_2 mogą być określone jednoznacznie na podstawie tablicy 1.



Rys. 1

Zmiany amplitudy E i fazy Φ drgania (3.1) obrazuje ruch wektora wodzącego \mathbf{r} punktu P po obwodzie elipsy (rys.1). Ruch ten odbywa się ze zmienną prędkością liniową

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \omega(\mathbf{r}_s \cos \omega t - \mathbf{r}_c \sin \omega t),$$

której odpowiada prędkość kątową wektora $\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \dot{\Phi}(t) &= v_t/|\mathbf{r}| = (v_y \cos \Phi - v_x \sin \Phi)/E = (v_y x - v_x y)/E^2 = \\ &= |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|/E^2 = \omega |\mathbf{r}_c \times \mathbf{r}_s|/E^2. \end{aligned}$$

Jeżeli wzór (3.3) przekształcimy do postaci

$$(3.10) \quad E^2(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_c^2 + \mathbf{r}_s^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{r}_c^2 - \mathbf{r}_s^2)^2 - (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s)^2 \cos[2\omega(t - t_m)]},$$

to otrzymamy dla $\omega t_m = \omega t_1$ i $\omega t_m = \omega t_2$ odpowiednio

$$(3.11) \quad \left. \begin{aligned} E_{\max} &= |\mathbf{r}_1| = \\ E_{\min} &= |\mathbf{r}_2| = \end{aligned} \right\} \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{r}_c^2 + \mathbf{r}_s^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{r}_c^2 - \mathbf{r}_s^2)^2 + (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s)^2}}.$$

Tablica 1.

$(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s) > 0$	$r_c^2 > r_s^2$	$r_c^2 = r_s^2$	$r_c^2 < r_s^2$
$\omega t_m =$	$\omega t_1 > 0$	$\omega t_1 = \pi/4$ $\omega t_2 = -\pi/4$	$\omega t_2 < 0$
$(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s) < 0$	$r_c^2 > r_s^2$	$r_c^2 = r_s^2$	$r_c^2 < r_s^2$
$\omega t_m =$	$\omega t_1 < 0$	$\omega t_1 = -\pi/4$ $\omega t_2 = \pi/4$	$\omega t_2 > 0$

Otrzymane w ten sposób wzory (3.9)-(3.11) umożliwiają pełną analizę wszystkich przypadków jednoczęstościowych drgań swobodnych, odbywających się z ustaloną częstością własną $\omega = \omega_{nk}$.

Rozważmy jeden z takich przypadków, gdy wektory $\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s$ spełniają warunki: $(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s) = 0$ i $|\mathbf{r}_c| = |\mathbf{r}_s|$. Na podstawie wzorów (3.9), (3.11) stwierdzamy, że w przypadku tym

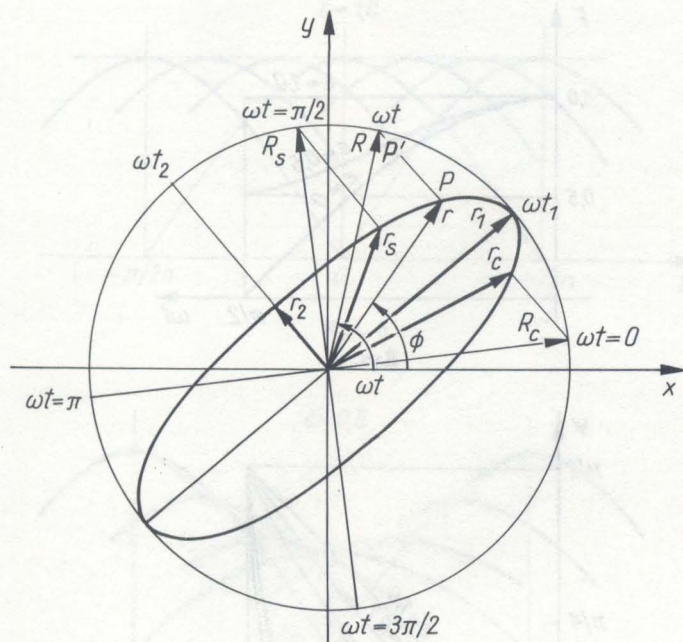
$$(3.12) \quad \begin{aligned} E &= E_{\max} = E_{\min} = E_0 = |\mathbf{r}_c| = \text{const}, \\ \dot{\Phi} &= \omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Przy założeniu, że $\Phi(0) = 0$ wynika stąd, że $\Phi = \omega t$ i forma drgań radialnych opisana wzorem (3.1) przybiera postać fali biegnącej

