

MAGNETOHYDRODYNAMICZNE ŁOŻYSKO ŚLIZGOWE  
W STYCZNYM POLU MAGNETYCZNYM(\*)

V. K. AGRAWAL (INDIA)

## Oznaczenia

- B pole indukcji magnetycznej,  
 $B_0$  przyłożone pole magnetyczne,  
E pole elektryczne,  
 $h$  grubość warstwy,  
 $h_0$  minimalna grubość warstwy,  
 $j$  gęstość prądu,  
 $u_0$  prędkość poślizgu w kierunku  $x$ ,  
 $l$  długość przewodnika,  
 $u$  prędkość płynu w kierunku  $x$ ,  
 $p$  ciśnienie,  
 $W$  nośność,  
 $Q$  natężenie przepływu,  
 $\Phi$  potencjał elektryczny,  
 $\mu$  lepkość płynu,  
 $\sigma$  współczynnik przewodnictwa elektrycznego,  
 $a$  położenie schodka,  
(-) wielkości bezwymiarowe definiowane w tekście.

## 1. Wstęp

Problem łożyska ślizgowego w poprzecznym polu magnetycznym został przedyskutowany przez OSTERLE'A i YOUNGA [1]. Autorzy ci wykazali, że profil optymalny ma postać schodka, którego położenie i stosunek wysokości zależą od przyłożonego pola magnetycznego. Wykazali oni następnie, że duże pole magnetyczne powoduje wzrost nośności łożyska.

W niniejszej pracy omówimy łożysko ślizgowe w polu magnetycznym przyłożonym stycznie do powierzchni łożyska.

---

(\*) Z angielskiego tłumaczył D. ROGULA.

## 2. Podstawowe równania

Stacjonarne przepływy hydromagnetyczne są opisane równaniami, które w zrationalizowanym układzie jednostek MKS mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_m \mathbf{j}, & \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0, \\
 \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \\
 \rho [\mathbf{V} \cdot \nabla] \mathbf{V} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Ponieważ grubość warstwy jest bardzo mała (rys. 1), wykorzystujemy zwykle założenia hydrodynamicznej teorii smarowania [2]. Równanie ruchu możemy wówczas napisać w postaci

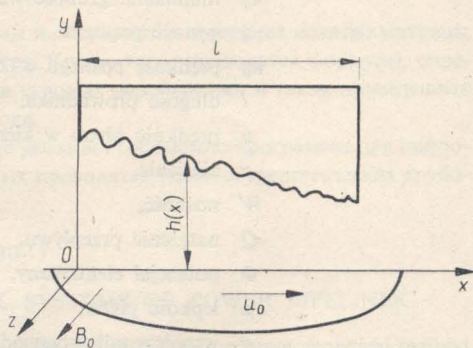
$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j_y B_0 = 0.
 \tag{2.2}$$

Z równania (2.1)<sub>4</sub> otrzymujemy

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} = 0,
 \tag{2.3}$$

a stąd wynika, że  $j_y$  jest funkcją wyłącznie zmiennej  $x$ . Uwzględniając ten fakt oraz warunki brzegowe dla pola prędkości

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 & \text{dla } y &= 0, \\
 u &= 0 & \text{dla } y &= h,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$



Rys. 1. Łożysko ślizgowe w stycznym polu magnetycznym

otrzymujemy rozwiązanie równania (2.2)

$$u = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} - j_y B_0 \right) (y^2 - hy) + \frac{h}{u_0} (h - y).
 \tag{2.5}$$

Dla objętościowego natężenia przepływu na jednostkę szerokości, określonego jako

$$Q = \int_0^h u dy,
 \tag{2.6}$$

mamy wzór

$$Q = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{dp}{dx} - j_y B_0 \right) + \frac{u_0 h}{2}.
 \tag{2.7}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.8) \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_0},$$

$$\bar{p} = \frac{ph_0^2}{\mu u_0 l}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{u_0 h_0}, \quad \bar{j}_y = \frac{h_0^2 B_0 j_y}{\mu u_0},$$

$$\bar{E}_y = \frac{E_y}{u_0 B_0}, \quad M = B_0 h_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

równanie (2.7) sprowadza się do postaci

$$(2.9) \quad \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = 6 \left( \frac{1}{\bar{h}^2} - \frac{2\bar{Q}}{\bar{h}^3} \right) + \bar{j}_y.$$

