

RUSZT O SZEŚCIOKĄTNEJ SIATCE PRĘTÓW

WITOLD GUTKOWSKI, JAN OBRĘBSKI (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Tematem niniejszej pracy jest analiza rusztu płaskiego składającego się z prostych, sprężystych prętów, tworzących w planie siatkę sześciokątów równobocznych. Ruszt ten obciążony jest w węzłach siłami prostopadłymi do płaszczyzny konstrukcji oraz momentami o wektorach leżących w tej płaszczyźnie (rys. 1).

Zagadnieniom rusztów o siatkach czworokątnych i trójkątnych poświęconych jest w literaturze wiele prac, natomiast problemem sześciokątnych siatek prętowych zajmowano się jedynie w pracach [2, 7 i 8], podając tylko rozwiązania przybliżone [7 i 8] lub bardzo szczególnych przypadków [2].

W pracy oparto się na podstawowych zależnościach z geometrii z pewnymi uzupełnieniami niezbędnymi w tego typu zagadnieniach, sformułowanymi w artykule [3].

Podstawowe wyniki są następujące: uzyskano rozwiązanie równań równowagi węzła konstrukcji przy założeniu upraszczającym, że sztywność prętów na skręcanie jest równa zeru oraz podano przykłady rozwiązań dla rusztu ograniczonego kołem i pasma rusztowego.

2. GEOMETRIA RUSZTU

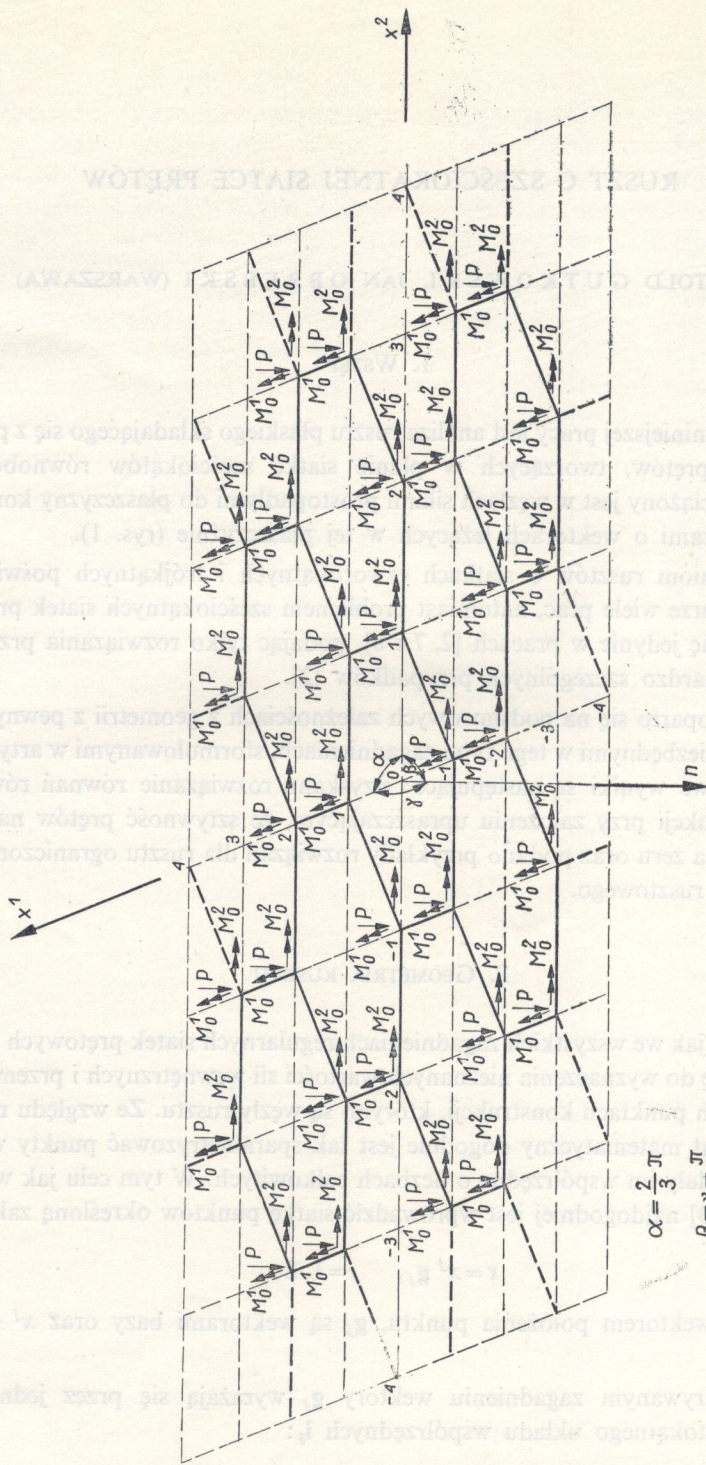
Podobnie jak we wszystkich zagadnieniach regularnych siatek prętowych problem sprowadza się do wyznaczenia nieznanych wartości sił wewnętrznych i przemieszczeń w określonych punktach konstrukcji, którymi są węzły rusztu. Ze względu na zastosowany aparat matematyczny dogodnie jest tak sparametryzować punkty węzłowe, aby odpowiadały im współrzędne o liczbach całkowitych. W tym celu jak wyjaśniono w pracy [3] najdogodniej jest wprowadzić siatkę punktów określoną zależnością

$$(2.1) \quad \mathbf{r} = x^j \mathbf{g}_j, \quad j=1, 2,$$

gdzie \mathbf{r} jest wektorem położenia punktu, \mathbf{g}_j są wektorami bazy oraz x^j liczbami całkowitymi.

W rozpatrywanym zagadnieniu wektory \mathbf{g}_j wyrażają się przez jednostkowe wektory prostokątnego układu współrzędnych \mathbf{i}_k :

$$(2.2) \quad \mathbf{g}_j = \beta_j^k \mathbf{i}_k,$$



$$\alpha = \frac{2}{3} \pi$$

$$\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Rys. 1

gdzie macierz β_j^k ma postać:

$$[\beta_j^k] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, tak określone wektory \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 tworzą wzajemnie kąt 120° .

Ponadto wprowadzono kierunkowe wektory $\mathbf{T}_{(A)}$ leżące na prętach łączących dwa sąsiednie punkty:

$$(2.3) \quad \mathbf{T}_{(A)} = T_{(A)}^i \mathbf{g}_i,$$

gdzie wskaźnik A oznacza numer pręta w danym węźle. W rozpatrywanym przypadku rusztu sześciokątnego wskaźnik ten przyjmuje wartości $A = \text{I, II, III}$. Macieź współczynników $T_{(A)}^i(x^1, x^2)$ można przedstawić w sposób następujący:

$$(2.4) \quad T_{(A)}^i(x^1, x^2) = \mu(x^1, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.5) \quad \mu(x^1, x^2) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n + 1, \\ 0, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n, \\ -1, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n - 1. \end{cases}$$

Symbol n oznacza liczbę całkowitą.

3. OZNACZENIA I ZAŁOŻENIA

Jak wynika z poprzednich rozważań, zasadniczą trudnością w rozpatrywanym zagadnieniu jest wybranie takiego elementu powtarzalnego, który przedstawiałby zespół prętów i węzła, typowy dla całej konstrukcji. Łatwo zauważyć na podstawie wzoru (2.4), że w całym ruszcie sześciokątnym występują właściwie dwa rodzaje węzłów, z których każdy można otrzymać przy danym $\mathbf{T}_{(A)}$ przez przesunięcie i obrót drugiego o 180° . Przy takim postępowaniu numeracja A prętów w węźle zostaje zachowana. W związku z powyższym jako element powtarzalny wybrano węzeł o współrzędnych (x^1, x^2) oraz przylegające do nich pręty I, II i III. Dwa z nich skierowane są wzdłuż osi współrzędnych x^1 i x^2 , natomiast trzeci wzdłuż pomocniczego kierunku x^3 zgodnie z rys. 3.

Wszystkie równania, a więc równania równowagi sił wewnętrznych i przemieszczeń, przedstawiono za pomocą operatorów różnicowych. Oznaczenia tych operatorów, ich sens oraz sposoby wykonywania na nich działań zostaną podane w p. 4.

Przemieszczenia i odkształcenie rusztu określone zostały za pomocą dwóch niewiadomych wektorów: wektora \mathbf{W} określającego przemieszczenie węzła w kierunku prostopadłym do płaszczyzny oraz wektora $\boldsymbol{\theta}$ określającego nieskończenie mały kąt obrotu węzła; prowadzi to do trzech niewiadomych skalarnych w , θ^1 i θ^2 , gdzie

θ^1 i θ^2 są składowymi wektora θ w układzie g_i oraz w ugięciem prostopadłym do płaszczyzny konstrukcji.

Pozostałe oznaczenia przyjęto następująco:

	E	moduł Younga,
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$		moduł sprężystości na ścinanie,
	J	moment bezwładności poprzecznego przekroju pręta względem osi poziomej,
	J^*	geometryczna sztywność skręcania,
$\tilde{K}_{(A)} = \frac{EJ_{(A)}}{l_{(A)}}$		sztywność pręta A na zginanie,
$K_{(A)} = \frac{GJ_{(A)}^*}{l_{(A)}}$		sztywność pręta A na skręcanie,
	$l_{(A)}$	długość pręta A ,
	$\tilde{M}_{(A)}$	moment zginający pręta A ,
	$\underline{M}_{(A)}$	moment skręcający pręta A ,
	$\bar{M}_{(A)}$	moment zginający działający na pręt A w końcu nie przylegającym do węzła (x^1, x^2) ,
	M_0^*	moment zewnętrzny przyłożony w węzle,
	M_0^1	składowa momentu M_0^* równoległa do x^1 ,
	M_0^2	składowa momentu M_0^* równoległa do x^2 ,
$P = \mu^2 P_0(x^1, x^2)$		siły zewnętrzne przyłożone w węzłach i prostopadle do płaszczyzny rusztu,
	$\tilde{r}_{(A)}^1$	wersory równoległe do kierunku A ,
	$\tilde{r}_{(A)}^2$	wersory prostopadle do kierunku A ,
	$\tilde{\theta}_{(A)}$	kąt obrotu przekroju przywęzłowego wywołujący zginanie,
	$\theta_{(A)}$	kąt obrotu przekroju przywęzłowego wywołujący skręcanie,
	$Q_{(A)}$	siła poprzeczna pręta A .

