

NIELINIOWA ANALIZA PEŁZANIA WSTĘPNIE SPRĘŻONYCH KONSTRUKCJI BETONOWYCH

WIESŁAW WOJEWÓDZKI (WARSZAWA)

i ALEKSIEJ PIETROW (PIETROZAWODSK)

Przedstawiono obliczeniowy model wstępnie sprężonych konstrukcji betonowych w jednoosiowym i płaskim stanie naprężenia, w którym uwzględniono własności sprężyste, liniowe i nieliniowe pełzanie oraz skurcz betonu, a ponadto nieliniowe odkształcenia zbrojenia oraz zjawisko powstawania rys. Proponowana metoda nieliniowej analizy, przy zastosowaniu elementów skończonych, pozwala określić naprężenia i odkształcenia betonu i zbrojenia, schemat tworzenia i rozwijania się rys, schemat zniszczenia konstrukcji wskutek plastycznego płynięcia zbrojenia i zniszczenia betonu. Obliczono wstępnie sprężoną belkę żelbetową i porównano wyniki z istniejącymi wynikami doświadczenia. Zadawalająca zgodność rezultatów dla obciążeń długotrwałych i krótkotrwałych wskazuje na użyteczność modelu i metody analizy zachowania się sprężonych konstrukcji betonowych.

1. WSTĘP

Aby zapewnić niezawodność i bezpieczeństwo konstrukcji, trzeba umieć przewidywać jej zachowanie w różnych warunkach obciążenia, między innymi w warunkach obciążeń długotrwałych. W tym celu należy dysponować odpowiednim, modelem obliczeniowym konstrukcji, którego podstawową część stanowią matematyczne modele betonu i stali zbrojeniowej oraz sposób połączenia i współpracy obu materiałów. Modele powinny uwzględniać odkształcenia sprężyste, skurcz i nieliniowe pełzanie betonu oraz nieliniowe sprężysto-plastyczne odkształcenia zbrojenia. Rozwijające się zarysowanie znacznie redukuje sztywność konstrukcji. Występuje redystrybucja naprężeń. Zbrojenie i rysy powodują

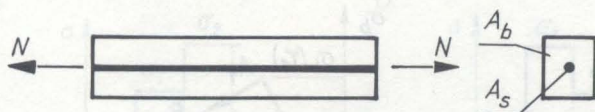
anizotropię kompozytowego materiału. Wskutek fizycznej nieliniowości materiałów naprężenia i odkształcenia wywołane siłą sprężenia wstępnego, obciążeniem użytkowym i skurczem betonu nie mogą być wyznaczone niezależnie i potem dodane.

Nieliniowe zachowanie się konstrukcji betonowych i żelbetonowych jest przedmiotem intensywnych badań teoretycznych i doświadczalnych [1-20]. Wyniki prac prezentowano na wielu konferencjach naukowych np.: IABSE 1981 r., Split 1984 r., Karpacz 1984 r., Bombaj 1985 r., Tokio 1986 r., Tucson 1987 r., SMiRT Lozanna 1987 r.

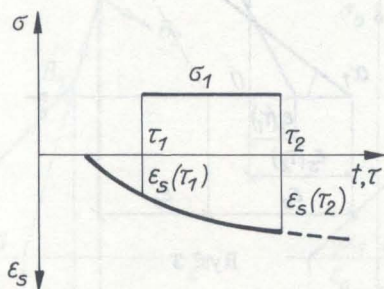
Celem pracy jest przedstawienie nieliniowego modelu obliczeniowego wstępnie sprężonych konstrukcji betonowych w jedno i dwuosiowym stanie naprężenia, poddanych działaniu złożonych obciążeń. W modelu tym uwzględnia się własności sprężyste materiału, liniowe i nieliniowe pełzanie oraz skurcz betonu, opisuje się zjawisko powstawania rys i stany zniszczenia betonu, a ponadto nieliniowe sprężysto-plastyczne odkształcenia zbrojenia. Korzysta się z teorii nieliniowego pełzania rozwijanej w literaturze radzieckiej, np. [18-20]. W stosunku do innych nieliniowych modeli charakteryzuje się on kompleksowym ujęciem zasadniczych zjawisk fizycznych oraz prostotą i mniejszą czasochłonnością obliczeń. Dotychczasowe porównania wyników teoretycznych z doświadczalnymi wskazują na zadowalającą ich zgodność. Stosowanie proponowanego deformacyjnego modelu wymaga dla danego betonu i warunków hygrotermicznych eksperymentalnego określenia modułu sprężystości, wytrzymałości i odkształceń skurczu jako funkcji wieku betonu oraz wyznaczenia funkcji pełzania. Podobnie jak w innych teoriach pełzania np. Arutiuniana ogranicza to zakres zastosowań i porównań. Proponowany model opisuje globalne zachowanie się konstrukcji pomijając efekty lokalne związane z tworzeniem się rys. Efekty te rozpatrywano w pracy [6] przyjmując odkształcenia pełzania według zaleceń CEB Raport 111 z 1975 r., gdzie są one określone w przybliżony sposób.

2. JEDNOOSIOWY STAN NAPRĘŻENIA

Rozpatrujemy sprężony pręt betonowy obciążony osiowo siłą rozciągającą N , rys. 1. Zbrojenie pręta o przekroju A_s jest skoncentrowane w środku ciężkości przekroju betonowego o powierzchni A_b . Równanie stanu pręta ma następującą postać:



Rys. 1



Rys. 2

$$(2.1) \quad \sigma - \mu\sigma_0 = E'_b(\varepsilon - \varepsilon_0) + E_s\mu\varepsilon,$$

gdzie oznaczono przez

$\sigma = \frac{N}{A_b}$ naprężenie w pręcie od obciążenia zewnętrznego N określone przy upraszczającym założeniu przekroju jednorodnego,

σ_0 naprężenie wstępne w zbrojeniu od sprężenia,

ε odkształcenie pręta,

ε_0 odkształcenie własne betonu (np. skurczowe),

E'_b moduł sieczny betonu,

E_s moduł Younga zbrojenia,

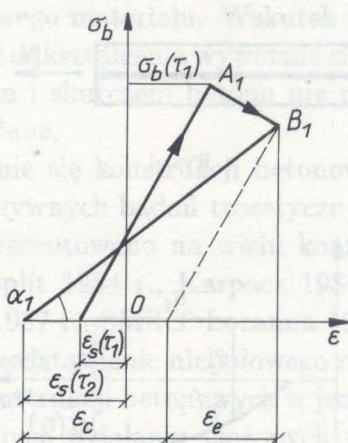
$\mu = \frac{A_s}{A_b}$ współczynnik zbrojenia.