$$(3.13) \quad u(\beta, t)/e_{11} = E_0 \sin(n\beta + \omega t).$$

Kątowe położenie głównego węzła tej fali można określić z warunku $u(\beta, t) = 0$, z którego wynika, że $\beta^* = -\omega t/n$. Rozważana fala ma więc stałą amplitudę E_0 i biegnie po obwodzie pierścienia ze stałą prędkością liniową $v = -\omega R/n$. Odpowiadająca temu przypadkowi elipsa z rys.1 jest kołem o promieniu E_0 , po obwodzie którego punkt P porusza się ze stałą prędkością kątową $\dot{\Phi} = \omega$. Jak się okazuje, kołem takim można się posłużyć również przy interpretacji wszystkich pozostałych przypadków jednoczęstościowych drgań swobodnych.

Rozważmy mianowicie odwzorowanie "elipsy obrazującej" ruch drgający (rys.1) na koło o promieniu równym większej półosi tej elipsy (rys.2). Przy takim odwzorowaniu, niejednostajnemu ruchowi promienia wodzącego \mathbf{r} punktu P elipsy, odpowiada jednostajny ruch promienia wodzącego \mathbf{R} odpowiedniego punktu P' na obwodzie koła. Ruch punktu po elipsie można więc uważać za ruch tego punktu po kole, ale obserwowany



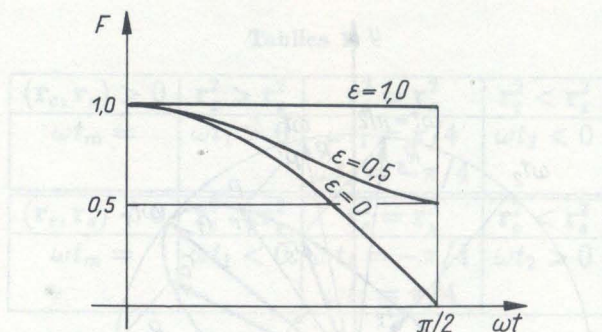
Rys. 2

pod takim kątem, że koło jest widziane jako dana "elipsa obrazująca", określona na płaszczyźnie Oxy za pomocą wektorów $\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s$. W takiej interpretacji odwzorowanie, o którym mowa, jest rzutowaniem równoległym koła, odpowiednio usytuowanego w przestrzeni trójwymiarowej, na płaszczyznę Oxy .

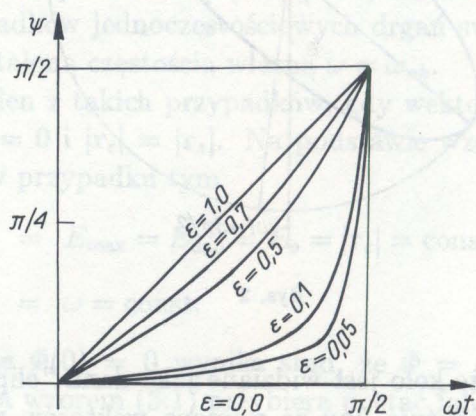
Wzory (3.9) i (3.10) przybierają znacznie prostszą postać jeżeli w ich zapisie zamiast wektorów $\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s$ wykorzystamy się wektory główne $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Przejście do tego nowego zapisu wymaga jedynie takiej zmiany sposobu odmierzenia czasu τ , aby wektor \mathbf{r}_1 stał się wektorem wodzącym punktu początkowego elipsy obrazującej, tzn. odpowiadającego chwili początkowej ruchu $\tau = 0$. Musi być w tym celu spełniony związek $\tau = t - t_1$. Przekształcenia wzorów można dokonać wykorzystując transformację

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \mathbf{r}_1 \cos \omega t_1 - \mathbf{r}_2 \sin \omega t_1, \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{r}_1 \sin \omega t_1 + \mathbf{r}_2 \cos \omega t_1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

odwrotną względem (3.7) i uwzględniającą związek $\omega t_2 = \omega t_1 + \pi/2$.