Ponieważ  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , przeto można zdefiniować bezwymiarowe napięcie pomiędzy elektrodami w sposób następujący:

$$(2.10) \quad \bar{\Phi} = - \int_0^{\bar{h}} \bar{E}_y d\bar{y}.$$

Bezwymiarowa gęstość prądu  $\bar{j}_y$  (2.1) wynosi

$$(2.11) \quad \bar{j}_y = M^2 [\bar{E}_y - \bar{u}],$$

skąd otrzymujemy (po scałkowaniu względem  $\bar{y}$  w granicach od 0 do  $\bar{h}$ )

$$(2.12) \quad \bar{j}_y = - \frac{M^2}{h} (\bar{\Phi} + \bar{Q}).$$

Po podstawieniu wyrażenia (2.12) do równania (2.9) równanie to przybiera postać

$$(2.13) \quad \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \left( \frac{6}{\bar{h}^2} - \frac{M^2 \bar{\Phi}}{h} \right) - \bar{Q} \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M^2}{h} \right).$$

Całkując powyższe równanie z uwzględnieniem warunku brzegowego  $\bar{p} = 0$  dla  $\bar{x} = 0$ , otrzymujemy

$$(2.14) \quad \bar{p} = \int_0^{\bar{x}} \left( \frac{6}{\bar{h}^2} - \frac{M^2 \bar{\Phi}}{h} \right) d\bar{x} - \bar{Q} \int_0^{\bar{x}} \left( \frac{M^2}{h} + \frac{12}{\bar{h}^3} \right) d\bar{x}.$$

Wykorzystując pozostały warunek brzegowy  $\bar{p} = 0$  dla  $\bar{x} = 1$ , otrzymujemy następujące równanie dla natężenia przepływu  $Q$ :

$$(2.15) \quad \int_0^1 \left( \frac{6}{\bar{h}^2} - \frac{M^2 \bar{\Phi}}{h} \right) d\bar{x} - \bar{Q} \int_0^1 \left( \frac{M^2}{h} + \frac{12}{\bar{h}^3} \right) d\bar{x} = 0.$$

Bezwymiarowa nośność łożyska  $\bar{W}$ , zdefiniowana za pomocą formuły

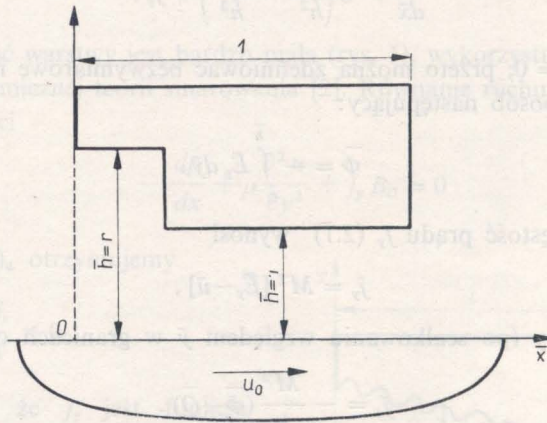
$$(2.16) \quad \bar{W} = \frac{6W h_0^2}{\mu u_0 l^2} = 6 \int_0^1 \bar{p} d\bar{x},$$

wynosi wówczas

$$(2.17) \quad \bar{W} = 6\bar{Q} \int_0^1 \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M^2}{\bar{h}} \right) \bar{x} d\bar{x} - 6 \int_0^1 \left( \frac{6}{\bar{h}^2} - \frac{M^2 \bar{\Phi}}{\bar{h}} \right) \bar{x} d\bar{x}.$$

### 3. Profil optymalny

Wyznamy obecnie  $\bar{h}(x)$  dającą maksymalną nośność łożyska  $\bar{W}$ . OSTERLE i YOUNG [1], rozważając ten problem w przypadku poprzecznego pola magnetycznego, doszli do wniosku, że profil optymalny ma postać schodkową. W przypadku obecnie rozważanym profil optymalny ma również postać schodkową, jak to jest pokazane na rys. 2. Na rysunku tym minimalna (bezwymiarowa) grubość warstwy



Rys. 2. Konfiguracja profilu optymalnego

wynosi 1, a położenie i wysokość schodka są tak dobrane, by osiągnąć maksymalną nośność łożyska. Do wyznaczenia profilu optymalnego została wykorzystana metoda rachunku wariacyjnego. Niech  $\bar{h}$  ulegnie zmianie na inną funkcję  $\bar{h} + \delta\bar{h}$ , gdzie  $\delta\bar{h}$  jest małe i niech  $\bar{Q} + \delta\bar{Q}$  i  $\bar{W} + \delta\bar{W}$  będą nowymi wartościami natężenia przepływu  $\bar{Q}$  i nośności łożyska  $\bar{W}$ . Podstawiając do (2.15) i (2.17) na miejsce  $\bar{h}$ ,  $\bar{Q}$  i  $\bar{W}$  nowe wartości  $\bar{h} + \delta\bar{h}$ ,  $\bar{Q} + \delta\bar{Q}$  i  $\bar{W} + \delta\bar{W}$  i eliminując  $\delta\bar{Q}$ , otrzymujemy