Niech pręt będzie poddany w czasie τ_1 oddziaływaniu zewnętrznych obciążeń o intensywności σ_1 i odkształceniom skurczu ε_s , jak pokazano na rys. 2. Rozpatrzmy najpierw stan pręta w chwili τ_1 . Odkształcenie pręta i naprężenie w betonie w chwili τ_1 oblicza się ze wzorów:

$$(2.2) \quad \varepsilon = (\sigma_1 - \mu\sigma_0 + E'_b\varepsilon_0)/(E'_b + E_s\mu),$$

$$(2.3) \quad \sigma_b = E'_b(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

gdzie $E'_b = E_b(\tau_1)$, $E_b(\tau_1)$ jest modułem sprężystości betonu w wieku τ_1 , $\varepsilon_0 = \varepsilon_s(\tau_1)$.



Rys. 3

Wskutek pełzania i skurczu betonu następuje zmiana naprężenia w betonie przedstawiona na rys. 3 przejściem z punktu A_1 do punktu B_1 . Wyznaczenie naprężenia i odkształcenia w chwili τ_2 wymaga iteracyjnego rozwiązania następujących równań:

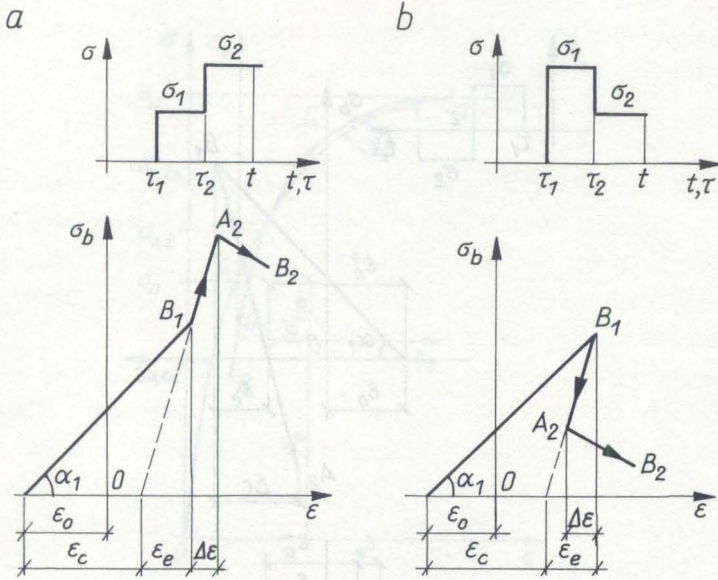
$$\epsilon_e + \epsilon_c = \sigma_b / E_b(\tau_2) + \epsilon_c(\tau_2), \quad \epsilon_0 = \epsilon_s(\tau_2),$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} E'_b &= \sigma_b / (\epsilon_e + \epsilon_c), \\ \epsilon &= (\sigma_1 - \sigma_0 \mu + E'_b \epsilon_0) / (E'_b + E_s \mu), \\ \sigma_b &= E'(\epsilon - \epsilon_0). \end{aligned}$$

Na podstawie (2.4)₁ oblicza się odkształcenie całkowite betonu, które składa się z odkształcenia liniowo-sprężystego ϵ_e i odkształcenia pełzania ϵ_c . Wyznaczenie odkształceń ϵ_c będzie omówione później. Na podstawie równania (2.4)₂ znajduje się moduł sieczny betonu, który jest równy tangensowi kąta α_1 , rys. 3. Z równania stanu (2.4)₃ otrzymuje się odkształcenie pręta ϵ , a z (2.4)₄ oblicza się naprężenie w betonie w chwili τ_2 .

Cykl obliczeń (2.4)₁÷(2.4)₄ trzeba powtarzać wiele razy, dotąd, dopóki nie przestanie się zmieniać np. odkształcenie pręta ϵ lub naprężenie w betonie σ_b .

Zmiana naprężenia w betonie wskutek zmiany obciążenia σ charakteryzuje się na wykresach rys. 4 przejściem z punktu B_1 do punktu A_2 .



Rys. 4

Przyrost odkształcenia ma charakter sprężysty i wynosi

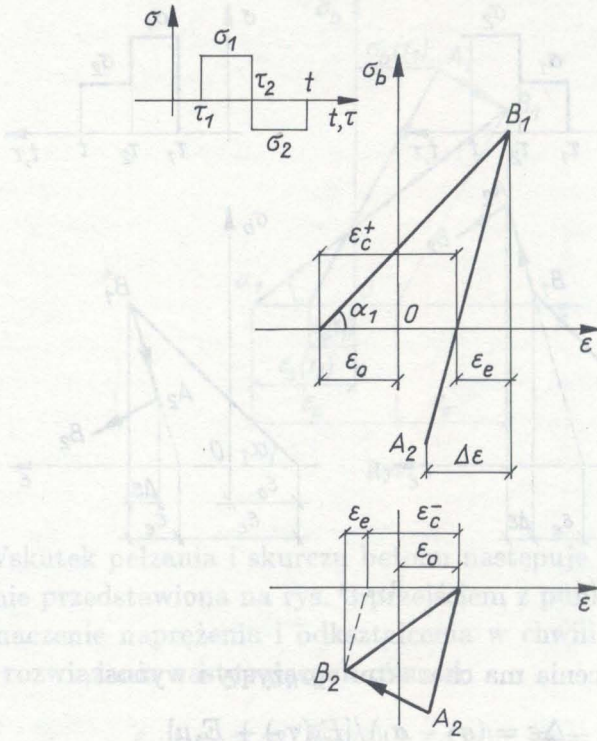
$$(2.5) \quad \Delta \epsilon = (\sigma_2 - \sigma_1) / [E_b(\tau_2) + E_s \mu].$$

Napężenie w betonie w chwili τ_2 po zmianie obciążenia jest równe

$$(2.6) \quad \sigma_b = \sigma_b(\tau_2) + \Delta \epsilon E_b(\tau_2).$$

Zmianę napężenia w betonie wywołaną pełzaniem i skurczem przedstawia na rys.4 przejście z punktu A_2 do B_2 . W celu obliczenia napężenia w betonie i odkształcenia pręta trzeba posłużyć się algorytmem (2.4), a czas τ_2 zastąpić czasem t .