Rys. 3



Rys. 4

Po podstawieniu (3.14) do (3.9), (3.10) otrzymujemy

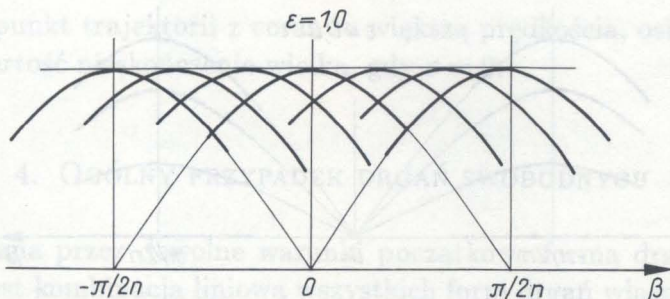
$$(3.15) \quad \begin{aligned} E^2(\tau) &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_1^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2) \cos 2\omega\tau, \quad \tau = t - t_1 \\ \dot{\Phi}(\tau) &= \omega |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| / E^2(\tau). \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe

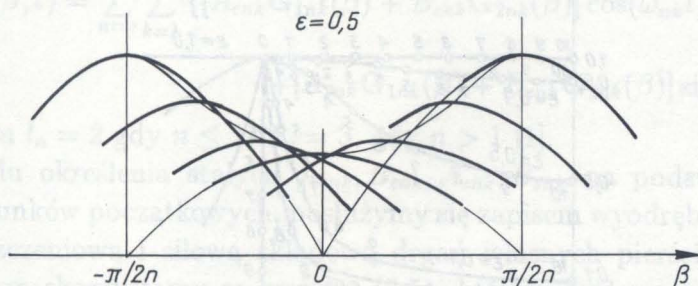
$$(3.16) \quad F^2(\tau) = E^2(\tau) / \mathbf{r}_1^2, \quad \dot{\Psi}(\tau) = \dot{\Phi}(\tau) / \omega, \quad \varepsilon = |\mathbf{r}_2| / |\mathbf{r}_1|,$$

to wzory (3.15) można napisać w postaci

$$(3.17) \quad \begin{aligned} F^2(\tau) &= \frac{1}{2}[1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos 2\omega\tau], \quad \varepsilon \leq F(\tau) \leq 1, \\ \dot{\Psi}(\tau) &= \varepsilon / F^2(\tau), \quad \varepsilon \leq \dot{\Psi}(\tau) \leq 1/\varepsilon. \end{aligned}$$