Jako dodatkowe założenie przyjęto, że wszystkie pręty wykonane są z materiału sprężystego, a główne osie bezwładności przekroju poprzecznego są odpowiednio równoległe i prostopadle do płaszczyzny rusztu. Pręty zbiegają się w węzłach w taki sposób, że ich osie przecinają się dokładnie w jednym punkcie, tworząc sztywne węzły. Dzięki tym założeniom siły prostopadle do płaszczyzny rusztu powodują jedynie pionowe przemieszczenie węzłów.

4. OPERATORY RÓŻNICOWE O WYKŁADNIKACH FUNKCYJNYCH I ICH WŁASNOŚCI

W naszych rozważaniach podstawowym operatorem różnicowym będzie operator przesunięcia Boole'a, powodujący przyrost argumentów funkcji o $h^i = h^i(x^1, x^2)$ dla $i=1, 2$ w myśl wzoru

$$(4.1) \quad E_1^{h^1} E_2^{h^2} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + h^1, x^2 + h^2).$$

Jeżeli przyjrzymy się bliżej siatce sześciokątnej, badanej w niniejszej pracy, to okaże się, że występują tu wykładniki operatorów będące nie stałymi lecz funkcjami położenia rozpatrywanego punktu.

Weźmy pod uwagę dwa węzły sieci leżące na końcach jednego pręta A , a więc na obydwu końcach wektora $T_{(A)}$. Przyrosty współrzędnych odcinka łączącego węzły będą oczywiście równe składowym wektora $T_{(A)}$ w układzie osi współrzędnych

x^1, x^2 . W ten sposób zgodnie ze wzorem (2.4) dla poszczególnych kierunków otrzymamy następujące wyniki: za pomocą wektora T_I można określić przesunięcie, przy którym następuje zmiana współrzędnej x^1 o μ ; natomiast współrzędna x^2 zachowuje swą wartość; za pomocą wektora T_{II} przesunięcie, w którym następuje zmiana współrzędnej x^2 o μ przy zachowaniu niezmienniczej drugiej współrzędnej. Podobnie wektor T_{III} określa przesunięcie, przy którym obie współrzędne zmniejszają się o wartość μ .

W dalszych rozważaniach dla poszczególnych kierunków przyjmujemy następujące oznaczenia operacji przesunięcia:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{dla } A=I \quad E_{(I)} \Phi &= E_1^\mu \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + \mu, x^2), \\ \text{dla } A=II \quad E_{(II)} \Phi &= E_2^\mu \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1, x^2 + \mu), \\ \text{dla } A=III \quad E_{(III)} \Phi &= E_3^\mu \Phi(x^1, x^2) = E_1^{-\mu} E_2^{-\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 - \mu, x^2 - \mu). \end{aligned}$$

Jak wynika z powyższego, w przypadku siatki sześciokątnej przejście z dowolnego węzła rusztu do drugiego sąsiadującego z nim powoduje przyrost odpowiednich zmiennych niezależnych nie o liczbę stałą lecz o wielkość $\mu = \mu(x^1, x^2)$, będącą funkcją położenia węzła (x^1, x^2) . Ponieważ funkcja μ występuje jako wykładnik w operatorze Boole'a, ten ostatni nabywa nowych własności. W związku z tym należy odróżnić dwa zasadnicze rodzaje działania tych operatorów:

a) działanie wprost na funkcję Φ w punkcie (x^1, x^2) dające wartość Φ w punkcie o współrzędnych $(x^1 + a\mu, x^2 + b\mu)$, tj. przesunięcie, co zgodnie z definicją (4.1) daje

$$(4.3) \quad E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + a\mu, x^2 + b\mu);$$

b) działanie złożone z dwu kolejnych przesunięć z punktu (x^1, x^2) do punktu o współrzędnych $(x^1 + a\mu, x^2 + b\mu)$, a następnie z punktu $(x^1 + a\mu, x^2 + b\mu)$ do nowego punktu. W takim przypadku należy uwzględnić zmianę argumentów nie tylko funkcji Φ , ale również i funkcji μ :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} E_1^{c\mu(x^1, x^2)} E_2^{d\mu(x^1, x^2)} * E_1^{a\mu(x^1, x^2)} E_2^{b\mu(x^1, x^2)} \Phi(x^1, x^2) = \\ = E_1^{c\mu(x^1, x^2)} E_2^{d\mu(x^1, x^2)} \Phi[x^1 + a\mu(x^1, x^2), x^2 + b\mu(x^1, x^2)] = \\ = \Phi[x^1 + c\mu(x^1, x^2) + a\mu(x^1 + c\mu(x^1, x^2), x^2 + d\mu(x^1, x^2)), x^2 + \\ + d\mu(x^1, x^2) + b\mu(x^1 + c\mu(x^1, x^2), x^2 + d\mu(x^1, x^2))]. \end{aligned}$$

Należy przy tym zwrócić uwagę na to, że, jak to wynika z dalszego badania funkcji μ , przy działaniach takich istotna jest kolejność wykonywanych operacji, ponieważ nie jest spełnione prawo wykładnicze, tj.

$$(4.5) \quad E_1^{c\mu} E_2^{d\mu} * E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} \Phi \neq E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} * E_1^{c\mu} E_2^{d\mu} \Phi.$$

W związku z powyższym wprowadzono symbol $*$ dla odróżnienia tych działań od działań przemiennech.

W celu umożliwienia bardziej zwięzłego zapisu wzoru (4.4) rozpatrzmy zachowanie się funkcji μ w przypadku dokonania na niej operacji przesunięcia. W najprostszym przypadku dochodzimy do zależności

$$(4.6) \quad E_1^\mu \mu = E_2^\mu \mu = E_3^\mu \mu = -\mu,$$

co od razu wynika z własności geometrycznych siatki sześciokątnej.

Postaramy się teraz przedstawić operacje przesunięcia dokonywane na μ w sposób ogólniejszy.

Ze wzoru (2.5) łatwo otrzymać zależność

$$(4.7) \quad \mu(x^1, x^2) = x^1 + x^2 - 3n,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą tak dobraną, że $\mu(x^1, x^2)$ dla każdego całkowitego x^1 oraz x^2 może przyjąć jedną z trzech wartości: 1, 0 lub -1 . Dokonując operacji dowolnego przesunięcia na μ określonej wzorem (4.7) otrzymamy

$$(4.8) \quad E_1^{a\mu}(x^1, x^2) E_2^{b\mu}(x^1, x^2) \mu(x^1, x^2) = x^1 + x^2 + a\mu(x^1, x^2) + b\mu(x^1, x^2) - 3n = \\ = \mu(x^1, x^2) + a\mu(x^1, x^2) + b\mu(x^1, x^2) - 3n = \mu(x^1, x^2) [1 + a + b] - 3n,$$

gdzie n zachowuje poprzednio podane znaczenie. Biorąc więc pod uwagę, że n jest liczbą całkowitą (przyjmującą wartości zarówno dodatnie jak i ujemne), możemy napisać

$$(4.9) \quad E_1^{a\mu}(x^1, x^2) E_2^{b\mu}(x^1, x^2) \mu(x^1, x^2) = \mu(x^1, x^2) [1 + a + b - 3n].$$

Tablica 1

$a+b$	$E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} \mu(x^1, x^2)$
-6	$+\mu$
-5	$-\mu$
-4	0
-3	$+\mu$
-2	$-\mu$
-1	0
0	$+\mu$
1	$-\mu$
2	0
3	$+\mu$
4	$-\mu$
5	0
6	$+\mu$
7	$-\mu$

Rezultat tych operacji na funkcji μ w zależności od sumy wartości $a+b$ podajemy w tablicy 1.

Na podstawie tablicy 1 możemy wyróżnić trzy rezultaty działań określonych za pomocą wzoru (4.4):

1) jeśli $c+d=3n+0$, gdzie n jest liczbą całkowitą, to

$$(4.10) \quad E_1^{c\mu} E_2^{d\mu} * E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} \Phi(x^1, x^2) = \\ = E_1^{(a+c)\mu} E_2^{(b+d)\mu} \Phi(x^1, x^2);$$

2) jeśli $c+d=3n+1$, to

$$(4.11) \quad E_1^{c\mu} E_2^{d\mu} * E_1^{a\mu} E_2^{b\mu} \Phi(x^1, x^2) = \\ = E_1^{(c-a)\mu} E_2^{(d-b)\mu} \Phi(x^1, x^2);$$

3) dla przypadku $c+d=3n-1$ operacja (4.4) jest nieokreślona, gdyż argumenty nie należą do zbioru punktów węzłowych konstrukcji.

Warto zauważyć, że w szczególności posługując się wzorami (4.10) i (4.11) otrzymujemy

$$E_i^{a\mu} * E_i^{a\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1, x^2),$$

gdzie $a=3n+1$ oraz

$$(E_i^{a\mu} + 2) * (E_i^{a\mu} - 2) \Phi(x^1, x^2) = -3\Phi(x^1, x^2),$$

$$E_1^{a\mu} * E_2^{b\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + a\mu, x^2 - b\mu),$$

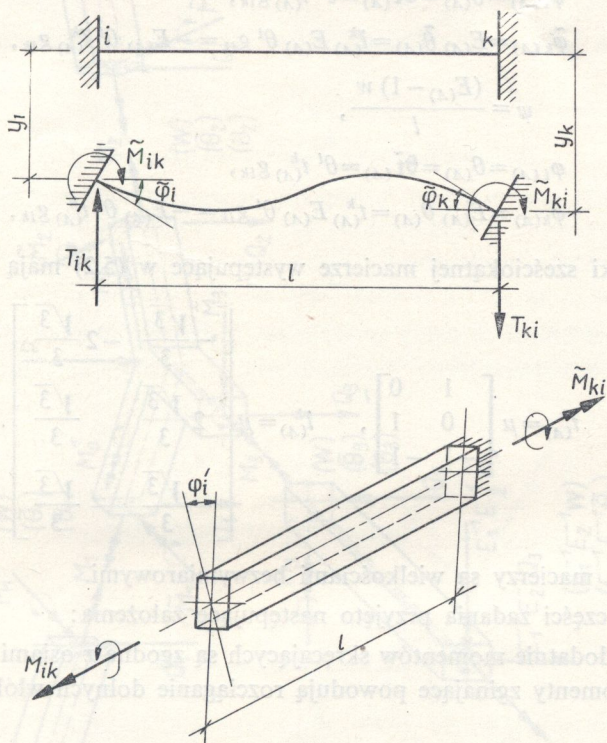
$$E_2^{b\mu} * E_1^{a\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 - a\mu, x^2 + b\mu),$$

jeśli $a, b=3n+1$.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań stwierdzamy, że dla operatorów Boole'a o wykładnikach funkcyjnych μ przy naszych założeniach spełnione są prawa rozdzielności i przemienności, natomiast nie jest spełnione prawo wykładnicze.