$$(3.1) \quad \delta\bar{W} = \int_0^1 6R \left( \frac{\int_0^1 F\bar{x} d\bar{x}}{\int_0^1 F d\bar{x}} - \bar{x} \right) \delta\bar{h} d\bar{x},$$

gdzie

$$(3.2) \quad R = \frac{d}{d\bar{h}} \left( \frac{6}{\bar{h}^2} - \frac{M^2 \bar{\Phi}}{\bar{h}} \right) - \bar{Q} \frac{d}{d\bar{h}} \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M^2}{\bar{h}} \right), \quad F = \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M^2}{\bar{h}} \right).$$

Zauważmy, że z równania (3.1) wynika możliwość spełnienia warunku optymalności przez profil schodkowy. Na dolnym stopniu  $\bar{h}$  musi mieć wartość minimalną, tzn.  $\bar{h} = 1$ , gdyż każda dopuszczalna wariacja  $\delta\bar{h}$  powoduje zmniejszenie  $\bar{W}$ . Na górnym

stopniu  $R$  musi być równe zero. Dowolna wariacja  $\delta\bar{h}$  daje wówczas zerowy wkład do wariacji  $\delta\bar{W}$  ze względu na  $R = 0$ . Tak więc optymalny profil musi mieć postać schodkową.

Z warunku, że  $R = 0$  na górnym stopniu, wynika

$$(3.3) \quad \bar{Q} = \frac{r(12 - M^2\bar{\Phi}r)}{(36 + M^2r^2)}.$$

Położenie schodka określa parametr

$$(3.4) \quad a = \frac{\int_0^1 \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M^2}{\bar{h}} \right) \bar{x} dx}{\int_0^1 \left( \frac{12}{\bar{h}^3} + \frac{M}{\bar{h}} \right) dx}.$$

Ze wzoru (3.4) otrzymujemy

$$(3.5) \quad a = \frac{\sqrt{12 + M^2}}{\sqrt{12 + M^2} + \sqrt{\frac{12}{r^3} + \frac{M^2}{r}}}.$$

Rozwiązując równanie (2.15) i eliminując  $a$  za pomocą formuły (3.5) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \bar{Q} = \frac{\sqrt{12 + M^2} \left( \frac{6}{r^3} - \frac{M^2\bar{\Phi}}{r} \right) + (6 - M^2\bar{\Phi}) \sqrt{\frac{12}{r^3} + \frac{M^2}{r}}}{\sqrt{12 + M^2} \left( \frac{12}{r^3} + \frac{M^2}{r} \right) + (12 + M^2) \sqrt{\frac{12}{r^3} + \frac{M^2}{r}}}.$$

Podstawienie wartości  $\bar{Q}$  ze wzoru (3.5) do wzoru (3.6) prowadzi do równania

$$(3.7) \quad M^6(4\bar{\Phi}^2 + 4\bar{\Phi} + 1)r^7 - [4M^6(2\bar{\Phi} + 1) + 48M^4(2\bar{\Phi} + 1)]r^6 + [4M^6(1 - 3\bar{\Phi} - 6\bar{\Phi}^2) + 12M^4(15 + 4\bar{\Phi}^2 + 16\bar{\Phi}) + 576M^2]r^5 + [M^6(24\bar{\Phi} - 1) + M^4(192\bar{\Phi} - 204) - M^2(1152\bar{\Phi} + 2304)]r^4 + [M^6(36\bar{\Phi}^2 - 8\bar{\Phi}) - M^4(288\bar{\Phi}^2 + 672\bar{\Phi}) - 48] + M^2(1728\bar{\Phi} + 3312) + 6912]r^3 - [16M^6\bar{\Phi}^2 + M^4(192\bar{\Phi}^2 - 288\bar{\Phi} - 24) + M^2(1440 - 3456\bar{\Phi}) + 20736]r^2 + [M^4(432\bar{\Phi}^2 + 96\bar{\Phi}) - 4032M^2\bar{\Phi} + 15552]r - 144M^2 - 1728 = 0.$$

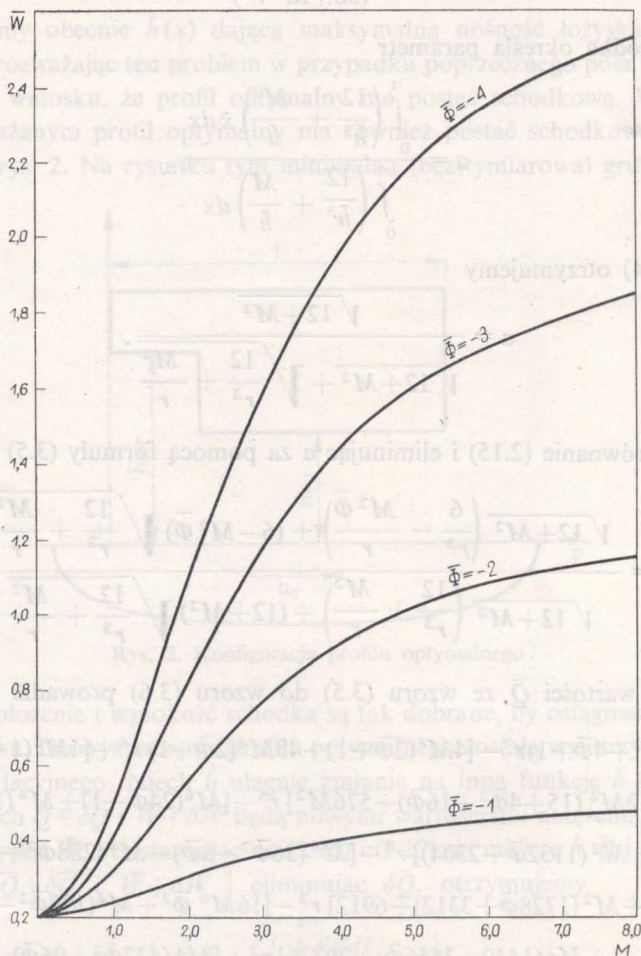
Równanie (3.7) pozwala wyliczyć wartości  $r$  dla różnych wartości  $M$  i  $\bar{\Phi}$ .

Nośność łożyska można wyliczyć biorąc pod uwagę równanie (2.15), z którego wynika, że ciśnienie jest funkcją liniową nad każdym stopniem. Wówczas nośność łożyska, równa połowie ciśnienia na schodku pomnożonej przez sześciokrotną długość prowadnika, wynosi

$$(3.8) \quad \bar{W} = \frac{3a(12 - M^2r^2 - 4M^2\bar{\Phi}r)}{r^2(36 + M^2r^2)}.$$

## 4. Wnioski

Wykazano, że profil optymalny ma postać schodkową. Z równań (3.5) i (3.7) widać, że położenie schodka  $a$  i stosunek wysokości  $r$  zależą od liczby Hartmanna  $M$ . Na rys. 3 przedstawiony jest wykres zależności bezwymiarowej nośności łożyska  $\bar{W}$



Rys. 3. Maksymalna nośność  $\bar{W}$  jako funkcja liczby Hartmanna  $M$

od liczby Hartmanna  $M$  dla różnych wartości bezwymiarowego napięcia  $-\bar{\Phi}$ . Ujemna wartość  $\bar{\Phi}$  oznacza, że elektroda  $y = h$  jest ujemna w stosunku do elektrody  $y = 0$ . Widać, że przyłożenie pola magnetycznego powoduje wzrost nośności łożyska.

Autor chciałby w tym miejscu wyrazić swoją wdzięczność drowi G. RAMANAIHOWI za kierownictwo oraz prof. A. K. GAYENOWI za jego uprzejmą zachętę.

## Literatura cytowana w tekście

1. F. J. YOUNG, E. OSTERLE, *Wear*, **5** (1962), 227.
2. G. RAMANAIH, *Applied Scientific Research*, **12** (1966), 424.

## Резюме

МАГНИТО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДШИПНИК СКОЛЬЖЕНИЯ  
В КАСАТЕЛЬНОМ ПОЛЕ

В работе, обсуждается несущая способность подшипника скольжения, в касательном магнитном поле. Определяется оптимальный профиль, имеющий форму ступеньки, расположение которой и отношение высоты, зависят от приложенного магнитного поля. Доказано затем, что магнитное поле повышает несущую способность подшипника.

## Summary

MAGNETOHYDRODYNAMIC SLIDER BEARING  
WITH TANGENTIAL MAGNETIC FIELD

The load capacity of slider bearing with tangential magnetic field is investigated. The optimum profile is found to be step form with the riser location and step height ratio depending on the applied magnetic field.

Further it is seen that the load capacity is increased by the application of magnetic field.

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
KHARAGPUR, INDIA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 kwietnia 1969 r.*