Rys. 5

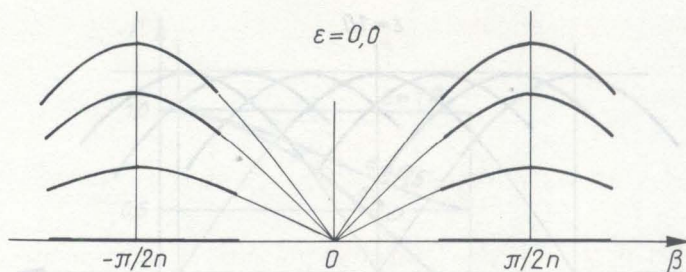


Rys. 6

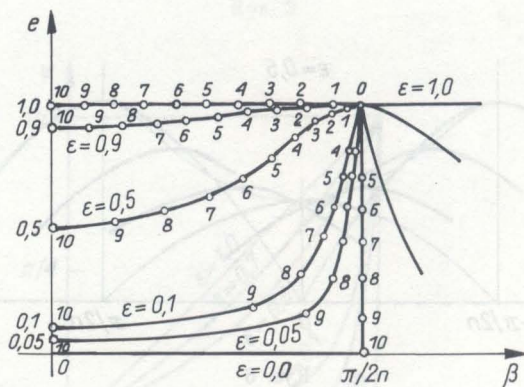
Wykresy funkcji $F(\tau; \varepsilon)$ i $\Psi(\tau; \varepsilon)$ w przedziale $[0, \pi/2]$ sporządzone przy założeniu, że $\Psi(0) = 0$ pokazano na rys. 3 i 4. Przedłużenia tych wykresów na przedział $[\pi/2, \pi]$ otrzymuje się uwzględniając fakt, że F wykazuje symetrię względem osi pionowej o równaniu $\omega t = \pi/2$, Ψ zaś symetrię względem punktu o współrzędnych $(\pi/2, \pi/2)$. Funkcja Ψ dla wartości parametru $\varepsilon = 0$ jest w przedziale $[0, \pi]$ funkcją Heavisidea o postaci

$$\Psi(\omega t) = \pi H(\omega t - \pi/2).$$

Kolejne fazy ruchu fali przemieszczenia radialnego $u(\beta, t)$ po obwodzie pierścienia, pokazano na rys. 5, 6 i 7 odpowiednio dla $\varepsilon = 1, 1/2, 0$. W przypadku gdy $\varepsilon = 1$, mamy do czynienia z falą biegnącą o stałej amplitudzie $E(t) = E_0$ ($F(\tau) = 1$), której grzbiet przemieszcza się po poziomej trajektorii prostoliniowej ze stałą prędkością kątową $\dot{\Phi}(\tau) = -\omega/n$ ($\dot{\Psi}(\tau) = -1/n$). Gdy $\varepsilon = 1/2$, fala staje się pulsująca i jej grzbiet kreśli trajektorię falisto-piłozębową (por. rys.8), po której porusza się on ze zmienną prędkością kątową. Gdy wreszcie $\varepsilon = 0$, fala staje się



Rys. 7



Rys. 8

stojąca. Istnieją przy tym dwie możliwości interpretacji tego przypadku. W pierwszej z nich falę stojącą traktujemy jako przypadek graniczny ($\varepsilon \rightarrow 0$) fali pulsującej: grzbiet fali przemieszcza się dokładnie pionowo w wyniku zmniejszania się amplitudy i w momencie gdy równa się ona zero, jak gdyby wykonuje skok z prędkością nieskończenie wielką z punktu o współrzędnej $\pi/2n$ do punktu o współrzędnej $-\pi/2n$. W interpretacji drugiej, grzbiet fali oscyluje w pionie od $+E_0$ do $-E_0$ przy ustalonym położeniu wszystkich jej węzłów. Na rys. 8 pokazano rodzinę trajektorii "grzbietowych" dla różnych wartości parametru $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Na każdej z trajektorii naniesiono punkty oznaczone cyframi 0, 1, 2, 3, ..., 10, przez które przebiega grzbiet fali w równych odstępach czasu $\Delta t = 0, 1\pi/\omega$. W przypadku gdy $\varepsilon = 1$, punkty te są również przestrzennie równoodległe na obwodzie pierścienia o $\Delta\beta = 0, 1\pi/n$. Wynika stąd stała prędkość liniowa ruchu fali biegnącej: $|v| = \omega R/n$. Wraz ze zmniejszaniem się wartości parametru ε określonej wzorem (3.16)₃, grzbiet fali przebiega przez

najniższy punkt trajektorii z coraz to większą prędkością, osiągającą w granicy wartość nieskończenie wielką, gdy $\varepsilon = 0$.

4. OGÓLNY PRZYPADEK DRGAŃ SWOBODNYCH

Wywołana przez dowolne warunki początkowe forma drgania swobodnego jest kombinacją liniową wszystkich form drgań własnych pierścienia, identyfikowanych za pomocą indeksów n, k

$$(4.1) \quad \mathbf{x}(\beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \{ [A_{cnk} \mathbf{G}_{1nk}(\beta) + B_{cnk} \mathbf{G}_{2nk}(\beta)] \cos(\omega_{nk}t) + [A_{snk} \mathbf{G}_{1nk}(\beta) + B_{snk} \mathbf{G}_{2nk}(\beta)] \sin(\omega_{nk}t) \},$$

przy czym $l_n = 2$ gdy $n \leq 1$, $l_n = 3$, gdy $n > 1$ [1].