5. ZWIĄZKI FIZYCZNE POMIĘDZY SIŁAMI I PRZEMIESZCZENIAMI DLA PRĘTA PROSTEGO

Stosując znane wzory metody przemieszczeń [1] napiszemy związki pomiędzy siłami występującymi w pręcie a przemieszczeniami danymi na jego końcach. Zwroty dodatnie momentów, sił poprzecznych oraz przemieszczeń były przyjęte w wyżej wspomnianych wzorach transformacyjnych zgodnie z rys. 2:



Rys. 2

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}_{ik} &= \frac{2EJ}{l} (2\tilde{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_k - 3\psi), \\
 \tilde{M}_{ki} &= \frac{2EJ}{l} (\tilde{\varphi}_i + 2\tilde{\varphi}_k - 3\psi), \\
 M_{ik} &= M_{ki} = \frac{GJ^*}{l} (\varphi_k - \varphi_i), \\
 \psi &= \frac{y_k - y_i}{l}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

W celu przystosowania wzorów (5.1) do konkretnych warunków zadania musimy wszystkie występujące tam wielkości $\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_k, \varphi_i, \varphi_k$ i ψ wyrazić za pomocą oznaczeń przyjętych w p.3. Wprowadźmy dodatkowo dwa układy wersorów: 1) wersorów $\mathbf{t}_{(A)}$ równoległych odpowiednio do kierunków I, II i III oraz wersorów $\tilde{\mathbf{t}}_{(A)}$ prostopadłych odpowiednio do kierunków I, II i III. Wersory z definicji spełniają warunek $\tilde{\mathbf{t}}_{(A)} \times \mathbf{t}_{(A)} = \mathbf{n}$, gdzie \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym skierowanym zgodnie z osią n prawoskrętnego układu współrzędnych.

Przy takich oznaczeniach możemy wyznaczyć przemieszczenia końców pręta A za pomocą następujących zależności:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{i(A)} &= \tilde{\theta}_{(A)} = \theta \tilde{\mathbf{t}}_{(A)} = \theta^i \tilde{t}_{(A)}^k g_{ik}, \\ \tilde{\varphi}_{k(A)} &= E_{(A)} \tilde{\theta}_{(A)} = \tilde{t}_{(A)}^k E_{(A)} \theta^i g_{ik} = -E_{(A)} \theta^i \tilde{t}_{(A)}^k g_{ik}, \\ \psi &= \frac{(E_{(A)} - 1) w}{l}, \\ \varphi_{i(A)} &= \theta_{(A)} = \theta \mathbf{t}_{(A)} = \theta^i t_{(A)}^k g_{ik}, \\ \varphi_{k(A)} &= E_{(A)} \theta_{(A)} = t_{(A)}^k E_{(A)} \theta^i g_{ik} = -E_{(A)} \theta^i t_{(A)}^k g_{ik}, \end{aligned}$$

gdzie dla siatki sześciokątnej macierze występujące w (5.2) mają postać

$$t_{(A)}^k = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{t}_{(A)}^k = \mu \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Elementy tych macierzy są wielkościami bezwymiarowymi.

W dalszej części zadania przyjęto następujące założenia:

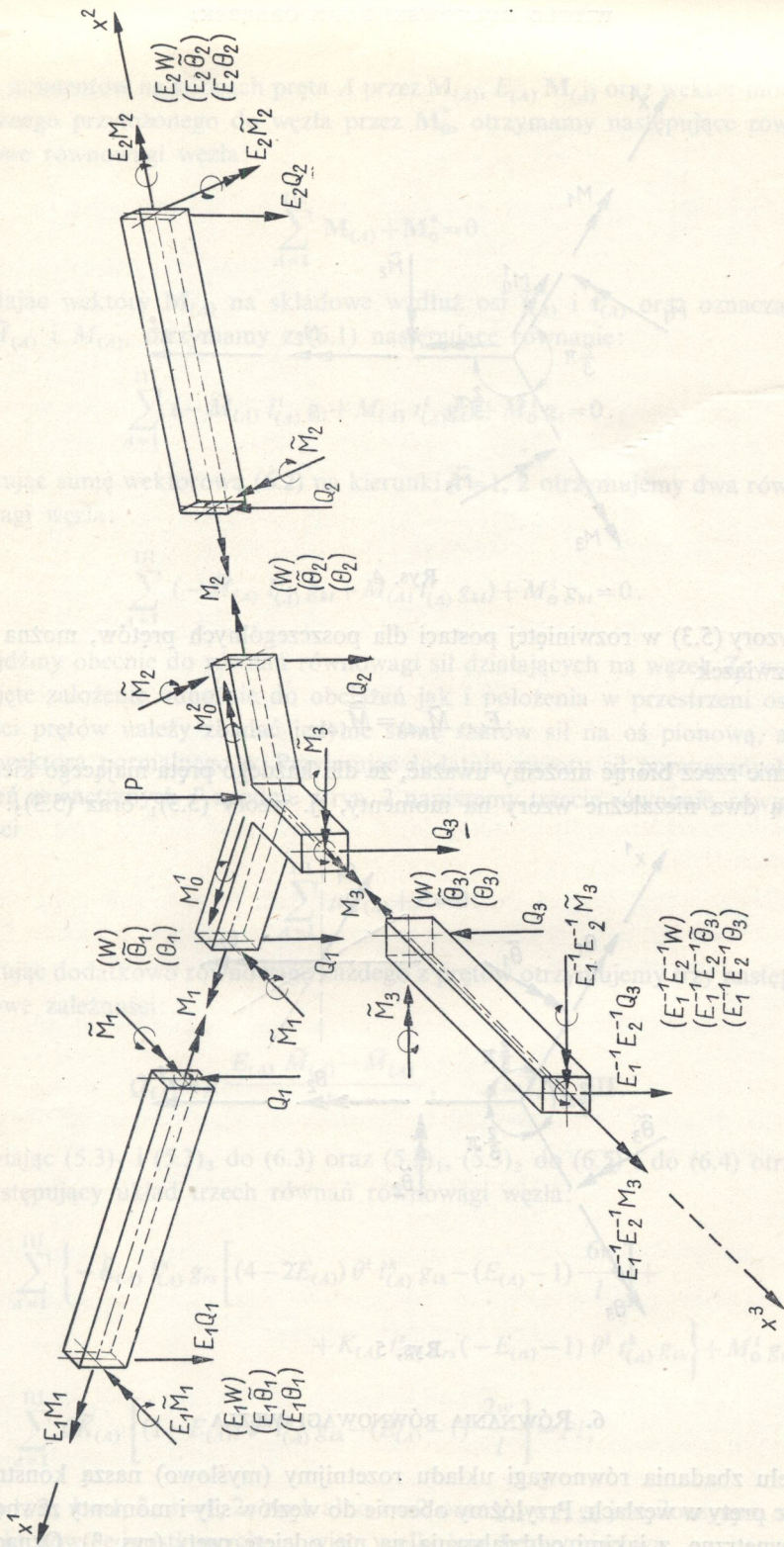
a) zwroty dodatnie momentów skręcających są zgodne z osiami współrzędnych, a dodatnie momenty zginające powodują rozciąganie dolnych włókien konstrukcji (rys. 3 i 4);

b) dodatnie zwroty poszczególnych składowych wektora kąta obrotu w poszczególnych węzłach przyjęto zgodnie z rys. 5;

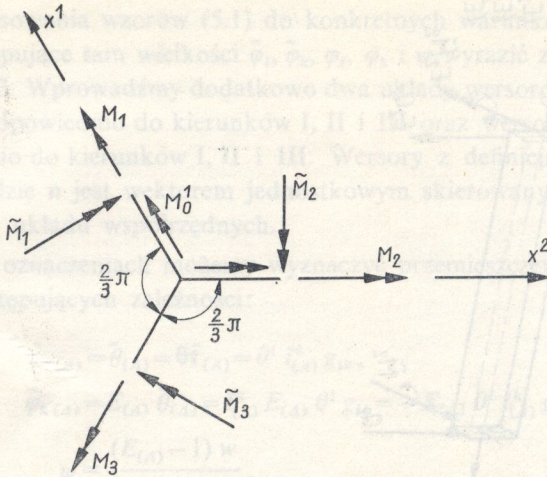
c) dodatnie ugięcia skierowane są zgodnie z założeniami p. 3 ku dołowi.

Przy tych założeniach nasze wzory transformacyjne przyjmą postać:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{M}_{(A)} &= \tilde{M}_{ik(A)} = \tilde{K}_{(A)} \left[(4 + 2E_{(A)}) \tilde{\theta}_{(A)} - (E_{(A)} - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ \tilde{\tilde{M}}_{(A)} &= \tilde{\tilde{M}}_{ki(A)} = -\tilde{K}_{(A)} \left[(2 + 4E_{(A)}) \tilde{\theta}_{(A)} - (E_{(A)} - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ M_{(A)} &= M_{ik(A)} = M_{ki(A)} = K_{(A)} (E_{(A)} - 1) \theta_{(A)}, \\ A &= \text{I, II, III.} \end{aligned}$$



Rys. 3

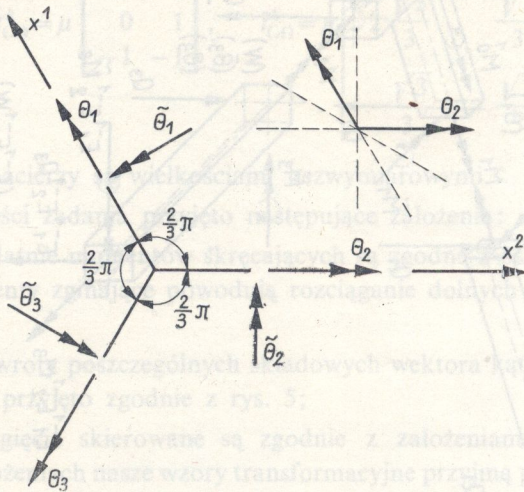


Rys. 4

Pisząc wzory (5.3) w rozwiniętej postaci dla poszczególnych prętów, można udowodnić związek

$$(5.4) \quad E_{(A)} \tilde{M}_{(A)} = \tilde{M}_{(A)}.$$

Praktycznie rzecz biorąc możemy uważać, że dla każdego pręta mającego kierunek A istnieją dwa niezależne wzory na momenty, tj. wzory (5.3)₁ oraz (5.3)₃.