Rozpatrzmy przypadek obciążenia pręta napężeniem o zmiennym znaku. Zmiana napężenia w betonie, tj. przejście z punktu B_1 do punktu A_2 na wykresie, rys. 5, jest spowodowana zmianą znaku obciążenia. Przy obliczaniu napężenia w betonie w chwili t (punkt B_2), odkształceń pełzania powstających przy naprężeniach różnych znaków nie oddaje się bezpośrednio. Odkształcenia pełzania, których znak jest zgodny ze znakiem naprężenia, w naszym przypadku ϵ_c^- , wykorzystuje się do obliczania modułu siecznego betonu E'_b , a odkształcenia przy pełzaniu z przeciwnym znakiem ϵ_c^+ dodaje się do odkształceń skurczowych przy określeniu odkształceń własnych betonu ϵ_0 .



Rys. 5

Jeżeli naprężenia rozciągające w betonie osiągną granicę wytrzymałości, to w pręcie pojawiają się rysy. Stan naprężenia stanie się niejednorodny. W zbrojeniu maksymalne naprężenia wystąpią w przekroju przez rysę, a minimalne w przekroju środkowym między rysami. W betonie, w przekroju przez rysę naprężenia znikają, a w środkowym przekroju osiągną maksimum.

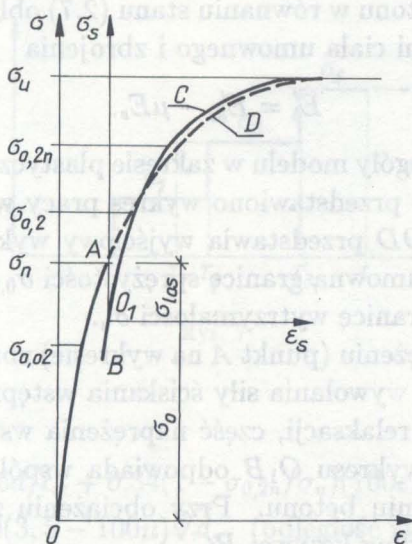
W modelu obliczeniowym żelbet z rysami zastępuje się ciałem ciągłym o zastępczej sztywności. W równaniu stanu

$$(2.7) \quad \sigma - \sigma_0 \mu = E'_b \varepsilon - E'_b \varepsilon_0$$

sztywność żelbetu przyjmuje się jako

$$(2.8) \quad E'_b = \mu E_s / \psi_s,$$

gdzie ψ_s jest współczynnikiem typu współczynnika MURASZEWA [13].



Rys. 6

Współczynnik ψ_s rośnie od wartości minimum do jedności. Minimum ψ_s oblicza się z warunku równości sztywności rzeczywistego i umownego ciała w chwili utworzenia się rys, tj. w chwili τ_{cr} według wzoru

$$(2.9) \quad \psi_{s_{min}} = \mu E_s / [E'_b(\tau_{cr}) + E_{s\mu}].$$

Dla obliczenia wartości ψ_s w zakresie od $\psi_{s_{min}}$ do jedności proponuje się wzór

$$(2.10) \quad \psi_s = 1 - \frac{1}{1 + \Delta\sigma_{cr} / R_{bten}(\tau) + n\mu},$$

gdzie $R_{bten}(\tau)$ jest granicą wytrzymałości betonu na rozciąganie w wieku τ , $\Delta\sigma_{cr} = \sigma - \sigma_{cr}$, σ_{cr} oznacza obciążenie zewnętrzne pręta w chwili utworzenia się rys. Współczynnik

$$(2.11) \quad n = E_s / E'_b(t)$$

względnia wpływ pelzania na sztywność zarysowanego żelbetu.

W chwili pojawienia się rys, $t = \tau_{cr}$ i wzór (2.10) przyjmuje postać (2.9). Jeżeli pelzanie nie występuje to po zamianie (2.11) na $n = 2E_s / E_b$, wzór (2.10) przechodzi we wzór podany w [13]. Propozycja (2.10) jest rozszerzeniem znanej formuły Muraszewa na przypadek pelzania betonu przy złożonych obciążeniach.

Moduł sieczny betonu w równaniu stanu (2.7) oblicza się jako różnicę między sztywnościami ciała umownego i zbrojenia

$$(2.12) \quad E'_b = E'_{bs} - \mu E_s.$$

Rozpatrzmy szczegóły modelu w zakresie plastycznej pracy stalowego zbrojenia. Na rys. 6 przedstawiono wykres pracy wstępnie sprężonego zbrojenia. Krzywa OD przedstawia wyjściowy wykres rozciągania, na którym wyróżniono umowną granicę sprężystości $\sigma_{0,02}$, umowną granicę plastyczności $\sigma_{0,2}$ i granicę wytrzymałości σ_u .

Po wstępnym sprężeniu (punkt A na wykresie) zbrojenie ma stałe odkształcenie do chwili wywołania siły ściskania wstępnego w betonie. W tym czasie, wskutek relaksacji, część naprężenia wstępnego σ_{los} będzie stracona. Odcinek wykresu O_1B odpowiada wspólnej pracy betonu i zbrojenia po sprężeniu betonu. Przy obciążeniu zewnętrznym pręta zbrojenie pracuje według krzywej BC .

Wstępne rozciąganie zbrojenia w zakresie od $0,5\sigma_{0,2}$ do $\sigma_{0,2}$ zwiększa jego wytrzymałość. Umowna granica plastyczności wzrośnie do wartości, którą wyznaczyć można ze wzoru

$$(2.13) \quad \sigma_{0,2n} = \sigma_{0,2} + 128(\sigma_n/\sigma_{0,2} - 0,5)^3, \text{ (MPa)},$$

zaproponowanego w pracy [14].

W zakresie sprężysto-plastycznej pracy zbrojenia ogólnie nieliniowe odkształcenia można określić według propozycji podanej w pracy [15], mianowicie dla $0,8\sigma_{0,2n} \leq \sigma_s + \sigma_0 \leq \sigma_{0,2n}$

$$(2.14) \quad \varepsilon_{sp} = 0,01(\sigma_s + \sigma_0 - 0,8\sigma_{0,2n}),$$

$$\text{dla} \quad \sigma_s + \sigma_0 > \sigma_{0,2n}$$

$$(2.15) \quad \varepsilon_{sp} = (0,35 + A\Delta s)/(175 - B\Delta s),$$

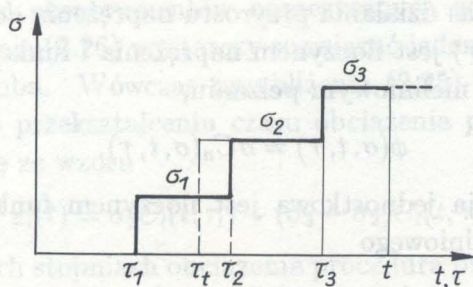
gdzie $\Delta s = (\sigma_s + \sigma_0 - \sigma_{0,2n})/\sigma_{0,2n}$, a A i B - stałe zbrojenia.