W celu określenia stałych $A_{cnk}, B_{cnk}, A_{snk}, B_{snk}$ na podstawie danych warunków początkowych, posłużymy się zapisem wyodrębniającym przemieszczeniową i siłową składową drgań własnych pierścienia. W zapisie tym skorzystamy ze wzorów (2.5), którym nadamy nieco inną postać

$$(4.2) \quad \mathbf{G}_{ink}(\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ink}(\beta) \\ \mathbf{S}_{ink}(\beta) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{R}_{ink} = (U_{ink}, W_{ink}, \Phi_{ink})^T \\ \mathbf{S}_{ink} = (Q_{ink}, N_{ink}, M_{ink})^T \end{matrix}, \quad i = 1, 2$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$(4.3)_1 \quad \mathbf{R}_{1nk}(\beta) = \begin{bmatrix} e_{11} \cos(n\beta) \\ \varepsilon e_{21} \sin(n\beta) \\ \varepsilon e_{22} \sin(n\beta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2nk}(\beta) = \begin{bmatrix} e_{11} \sin(n\beta) \\ -\varepsilon e_{21} \cos(n\beta) \\ -\varepsilon e_{22} \cos(n\beta) \end{bmatrix},$$

$$(4.3)_2 \quad \mathbf{S}_{1nk}(\beta) = \begin{bmatrix} \varepsilon e_{23} \sin(n\beta) \\ e_{12} \cos(n\beta) \\ e_{13} \cos(n\beta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{2nk}(\beta) = \begin{bmatrix} -\varepsilon e_{23} \cos(n\beta) \\ e_{12} \sin(n\beta) \\ e_{13} \sin(n\beta) \end{bmatrix}.$$

Dzięki (4.2), dla składowej przemieszczeniowej otrzymujemy reprezentację analogiczną do (4.1)

$$(4.4) \quad \mathbf{r}(\beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \{ [A_{cnk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{cnk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)] \cos(\omega_{nk}t) + [A_{snk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{snk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)] \sin(\omega_{nk}t) \}.$$

Na podstawie (4.4) warunki początkowe ruchu pierścienia napiszemy następująco

$$(4.5) \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} [A_{cnk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{cnk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)],$$

$$(4.6) \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} \omega_{nk} [A_{snk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{snk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)].$$

Jak można łatwo wykazać (por. Dodatek), warunek ortogonalności form drgań własnych pierścienia ma postać

$$(4.7) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M} \mathbf{R}_{jml} \rangle = \int_0^{2\pi} \mathbf{R}_{ink}^T(\beta) \mathbf{M} \mathbf{R}_{jml}(\beta) d\beta = \alpha_{ink} \delta_{ij} \delta_{nm} \delta_{kl},$$

przy czym $\mathbf{M} = \text{diag}(1, 1, r)$, $\alpha_{ink} = \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M} \mathbf{R}_{ink} \rangle$.

Na podstawie (4.5)-(4.7) otrzymujemy

$$\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{M} \mathbf{R}_{1gh} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} [A_{cnk} \langle \mathbf{R}_{1nk}, \mathbf{M} \mathbf{R}_{1gh} \rangle + B_{cnk} \langle \mathbf{R}_{2nk}, \mathbf{M} \mathbf{R}_{1gh} \rangle] = \alpha_{1gh} A_{cgh},$$

skąd

$$A_{cgh} = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{M} \mathbf{R}_{1gh} \rangle / \alpha_{1gh}$$

i analogicznie

$$(4.8) \quad B_{cgh} = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{M} \mathbf{R}_{2gh} \rangle / \alpha_{2gh},$$

$$(4.9) \quad A_{sgh} = \langle \dot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{M} \mathbf{R}_{1gh} \rangle / (\omega_{gh} \alpha_{1gh}),$$

$$(4.10) \quad B_{sgh} = \langle \dot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{M} \mathbf{R}_{2gh} \rangle / (\omega_{gh} \alpha_{2gh}).$$