Rys. 5

6. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WĘZŁA

W celu zbadania równowagi układu rozetniśmy (myślowo) naszą konstrukcję odcinając pręty w węzłach. Przyłożmy obecnie do węzłów siły i momenty zewnętrzne oraz wewnętrzne, z jakimi oddziałują na nie odcięte pręty (rys. 3). Oznaczając

wektory momentów na końcach pręta A przez $\mathbf{M}_{(A)}$, $E_{(A)} \mathbf{M}_{(A)}$ oraz wektor momentu zewnętrznego przyłożonego do węzła przez \mathbf{M}_0^* , otrzymamy następujące równanie wektorowe równowagi węzła:

$$(6.1) \quad \sum_{A=I}^{III} \mathbf{M}_{(A)} + \mathbf{M}_0^* = 0.$$

Rozkładając wektory $\mathbf{M}_{(A)}$ na składowe wzdłuż osi $\tilde{\mathbf{t}}_{(A)}$ i $\mathbf{t}_{(A)}$ oraz oznaczając je przez $\tilde{M}_{(A)}$ i $M_{(A)}$, otrzymamy z (6.1) następujące równanie:

$$(6.2) \quad \sum_{A=I}^{III} (-\tilde{M}_{(A)} \tilde{\mathbf{t}}_{(A)}^i \mathbf{g}_i + M_{(A)} \mathbf{t}_{(A)}^i \mathbf{g}_i) + M_0^i \mathbf{g}_i = 0.$$

Rzutuując sumę wektorową (6.2) na kierunki $k=1, 2$ otrzymujemy dwa równania równowagi węzła:

$$(6.3) \quad \sum_{A=I}^{III} (-\tilde{M}_{(A)} \tilde{\mathbf{t}}_{(A)}^i g_{ki} + M_{(A)} \mathbf{t}_{(A)}^i g_{ki}) + M_0^i g_{ki} = 0.$$

Przejdźmy obecnie do równań równowagi sił działających na węzeł. Ze względu na przyjęte założenie odnośnie do obciążeń jak i położenia w przestrzeni osi bezwładności prętów należy zbadać jedynie sumę rzutów sił na oś pionową, a więc wzdłuż wektora normalnego \mathbf{n} . Przyjmując dodatnie zwroty sił poprzecznych $Q_{(A)}$ i obciążeń zewnętrznych P zgodnie z rys. 3 napiszemy trzecie równanie równowagi w postaci

$$(6.4) \quad \sum_{A=I}^{III} \mu Q_{(A)} + P = 0.$$

Rozpatrując dodatkowo równowagę każdego z prętów otrzymujemy trzy następujące dodatkowe zależności:

$$(6.5) \quad Q_{(A)} = \mu \frac{E_{(A)} \tilde{M}_{(A)} - \tilde{M}_{(A)}}{l}, \quad A=I, II, III.$$

Podstawiając (5.3)₁ i (5.3)₃ do (6.3) oraz (5.3)₁, (5.3)₂ do (6.5) i do (6.4) otrzymujemy następujący układ trzech równań równowagi węzła:

$$(6.6) \quad \sum_{A=I}^{III} \left\{ -\tilde{K}_{(A)} \tilde{\mathbf{t}}_{(A)}^s g_{rs} \left[(4-2E_{(A)}) \theta^i \tilde{\mathbf{t}}_{(A)}^k g_{ik} - (E_{(A)}-1) \frac{6w}{l} \right] + K_{(A)} \mathbf{t}_{(A)}^s g_{rs} (-E_{(A)}-1) \theta^i \mathbf{t}_{(A)}^k g_{ik} \right\} + M_0^i g_{ri} = 0,$$

$$\sum_{A=I}^{III} 6\tilde{K}_{(A)} \left[(1-E_{(A)}) \theta^i \tilde{\mathbf{t}}_{(A)}^k g_{ik} - (E_{(A)}-1) \frac{2w}{l} \right] = Pl,$$

gdzie $i=1, 2$; $k=1, 2$; $s=1, 2$; $r=1$ albo $r=2$ oraz $g_{ik}=g_i g_k$ jest iloczynem skalar-nym wektorów jednostkowych, a więc wielkością bezwymiarową.

Przy założeniu, że $\tilde{K}_{(A)} = \tilde{K}$, $K_{(A)} = K$ oraz przedstawiając układ równań (6.6) w postaci rozwiniętej otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \mu \left\{ -\tilde{K} \left[\frac{3}{2} (E_2^\mu + E_3^\mu + 4) \theta^1 - \frac{3}{2} (2 + E_3^\mu) \theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_2^\mu - E_3^\mu) w \right] + \right. \\
 & \quad \left. + K \left[\left(E_1^\mu + \frac{1}{4} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) \theta^1 + \left(-\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) \theta^2 \right] + M_0^1 - \frac{1}{2} M_0^2 \right\} = 0, \\
 (6.7) \quad & \mu \left\{ -\tilde{K} \left[-\frac{3}{2} (2 + E_3^\mu) \theta^1 + \frac{3}{2} (E_1^\mu + E_3^\mu + 4) \theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_3^\mu - E_1^\mu) w \right] + \right. \\
 & \quad \left. + K \left[\left(-\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) \theta^1 + \left(\frac{1}{4} E_1^\mu + E_2^\mu + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) \theta^2 \right] - \frac{1}{2} M_0^1 + M_0^2 \right\} = 0, \\
 & \mu \tilde{K} \left\{ 3\sqrt{3} (E_2^\mu - E_3^\mu) \theta^1 - 3\sqrt{3} (E_1^\mu - E_3^\mu) \theta^2 - \mu \frac{12}{l} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) w \right\} = Pl\mu^2.
 \end{aligned}$$

Dwa pierwsze równania zostały dodatkowo pomnożone stronami przez μ a trzecie przez μ^2 przy wykorzystaniu zależności $\mu^3 = \mu$. Ma to na celu otrzymanie jednolitych mnożników względem μ dla poszczególnych niewiadomych θ^1 , θ^2 i w we wszystkich równaniach (6.8).

Analizując układ równań (6.3) można stwierdzić, że przy założeniu, że pręty rusztu nie mają zdolności przenoszenia momentów skręcających, a więc że $K_{(A)} = 0$, oraz przy braku obciążenia rusztu momentami zewnętrznymi $M_0^k = 0$ prawdziwa jest zależność

$$(6.8) \quad \tilde{M}_I = \tilde{M}_{II} = \tilde{M}_{III}.$$

Oznaczając $\tilde{M}_{(A)} = \tilde{M}$ i wykorzystując (6.5) trzecie równanie równowagi (6.4) może być przedstawione w postaci

$$(6.9) \quad (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) \tilde{M} = -Pl.$$

7. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI WĘZŁA W PRZEMIESZCZENIACH PRZY POMIĘCIU SKRĘCANIA

W celu otrzymania rozwiązania układu równań (6.7), który jest układem równań różnicowych czwartego rzędu względem trzech nieznanymi funkcji θ^1 , θ^2 i w o współczynnikach funkcyjnych, przyjęto następujące uproszczenia:

$$(7.1) \quad \tilde{K}_{(A)} = \tilde{K}, \quad K_{(A)} = 0, \quad M_0^k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(7.2) \quad \bar{w} = \mu^2 w, \quad \mathcal{P} = -\frac{1}{\bar{K}} \frac{1}{3\sqrt{3}} P l \mu^2,$$

$$\bar{\theta}^1 = \mu \theta^1, \quad \bar{\theta}^2 = \mu \theta^2,$$

oraz wykorzystując zależności

$$(7.3) \quad E_{(A)}(\mu \theta^i) = -\mu E_{(A)} \theta^i,$$

$$E_{(A)}(\mu^2 w) = \mu^2 E_{(A)} w,$$

otrzymamy następującą postać układu równań

$$(7.4) \quad (E_2^\mu + E_3^\mu - 4) \bar{\theta}^1 + (2 - E_3^\mu) \bar{\theta}^2 + \frac{2\sqrt{3}}{l} (E_2^\mu - E_3^\mu) \bar{w} = 0,$$

$$(2 - E_3^\mu) \bar{\theta}^1 + (E_1^\mu + E_3^\mu - 4) \bar{\theta}^2 + \frac{2\sqrt{3}}{l} (E_3^\mu - E_1^\mu) \bar{w} = 0,$$

$$(E_2^\mu - E_3^\mu) \bar{\theta}^1 + (E_3^\mu - E_1^\mu) \bar{\theta}^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3l} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) \bar{w} = \mathcal{P}.$$

Układ (7.4) będzie podstawą do dalszych rozważań oraz do rozwiązania konkretnych przykładów. Jeśli wyrugujemy z niego raz niewiadomą $\bar{\theta}^2$, drugi raz niewiadomą $\bar{\theta}^1$, to otrzymamy dwa niezależne równania zawierające kąt obrotu oraz ugięcie dla każdego z węzłów:

$$(7.5) \quad 3(E_2^\mu - 2) \bar{\theta}^1 + \frac{2\sqrt{3}}{3l} (-E_1^\mu + 8E_2^\mu - E_3^\mu - 6) \bar{w} = \mathcal{P},$$

$$3(E_1^\mu - 2) \bar{\theta}^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3l} (-8E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu + 6) \bar{w} = -\mathcal{P}.$$

Przekształcając wzór (5.3)₁ przy wykorzystaniu (5.2) oraz (6.8), możemy napisać

$$(7.6) \quad (E_2^\mu - 2) \bar{\theta}^1 = -\frac{\tilde{M}}{\bar{K}\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{l} (E_2^\mu - 1) \bar{w},$$

$$(E_1^\mu - 2) \bar{\theta}^2 = \frac{\tilde{M}}{\bar{K}\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{l} (E_1^\mu - 1) \bar{w}.$$

Wykorzystując te związki do (7.5) otrzymujemy dwa równania identyczne o postaci

$$(7.7) \quad \frac{2\sqrt{3}}{l} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) \bar{w} = -3\mathcal{P} - \frac{9}{\sqrt{3}} \frac{\tilde{M}}{\bar{K}}.$$