Plastyczne odkształcenia zbrojenia koncentrują się w przekrojach z rysami. Zatem do wzoru (2.8) określającego sieczny moduł żelbetu wprowadza się współczynnik ψ_ξ (typu współczynnika Muraszewa),

$$(2.16) \quad E'_{bs} = \mu E_s / \psi_s / \psi_\xi.$$

Współczynnik ψ_ξ przyjmuje się za pracą [16] w postaci

$$(2.17) \quad \psi_\xi = 1 + \xi(1/\nu_s - 1)/\psi_s,$$



Rys. 7

gdzie

$$\xi = 5,6d/l_{cr} + 0,34(1 - \sigma_{0,2n}/\sigma_u)(100\varepsilon_{sp} - 1) \leq 1,$$

$$l_{cr} = 20(3,5 - 100\mu)\sqrt[3]{d}, \quad (\text{odległość rys}),$$

$$\nu_s = \sigma_s/E_s/(\sigma_s/E_s + \varepsilon_{sp}),$$

d – średnica zbrojenia w mm.

W proponowanym modelu przyjmuje się, że całkowite odkształcenia betonu są złożone ze sprężysto-liniowych odkształceń ε_e i odkształceń pełzania ε_c zaś odkształcenia pełzania z części liniowej i nieliniowej. Do liniowych odkształceń pełzania stosuje się zasadę superpozycji Boltzmana. A zatem dla ciągłych zmian $\sigma(\tau)$

$$(2.18) \quad \varepsilon_l(t) = \int_{\tau}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} C_l(t, \tau) dt,$$

gdzie $C_l(t, \tau)$ oznacza miarę pełzania liniowego. Dla schodkowych zmian naprężenia całkę (2.18) zastępuje się sumą

$$(2.19) \quad \varepsilon_l(t) = \sigma_1 C_l(t, \tau_1) + \sum_{i=2}^n \Delta \sigma_i C_l(t, \tau_i).$$

gdzie $\Delta \sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$.

Zakłada się, że nieliniowe odkształcenia pełzania są całkowicie nieodwracalne przy odciążeniu. Do obliczenia nieliniowych odkształceń pełzania przy zmiennym programie obciążenia stosuje się całkę Lebesgue'a

$$(2.20) \quad \varepsilon_n(t) = \int_0^{\sigma_{\max}} \frac{a\phi(\sigma, \tau + T, \tau)}{\partial \sigma} d\sigma,$$

gdzie T oznacza czas działania przyrostu naprężenia $d\sigma$.

Funkcja $\phi(\sigma, t, \tau)$ jest iloczynem naprężenia i funkcji jednostkowego odkształcenia przy nieliniowym pełzaniu,

$$(2.21) \quad \phi(\sigma, t, \tau) = \sigma C_n(\sigma, t, \tau).$$

Na ogół, funkcja jednostkowa jest iloczynem funkcji naprężenia i miary pełzania nieliniowego

$$(2.22) \quad C_n(\sigma, t, \tau) = \sigma^r C_n(t, \tau), r > 1.$$

Przy schodkowej zmianie naprężenia całkę (2.20) zastępuje suma

$$(2.23) \quad \varepsilon_n(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i C_n(\sigma_i, \tau_i + T_i, \tau_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i C_n(\sigma_i, \tau_{i+1} + T_{i+1}, \tau_{i+1}).$$

Przy numeracji stopni naprężenia w (2.23) przyjmuje się regułę $\sigma_{i-1} < \sigma_i < \sigma_{i+1}$.

W charakterze miar pełzania mogą być użyte dwa rodzaje funkcji, mianowicie funkcje do aproksymacji eksperymentalnych krzywych pełzania lub funkcje prognozujące pełzanie na podstawie składników projektowych masy betonowej. W obu przypadkach zawierają one szereg współczynników, których liczba zależy od stopnia dokładności aproksymacji. Przykłady miar pełzania podano w pracy [17].

Pełna realizacja modeli pełzania według wzorów (2.19) i (2.23) wymaga opracowania i przechowywania na komputerze dużej liczby informacji związanych z historią naprężenia i odkształcenia. W celu zredukowania objętości informacji przy obliczeniach pełzania proponuje się zastosowanie metody przekształcenia czasu obciążenia [18,19] i jej modyfikację dla przypadku obliczeń iteracyjnych.

Rozpatrzmy obciążenie w postaci schodkowo rosnącego naprężenia, rys.7. Dla t z przedziału od τ_2 do τ_3 odkształcenia pełzania liniowego wynoszą

$$(2.24) \quad \varepsilon_l(t) = \sigma_1 C_l(t, \tau_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) C_l(t, \tau_2).$$

Zastępujemy równość (2.24) przybliżeniem

$$(2.25) \quad \varepsilon_l(t) \simeq \sigma_2 C_l(t, \tau_t).$$

gdzie τ_t nazywa się przekształconym czasem obciążenia. Czas ten wyznacza się rozwiązując równanie

$$(2.26) \quad \sigma_1 C_l(t, \tau_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) C_l(t, \tau_2) = \sigma_2 C_l(t, \tau_t).$$

Na podstawie eksperymentów numerycznych w pracy [18] stwierdzono, że równanie (2.26) wystarczy rozwiązać jeden raz przy t równym τ_2 plus jedna doba. Wówczas przybliżenie (2.25) będzie miało minimalny błąd. Po przekształceniu czasu obciążenia pełzanie liniowe dla $t > \tau_3$ określa się ze wzoru

$$(3.27) \quad \varepsilon_l(t) = \sigma_2 C_l(t, \tau_2) + (\sigma_3 - \sigma_2) C_l(t, \tau_3).$$

Na następnych stopniach obciążenia procedura przekształcenia czasu obciążenia powtarza się, a odkształcenia pełzania liniowego oblicza się według dwumianów typu (2.27) niezależnie od liczby stopni obciążenia. Jeżeli program obciążenia zawiera też odciążenia, to mając na uwadze stosowalność zasady superpozycji, program ten można podzielić na dwie gałęzie zawierające tylko wzrastające naprężenia. Przekształcenia czasu obciążenia na poszczególnych gałęziach są niezależne.