5. DRGANIA WYMUSZONE HARMONICZNIE

Za podstawę analizy drgań wymuszonych przyjmujemy układ równań różniczkowych [1], napisany w postaci bezwymiarowej

$$(5.1) \quad \mathbf{x}'(\beta, t) = \bar{\mathbf{L}} \mathbf{x}(\beta, t) + \mathbf{f}(\beta, t),$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$(5.2) \quad \mathbf{f}(\beta, t) = [0, 0, 0, -q_u(\beta, t), -q_w(\beta, t), q_\varphi(\beta, t)]^T,$$

$$q_u = \frac{R^3}{EI} \bar{q}_u, \quad q_w = \frac{R^3}{EI} \bar{q}_w, \quad q_\varphi = \frac{R^2}{EI} \bar{q}_\varphi.$$

Przyjmijmy, że wzór (2.2) określa odpowiedź pierścienia na wymuszenie harmoniczne dane w postaci

$$(5.3) \quad \mathbf{f}(\beta, t) = -\mathbf{F}_c(\beta) \cos \omega t - \mathbf{F}_s(\beta) \sin \omega t,$$

przy czym

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_c &= (0, 0, 0, q_{cu}, q_{cw}, -q_{c\varphi})^T, \\ \mathbf{F}_s &= (0, 0, 0, q_{su}, q_{sw}, -q_{s\varphi})^T. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (2.2) i (5.3) do (5.1) otrzymujemy dla wyznaczenia niewiadomych funkcji \mathbf{X}_c , \mathbf{X}_s określających odpowiedź pierścienia, dwa niezależne od siebie układy równań

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}'_c(\beta) &= \mathbf{L}(\omega)\mathbf{X}_c(\beta) - \mathbf{F}_c(\beta), \\ \mathbf{X}'_s(\beta) &= \mathbf{L}(\omega)\mathbf{X}_s(\beta) - \mathbf{F}_s(\beta). \end{aligned}$$

Wobec ich identycznej budowy poszukiwanie odpowiedzi można sprowadzić do rozwiązania równania

$$(5.6) \quad \mathbf{X}'(\beta) = \mathbf{L}(\omega)\mathbf{X}(\beta) - \mathbf{F}(\beta),$$

po zredukowaniu którego do postaci przemieszczeniowej (por. Dodatek) możemy napisać

$$(5.7) \quad (\mathbf{D} + p^2\mathbf{M})\mathbf{R} + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$(5.8) \quad \mathbf{R} = (U, W, \Phi)^T, \quad \mathbf{F} = (F_u, F_w, F_\varphi)^T.$$

Rozwiązania $\mathbf{R}(\beta)$ będziemy poszukiwać w postaci szeregu

$$(5.9) \quad \mathbf{R}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} [A_{nk}\mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{nk}\mathbf{R}_{2nk}(\beta)].$$

Podstawienie (5.9) do (5.7) i wykorzystanie tożsamości

$$(5.10) \quad \mathbf{D}\mathbf{R}_{ink} \equiv -p_{nk}^2\mathbf{M}\mathbf{R}_{ink}$$

prowadzi do układu równań

$$(5.11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} (p^2 - p_{nk}^2) [A_{nk} \mathbf{MR}_{1nk}(\beta) + B_{nk} \mathbf{MR}_{2nk}(\beta)] + \mathbf{F}(\beta) = \mathbf{0}.$$

Niewiadome obliczymy wykorzystując warunek ortogonalności form drgań własnych o postaci (4.7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} (p^2 - p_{nk}^2) [A_{nk} \langle \mathbf{R}_{igh}, \mathbf{MR}_{1nk} \rangle + B_{nk} \langle \mathbf{R}_{igh}, \mathbf{MR}_{2nk} \rangle] + \langle \mathbf{R}_{igh}, \mathbf{F} \rangle = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$(p^2 - p_{gh}^2) A_{gh} \alpha_{1gh} + \langle \mathbf{R}_{1gh}, \mathbf{F} \rangle = 0 \quad \text{gdy } i = 1,$$

$$(p^2 - p_{gh}^2) B_{gh} \alpha_{2gh} + \langle \mathbf{R}_{2gh}, \mathbf{F} \rangle = 0 \quad \text{gdy } i = 2$$

i ostatecznie, po wprowadzeniu oznaczeń

$$F_{igh} = \langle \mathbf{R}_{igh}, \mathbf{F} \rangle / \alpha_{igh}, \quad i = 1, 2$$

wzory na współczynniki szeregu (5.9) przedstawiają się następująco

$$(5.12) \quad A_{gh} = F_{1gh} / (p_{gh}^2 - p^2), \quad B_{gh} = F_{2gh} / (p_{gh}^2 - p^2).$$