Wykonując na każdej stronie powyższego równania działania $E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3$ oraz wykorzystując (6.9), otrzymamy ostatecznie jedno równanie różnicowe czwartego rzędu z jedną niewiadomą w :

$$(7.8) \quad (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) * (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) w = \frac{l^2}{6\bar{K}} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu + 6) P \mu^2.$$

Obecnie wyznaczmy pozostałe niewiadome. Działając na obie strony (7.5)₁ operatorem $(E_2^\mu + 2)$ otrzymamy

$$(7.9) \quad \theta^1 = \mu \frac{2\sqrt{3}}{27l} (-E_1^{-\mu} E_2^\mu - E_1^\mu E_2^{2\mu} + 10E_2^\mu - 2E_1^\mu - 2E_1^{-\mu} E_2^{-\mu} - 4) w + \\ + \mu \frac{l}{27\sqrt{3}\tilde{K}} (E_2^\mu + 2) P.$$

Analogicznie działając na obie strony (7.5)₂ operatorem $(E_1^\mu + 2)$ otrzymamy

$$(7.10) \quad \theta^2 = \mu \frac{2\sqrt{3}}{27l} (E_1^\mu E_2^{-\mu} + E_1^{2\mu} E_2^\mu - 10E_1^\mu + 2E_2^\mu + 2E_1^{-\mu} E_2^{-\mu} + 4) w - \\ - \mu \frac{l}{27\sqrt{3}\tilde{K}} (E_1^\mu + 2) P.$$

Przekształcając (7.8) znajdziemy

$$(7.11) \quad \tilde{M} = -\frac{2}{3} \frac{\tilde{K}}{l} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) w + \frac{1}{9} Pl\mu^2.$$

W celu otrzymania wzoru na siły poprzeczne, wykorzystując (6.5) oraz (7.11), obliczymy

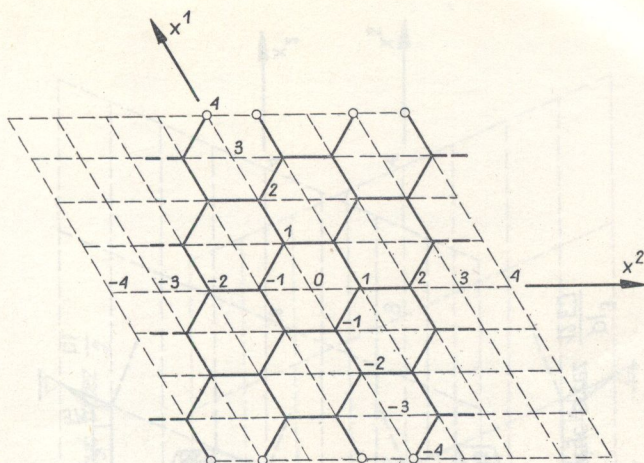
$$(7.12) \quad Q_1 = \mu \frac{2}{3} \frac{\tilde{K}}{l^2} (4E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - E_1^\mu E_2^{-\mu} - E_1^{2\mu} E_2^\mu - 4) w, \\ Q_2 = \mu \frac{2}{3} \frac{\tilde{K}}{l^2} (E_1^\mu + 4E_2^\mu + E_3^\mu - E_1^{-\mu} E_2^\mu - E_1^\mu E_2^{2\mu} - 4) w, \\ Q_3 = \mu \frac{2}{3} \frac{\tilde{K}}{l^2} (E_1^\mu + E_2^\mu + 4E_3^\mu - E_1^{-2\mu} E_2^{-\mu} - E_1^{-\mu} E_2^{-2\mu} - 4) w.$$

Równania różnicowe (7.8) – (7.12) stanowią układ równań pozwalających na rozwiązanie dowolnego zadania, dotyczącego zagadnienia zginania rusztu prętowego o siatce sześciokątnej, obciążonego zgodnie z przyjętymi założeniami. Wszystkie wyżej wspomniane niewiadome są funkcjami ugięcia $w(x^1, x^2)$. Rozwiązanie równania (7.8) zależeć będzie od ośmiu stałych: czterech względem x^1 i czterech względem x^2 . Dzięki wykorzystaniu związków (7.8) – (7.12) oraz warunków brzegowych, wynikających z danego zadania, wyznaczmy wszystkie stałe. Postępowanie to niczym nie różni się od sposobu przyjętego powszechnie dla teorii płyt. Przykłady rozwiązania, przeprowadzone tą metodą dla rusztu kołowego oraz dla pasma rusztowego, są zamieszczone w p. 8.

8. PRZYKŁADY

8.1 Pasma rusztowe podparte swobodnie na brzegach

Rozpatrzmy pasmo rusztowe przedstawione na rys. 6, swobodnie podparte oraz obciążone jedynie siłami $P(x^1, x^2) = \mu^2 P_0(x^1, x^2)$, $P_0 = \text{const}$ we wszystkich węzłach. W danym przypadku należy w równaniu (7.8) przyjąć następu-



Rys. 6

jący warunek wynikający ze stałej wartości ugięć węzłów rusztu dla każdego $x^1 = \text{const}$:

$$(8.1) \quad E_2^{3n\mu} w = E_2^{(3n+1)\mu} w,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą. Przyjmujemy teraz oznaczenia $x^1 = x$, $x^2 = y$ oraz zakładamy

$$(8.2) \quad w(x, y) = \mu^2 [w(x) + w(y)].$$

Po podstawieniu (8.2) do (7.8) oraz wykorzystując (8.1) otrzymamy następujące równanie różnicowe dla powierzchni ugięcia pasma:

$$(8.3) \quad \mu^2 [w(x+4\mu) - 4w(x+3\mu) + 6w(x+2\mu) - 4w(x+\mu) + w(x)] = \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{\bar{K}} \mu^2.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

$$(8.4) \quad w_0(x, y) = \mu^2 [A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3],$$

a rozwiązanie szczególne

$$(8.5) \quad w_s(x, y) = \mu^2 \frac{1}{16} \frac{Pl^2}{\bar{K}} x^4,$$

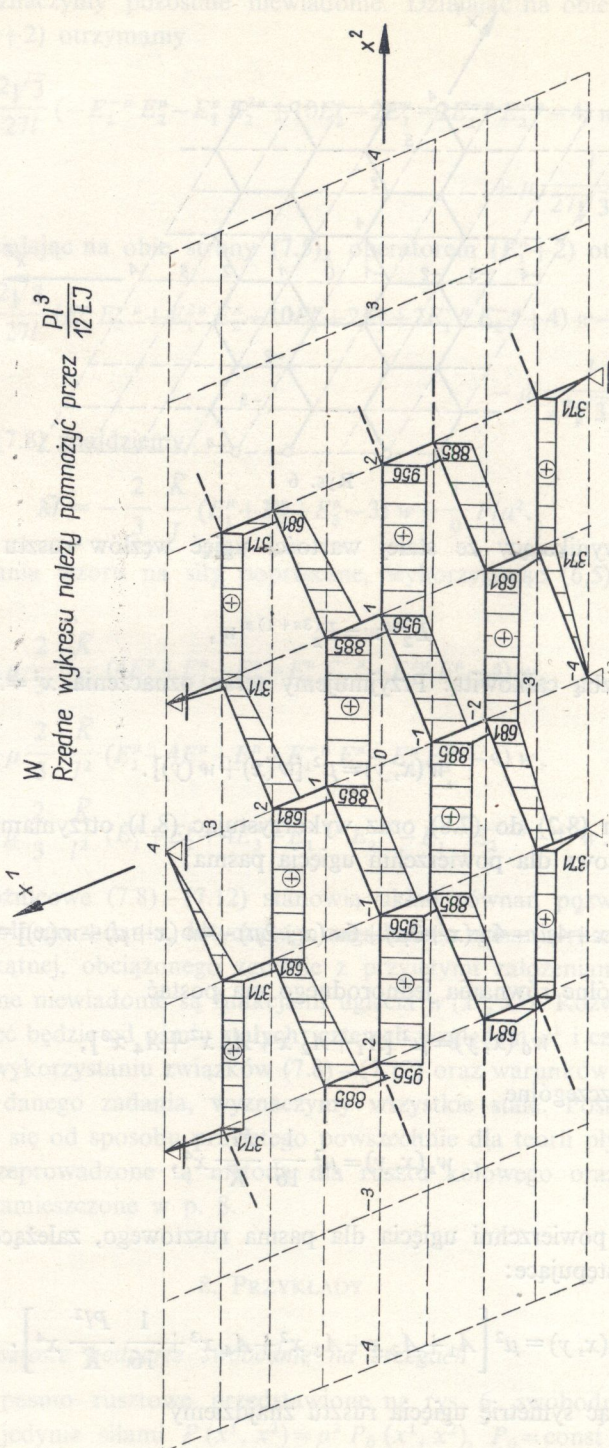
skąd równanie powierzchni ugięcia dla pasma rusztowego, zależące od czterech stałych, jest następujące:

$$(8.6) \quad w(x, y) = \mu^2 \left[A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \frac{1}{16} \frac{Pl^2}{\bar{K}} x^4 \right].$$