Dla pełzania nieliniowego równanie określające przekształcony czas obciążenia ma postać

$$(3.28) \quad \sigma_1 C_n(\sigma_1, t, \tau_1) + \sigma_2 C_n(\sigma_2, t, \tau_2) - \sigma_1 C_n(\sigma_1, t, \tau_2) = \sigma_2 C_n(\sigma_2, t, \tau_t),$$

gdzie $t = \tau_2 + 1$ w dobach. Po przekształceniu czasu obciążenia pełzanie nieliniowe dla $t > \tau_3$ wyznacza się według wzoru

$$(3.29) \quad \varepsilon_n(t) = \sigma_2 C_n(\sigma_2, t, \tau_t) + \sigma_3 C_n(\sigma_3, t, \tau_3) - \sigma_2 C_n(\sigma_2, t, \tau_3).$$

Na stopniach odciążenia, z uwagi na nieodwracalność pełzania nieliniowego, przekształcenie czasu obciążenia nie jest potrzebne, a odkształcenia pełzania nieliniowego oblicza się ze wzoru

$$(3.30) \quad \varepsilon_n(t) = \varepsilon_n(\tau_i) + \sigma_i C_n(\sigma_i, t, \tau_t) - \sigma_i C_n(\sigma_i, \tau_i, \tau_t),$$

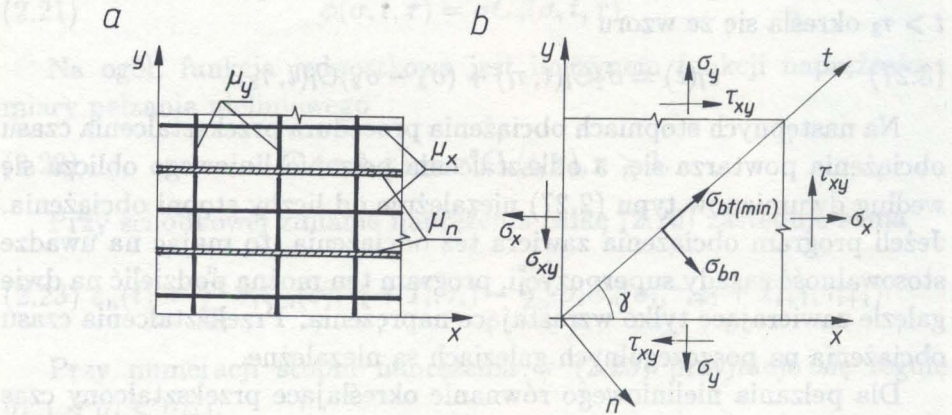
gdzie τ_i oznacza początek stopnia odciążenia.

Przedstawiony deformacyjny model pręta zbrojonego uwzględnia sprężysto-plastyczne odkształcenia zbrojenia, pełzanie i skurcz betonu oraz zjawisko powstawania rys pod złożonymi obciążeniami. W dalszej części pracy model ten zostanie rozwinięty do opisu zachowania się żelbetu w płaskim stanie naprężenia.

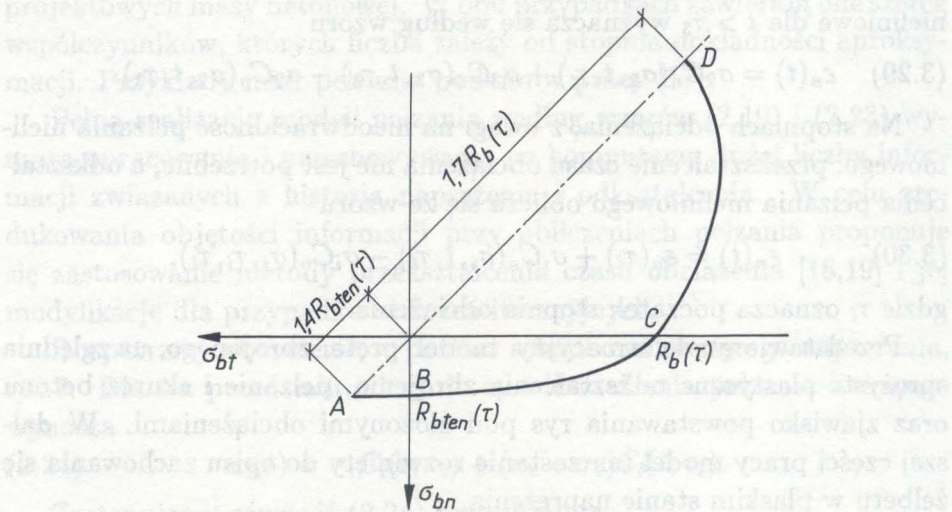
4. PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

Rozpatrzmy element wstępnie sprężonej konstrukcji żelbetowej w płaskim stanie naprężenia, rys. 8a. Ilość zbrojenia równoległego do osi

układu x i y jest określona w przekrojach normalnych elementu przez bezwymiarowe współczynniki μ_x, μ_y, μ_n . Zbrojenie sprężające (μ_n) jest równoległe do osi x .



Rys. 8



Rys. 9

Równanie równowagi płaskiego elementu ma postać

$$(3.1) \quad \{\sigma\} = [D]_{bs}\{\varepsilon\} - [D]_b\{\varepsilon_0\},$$

gdzie $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ oznaczają naprężenia i odkształcenia elementu, $[D]_{bs}$ i $[D]_b$ są macierzami sztywności, odpowiednio żelbetu i betonu, a $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \gamma_{0xy}\}$ oznaczają odkształcenia własne betonu. Składowe odkształceń własnych betonu wyraża się następująco:

$$(3.2) \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s + \varepsilon_{cn} \sin^2 \gamma + \varepsilon_{ct} \cos^2 \gamma \\ \varepsilon_s + \varepsilon_{cn} \cos^2 \gamma + \varepsilon_{ct} \sin^2 \gamma \\ (\varepsilon_{cn} - \varepsilon_{ct}) \sin \gamma \cos \gamma \end{Bmatrix},$$

gdzie ε_s oznacza odkształcenia skurczu, a ε_{cn} i ε_{ct} odkształcenia pelzania w kierunkach osi głównych naprężeń n i t , rys. 8b.

Siły ściskania od wstępnego sprężenia można odnieść do granicy elementu konstrukcji i dodać je do sił od obciążenia zewnętrznego, nie wystąpią one zatem w równaniu stanu.