Powracając do równań (5.5) możemy ich rozwiązania w przemieszczeniach napisać w postaci szeregów

$$(5.13) \quad \mathbf{R}_c(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} [A_{cnk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{cnk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)],$$

$$\mathbf{R}_s(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_n} [A_{snk} \mathbf{R}_{1nk}(\beta) + B_{snk} \mathbf{R}_{2nk}(\beta)]$$

o współczynnikach określonych wzorami analogicznymi do (5.12)

$$(5.14) \quad A_{cgh} = F_{1cgh} / (p_{gh}^2 - p^2), \quad B_{cgh} = F_{2cgh} / (p_{gh}^2 - p^2),$$

$$A_{sgh} = F_{1sgh} / (p_{gh}^2 - p^2), \quad B_{sgh} = F_{2sgh} / (p_{gh}^2 - p^2),$$

w których posłużono się oznaczeniem

$$(5.15) \quad F_{ijgh} = \langle \mathbf{R}_{igh}, \mathbf{F}_j^* \rangle / \alpha_{igh}, \quad i = 1, 2, \quad j = c, s,$$

przy czym

$$\mathbf{F}_c^* = (q_{cu}, q_{cw}, q_{c\varphi})^T, \quad \mathbf{F}_s^* = (q_{su}, q_{sw}, q_{s\varphi})^T.$$

6. ZAKOŃCZENIE

W trzech częściach niniejszego cyklu tematycznego została zaproponowana i omówiona szczegółowo koncepcja opisu zjawisk dynamicznych, zachodzących w drgającym pierścieniu Timoshenki, za pomocą układu równań różniczkowych o postaci normalnej.

Taki właśnie opis okazał się nie tylko wygodny, ale co ważniejsze umożliwił przedstawienie wyników analizy w postaci zwartych wzorów służących do obliczania częstości i form drgań własnych, a także odpowiedzi na wymuszenia harmoniczne o postaci zewnętrznie samorzównoważonej.

Wydaje się, że otrzymane rezultaty powinny stanowić dogodną podstawę do dalszych analiz w dziedzinie dynamiki pierścieni Timoshenki. Ku takiemu przypuszczeniu skłania na przykład porównanie prostych wzorów i zależności uzyskanych przez autora ze wzorami przytaczanymi w literaturze [np. 3,4].

Jest prawdopodobne, że na podstawie proponowanej koncepcji postępowania będzie możliwe zbudowanie bardzo sprawnego algorytmu generowania ścisłych elementów skończonych, kołowych pierścieni Timoshenki. Algorytm taki powinien umożliwić sprawną analizę dynamiczną dowolnych układów złożonych z takich elementów.

DODATEK. WARUNEK ORTOGONALNOŚCI FORM DRGAŃ WŁASNYCH
PIERŚCIENIA

W celu wyprowadzenia tego warunku, układ równań ruchu (2.3) należy przekształcić do innej postaci, napisanej tylko w przemieszczeniach U, W, Φ i charakteryzującej się samosprężonością operatora różniczkowego.

Ten nowy układ równań tworzą dotychczasowe równania 4, 5 i 6 po wyeliminowaniu z nich sił Q, N, M na podstawie równań 1, 2 i 3. Uzyskanie samosprężoności operatora różniczkowego wymaga jednak jeszcze dodatkowego przemnożenia ostatniego z równań przez liczbę -1. Otrzymujemy w ten sposób równanie macierzowe

$$(D.1) \quad DR = -p^2MR,$$

w którym posłużono się następującymi oznaczeniami:

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_2 d^2 + \mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_0, \quad d = d/dt, \quad \sigma_i = 1/\nu_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(D.2) \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 + \sigma_3 & -\sigma_3 \\ -(\sigma_2 + \sigma_3) & 0 & 0 \\ \sigma_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} -\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 & \sigma_3 \\ 0 & \sigma_3 & -\sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} U \\ W \\ \Phi \end{bmatrix}.$$

Operator macierzowy \mathbf{D} ma tę własność, wynikającą z jego samosprężoności, że

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{C}_2 d^2 - \mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_0.$$

Wprowadźmy następujące określenie iloczynu skalarnego

$$(D.3) \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}^T(\beta) \mathbf{G}(\beta) d\beta$$

i oznaczmy przez $\mathbf{R}_{ink}, \mathbf{R}_{jml}$ dwie różne formy drgań własnych pierścienia (por. p.4). Dzięki samosprężoności operatora \mathbf{D} otrzymujemy

$$(D.4) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{D}\mathbf{R}_{jml} \rangle = \langle \mathbf{R}_{jml}, \mathbf{D}\mathbf{R}_{ink} \rangle.$$

Równość tę można sprawdzić posługując się całkowaniem przez części i uwzględniając warunki brzegowe.

Na podstawie równania (D.1) możemy teraz napisać

$$(D.5) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{D}\mathbf{R}_{jml} \rangle = -p_{ml}^2 \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{jml} \rangle$$

$$(D.6) \quad \langle \mathbf{R}_{jml}, \mathbf{D}\mathbf{R}_{ink} \rangle = -p_{nk}^2 \langle \mathbf{R}_{jml}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{ink} \rangle,$$

a po uwzględnieniu (D.4) dodatkowo

$$(D.7) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{D}\mathbf{R}_{jml} \rangle = -p_{nk}^2 \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{jml} \rangle.$$

Odejmując stronami (D.5) i (D.7), otrzymujemy przy założeniu, że $p_{nk} \neq p_{ml}$

$$(D.8) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{jml} \rangle = 0.$$

Przyjmując, że

$$(D.9) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{ink} \rangle = \alpha_{ink}$$

warunek ortogonalności form drgań własnych pierścienia możemy zapisać w postaci ogólnej

$$(D.10) \quad \langle \mathbf{R}_{ink}, \mathbf{M}\mathbf{R}_{jml} \rangle = \alpha_{ink} \delta_{ij} \delta_{nm} \delta_{kl}$$

ślusznej dla dowolnych wartości indeksów i, j, n, m, k, l .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. OLSZOWSKI, *Plaskie drgania swobodne niepodpartych pierścieni kołowych, Cz.I. Częstości drgań własnych*, Rozpr.Inżyn., **37**, 3, 547-563, 1989.
2. B. OLSZOWSKI, *Plaskie drgania swobodne niepodpartych pierścieni kołowych, Cz.II. Formy drgań własnych*, Rozpr.Inżyn., **38**, 3-4, 553-569, 1990.
3. M.S.ISSA, T.M.WANG, B.T.HSIAO, *Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, I. Free vibration*, J.Sound and Vibr., **114**, 2, 297-308, 1987.
4. T.M.WANG, M.S.ISSA, *Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, II. Forced vibration*, J.Sound and Vibr., **114**, 2, 309-323, 1987.

Резюме

ПЛОСКИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕПОДПЕРТЫХ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ.
ЧАСТЬ III. ОДНОЧАСТОТНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

На основе предыдущих статей [1, 2] обсуждены основные черты одночастотных свободных колебаний моделей круговых колец, уточненных в смысле Тимошенко. Добавочно обсуждены общие случаи свободных и вынужденных колебаний.

SUMMARY

FREE IN-PLANE VIBRATIONS OF UNSUPPORTED CIRCULAR RINGS
PART III. FREE SINGLE-FREQUENCY VIBRATIONS

Description of the characteristic features of free single-frequency vibrations is given for Timoshenko-type rings, the analysis being based on the previous results presented in [1, 2]; a general case of free and forced vibrations is discussed.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 kwietnia 1990 r.