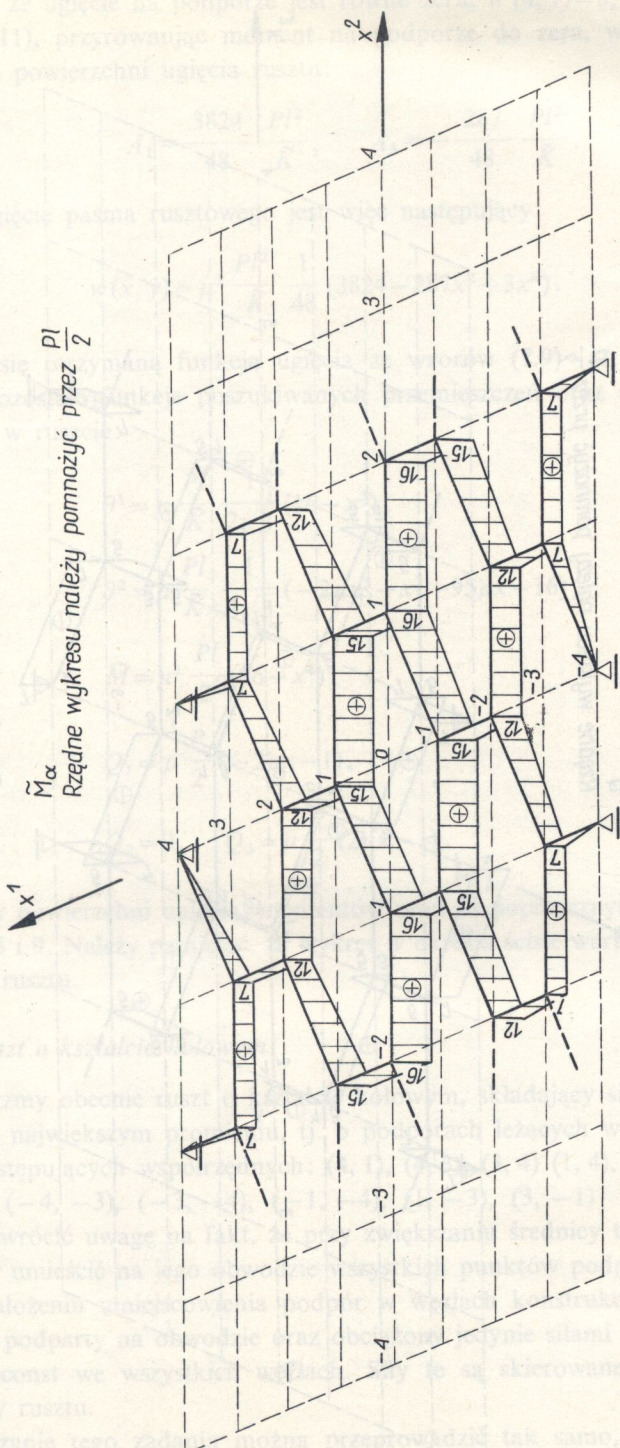
Wykorzystując symetrię ugięcia rusztu znajdziemy

$$A_2 = A_4 = 0.$$

W
 Rzędne wykresu należy pomnożyć przez $\frac{Pl^3}{12EJ}$

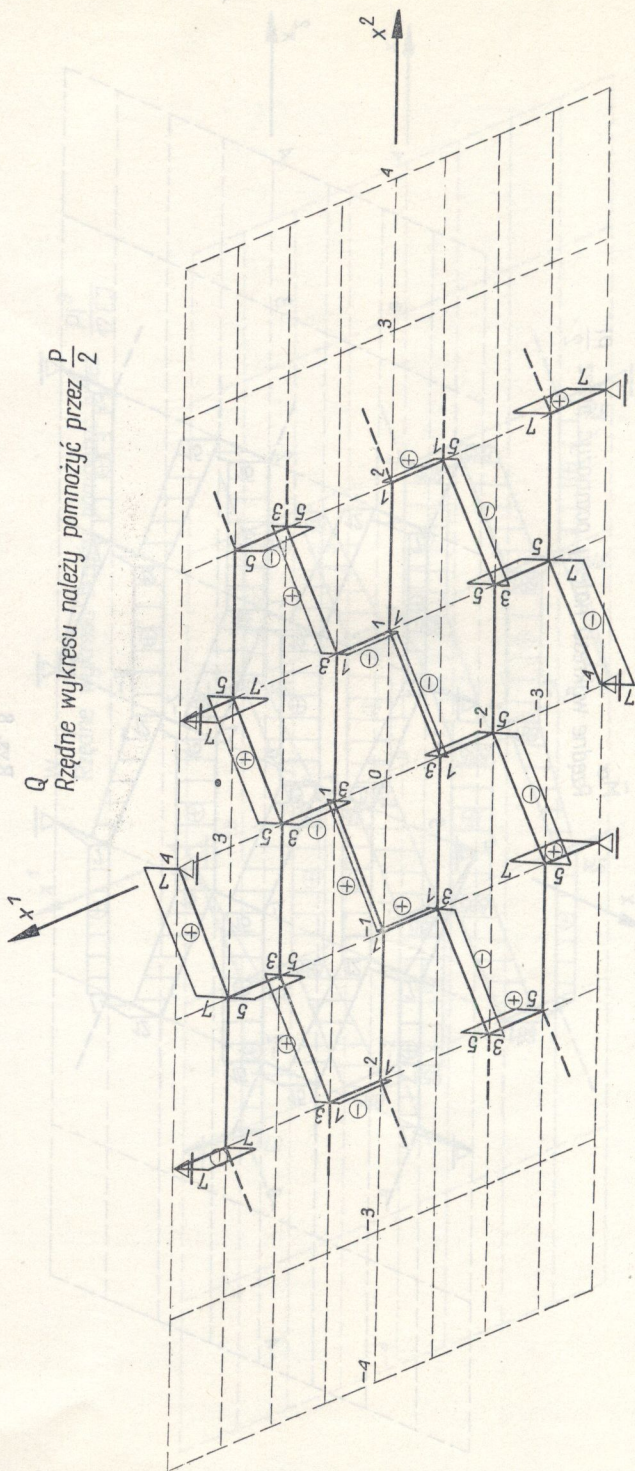


Rys. 7



\bar{M}_α
Rzędne wykresu należy pomnożyć przez $\frac{P}{2}$

Rys. 8



Rzędne wykresu należy pomnożyć przez $\frac{P}{2}$

Rys. 9

Z warunku, że ugięcie na podporze jest równe zero, $w(4, y) = 0$, oraz wstawiając (8.6) do (7.11), przyrównując moment na podporze do zera, wyznaczamy stałe A_1 i A_3 dla powierzchni ugięcia rusztu:

$$A_1 = \frac{3824}{48} \frac{Pl^2}{\tilde{K}}, \quad A_3 = -\frac{287}{48} \frac{Pl^2}{\tilde{K}}.$$

Wzór na ugięcie pasma rusztowego jest więc następujący:

$$(8.7) \quad w(x, y) = \mu^2 \frac{Pl^2}{\tilde{K}} \frac{1}{48} (3824 - 287x^2 + 3x^4).$$

Posługując się otrzymaną funkcją ugięcia ze wzorów (7.9) – (7.12) otrzymujemy wszystkie pozostałe funkcje poszukiwanych przemieszczeń oraz sił wewnętrznych panujących w ruszcie:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \theta^1 &= \mu \frac{Pl}{\tilde{K}} \frac{1}{2\sqrt{3}} (16 - x^2), \\ \theta^2 &= \mu \frac{Pl}{\tilde{K}} \frac{1}{4\sqrt{3}} (-2\mu x^3 - x^2 + 95\mu x + 16), \\ \tilde{M} &= \mu^2 \frac{Pl}{2} (16 - x^2), \\ Q_1 &= \mu \frac{P}{2} (-2\mu x - 1), \\ Q_2 &= 0, \quad Q_3 = \mu \frac{P}{2} (2\mu x - 1). \end{aligned}$$

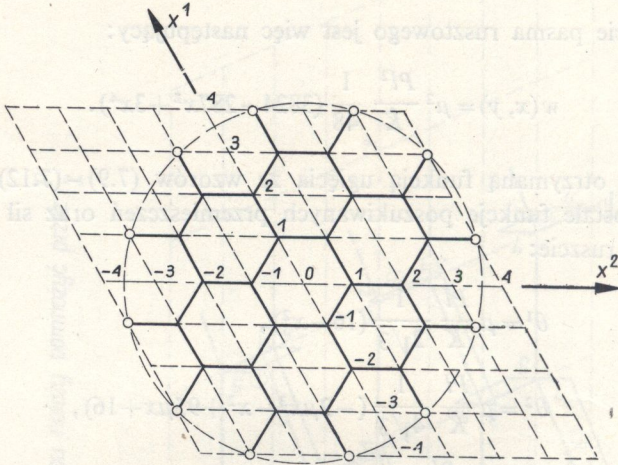
Wykresy powierzchni ugięcia, momentów oraz sił poprzecznych pasma podają rysunki 7, 8 i 9. Należy pamiętać, że wykres w określa ściśle wartości ugięć jedynie w węzłach rusztu.

8.2. Ruszt o kształcie kołowym

Rozpatrzmy obecnie ruszt o kształcie kołowym, składający się z sześciokątów, o możliwie największym promieniu, tj. o podporach leżących w punktach węzłowych o następujących współrzędnych: (4, 1), (4, 3), (3, 4), (1, 4), (-1, 3), (-3, 1), (-4, -1), (-4, -3), (-3, -4), (-1, -4), (1, -3), (3, -1) (rys. 10). Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, że przy zwiększaniu średnicy tego okręgu nigdy nie uda się umieścić na jego obwodzie wszystkich punktów podparcia przy jednoczesnym założeniu umiejscowienia podpór w węzłach konstrukcji. Ruszt ten jest swobodnie podparty na obwodzie oraz obciążony jedynie siłami $P = \mu^2 P_0(x^1, x^2)$, gdzie $P_0 = \text{const}$ we wszystkich węzłach. Siły te są skierowane prostopadle do płaszczyzny rusztu.

Rozwiązanie tego zadania można przeprowadzić tak samo, jak to zrobiono w przypadku pasma rusztowego. Rozwiązujemy wtedy równanie (7.8) i wykorzystu-

jemy dla tak znalezionej funkcji ugięcia odpowiednie warunki brzegowe w celu znalezienia stałych. Można też rozwiązać równanie (6.9), a potem na tej podstawie, mając wyznaczoną funkcję momentów, obliczyć z zależności (7.7) poszukiwaną powierzchnię ugięć węzłów. Ten drugi sposób ze względu na konieczną znajomość



Rys. 10

rozkładu momentów zginających na obwodzie możliwy jest tylko w przypadku rusztów swobodnie podpartych. Ponieważ w naszym zadaniu właśnie z takim rusztem mamy do czynienia, więc dla odmiany przeprowadzimy rozwiązanie tą drogą.