Odształcony beton przed powstaniem rys traktuje się jako ciało ortotropowe, w którym kierunki ortotropii pokrywają się z kierunkami osi głównych naprężeń n, t . Elementy symetrycznej macierzy podatności betonu $[C]_b = [D]_b^{-1}$ wynoszą:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_{11b} &= \sin^2 \gamma / E'_{bn} + \cos^2 \gamma / E'_{bt}, \\ C_{12b} &= -\nu_b(1+m)/(mE'_{bn} + E'_{bt}), \\ C_{13b} &= C_{23b} = (1/E'_{bn} - 1/E'_{bt}) \sin \gamma \cos \gamma, \\ C_{22b} &= \cos^2 \gamma / E'_{bn} + \sin^2 \gamma / E'_{bt}, \\ C_{33b} &= 1/E'_{bn} + 1/E'_{bt} + 2\nu_b(1+m)/(mE'_{bn} + E'_{bt}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \arctg[2\tau_{bxy}/(\sigma_{bx} - \sigma_{by})], \\ m &= |\sigma_{bn}/\sigma_{bt}| \leq 1, \end{aligned}$$

ν_b – współczynnik Poissona dla betonu w zakresie odkształceń sprężystych (w obliczeniach przyjmowano 0,2).

Elementy macierzy sztywności żelbetu oblicza się sumując odpowiednie sztywności betonu i zbrojenia w kierunkach x, y . A zatem

$$(3.4) \quad \begin{aligned} D_{11bs} &= D_{11b} + \mu_x E_{sx} + \mu_n E_{sn}, \\ D_{22bs} &= D_{22b} + \mu_y E_{sy}. \end{aligned}$$

Pracy zbrojenia na ścinanie nie uwzględnia się.

Wzory (3.3) zawierają moduły sieczne E'_{bn} , E'_{bt} w kierunkach głównych naprężeń, które wyznacza się według iteracyjnego algorytmu podanego w drugim rozdziale pracy. Algorytm iteracyjny dla obliczania siecznych modułów betonu, a również wzory dla odkształceń własnych zawierają odkształcenia pełzania betonu w płaskim stanie naprężenia. Aby uwzględnić wpływ stanu naprężenia na pełzanie proponuje się wyznaczyć odkształcenia pełzania w kierunkach głównych naprężeń według wzoru

$$(3.5) \quad \varepsilon_{c\alpha} = \sigma_{b\alpha} [C_I^*(t, \tau) + k_\alpha C_n(\sigma_{b\alpha}, t, \tau)], \quad \alpha = n, t,$$

gdzie $C_I^*(t, \tau)$ jest miarą pełzania liniowego, która uwzględnia wpływ kształtu elementu, k_α oznacza empiryczny współczynnik uwzględniający wzajemny wpływ na pełzanie naprężeń głównych odwzorowanych w różne strefy krzywej wytrzymałości granicznej betonu przedstawionej na rys.9.

Dla strefy "ściskanie-ściskanie" proponuje się przyjąć

$$(3.6) \quad k_n = k_t = 1 - 0,7 \sqrt{|\sigma_{bn}| / R_b(\tau)},$$

co odpowiada zwiększonej wytrzymałości betonu opisanej krzywą CD w stosunku do wytrzymałości przy jednoosiowym ściskaniu $R_b(\tau)$. W strefie "ściskanie-rozciąganie" ze wzrostem ściskania pełzanie w kierunku rozciągania wyraźnie się zwiększa, co odpowiada szybszemu osiągnięciu granicy wytrzymałości BC . Uwzględnia to wzór

$$(3.7) \quad k_n = [1 + 0,9 \sigma_{bt} / R_b(\tau)]^{-1}, \quad \sigma_{bt} < 0.$$

Badania doświadczalne wskazują też, że naprężenia rozciągające nie mają widocznego wpływu na pełzanie w kierunku ściskania, a zatem $k_t = 1$. W strefie "rozciąganie-rozciąganie" przyjmuje się $k_n = k_t = 1$.

Gdy naprężenia w betonie osiągną linię AC krzywej granicznej wytrzymałości, to w betonie utworzą się rysy w kierunku osi t nachylonej pod kątem γ względem osi x . Po powstaniu rys elementy macierzy podatności żelbetu proponuje się wyznaczyć według wzorów opartych na wynikach badań [16],

$$(3.8) \quad \begin{aligned} C_{11bs} &= \lambda_x / (E'_{sx} \mu_x + E'_{sn} \mu_n) + \cos^2 \gamma / E'_{bt}, \\ C_{12bs} &= 0, \\ C_{13bs} &= \lambda_x \operatorname{ctg} \gamma / (E'_{sx} \mu_x + E'_{sn} \mu_n) - \sin \gamma \cos \gamma / E'_{bt}, \\ C_{22bs} &= \lambda_y / E'_{sy} \mu_y + \sin^2 \gamma / E'_{bt}, \\ C_{23bs} &= \lambda_y \operatorname{tg} \gamma / E'_{sy} \mu_y - \sin \gamma \cos \gamma / E'_{bt}, \end{aligned}$$

$$C_{33b_s} = \lambda_x \text{ctg}^2 \gamma / (E'_{sx} \mu_x + E'_{sn} \mu_n) + \lambda_y \text{tg}^2 \gamma / E'_{sy} \mu_y + (1/\nu_p - 1) / E'_{bt},$$

gdzie

$$1/\lambda_x = 1 + E'_{sy} \mu_y \text{ctg}^2 \gamma / (E'_{sx} \mu_x + E'_{sn} \mu_n),$$

$$1/\lambda_y = 1 + (E'_{sx} \mu_x + E'_{sn} \mu_n) \text{tg}^2 \gamma / E'_{sy} \mu_y,$$

$$E'_{s\alpha} = E_{s\alpha} / \psi_{s\alpha} / \psi_{\xi\alpha}, \quad \alpha = x, y, n,$$

$$\nu_p = 0,15 + [0,025 R_b(\tau) / R_{bten}(\tau) / \sigma_{bn}]^2 \leq 0,6.$$

Współczynniki $\psi_{s\alpha}, \psi_{\xi\alpha}$ oblicza się według wzorów (2.10) i (2.17).

Macierz sztywności betonu w równaniu (3.1) określa się według wzoru

$$(3.9) \quad [D]_b = [D]_{bs} - [D]_s,$$

gdzie $[D]_s = [C]_s^{-1}$. Elementy macierzy podatności zbrojenia w (3.9) wyznacza się korzystając ze wzorów (3.8), w których dla sztywności zbrojenia przyjmuje się

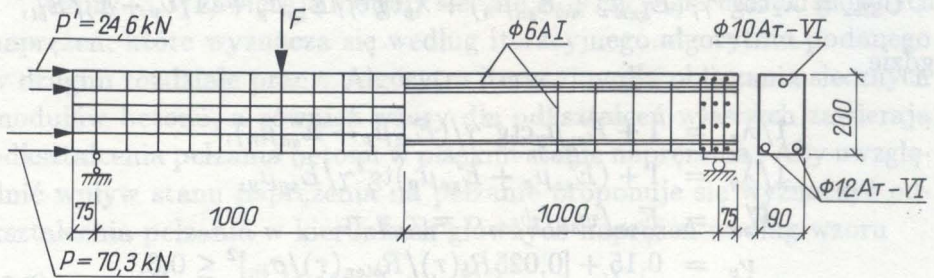
$$(3.10) \quad E'_{s\alpha} = E_{s\alpha} \nu_{s\alpha}, \quad \alpha = x, y, n,$$

gdzie $\nu_{s\alpha}$ ma postać jak w (2.17) z wyszczególnieniem kierunków zbrojenia.

Osiągnięcie przez naprężenie w betonie granicy CD , rys. 9, odpowiada wyczerpaniu wytrzymałości krótkotrwałej. Proces wyczerpania wytrzymałości betonu na ściskanie dwuosiowe modeluje się wielokrotnym obniżeniem sztywności w równaniu stanu (3.1) przy kolejnych iteracjach.

4. PRZYKŁAD

Na podstawie proponowanej metody opracowano program komputerowy dla obliczania sprężonych konstrukcji żelbetowych. Zastosowano metodę elementów skończonych. Wykonano obliczenia wstępnie sprężonej belki żelbetowej z betonu B40, badanej doświadczalnie w Moskiewskim Instytucie Betonu, [20]. Odkształcenia skurczu, moduł Younga, wytrzymałość przy ściskaniu i rozciąganiu, jednostkowe funkcje pełzania liniowego i nieliniowego podano tam w następującej postaci:

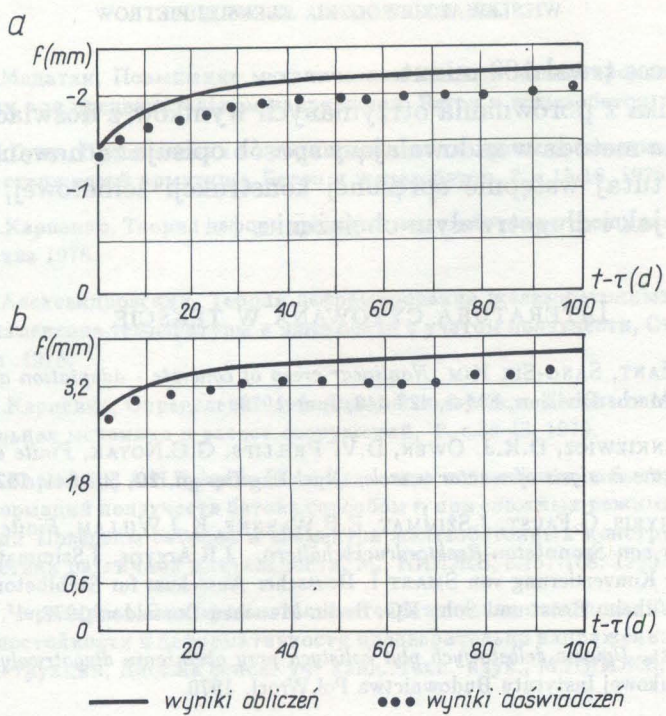


Rys. 10

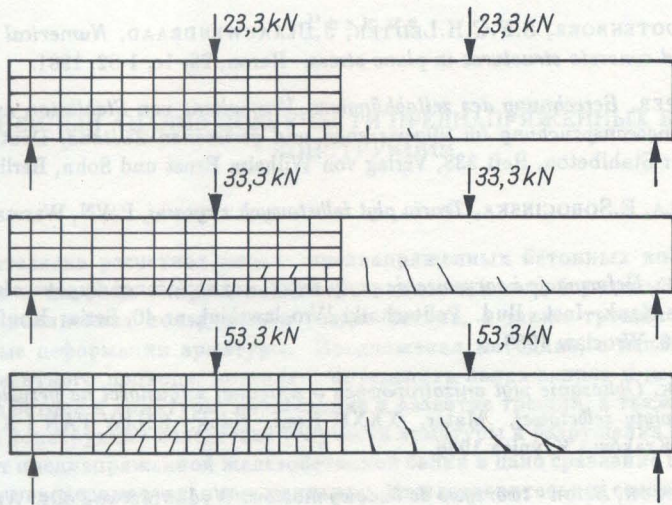
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s(\tau) &= 25 \times 10^{-5}(1 - e^{-0,4\tau}), \\
 E_b(\tau) &= 3,6 \times 10^4(1 - e^{-0,1\tau}), \quad (\text{MPa}), \\
 R_b(\tau) &= 43(1 - e^{-0,1\tau}), \quad (\text{MPa}), \\
 R_{bten}(\tau) &= 0,28[R_b(\tau)]^{2/3}, \quad (\text{MPa}), \\
 (4.1) \quad C_l(t, \tau) &= 8,4 \times 10^{-5}(0,1 + e^{-0,13\sqrt{\tau}})(1 - e^{-0,13\sqrt{t-\tau}}), \quad (1/\text{MPa}), \\
 C_n^+(\sigma, t, \tau) &= [\sigma/R_{bten}(\tau)]C_n(t, \tau), \quad (1/\text{MPa}), \\
 C_n^-(\sigma, t, \tau) &= [\sigma/R_b(\tau)]C_n(t, \tau), \quad (1/\text{MPa}), \\
 C_n(t, \tau) &= 3,8 \times 10^{-5}(1 - e^{-0,25\sqrt{t-\tau}}), \quad (1/\text{MPa}),
 \end{aligned}$$

gdzie t, τ oznacza czas w dobach.

Na rys. 10 przedstawiono schematy zbrojenia i obciążenia belki, jak również podział symetrycznej części belki na elementy skończone. Belka ma zbrojenie zwykłe: dwa pręty w górnej części belki o średnicach 6 mm oraz zbrojenie sprężające złożone z trzech prętów: dwa pręty o średnicy 12 mm na dole i jeden pręt o średnicy 10 mm na górze. Jedną serię belek w wieku 98 d poddano długotrwałemu obciążeniu siłami o wielkości $F = 17,5$ kN. Na rys.11 pokazano obliczone (linia ciągła) i doświadczalne (linia kropkowana) krzywe ugięć środka belki od ściskania wstępnego (rys.11a) i obciążenia długotrwałego (rys.11b). Drugą serię belek w tymże samym wieku poddano obciążeniu krótkotrwałemu, które spowodowało zniszczenie. Siła niszcząca wynosiła 53,3kN. Na rys. 12 pokazano schematy tworzenia i rozwijania się rys w miarę wzrostu obciążenia, z lewej strony - obliczone, z prawej strony - doświadczalne. Przy obliczeniu realizowano programy obciążenia dokładnie takie jak w badaniach doświadczalnych, przy tym obciążenie krótkotrwałe traktowano jak proces czasowy z długością kroków obciążenia około 5 minut,



Rys. 11



Rys. 12

cały ten proces trwał 100 minut.

Jak wynika z porównania otrzymanych wyników z doświadczeniem, proponowana metoda w zadowalający sposób opisuje zachowanie się rozpatrywanej tutaj wstępnie sprężonej konstrukcji żelbetowej, zarówno przy krótko jak i długotrwałym obciążeniu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z.P. BAŻANT, SANG-SIK KIM, *Nonlinear creep of concrete - adaptation and flow*, J. Engng. Mech. Division, EM-3, 429-446, June 1979.
2. O.C. ZIENKIEWICZ, D.R.J. OWEN, D.V. PHILLIPS, G.C. NOYAK, *Finite element methods in the analysis of reactor vessels*, Nucl. Eng. Design, 20, 507-541, 1972.
3. J.H. ARGYRIS, G. FAUST, J. SZIMMAT, E.P. WARNKE, K.J. WILLAM, *Finite Elementberechnung von Spannbeton-Reaktordruckbehältern*, J.H. Argyris, J. Szimmat, K.J. Willam, Zur Konvertierung von SMART I, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 279, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn KG, Berlin-München-Düsseldorf 1977.
4. A. MITZEL, *Ugięcia żelbetowych płyt kolistych przy obciążeniu długotrwałym*, Mat. I Sesji Naukowej Instytutu Budownictwa Pol. Wrocław. 1970.
5. L. BRUNARSKI, *Teoretyczne i rzeczywiste ugięcia płyt żelbetowych od obciążenia długotrwałego*, XVIII Konf. Nauk. KI PAN i KN PZITB, Krynica, Referaty t.2, Kon. Bet. ZGPW, 65-72, Warszawa 1977.
6. H.J. GROOTENBOER, S.F.C.H. LEIJTEN, J. BLAAUWENDRAAD, *Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress*, Heron, 26, 1c, 1-82, 1981.
7. G. SCHAPER, *Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbeton unter Last - ung Zwangbeanspruchung im ungerissenen und gerissenen Zustand*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 338, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1982.
8. A. BARYŁA, E. SOBOCINSKA, *Teoria płyt żelbetowych z rysami*, PWN, Warszawa - Łódź, 1983.
9. J. KUBIAK, *Deformacje i zarysowanie płyty żelbetowej obciążonej długotrwałe*, Karpacz 84, Prace Nauk. Inst. Bud. Politechniki Wrocławskiej, nr 40, Seria: Konferencje nr. 9, 201-206, Wrocław 1983.
10. J. KUBIAK, *Obliczanie płyt anizotropowych o zmiennej sztywności na przykładzie zarysowanej płyty żelbetowej*, Mater. XXXII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, 109-114, Kraków - Krynica 1986.
11. J. BILISZCZUK, *Beton - tworzywo do budowy mostów*, Wydawnictwo Polit. Wrocławskiej, Wrocław 1986.
12. J. SZARLIŃSKI, J. KROK, Z. KORDECKI, *Non-linear rheological model of concrete*, Proc. 1st Int. Conf. on Computational Mechanics, p. IV. 293-298, Tokyo 1986.
13. В.И. Мурашев, *Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона*, Машстройиздат, Москва 1950.

14. С.А.Мадатян, Повышение механических свойств высокопрочной арматурной стали при предварительном напряжении, *Бетон и железобетон*, 5, с.22-24, 1976.
15. Ю.П.Гуща, Предложения по нормированию диаграмм растяжения высокопрочной стержневой арматуры, *Бетон и железобетон*, 7, с.15-16, 1979.
16. Н.И.Карпенко, Теория деформирования железобетона с трещинами, Стройиздат, Москва 1976.
17. С.В.Александровский, Теория деформирования железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести, Стройиздат, Москва 1975.
18. Н.И.Карпенко, Определение деформаций ползучести бетона способом τ_t , *Строительная механика и расчет сооружений*, 2, с.39-43, 1979.
19. Н.И.Карпенко, А.Н.Петров, К определению нелинейных и быстроснабегающих деформаций ползучести бетона способом τ_t при сложных режимах нагружения, В кн.: Поведены бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности, М., НИИЖБ, с.157-168, 1980.
20. Т.Г.Черноярова, Экспериментально-теоретические исследования прочности, трещиностойкости и деформативности предварительно напряженных изгибаемых конструкций, Дисс.на соиск. уч. канд. техн. наук., М.НИИЖБ, 1974.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ БЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Представлена расчетная модель преднапряженных бетонных конструкций при одноосном и плоском напряженных состояниях, в которой учтены упругость, линейная и нелинейная ползучесть и усадка бетона, а также трещинообразование и нелинейные деформации арматуры. Предложена методика, с использованием конечноэлементного подхода, позволяет определить напряженное и деформированное состояние бетона и арматуры, образование и развитие трещин, а также механизм разрушения конструкции вследствие текучести арматуры и разрушения бетона. Выполнен расчет преднапряженной железобетонной балки и дано сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Удовлетворительное соответствие расчетных и опытных данных как при длительном, так и кратковременном нагружении, подтверждают адекватность предложенной модели преднапряженного бетона и методики анализа поведения конструкций.

SUMMARY

NONLINEAR ANALYSIS OF CREEP OF PRESTRESSED CONCRETE STRUCTURES

The model of prestressed concrete structures in the uniaxial and two-axial stress state is presented in which the elastic properties, linear and nonlinear creep strains and shrinkage of concrete are accounted for together with the nonlinear strains of reinforcement and cracking. The proposed method of nonlinear analysis with the use of finite elements is capable of determining the stresses and strains in concrete and in reinforcement, the cracking modes and collapse patterns of structure due to plastic flow of reinforcement and failure of concrete. A prestressed concrete beam is calculated and results are compared with the experimental evidence. The convergence of the results for long and short-term loading confirms the usefulness of the proposed model and the method of analysis for the prestressed concrete structures.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
 INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH
 i
 UNIWERSYTET W PETROZAWODSKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 sierpnia 1988 r.;

nowa wersja dnia 21 grudnia 1989 r.