Na wstępie rozwiążemy równanie momentów (6.9). W tym celu podstawimy do (6.9)

$$(8.9) \quad \tilde{M}(x, y) = \mu^2(x, y) [\tilde{M}(x) + \tilde{M}(y)].$$

Otrzymamy stąd równanie różnicowe o postaci

$$(8.10) \quad \mu^2 [\tilde{M}(x+\mu) + \tilde{M}(y) + \tilde{M}(x) + \tilde{M}(y+\mu) + \tilde{M}(x-\mu) + \tilde{M}(y-\mu) - 3\tilde{M}(x) - 3\tilde{M}(y)] = -Pl\mu^2.$$

Zastępując je dwoma równoważnymi równaniami

$$\mu^2 [\tilde{M}(x+\mu) - 2\tilde{M}(x) + \tilde{M}(x-\mu)] = -\frac{Pl}{2} \mu^2,$$

$$\mu^2 [\tilde{M}(y+\mu) - 2\tilde{M}(y) + \tilde{M}(y-\mu)] = -\frac{Pl}{2} \mu^2,$$

otrzymamy

$$\tilde{M}_0(x) = A_1 + A_2 x, \quad \tilde{M}_0(y) = B_1 + B_2 y.$$

Stąd rozwiązanie ogólne ma postać

$$(8.11) \quad \tilde{M}_0(x, y) = \mu^2 [C_1 + C_2 x + C_3 y].$$

W tym przypadku stała C_1 jest sumą dwu stałych.

Zakładając następnie postać rozwiązania szczególnego

$$(8.12) \quad \tilde{M}_s = A_1 xy + A_2 x^2 + A_3 y^2$$

oraz przyjmując dla uzyskania osiowej symetrii rozwiązania, że $A_2 = A_3 = -A_1$, po podstawieniu (8.12) do (6.9) otrzymamy

$$A_1 = -A_2 = -A_3 = \frac{Pl}{3} \mu^2,$$

a co za tym idzie rozwiązanie szczególne kształtu

$$\tilde{M}_s = \frac{Pl}{3} \mu^2 (xy - x^2 - y^2).$$

Tak więc funkcja momentów ma postać

$$(8.13) \quad \tilde{M} = \mu^2 \left[C_1 + C_2 x + C_3 y + \frac{Pl}{3} (xy - x^2 - y^2) \right].$$

Ze względu na symetrię zadania należy przyjąć $C_2 = C_3 = 0$, a następnie podstawiając współrzędne dowolnego punktu podparcia i przyrównując moment do zera otrzymamy

$$C_1 = \frac{13}{3} Pl \mu^2.$$

W ten sposób znaleźliśmy następującą funkcję rozkładu momentów w ruszcie:

$$(8.14) \quad \tilde{M} = \mu^2 \frac{Pl}{3} (13 + xy - x^2 - y^2).$$

Podstawiając (8.14) do (7.7) oraz wykonując analogiczne działanie i stosując ponownie rozdzielanie zmiennych

$$(8.15) \quad w(x, y) = \mu^2 [w(x) + w(y)],$$

znajdziemy, że rozwiązanie ogólne równania (7.7) ma postać

$$(8.16) \quad w_0(x, y) = \mu^2 [C_1 + C_2 x + C_3 y].$$

Zakładając rozwiązanie szczególne postaci

$$(8.17) \quad w_s(x, y) = \mu^2 [A_1 xy + A_2 x^2 + A_3 y^2 + A_4 x^4 + A_5 y^4 + A_6 x^3 y + A_7 xy^3 + A_8 x^2 y^2]$$

oraz ponownie przyjmując dla uzyskania osiowej symetrii ugięć, że $A_2 = A_3 = -A_1$, otrzymamy po wstawieniu (8.17) do (7.7) (oraz porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach wielomianu):

$$w_s(x, y) = \mu^2 \frac{Pl^2}{\bar{K}} \left(\frac{1}{72} \right) [155xy - 155x^2 - 155y^2 + 3x^4 + 3y^4 - 6x^3y - 6xy^3 + 9x^2y^2].$$

Skąd

$$w(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + \mu^2 \frac{Pl^2}{\bar{K}} \left(\frac{1}{72} \right) [155xy - 155x^2 - 155y^2 + 3x^4 + 3y^4 - 6x^3y - 6xy^3 + 9x^2y^2].$$

Ze względu na osiową symetrię zadania przyjmujemy $C_2 = C_3 = 0$, a następnie przyrównując ugięcie w dowolnym punkcie podparcia do zera otrzymamy

$$C_1 = \mu^2 \frac{Pl^2}{\bar{K}} \left(\frac{1}{72} \right) \cdot 1508.$$

Na tej podstawie znajdziemy

$$(8.18) \quad w(x, y) = \mu^2 \frac{Pl^2}{\bar{K}} \left(\frac{1}{72} \right) [1508 + 155xy - 155x^2 - 155y^2 + 3x^4 + 3y^4 - 6x^3y - 6xy^3 + 9x^2y^2].$$

Podstawiając tak uzyskaną funkcję ugięcia kolejno do wzorów (7.9), (7.10) i (7.12) otrzymamy wszystkie pozostałe wielkości poszukiwane dla rozpatrywanego rusztu:

$$\theta^1 = \mu \frac{Pl}{\bar{K}} \frac{1}{12\sqrt{3}} [-2xy - x^2 + 2y^2 + \mu(-6xy^2 + 6x^2y - 2x^3 + 4y^3 + 51x - 102y)],$$

$$\theta^2 = \mu \frac{Pl}{\bar{K}} \frac{1}{12\sqrt{3}} [2xy - 2x^2 + y^2 + \mu(-6xy^2 + 6x^2y - 4x^3 + 2y^3 + 102x - 51y)],$$

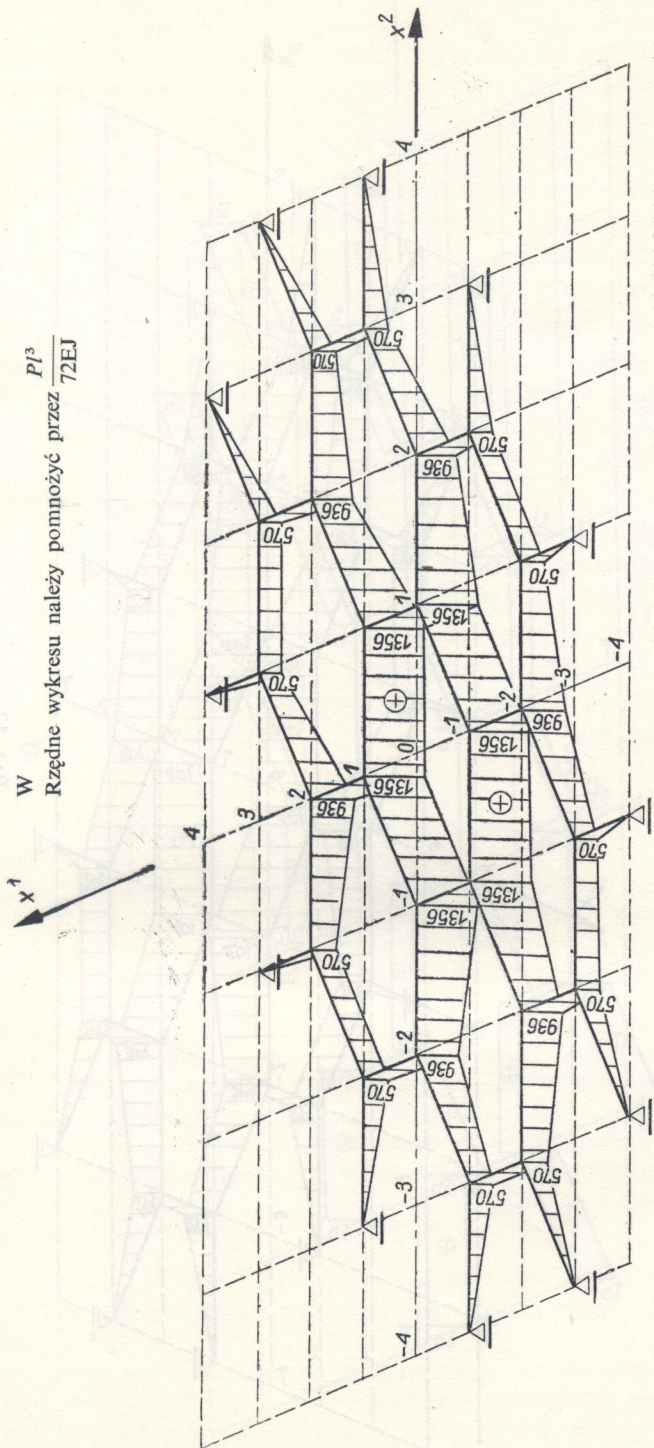
$$(8.19) \quad Q_1 = \mu \frac{P}{3} [\mu y - 2\mu x - 1],$$

$$Q_2 = \mu \frac{P}{3} [\mu x - 2\mu y - 1],$$

$$Q_3 = \mu \frac{P}{3} [\mu x + \mu y - 1].$$

Powyższe wzory stanowią kompletne rozwiązanie zagadnienia. Ilustrację otrzymanych wyników stanowią rysunki 11, 12 i 13. Tutaj również należy mieć na uwadze to, że wykres w określa ściśle wartości jedynie w węzłach rusztu.

W Pl^3
 Rzędne wykresu należy pomnożyć przez $\frac{72EJ}{l^3}$



Rys. 11

orał pónownie przyjmując dla ułównienia odwołujemy się do wzoru (1.10) i (1.11) otrzymamy po wstawieniu (1.10) i (1.11) następujące wyrażenia odpowiadające odpowiednio (1.12) i (1.13):

$$w_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} \right) \quad (1.12)$$

$$w_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} \right) \quad (1.13)$$

Za względu na to, że w tym przypadku mamy do czynienia z elementami jednorodnymi, możemy przyjąć następującą postać funkcji kształtu:

$$N_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} \right) \quad (1.14)$$

Na tej podstawie możemy wyznaczyć wartości funkcji kształtu dla poszczególnych węzłów i elementów.

$$N_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} \right) \quad (1.15)$$

$$N_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} \right) \quad (1.16)$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do (1.12) i (1.13) otrzymamy następujące wyrażenia:

$$w_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} \right) \quad (1.17)$$

$$w_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} \right) \quad (1.18)$$

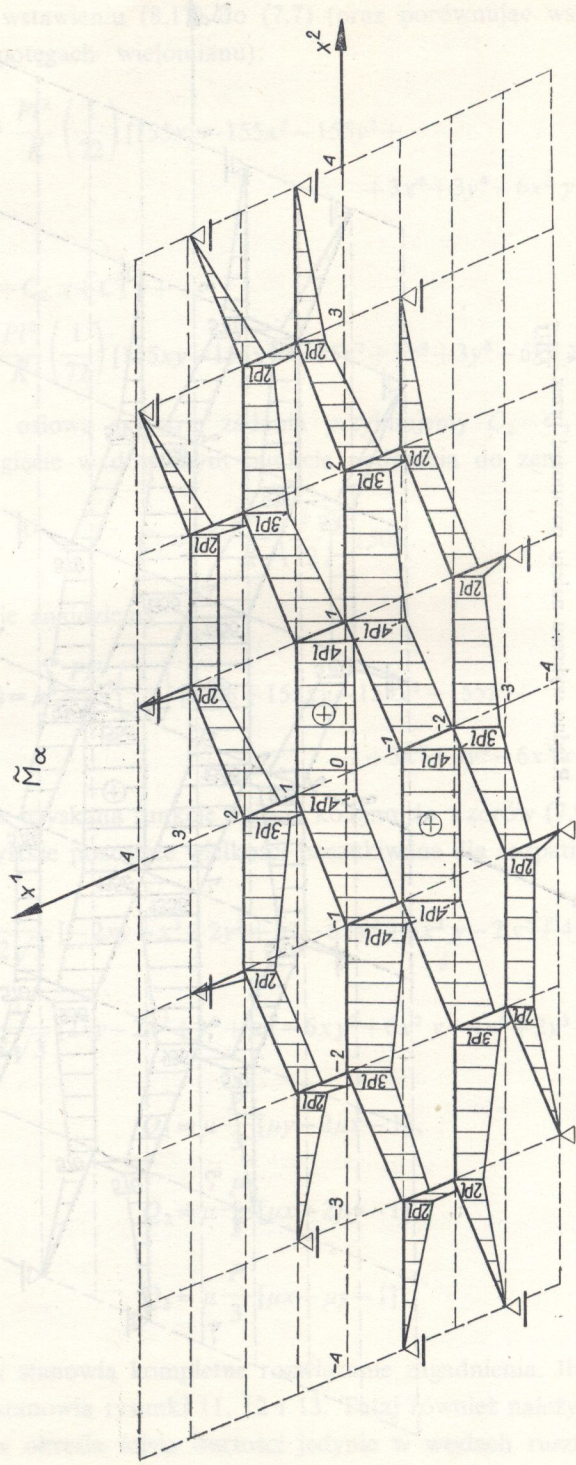
$$w_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_{i,j}^{(k)} \right) \quad (1.19)$$

Powyższe wyrażenia możemy uprościć, przyjmując następującą postać funkcji kształtu:

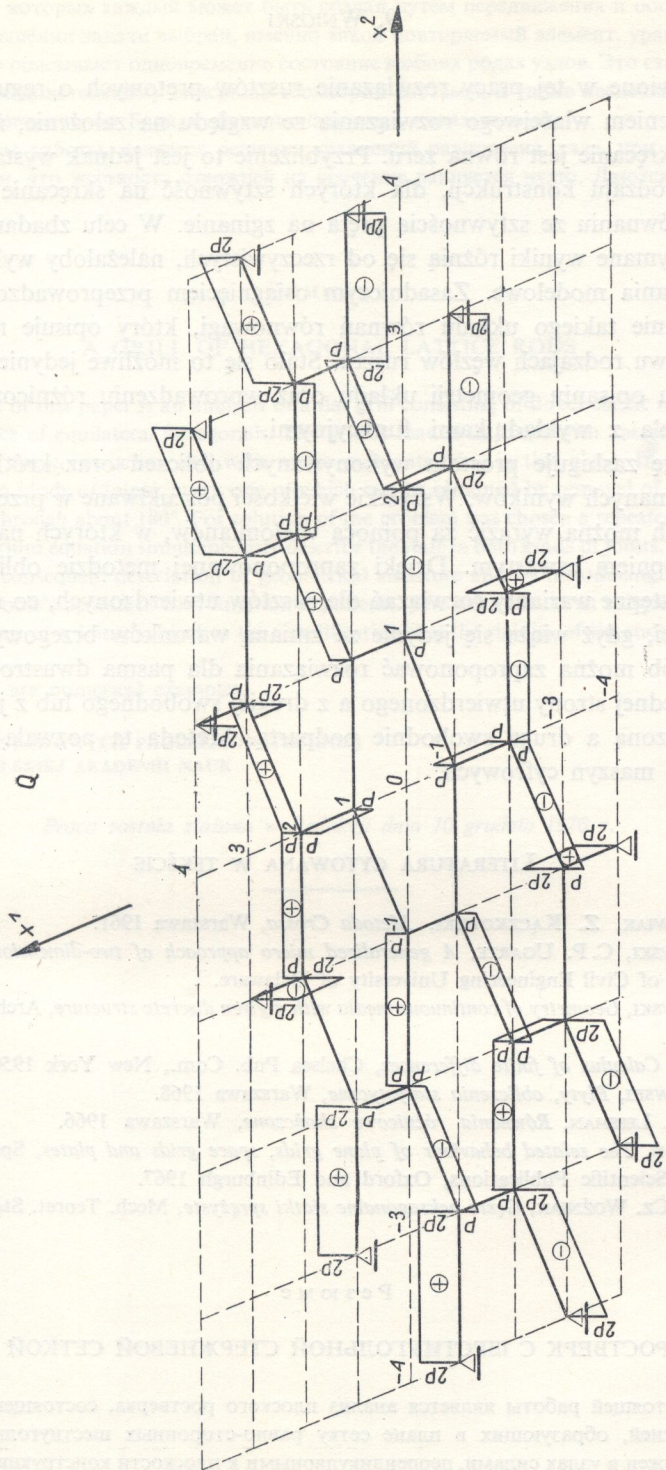
$$N_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} \right) \quad (1.20)$$

Wynikające z powyższych wyrażenia możemy uprościć, przyjmując następującą postać funkcji kształtu:

$$N_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_i^{(k)} \right) \quad (1.21)$$



Rys. 12



Rys. 13

9. WNIOSKI

Przedstawione w tej pracy rozwiązanie rusztów prętowych o regularnej siatce jest przybliżeniem właściwego rozwiązania ze względu na założenie, że sztywność prętów na skręcanie jest równa zero. Przybliżenie to jest jednak wystarczające dla wszelkiego rodzaju konstrukcji, dla których sztywność na skręcanie jest bardzo mała w porównaniu ze sztywnością pręta na zginanie. W celu zbadania, w jakim stopniu otrzymane wyniki różnią się od rzeczywistych, należałoby wykonać odpowiednie badania modelowe. Zasadniczym osiągnięciem przeprowadzonych badań jest otrzymanie takiego układu równań równowagi, który opisuje równocześnie stan w obydwu rodzajach węzłów rusztu. Stało się to możliwe jedynie dzięki konsekwentnemu opisaniu geometrii układu oraz wprowadzeniu różnicowych operatorów Boole'a z wykładnikami funkcyjnymi.

Na uwagę zasługuje prostota wykonywanych obliczeń oraz krótka i zwięzła postać otrzymanych wyników. Wszystkie wielkości poszukiwane w przedstawionych rozwiązaniach można wyrazić za pomocą wielomianów, w których najwyższy stopień był stopniem czwartym. Dzięki zaproponowanej metodzie obliczeń można otrzymać następane warianty rozwiązań dla rusztów utwierdzonych, co nie przedstawia trudności, gdyż wiąże się jedynie ze zmianą warunków brzegowych zadania. W ten sposób można zaproponować rozwiązania dla pasma dwustronnie utwierdzonego, z jednej strony utwierdzonego a z drugiej swobodnego lub z jedną krawędzią utwierdzoną a drugą swobodnie podpartą. Metoda ta pozwala również na zastosowanie maszyn cyfrowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. BŁASZKOWIAK, Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda Crossa*, Warszawa 1961.
2. W. GUTKOWSKI, C. P. UGARTE, *A generalized micro approach of two-dimensional structures*, Department of Civil Engineering University of Delaware.
3. W. GUTKOWSKI, *Geometry of continuous media with a given discrete structure*, Arch. Mech. Stos., 21, 6, 1969.
4. C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Chelsea Pub. Com., New York 1950.
5. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty, obliczenia statystyczne*, Warszawa 1968.
6. H. LEVY, F. LESSMAN, *Równania różnicowe skończone*, Warszawa 1966.
7. I. D. RENTON, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, Space structures Black well Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967.
8. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teoret. Stos., 8, 3, 1970.

Резюме

РОСТВЕРК С ШЕСТИУГОЛЬНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СЕТКОЙ

Темой настоящей работы является анализ плоского ростверка, состоящего из прямых упругих стержней, образующих в плане сетку равно-сторонних шестиугольников. Этот ростверк нагружен в узлах силами, перпендикулярными к плоскости конструкции и моментами, с векторами расположенными в этой плоскости. Во всем ростверке имеется только два

рода узлов, из которых каждый может быть создан путем передвижения и оборота второго на 180° . При решении задачи выбран, именно такой повторяемый элемент, уравнения равновесия которого описывают одновременно состояние в обоих родах узлов. Это стало возможно благодаря последовательному описанию геометрии системы, а также введению разностных действий для операторов Буля, с функциональными показателями.

Результатом работы, является решение уравнений равновесия узла, при упрощающим предположении, что жесткость стержней на кручение равняется нулю. Даются, кроме того, примеры.

SUMMARY

A GRILL OF HEXAGONAL LATTICE RODS

The subject of this paper is an analysis of a flat grill consisting of direct elastic rods forming in a plan the lattice of equilateral hexagonals. The grill is loaded in joints with forces perpendicular to the plane of the construction and with vector moments lying in this plane. In the entire grill appear only two kinds of joints, every one of which can be obtained by removal of the other joint and turning it through about 180° . For solution of the problem was chosen a repeated element such that the equilibrium equation simultaneously describe the state in both kinds of joints. This was made possible by the consequent description of geometrical structure and by introducing the differential equations for Boole's operators with function exponents. The work results in solution of the equilibrium equations of a joint, subject to the simplification that the rigidity of the rods for twisting is equal to 0.

Also given are numerical examples.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 grudnia 1970 r.

Nech punkty O_1, O_2 leżą na osi wału J , a punkt O_3 na osi wału K w płaszczyznach P_1 i P_2 . Punkty O_1, O_2 leżą w płaszczyźnie symetrii P_1 kół J i K , a punkt O_3 w płaszczyźnie wału J . Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych x, y, z związany z obrotową sztywną. Oś z zwracamy zgodnie z osią wału J od punktu O_2 do O_1 , a oś x od punktu O_2 do O_3 . Zakładamy, że dana zbiórce charakteryzuje następujący paronierz geometryczny: