

ANALIZA STATECZNOŚCI PROMIENIOWO ŚCISKANYCH POWŁOK WALCOWYCH
METODĄ UOGÓLNIONYCH SZEREGÓW POTĘGOWYCH

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Liczba prac poświęconych teorii stateczności powłok wynosi już kilka tysięcy; przegląd ostatnich osiągnięć w tej dziedzinie podaje praca Z. NOWAKA i M. ŻYCZKOWSKIEGO [11]. Zazwyczaj autorzy wyprowadzają wzory na obciążenie krytyczne typu

$$(1.1) \quad p_k = f(g_i, E_i; m, n),$$

gdzie g_i oznacza ogólnie wymiary geometryczne powłoki, E_i moduły sprężyste lub plastyczne, natomiast m i n ilości półfal powierzchni odkształconej na pewnych ustalonych odcinkach. Te ostatnie wielkości powinny być dobrane tak, by zapewnić minimum p_k , przy czym zaleca się przeprowadzenie tego doboru drogą prób lub sposobami graficznymi.

Dla zastosowań inżynierskich ważne jest jednak posiadanie wzorów o postaci

$$(1.2) \quad p_k = \varphi(g_i, E_i)$$

przy wyznaczonych już wartościach m i n . W pracy obecnej podamy metodę otrzymania wzorów tego typu, prostych, a zarazem o dostatecznie dużej dokładności na przykładzie promieniowo ściskanych powłok walcowych kolistych. Po zastosowaniu analitycznych warunków minimum rozwiążemy mianowicie uzyskane równanie przez wprowadzenie uogólnionych szeregów potęgowych pewnego parametru, charakteryzującego «poprzeczną smukłość» powłoki, a więc jej cienkościenność. Dzięki działaniom na uogólnionych szeregach potęgowych będzie można również prostymi wyrażeniami określić inne poszukiwane wielkości, jak np. niezbędną grubość powłoki przy danym obciążeniu, granice stosowalności rozwiązania z uwagi na wyboczenie sprężysto-plastyczne itp.

Problem stateczności promieniowo ściskanych powłok walcowych kolistych został w zakresie sprężystym rozwiązany po raz pierwszy przez R. LORENZA [8], następnie przez R. SOUTHWELLA [15] oraz R. MISESA [9]; rozwiązania te uzyskano w sensie wzorów typu [1.1], w oparciu o liniową teorię stateczności powłok (badanie „sąsiedniego” położenia równowagi). Pewne próby uzyskania wzorów typu (1.2) podjął P. F. PAPKOWICZ [12], następnie D. F. WINDENBURG i C. TRILLING [16] oraz H. EBNER [3]; dalsze rozwiązania można znaleźć w monografii [7]. Granice stosowalności wzorów tego typu badał A. S. AWDONIN [2]. Otrzymane wyniki są jednak mało dokładne wobec pominięcia znacznej liczby wyrazów.

W ujęciu nieliniowym omawiany problem został rozwiązany niemal jednocześnie przez W. A. NASHA [10] i F. S. ISANBAJEWĄ [6]. W stosunku do wzorów typu (1.1) problem komplikuje się tu dodatkowo o tyle, że należy jeszcze znaleźć minimum obciążenia przy przemieszczeniach o wartości skończonej. Na drodze numerycznej i graficznej stwierdzono, iż ciśnienie krytyczne w sensie teorii nieliniowej jest w rozpatrywanym przypadku około 25 % mniejsze od otrzymanego w oparciu o analizę liniową. Różnice między wynikami obu teorii są tu więc znacznie mniejsze, niż np. przy ściskaniu osiowym i wyraźnie prostsze wzory oparte na liniowej teorii stateczności mogą być wykorzystane w większości zastosowań inżynierskich przy stosownie (ale nieznacznie) podwyższonym współczynniku bezpieczeństwa. Również nasze obecne rozważania oprzemy o liniową teorię stateczności powłok.

2. Dobór wzoru podstawowego

W literaturze można spotkać dość różnorodne wzory, określające na podstawie teorii liniowej promieniowe ciśnienie krytyczne dla swobodnie podpartej powłoki walcowej. Różnice między poszczególnymi wzorami są przede wszystkim wynikiem pominięć, dokonywanych podczas ich wyprowadzania. Dobór wzoru wyjściowego dla naszych rozważań jest kwestią zasadniczą, gdyż powinna go cechować możliwie duża dokładność, a przy tym niezbyt skomplikowana budowa.

Przytoczymy obecnie kilka takich wzorów typu (1.1), przy czym dla skrócenia zapisu wprowadzimy pewne nowe oznaczenia. Oznaczmy mianowicie przez s bezwymiarowe ciśnienie krytyczne,

$$(2.1) \quad s = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r^2 p_k}{Eh^2}, \quad (2.1)$$

gdzie r oznacza średni promień powłoki, h grubość ścianki, E i ν moduły sprężystości; przez λ oznaczymy «smukłość poprzeczną» powłoki

$$(2.2) \quad \lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r}{h} = 3,305 \frac{r}{h}$$

(współczynnik liczbowy podano tu dla $\nu = 0,3$). Definicja ta jest nieco zbliżona do definicji smukłości pręta, gdyż jest to stosunek promienia powłoki do odpowiedniego promienia bezwładności elementu ścianki przy uwzględnieniu poprawki na walcową sztywność zginania powłoki. Przez $U = m^2$ i $V = n^2$ oznaczymy wreszcie kwadraty ilości półfal po wyboczeniu powłoki, odpowiednio w kierunku obwodowym i osiowym, na długości półobwodu.

Wzory LORENZA [8], SOUTHWELLA [15] i MISESA [9] są mało dokładne. Za najdokładniejsze (wskutek najmniejszej ilości pominięć) można uznać wzory podane przez K. GIRKMANN [5]:

$$(2.3) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} + \frac{(U+V-1)^2}{(U-1)\lambda} = \frac{2(1-\nu)(U-V)V}{(U+V)(U-1)\lambda}$$

oraz przez W. FLÜGGEGO [4]

$$(2.4) \quad s = \frac{1}{U[(U+V)^2 - (U+3V)]} \left\{ V^2 \lambda + \frac{(U+V)^4}{\lambda} - \frac{2[U^3 + (4-\nu)U^2V + 3UV^2 + \nu V^3]}{\lambda} + \frac{U^2 + 2(2-\nu)UV}{\lambda} \right\}$$

W monografii S. D. PONOMARIEWA i innych [13] można znaleźć prosty wzór

$$(2.5) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 U} + \frac{(U+V)^2}{U \lambda},$$

natomiast w rozszerzonym wydaniu [14] znajduje się wzór dokładniejszy

$$(2.6) \quad s = \frac{1}{U(U+V)^2 - U^2 - (2+\nu)UV + \nu V^2} \left[V^2 \lambda + \frac{(U+V)^4}{\lambda} - \frac{2U^3 - U^2}{\lambda} \right]$$

A. S. WOLMIR podaje w monografiach [18] i [19] prosty wzór (2.5), a ponadto w [19] za S. W. ALEKSANDROWSKIM [1] dokładniejszy wzór

$$(2.7) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} + \frac{(U+V)^2}{(U-1) \lambda} + \frac{1 - 2(\nu V + U)}{(U-1) \lambda}$$

W. Z. WŁASOW [17] podaje równanie (str. 387, tłumaczenie na język niemiecki)

$$(2.8) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 V} + \frac{(U+V-1)^2}{V \lambda} - \frac{2(1-\nu)(U-V)V}{(U+V)V \lambda},$$

gdzie niewątpliwie tkwi błąd, bowiem w mianownikach należy tu czynnik V zastąpić przez U [błędne jest już podstawienie (16.14), gdzie różniczkowano względem a zamiast względem β]. Po wprowadzeniu stosownej poprawki wzór (2.8) różni się już niewiele od (2.3). Oczywiście można znaleźć jeszcze szereg innych postaci wzoru na ciśnienie krytyczne, jednak nie będziemy ich tu cytowali.

Pewnym kryterium dokładności wzoru jest przejście graniczne do powłoki nieskończenie długiej, dla której, jak łatwo wykazać, $V \rightarrow 0$, $U \rightarrow 4$. Z dokładniejszych wzorów (2.3), (2.4), (2.6) i (2.7) otrzymujemy wtedy

$$(2.9) \quad s = \frac{3}{\lambda},$$

co jest zgodne ze znanym rozwiązaniem dla pierścienia kolistego (oczywiście z dokładnością do czynnika $1 - \nu^2$), natomiast ze wzorów (2.5) i (2.8) (po usunięciu wspomnianego błędu) wynika zbyt duża wartość $s = 4/\lambda$.

Dokonyamy obecnie pewnego porównania wzorów (2.3), (2.4), (2.6) i (2.7). W tym celu przekształcimy (2.4), (2.6) i (2.7) tak, by upodobnić ich zapis do (2.3). Uwzględnimy, iż przy ściskaniu promieniowym V jest zawsze małe wobec U (okoliczność tę omówimy szczegółowo później) i częściowo rozwinijemy wzory (2.4) i (2.6) w sze-

regi potęgowe zmiennej $1/U$ tak, by uzyskać zgodność mianowników. Ze wzoru (2.4) wynika wtedy

$$(2.10) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} - \frac{V^3 \lambda}{(U+V)^4 (U-1)} + \dots + \frac{(U+V-1)^2}{(U-1) \lambda} - \frac{(1-2\nu) U^2 V}{(U+V)^2 (U-1) \lambda} + \dots,$$

natomiast ze wzoru (2.6)

$$(2.11) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} - \frac{\nu V^3 \lambda}{(U+V)^4 (U-1)} + \dots + \frac{(U+V-1)^2}{(U-1) \lambda} + \frac{(6+\nu) U^2 V}{(U+V)^2 (U-1) \lambda} + \dots$$

Wreszcie zapis wzoru (2.7) można przekształcić do postaci

$$(2.12) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} + \frac{(U+V-1)^2}{(U-1) \lambda} + \frac{2(1-\nu)V}{(U-1) \lambda}.$$

Porównując (2.3), (2.10), (2.11) i (2.12) stwierdzamy zgodność wyrazów rzędu $V^2 \lambda / U^3$ i U / λ (jest to, jak później wykazemy, ten sam rząd), podobnie rzędu $1 / \lambda$, natomiast różnice występują przy następnym, trzecim z kolei rzędzie $V^3 \lambda / U^5$ i $V / U \lambda$. We wzorach (2.10) i (2.11) pojawia się składnik rzędu $V^3 \lambda / U^5$, który jest równy zeru we wzorach (2.3) i (2.12), a pojawiające się we wszystkich wzorach składniki rzędu $V / U \lambda$ (ostatnie) różnią się między sobą nie tylko ilościowo, ale i jakościowo [mianowicie znakiem: we wzorach (2.3) i (2.10) są one ujemne, a we wzorach (2.11) i (2.12) dodatnie]. W tej sytuacji jako podstawę naszej analizy przyjmijmy wzór

$$(2.13) \quad s = \frac{V^2 \lambda}{(U+V)^2 (U-1)} + \frac{(U+V-1)^2}{(U-1) \lambda},$$

który wyróżnia się prostotą, a nie posiadając wyrazu rzędu $V / U \lambda$ daje wartości ciśnień krytycznych, zawarte pomiędzy wynikami wzorów (2.3) i (2.10) z jednej, a (2.11) i (2.12) z drugiej strony. W przypadku granicznym powłoki nieskończenie długiej wzór (2.13) daje poprawną wartość (2.9). Oczywiście w tym stanie rzeczy tylko dwa pierwsze wyrazy uzyskanych przez nas rozwinięć na szeregi potęgowe będą posiadały pełną wartość, trzeci wyraz traktować będziemy jedynie jako orientacyjny. Dla porównania podamy również niektóre wyniki, uzyskane w oparciu o «pełny» wzór Girkmanna (2.3).

3. Określenie minimum ciśnienia krytycznego dla powłok średniej długości

We wzorze (2.13) należy teraz dobrać U i V tak, by wielkość s osiągnęła minimum. Jak łatwo wykazać, pochodna $\partial s / \partial V$ jest dodatnia w całym zakresie, więc

należy przyjąć minimalną wartość V . Zależy ona od długości powłoki i odpowiada jednej półfali na tej długości. Oznaczmy ją przez \check{V} :

$$(3.1) \quad \check{V} = n_{\min}^2 = \pi^2 \frac{r^2}{l^2},$$

gdzie l oznacza długość powłoki. Przejdziemy do określenia U . Wielkość ta powinna być kwadratem pewnej liczby całkowitej — ilości fal obwodowych na długości obwodu. Tym niemniej dla dość dużych U można będzie przyjąć, popełniając błąd na korzyść bezpieczeństwa, że U ma wartość zapewniającą minimum s bez względu na to, czy jest równa kwadratowi liczby całkowitej, czy też nie. Przystępując do zera pochodną $\partial s / \partial U$ otrzymujemy równanie

$$(3.2) \quad (U + \check{V} - 1)(U - \check{V} - 1)(U + \check{V})^3 - (3U + \check{V} - 2)\check{V}^2 \lambda^2 = 0,$$

gdzie podstawiono już $V = \check{V}$. Jest to równanie piątego stopnia względem U , co stanowi zasadniczą trudność przy rozwiązywaniu. P. F. P APKOWICZ [12] i H. EBNER [3] podają rozwiązanie przy zastosowaniu pominięć znacznej ilości wyrazów, co zmniejsza dokładność wyniku. Dla poprawienia dokładności przedstawimy rozwiązanie w postaci uogólnionego szeregu potęgowego pewnego małego parametru. Za parametr ten przyjmijmy $1/\lambda$, a więc dokładność rozwiązania będzie wzrastała ze wzrostem cienkościenności powłoki.

Dla uzyskania rozwinięcia zauważymy najpierw, że przy bardzo dużych λ otrzymujemy U^5 proporcjonalne do $U\lambda^2$, zatem jedyny interesujący nas pierwiastek U jest proporcjonalny do $\sqrt{\lambda}$; oznaczmy $1/\sqrt{\lambda} = y$, $U/\sqrt{\lambda} = Uy = W$ i zapiszemy (3.2) w postaci

$$(3.3) \quad [W + (\check{V} - 1)y][W - (\check{V} + 1)y](W + \check{V}y)^3 - [3W + (\check{V} - 2)y]\check{V}^2 = 0.$$

Rozwiązania będziemy teraz poszukiwali w postaci

$$(3.4) \quad W = W_0 + W_1 y + W_2 y^2 + \dots;$$

po podstawieniu (3.4) do (3.3), wykonaniu odpowiednich działań [20, 21 i 22] i zastosowaniu metody równych współczynników obliczamy kolejno W_0 , W_1 , W_2 , ... i ostatecznie

$$(3.5) \quad W = \sqrt{\check{V}\sqrt{3}} - \frac{2\check{V} - 1}{3} y + \frac{14\check{V}^2 + 10\check{V} + 5}{36\sqrt{\check{V}\sqrt{3}}} y^2 + \dots,$$

albo po powrocie do zmiennych U i λ

$$(3.6) \quad U = \sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}} - \frac{2\check{V} - 1}{3} \sqrt{\lambda} + \frac{14\check{V}^2 + 10\check{V} + 5}{36\sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}}} \lambda + \dots$$

Podstawienie (3.6) do (2.13) pozwala określić minimalną wartość s . Zastosujemy znowu rozwinięcie na uogólniony szereg potęgowy otrzymując

$$(3.7) \quad s = s_{\min} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\check{V}\sqrt{3}}{\lambda}} + \frac{2}{3} \frac{2\check{V} - 1}{\lambda} + \frac{10\check{V}^2 + 2\check{V} + 1}{9\lambda\sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}}} + \dots$$

Pierwszy wyraz tego szeregu odpowiada wzorom Papkowicza i Ebnera; następne poprawiają dokładność wzoru, przy czym różnica jest czasem dość istotna, zwłaszcza dla powłok o niezbyt dużej smukłości poprzecznej λ .

Dla porównania podamy teraz wyniki, uzyskane na podstawie «pełnego» wzoru Girkmanna (2.3). Zamiast równania (3.2) otrzymujemy wtedy

$$(3.8) \quad (U + \check{V} - 1)(U - \check{V} - 1)(U + \check{V})^3 - (3U + \check{V} - 2)\check{V}^2\lambda^2 - \\ - 2(1 - \nu)\check{V}(U + \check{V})(\check{V}^2 - U^2 + 2U\check{V} - 2\check{V}) = 0,$$

a zamiast (3.6) i (3.7)

$$(3.9) \quad U = \sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}} - \frac{2\check{V} - 1}{3} + \frac{14\check{V}^2 + (28 - 18\nu)\check{V} + 5}{36\sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}}} + \dots,$$

$$(3.10) \quad s = s_{\min} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\check{V}\sqrt{3}}{\lambda}} + \frac{2}{3}\frac{2\check{V} - 1}{\lambda} - \frac{10\check{V}^2 - (16 - 18\nu)\check{V} + 1}{9\lambda\sqrt{\check{V}\lambda\sqrt{3}}} + \dots$$

Dwa pierwsze wyrazy szeregów (3.6) i (3.9), a także (3.7) i (3.10) są identyczne, natomiast w trzecich wyrazach występują różnice. W przypadku wzorów (3.6) i (3.9) nie są one zbyt wielkie, rzędu 30%, co praktycznie oznacza różnice we wzorach na U rzędu ułamek procenta. Różnice pomiędzy trzecimi wyrazami wzorów (3.7) i (3.10) są większe: wyraz ten we wzorze (3.7) jest zawsze dodatni, natomiast we wzorze (3.10) w zakresie średnich wartości \check{V} i przy dostatecznie małym współczynniku Poissona ν może być ujemny. Tym niemniej różnice te są z reguły pomijalne i w dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać wzorem podstawowym o możliwie najprostszej postaci (2.13).

Wzór (3.7) może być słuszny jedynie przy ilości półfal obwodowych nie mniejszej od 2 na długości półobwodu, czyli $U \geq 4$; jeżeli z (3.6) wypada $U < 4$, to należy stosować wzór wyjściowy (2.13) z podstawieniem $V = \check{V}$, $U = 4$:

$$(3.11) \quad s = \frac{\check{V}^2\lambda}{3(4 + \check{V})^2} + \frac{(3 + \check{V})^2}{3\lambda}.$$

Ponieważ określona wzorem (3.6) wartość U maleje ze zmniejszaniem się \check{V} , czyli ze wzrostem długości powłoki, więc powłoki, dla których $U = 4$, będziemy nazywali powłokami długimi. W przeciwieństwie do tego powłokami krótkimi nazywa się zazwyczaj powłoki, dla których przesuwność brzegów ma istotne znaczenie; tym problemem nie będziemy się zajmowali. Wspomnimy jedynie, iż niektórzy autorzy nazywają powłokami krótkimi takie powłoki, które podlegają wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Rozgraniczenie pomiędzy wyboczeniem sprężystym i sprężysto-plastycznym omówimy szczegółowo, jednak wprowadzenie tu nazwy «powłoka krótka» wydaje się niewskazane choćby dlatego, że powłoka długa może również podlegać wyboczeniu sprężysto-plastycznemu, a okoliczność ta powodowałaby jakąś sprzeczność w nomenklaturze.

Zakres stosowalności wzoru (3.7) z uwagi na warunek $U \geq 4$ omówimy później.

4. Projektowanie powłok ze względu na ich stateczność (obliczanie grubości ścianek)

Stosując działania na uogólnionych szeregach potęgowych możemy bez trudności obliczyć ze wzoru (3.7) grubość ścianki powłoki o średniej długości, wymaganej z uwagi na jej stateczność, czyli przy zadanym ciśnieniu krytycznym p_k . Zapiszemy najpierw (3.7) w postaci

$$(4.1) \quad \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r^2}{h^2} \frac{p_k}{E} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\check{\nu}}{2\sqrt{1-\nu^2}}} \frac{h}{r} + \frac{2\check{\nu}-1}{3\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{r} + \\ + \frac{10\check{\nu}^2+2\check{\nu}+1}{54\sqrt{2\check{\nu}(1-\nu^2)^{3/4}}} \left(\frac{h}{r}\right)^{3/2} + \dots$$

Stosunek h/r jest teraz niewiadomy; przenosząc go na prawą stronę i przekształcając nieco zapis otrzymujemy

$$(4.2) \quad \frac{p_k}{24E\check{\nu}^3\sqrt{1-\nu^2}} = \left(\frac{h}{6\check{\nu}r\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{5/2} + \frac{2\check{\nu}-1}{2} \left(\frac{h}{6\check{\nu}r\sqrt{1-\nu^2}}\right)^3 + \\ + \frac{10\check{\nu}^2+2\check{\nu}+1}{12} \left(\frac{h}{6\check{\nu}r\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{7/2} + \dots$$

Poszukiwany wzór na niezbędną grubość ścianki powłoki otrzymamy na drodze odwrócenia uogólnionego szeregu potęgowego (4.2). W tym celu najdogodniej jest lewą stronę równania oznaczyć np. przez y , a powtarzające się po prawej stronie wyrażenie w nawiasie przez x . Stosując wzory wyprowadzone w pracy [22] otrzymujemy ostatecznie

$$(4.3) \quad \frac{h}{r} = 6\check{\nu}\sqrt{1-\nu^2} \left[\left(\frac{p_k}{24E\check{\nu}^3\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{2/5} - \frac{2\check{\nu}-1}{5} \left(\frac{p_k}{24E\check{\nu}^3\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{3/5} + \right. \\ \left. + \frac{8\check{\nu}^2-128\check{\nu}+17}{300} \left(\frac{p_k}{24E\check{\nu}^3\sqrt{1-\nu^2}}\right)^{4/5} + \dots \right]$$

Przy $\nu = 0,3$ możemy zamiast (4.3) napisać

$$(4.4) \quad \frac{h}{r} = 1,035 \frac{r^2}{l^2} \left(\frac{p_k l^6}{Er^6}\right)^{2/5} \left[1 + 0,02707 \left(1 - 19,74 \frac{r^2}{l^2}\right) \left(\frac{p_k l^6}{Er^6}\right)^{1/5} + \right. \\ \left. + 0,001038 \left(1 - 74,31 \frac{r^2}{l^2} + 45,84 \frac{r^4}{l^4}\right) \left(\frac{p_k l^6}{Er^6}\right)^{2/5} + \dots \right]$$

Nie stwarza również trudności określenie bezpośrednim wzorem ilości półfal na półobwodzie odpowiadającej wyboczeniu powłoki. Deparametryzacja układu równań (3.6) i (3.7), czyli wyrugowanie λ i uzyskanie zależności $U = U(s)$ nie prowadzi wprost do celu, ponieważ w wielkości s (2.1) występuje nie znany tu sto-

sunek h/r . Natomiast z definicji smukłości poprzecznej λ (2.2) po podstawieniu (4.3) i wykonaniu dzielenia wynika

$$(4.5) \quad \lambda = \frac{1}{\check{V} \sqrt{3}} \left(\frac{p_k}{24E\check{V}^3 \sqrt{1-\nu^2}} \right)^{-\frac{2}{5}} \left[1 - \frac{1-2\check{V}}{5} \left(\frac{p_k}{24E\check{V}^3 \sqrt{1-\nu^2}} \right)^{\frac{1}{5}} - \frac{1-16\check{V}-8\check{V}^2}{60} \left(\frac{p_k}{24E\check{V}^3 \sqrt{1-\nu^2}} \right)^{\frac{2}{5}} + \dots \right],$$

a po podstawieniu do (3.6) otrzymujemy ostatecznie

$$(4.6) \quad U = \left(\frac{p_k}{24E\check{V}^3 \sqrt{1-\nu^2}} \right)^{-\frac{1}{5}} + \frac{7(1-2\check{V})}{30} + \frac{113+388\check{V}+392\check{V}^2}{900} \left(\frac{p_k}{24E\check{V}^3 \sqrt{1-\nu^2}} \right)^{\frac{1}{5}} + \dots$$

Zajmiemy się jeszcze powłokami długimi. Wzór (3.11) napiszemy teraz w postaci

$$(4.7) \quad \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r^2}{h^2} \frac{p_k}{E} = \frac{\check{V}^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}}{3(4+\check{V})^2} \frac{r}{h} + \frac{(3+\check{V})^2}{3\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h}{r}.$$

Jest to równanie trzeciego stopnia względem niewiadomej h/r , mianowicie

$$(4.8) \quad \frac{(3+\check{V})^2}{36(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{r} \right)^3 + \frac{\check{V}^2}{3(4+\check{V})^2} \frac{h}{r} - \frac{p_k}{E} = 0.$$

Wobec tego, iż równanie to ma już postać kanoniczną, a wyróżnik jest dodatni, otrzymanie rozwiązania ścisłego nie przedstawia trudności:

$$(4.9) \quad \frac{h}{r} = \sqrt[3]{\frac{18(1-\nu^2)}{(3+\check{V})^2} \frac{p_k}{E}} \left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{16(1-\nu^2)\check{V}^6}{81(3+\check{V})^2(4+\check{V})^6} \frac{E^2}{p_k^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{16(1-\nu^2)\check{V}^6}{81(3+\check{V})^2(4+\check{V})^6} \frac{E^2}{p_k^2}}} \right].$$

Dla celów praktycznych czasem wygodniej jest skorzystać z rozwinięcia w szereg zamiast ze ścisłego wzoru (4.9). Możemy otrzymać różne rozwinięcia w zależności od tego, którą wielkość przyjmiemy za zmienną, a którą za parametr. Najprostsze rozwinięcie otrzymujemy odwracając (4.8) względem h/r przy założeniu małej wartości stosunku p_k/E . Wynik odwrócenia możemy zapisać w postaci

$$(4.10) \quad \frac{h}{r} = 3\check{V}(4+\check{V})^2 \left(\frac{p_k}{E\check{V}^3} \right) - \frac{9\check{V}(3+\check{V})^2(4+\check{V})^8}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{p_k}{E\check{V}^3} \right)^3 + \frac{81\check{V}(3+\check{V})(4+\check{V})^{14}}{16(1-\nu^2)^2} \left(\frac{p_k}{E\check{V}^3} \right)^5 + \dots$$

Okazuje się jednak, że rozwinięcie to jest całkowicie bezwartościowe. Wykażemy mianowicie w p. 5, że powłokę można traktować jako długą tylko przy dostatecznie dużej wartości $p_k/E\check{V}^3$ (rzędu 0,03), a już przy tej wartości zmiennej szereg (4.10) jest rozbieżny. Znaczenie praktyczne ma natomiast szereg względem zmiennej $E\check{V}^3/p_k$, który najłatwiej otrzymać przez rozwinięcie (4.7). Dwa pierwsze wyrazy (przy dodatkowym pominięciu małej tutaj wartości \check{V} wobec 3 lub 4) dają dogodny wzór przybliżony

$$(4.11) \quad \frac{h}{r} \approx \sqrt[3]{4(1-\nu^2)} \frac{p_k}{E} \left[1 - \frac{\sqrt[3]{1-\nu^2}}{72\sqrt[3]{2}} \left(\frac{E\check{V}^3}{p_k} \right)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Dokładność tego wzoru jest z reguły wystarczająca, tym bardziej że współczynnik przy następnym wyrazie szeregu jest równy zeru. Przy $\nu = 0,3$ możemy zamiast (4.9) napisać

$$(4.12) \quad \frac{h}{r} = 1,538 \left(\frac{p_k}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \left[1 - 1,040 \left(\frac{Er^6}{p_k l^6} \right)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Gdy dane jest działające na powłokę ciśnienie promieniowe p , to we wzorach (4.3), (4.4), (4.7), (4.9) i (4.10) należy podstawić $p_k = pj$, gdzie j jest realnym wymaganym stopniem bezpieczeństwa z uwagi na stateczność powłoki, powiększonym o około 30 % wobec korzystania z liniowej teorii stateczności, określającej jedynie górne ciśnienie krytyczne.

5. Rozgraniczenie między powłokami długimi i o średniej długości

To ważne rozgraniczenie zakresu stosowalności poszczególnych wzorów, mianowicie (3.7) od (3.11), (4.3) od (4.7) itd., możemy określić dwojako. Ścisłe rzecz biorąc należałoby porównać wzory (2.13) z podstawieniami $U = 4$ i $U = 9$. Jednakże wtedy nie otrzymalibyśmy ciągłego przejścia pomiędzy wzorami dla powłok długich i powłok średniej długości. By przejście takie otrzymać, rozszerzymy nieco zakres powłok średniej długości aż do wartości $U = 4$ otrzymywanej z równania (3.2). Tak więc poszukiwaną krzywą graniczną określi równanie

$$(5.1) \quad (3 + \check{V})(3 - \check{V})(4 + \check{V})^3 - (10 + \check{V})\check{V}^2 \lambda^2 = 0.$$

Wynika stąd wzór ścisły

$$(5.2) \quad \lambda = \frac{(4 + \check{V})^{3/2}}{\check{V}} \sqrt{\frac{9 - \check{V}^2}{10 + \check{V}}}.$$

Dla zastosowań praktycznych dogodniejsza jest znajomość funkcji odwrotnej, $\check{V} = \check{V}(\lambda)$, czyli $1/r = 1/r(\lambda)$, ponieważ określa ona graniczną długość powłoki. Ścisłe przedstawienie tej zależności w postaci zamkniętej nie jest możliwe. Jednakże rozwijając (5.2) w uogólniony szereg potęgowy zmiennej \check{V} ,

$$(5.3) \quad \lambda = \frac{24}{\check{V}\sqrt{10}} + \frac{39}{5\sqrt{10}} - \frac{1357}{1200\sqrt{10}} \check{V} + \dots,$$

i dokonując odwrócenia [22] uzyskujemy prosty wzór

$$(5.4) \quad \check{V} = \frac{12\sqrt{10}}{5\lambda} + \frac{468}{25\lambda^2} + \frac{1011\sqrt{10}}{125\lambda^3} + \dots,$$

który możemy również napisać w postaci

$$(5.5) \quad \frac{l}{r} = \pi \sqrt[4]{\frac{5}{288}} \sqrt{\lambda} \left[1 - \frac{39}{10\sqrt{10}\lambda} + \frac{1193}{2000\lambda^2} + \dots \right]$$

lub wobec (2.2) w postaci

$$(5.6) \quad \frac{l}{r} = \pi \sqrt[4]{\frac{5(1-\nu^2)}{24}} \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{39}{10\sqrt{120(1-\nu^2)}} \frac{h}{r} + \frac{1193}{24000(1-\nu^2)} \frac{h^2}{r^2} + \dots \right].$$

W przypadku $\nu = 0,3$ ze wzoru (5.6) wynika

$$(5.7) \quad \frac{l}{r} = 2,0730 \left(\frac{r}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 0,3732 \frac{h}{r} + 0,05462 \frac{h^2}{r^2} + \dots \right).$$

Wzory (5.2), (5.4) i następne określają granice stosowalności wzorów (3.7) i (3.11), czyli wzorów określających ciśnienie krytyczne. Przy problemie projektowania powłok stosunek h/r nie jest znany i wzory powyższe nie są bezpośrednio przydatne. Należy wyeliminować nie znaną tu wielkość λ , podstawiając (5.2) do (4.5). Otrzymujemy najpierw wzór ścisły

$$(5.8) \quad \frac{p_k}{E} = \frac{2\check{V}^3(7+2\check{V})\sqrt{12(1-\nu^2)}}{(3-\check{V})(4+\check{V})^{9/2}} \sqrt{\frac{10+\check{V}}{9-\check{V}^2}},$$

a znacznie ważniejszą dla zastosowań praktycznych funkcją odwrotną określimy przez wykonanie działań na uogólnionych szeregach potęgowych. Rozwinięcie funkcji (5.8) ma postać

$$(5.9) \quad \frac{p_k}{E} = \sqrt{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{7\sqrt{10}}{2304} \check{V}^3 \left(1 - \frac{383}{840} \check{V} + \frac{6997}{22400} \check{V}^2 + \dots \right).$$

Przy $\nu = 0,3$ po podstawieniu (2.2) możemy zamiast (5.9) napisać

$$(5.10) \quad \frac{p_k}{E} = 30,523 \left(\frac{r}{l}\right)^6 \left[1 - 4,501 \left(\frac{r}{l}\right)^2 + 30,43 \left(\frac{r}{l}\right)^4 + \dots \right].$$

Odwracając ten szereg otrzymujemy poszukiwane rozwinięcie

$$(5.11) \quad \frac{l}{r} = 1,7678 \left(\frac{p_k}{E}\right)^{-\frac{1}{6}} - 0,4243 \left(\frac{p_k}{E}\right)^{\frac{1}{6}} + 0,4596 \left(\frac{p_k}{E}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Wzory (5.8) i (5.11) rozgraniczają obszary stosowalności wzorów (4.4) i (4.7) względnie (4.10).

6. Ograniczenie ze względu na sprężystość wyboczenia powłoki

Przy zwiększającej się grubości ścianki lub zwiększającym się danym ciśnieniu zewnętrznym wyboczenie powłoki zamiast sprężystego stanie się sprężysto-plastyczne. W pracy obecnej nie będziemy rozważali wyboczenia sprężysto-plastycznego, natomiast podamy granicę stosowalności wyprowadzonych wzorów z uwagi na założoną stosowalność prawa Hooke'a.

Naprężenie krytyczne w ściance powłoki (obwodowe) wynosi

$$(6.1) \quad \sigma_{\theta k} = \frac{r}{h} p_k,$$

zatem oznaczając granicę sprężystości (proporcjonalności) przy ściskaniu przez S otrzymamy równanie ograniczające sprężystość wyboczenia w postaci

$$(6.2) \quad \frac{h}{r} = \frac{p_k}{S}.$$

Zajmiemy się najpierw powłokami średniej długości. Podstawiając (6.2) do (3.7), wobec (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(6.3) \quad \frac{S}{E} \lambda = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\check{\nu} \sqrt{3}}{\lambda}} + \frac{2}{3} \frac{2\check{\nu} - 1}{\lambda} + \frac{10\check{\nu}^2 + 2\check{\nu} + 1}{9\lambda \sqrt{\check{\nu} \lambda \sqrt{3}}} + \dots$$

Równanie to potraktujemy jako określające zależność $S/E = f(\lambda)$ przy parametrze $\check{\nu}$ i odwrócimy [22]. Ostatecznie otrzymujemy

$$(6.4) \quad \lambda = \frac{2^{4/3}}{3^{1/2}} \check{\nu}^{1/3} \left(\frac{S}{E}\right)^{-2/3} + \frac{2^{2/3}}{3^{5/2}} \cdot \frac{2\check{\nu} - 1}{\check{\nu}^{1/3}} \left(\frac{S}{E}\right)^{-1/3} + \dots,$$

a przy $\nu = 0,3$ możemy zamiast (6.4) napisać (po obliczeniu odwrotności)

$$(6.5) \quad \frac{h}{r} = 1,0591 \left(\frac{IS}{rE}\right)^{2/3} - 0,01611 \frac{2\pi^2 r^2 - l^2}{rl} \frac{IS}{rE} + \dots$$

Szereg ten określa granicę stosowalności wzoru (3.7), mianowicie największą wartość stosunku h/r , przy której jeszcze można tym wzorem określić ciśnienie krytyczne s względnie p_k . Przy problemie projektowania powłok grubość ścianki h nie jest znana, ale możemy ją wyrugować korzystając z (6.2). Ostatecznie znajdziemy

$$(6.6) \quad \frac{p_k}{E} = \frac{3^{1/2} \sqrt{12(1-\nu^2)}}{2^{4/3} \check{\nu}^{1/3}} \left(\frac{S}{E}\right)^{5/3} - \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{4 \cdot 3^{3/2}} \cdot \frac{2\check{\nu} - 1}{\check{\nu}} \left(\frac{S}{E}\right)^2 + \dots,$$

czyli przy $\nu = 0,3$

$$(6.7) \quad \frac{p_k}{E} = 1,0591 \left(\frac{l}{r}\right)^{2/3} \left(\frac{S}{E}\right)^{5/3} - 0,01611 \frac{2\pi^2 r^2 - l^2}{r^2} \left(\frac{S}{E}\right)^2 + \dots$$

Wzory te określają największe ciśnienie krytyczne, przy którym wyboczenie powłoki jest jeszcze sprężyste.

Przejdźmy do powłok długich. Podstawiając (6.2) do (4.6) otrzymujemy równanie kwadratowe niepełne względem h/r , skąd

$$(6.8) \quad \frac{h}{r} = \frac{6\sqrt{1-\nu^2}}{3+\check{V}} \sqrt{\frac{S}{E} - \frac{\check{V}^2}{3(4+\check{V})^2}},$$

albo

$$(6.9) \quad \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3+\check{V}}{\sqrt{\frac{S}{E} - \frac{\check{V}^2}{3(4+\check{V})^2}}}.$$

Rugując wreszcie h/r przy wykorzystaniu wzoru (6.2) otrzymujemy ograniczenie przy projektowaniu powłok, czyli przy danym ciśnieniu krytycznym p_k :

$$(6.10) \quad \frac{p_k}{E} = \frac{6\sqrt{1-\nu^2}}{3+\check{V}} \frac{S}{E} \sqrt{\frac{S}{E} - \frac{\check{V}^2}{3(4+\check{V})^2}}.$$

Jest to największa wartość ciśnienia krytycznego odpowiadająca sprężystemu wyboczeniu powłoki długiej.

Praktycznie biorąc w powyższych wzorach należy podstawiać wartość granicy sprężystości S podwyższoną w przybliżeniu o 30% wobec stosowania liniowej teorii stateczności i podwyższonego stopnia bezpieczeństwa j .

7. Ograniczenie ze względu na cienkościennosc powłoki

Przy danym ciśnieniu krytycznym p_k , gdy poszukiwany jest stosunek h/r , możemy w wyniku otrzymać tak dużą wartość tego stosunku, że stosowanie teorii powłok cienkościennych przestaje być uzasadnione. Graniczną wartość ciśnienia można również określić, co pozwoli z góry ocenić, z jakiego typu powłoką będziemy mieli do czynienia.

Oznaczmy graniczną wartość stosunku h/r przez η ; często przyjmuje się $\eta = 0,1$, choć przy wymaganiu większej ścisłości obliczeń ta wartość graniczna może być znacznie mniejsza. Załóżmy, że granica sprężystości materiału S jest tak wysoka, iż rozgraniczenie między powłokami cienko- i grubościennymi leży jeszcze w zakresie wyboczenia sprężystego. Graniczną wartość p_k/E można obliczyć wprost ze wzorów (4.2) lub (4.6), podstawiając $h/r = \eta$. Otrzymujemy mianowicie dla powłok średniej długości

$$(7.1) \quad \frac{p_k}{E} = \frac{\sqrt{\check{V}}}{3\sqrt[3]{3(1-\nu^2)^{3/4}}} \eta^{5/2} + \frac{2\check{V}-1}{18(1-\nu^2)} \eta^3 + \frac{10\check{V}^2+2\check{V}+1}{108\sqrt{6\check{V}(1-\nu^2)^{5/4}}} \eta^{7/2} + \dots,$$

natomiast dla powłok długich

$$(7.2) \quad \frac{p_k}{E} = \frac{\check{V}^2}{3(4+\check{V})^2} \eta + \frac{(3+\check{V})^2}{36(1-\nu^2)} \eta^3.$$

Powyżej tych wartości ciśnień krytycznych będziemy mieli do czynienia z powłokami grubościennymi.

Należy jednak podkreślić, że dla większości materiałów konstrukcyjnych linie (7.1) i (7.2) leżą już w zakresie wyboczenia niesprężystego, w związku z czym muszą ulec modyfikacji. Przyjmując jako możliwie prostą hipotezę roboczą, iż przy wyboczeniu niesprężystym moduł E należy zastąpić pewnym modułem E_1 zależnym tylko od naprężenia krytycznego (6.1), otrzymujemy zależność typu

$$(7.3) \quad \frac{p_k}{E_1 \left(\frac{p_k}{\eta} \right)} = f(\check{V}, \eta).$$

Przy danej zależności $E_1(p_k/\eta) = E_1(\sigma_k)$ można określić krzywą graniczną w sposób efektywny. Przez $f(\check{V}, \eta)$ należy tu oczywiście rozumieć prawe strony równań (7.1) lub (7.2).

8. Zestawienie wyników

Zestawienie wyników przy $S/E = 0,001$, $\nu = 0,3$, $\eta = 0,1$ podają rys. 1 i 2. Rysunek 1 odnosi się do obliczania ciśnienia krytycznego, a więc przy danej geometrii powłoki, natomiast rys. 2 — do projektowania powłok przy założonym ciśnieniu zewnętrznym.

W przypadku projektowania powłok istotną różnicę wprowadza niesprężystość wyboczenia. W pracy obecnej nie zajmowaliśmy się wyboczeniem sprężysto-plastycznym, jednak obok linii ciągłych, określonych na podstawie wzorów wyprowadzonych w pracy, liniami przerywanymi zaznaczono przypuszczalny przebieg krzywych granicznych w zakresie wyboczenia niesprężystego.

Rysunki 1 i 2 dają łatwą orientację co do możliwości zastosowania odpowiedniego wzoru, określającego ciśnienie krytyczne bądź wymaganą grubość ścianki powłoki.

9. Przykład liczbowy

Zaprojektujemy powłokę walcową kolistą przy założeniu, że promieniowe ciśnienie krytyczne $p_k = 100 \text{ kG/cm}^2$. Jest ono równe ciśnieniu danemu, pomnożonemu przez współczynnik bezpieczeństwa, stosownie powiększony ze względu na posługiwanie się liniową teorią stateczności powłok. Długość powłoki wynosi $l = 2 \text{ m}$, promień $r = 1 \text{ m}$, stałe materiałowe $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $S = 4200 \text{ kG/cm}^2$ oraz $\nu = 0,3$. Będziemy prowadzili obliczenia zasadnicze i sprawdzające z dość dużą dokładnością, aby zilustrować stopień zbieżności szeregów i błędy popełniane przy przybliżeniach.

Z rysunku 2 wynika, iż przy $p_k/E = 0,0000476$, $l/r = 2$, powłoka będzie należała do powłok średniej długości i będzie podlegała wyboczeniu sprężysto-plastycznemu. Jednak odpowiednia krzywa na wykresie 2 odpowiada wartości parametru $S/E = 0,001$, a ponieważ w naszym przypadku $S/E = 0,002$, więc sytuacja może ulec zmianie. Istotnie, ze wzoru (6.7) wynika wartość graniczna

$$\frac{p_k}{E} = 0,00005338 - 0,00000101 + \dots = 0,00005237,$$

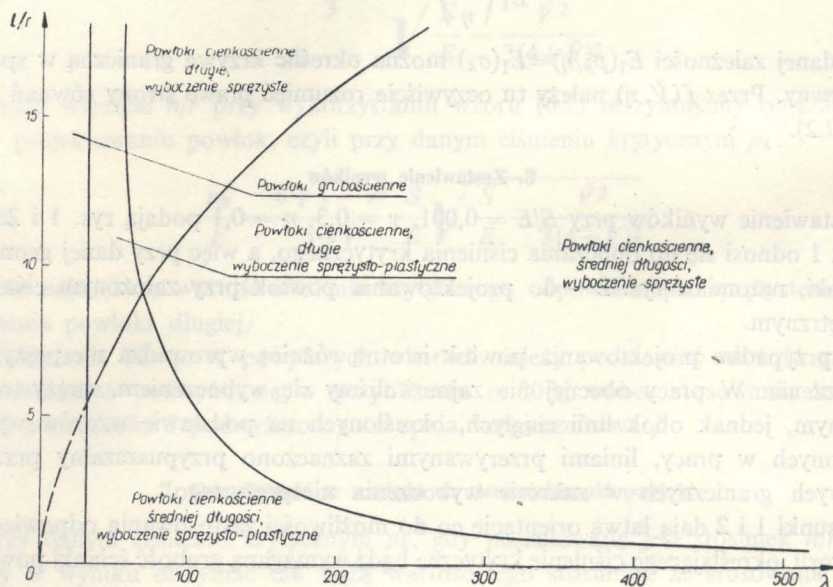
zatem dana wartość stosunku p_k/E jest mniejsza od wartości granicznej i wybozczenie powłoki będzie wybozczeniem sprężystym.

Parametr \check{V} dla danej powłoki wynosi $\check{V} = \pi^2/4 = 2,4674$. Ze wzorów (4.3) i (4.6) obliczamy wymaganą grubość ścianki h i odpowiedni kwadrat ilości półfal obwodowych na długości półobwodu U :

$$\frac{h}{r} = 0,025494 (1 - 0,03344 - 0,00151 - \dots) = 0,024603,$$

$$h = 24,603 \text{ mm},$$

$$U = 23,536 - 0,918 + 0,163 - \dots = 22,781.$$



Rys. 1

Napężenie krytyczne (6.1) wynosi zatem

$$\sigma_k = \frac{100}{0,024603} = 4064,5 \text{ kG/cm}^2$$

i zgodnie z poprzednio dokonany obliczeniem jest mniejsze od założonej granicy sprężystości materiału S .

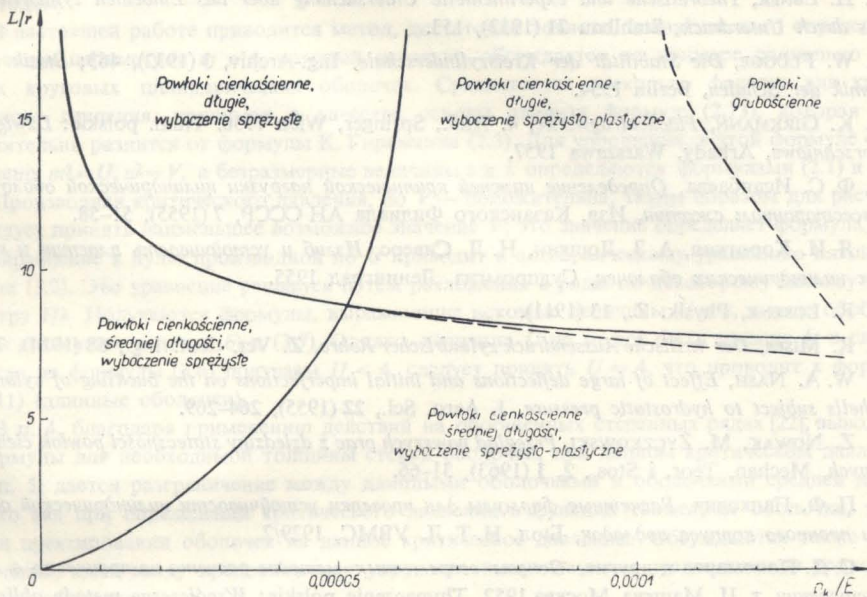
Powłoka jest więc zaprojektowana. Przejdziemy do obliczeń sprawdzających i porównawczych. Ze wzoru (2.2) wynika $\lambda = 134,31$, a korzystając z szeregów (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$U = 23,958 - 1,312 + 0,133 + \dots = 22,779,$$

$$s = 0,23784 + 0,01953 + 0,00231 + \dots = 0,25968.$$

Różnica wartości U w stosunku do obliczonej poprzednio szeregami (4.6) wynosi zaledwie 0,01 %, natomiast ze wzoru (2.1) wynika $p_k = 99,894 \text{ kG/cm}^2$, więc różnica wynosi tu 0,106 %.

Dla porównania podamy jeszcze wyniki czterech innych obliczeń wartości ciśnienia krytycznego. Ze wzoru podstawowego (2.13) przy $U = 22,781$, $V = 2,4674$ wynika $s = 0,25988$, czyli $p_k = 99,971 \text{ kG/cm}^2$ – różnica 0,029% w stosunku do wartości założonej, a 0,077% w stosunku do obliczonej wzorem (3.7). Z «pełnego» wzoru Girkmanna (2.3) otrzymujemy $s = 0,25893$, czyli $p_k = 99,605 \text{ kG/cm}^2$; różnica wynosi 0,366% w stosunku do wartości obliczonej wzorem (2.13). Ze wzoru Papkowicza-Ebnera, odpowiadającego pierwszemu wyrazowi szeregu (3.7), wynika $s = 0,23784$, $p_k = 91,492 \text{ kG/cm}^2$; różnica 8,51% w stosunku do wartości założonej. Wreszcie uwzględnimy fakt, iż U ma być kwadratem liczby całkowitej: najbliższy kwadrat wynosi oczywiście $U = 25$, wtedy ze wzoru (2.13) otrzymujemy



Rys. 2

$s = 0,26248$, $p_k = 100,971 \text{ kG/cm}^2$; różnica 0,971% w stosunku do wartości założonej, a 1,077% w stosunku do obliczonej na podstawie szeregu (3.7).

Zwróćmy uwagę na fakt, iż różnice w stosunku do wzoru Papkowicza-Ebnera są znacznie większe niż różnice między wynikami innych wzorów, w szczególności od różnic wynikających stąd, iż U nie jest kwadratem liczby całkowitej. Oczywiście, różnica w stosunku do wzoru Papkowicza-Ebnera zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem się danego ciśnienia p_k , gdyż wtedy wzrasta «smukłość poprzeczna» powłoki.

10. Uwagi końcowe

W rozpatrywanym przypadku obciążenia różnice między wynikami liniowej i nieliniowej teorii stateczności powłok nie są zbyt znaczne i wyprowadzone wzory mogą służyć w praktyce przy stosownie zwiększonym stopniu bezpieczeństwa. Mogą one również znaleźć zastosowanie przy obliczaniu powłok wzmocnionych,

np. przy określaniu optymalnego rozstawienia żeber wzmacniających. Istnieje również możliwość częściowego wykorzystania wyprowadzonych wzorów przy ujęciu nieliniowym, np. przez założenie ilości półfal obwodowych, określonej prostym wzorem (3.6).

Literatura cytowana w tekście

1. С. В. Александровский, *Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах*, Расчет Пространств. конструкций, вып. III, Москва 1955, Стройиздат, 453-492.
2. А. С. Авдонин, *О пределах применимости формулы П. Ф. Папковича*, Инж. Сборник, 22 (1955), 219-222.
3. H. EBNER, *Theoretische und experimentelle Untersuchung über das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck*, Stahlbau 21 (1952), 153.
4. W. FLÜGGE, *Die Stabilität der Kreiszylinderschale*, Ing.-Archiv, 3 (1932), 463; *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlin 1934.
5. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 4. Aufl., Springer, Wien 1956. Tłum. polskie: *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.
6. Ф. С. Исанбаева, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, 7 (1955), 51-58.
7. Я. И. Короткин, А. З. Лошкин, Н. Л. Сиверс, *Изгиб и устойчивость пластины и круговых цилиндрических оболочек*, Судпромгиз, Ленинград 1955.
8. R. LORENZ, *Physik. Z.*, 13 (1911).
9. R. MISES, *Der kritische Aussendruck zylindrischer Rohre*, Z. Ver. deut. Ing., 58 (1914), 750.
10. W. A. NASH, *Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 22 (1955), 264-269.
11. Z. NOWAK, M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd nowszych prac z dziedziny stateczności powłok cienkościennych*, Mechan. Teor. i Stos., 2, 1 (1963), 31-66.
12. П. Ф. Папкович, *Расчетные формулы для проверки устойчивости цилиндрической оболочки прочного корпуса подлодок*, Бюл. Н. Т. Л. УВМС, 1929/2.
13. С. Д. Пономарев и другие, *Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*, т. II, Машгиз, Москва 1952. Tłumaczenie polskie: *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, т. II, PWN, Warszawa 1958.
14. С. Д. Пономарев и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. III, Машгиз, Москва 1959.
15. R. V. SOUTHWELL, *Phil Mag.* 25 (1913), 687; *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A*, 213 (1914), 187.
16. D. F. WINDENBURG, C. TRILLING, *Stability of thin-walled cylindrical shells under external pressure*, Trans. ASME, 11, 56 (1934), 819.
17. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1949. Tłumaczenie niemieckie: *Allgemeine Schalentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1958.
18. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
19. А. С. Вольмир, *Устойчивость упругих систем*, Гос. Изд. Физ. — Мат. Лит., Москва 1963.
20. M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent*, Z. angew. Math. Phys., 6, 12 (1961), 572-576.
21. M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice współczynników przy potęgowaniu szeregów potęgowych*, Zastosowania Matematyki, 4, 6 (1963), 395-406.
22. M. ŻYCZKOWSKI, *Operations on generalized power series*, Z. angew. Math. Mechanik, 4, 45, (1965), 235-244.

Резюме

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ РАДИАЛЬНОМУ СЖАТИЮ, МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Приводимые в литературе формулы выражают, обычно, критическое давление для оболочки в функции не только геометрии оболочки и постоянных материала, но также количества окружных и осевых полуволн m и n , возникающих при выпучивании. Для эффективных расчетов необходимый подбор этих параметров так, что бы критическое давление достигло минимума, причем подбор рекомендуется произвести численным или графическим методом.

В настоящей работе приводится метод, достаточно точного, аналитического определения значений параметров m и n , который детально обсуждается на примере радиально сжатых круговых цилиндрических оболочек. Сравняется несколько формул для критического давления, принимая в качестве основы анализа формулу (2.13), которая значительно отличается от формулы К. Гиркманна (2.3). Для упрощения, в этой формуле обозначено $m^2 = U$, $n^2 = V$, а безразмерные величины s и λ определяются формулами (2.1) и (2.2).

Производная критического давления, по V — положительна, таким образом для расчетов следует принять наименьшее возможное значение V ; это значение определяет формула (3.1). Приравнение к нулю производной по U приводит к алгебраическому уравнению пятой степени (3.2). Это уравнение решается путем разложения в ряды по некоторому малому параметру $1/\lambda$. Получаются формулы, выражающие искомые величины U и s , в виде обобщенных степенных рядов (3.6) и (3.7). Однако, величина U не может быть меньше 4; в случае, когда из формулы (3.6) получаем $U < 4$, следует принять $U = 4$, что приводит к формуле (3.11) (длинны оболочки).

В п. 4, благодаря применению действий на обобщенных степенных рядах [22], выводятся формулы для необходимой толщины стенки оболочки, при данном критическом давлении. В п. 5, дается разграничение между длинными оболочками и оболочками средней длины и то как при определении критического давления в функции геометрии оболочки, так и при пректировании оболочек на данное критическое давление. Обсуждаются также ограничения, имея ввиду предположение упругости выпучивания и предположение тонкостенности оболочки.

Сопоставление результатов дается на рис. 1 и 2. В работе приводится также числовой пример, иллюстрирующий степень сходимости рядов и погрешности производимых приближений. Как правило эти погрешности являются меньше одного процента.

Summary

STABILITY ANALYSIS OF RADIALY COMPRESSED CYLINDRICAL SHELLS, BY MEANS OF THE METHOD OF GENERALIZED POWER SERIES

Formulae given in the literature express usually the critical pressure for a shell in function of not only the geometrical and material characteristics but also the number of circumferential and axial semiwaves, m and n , that are formed during buckling. For actual computation, it is necessary to select these parameters in such a manner that the critical pressure is minimum. It is recommended to do this by numerical or graphical methods.

In the present paper is proposed a method for a sufficiently accurate analytic determination of m and n . It is discussed in detail by means of an example of radially compressed circular cylindrical shells. A few formulae expressing the critical pressure are confronted, the equation (2.13) being adopted for analysis. This equation differs insignificantly from the formula of K. Girk-

mann (2.3). It is denoted, for simplicity $m^2 = U$, $n^2 = V$. The dimensionless quantities s and λ are determined by Eqs. (2.1) and (2.2).

The derivative of the critical pressure with respect to V is positive, therefore the least possible value of V should be assumed for computation. It is determined by Eq. (3.1). Setting equal to zero the derivative with respect to U , we obtain a fifth-order algebraic equation (3.2), which is solved by means of expansion in series of a small parameter for which $1/\lambda$ is assumed. Formulae are obtained expressing the required values U and s in the form of generalized power series (3.6) and (3.7). However, the quantity U cannot be less than 4. If $U < 4$ is obtained from the equation (3.6), we must assume $U = 4$, which leads to the formula (3.11) (long shells).

In Sec. 4, by applying operations on generalized power series [22], equations are derived for the necessary wall-thickness for a prescribed critical pressure. In Sec. 5 distinction is made between shells of great and medium length in the case in which the critical pressure is sought-for in function of the dimensions of the shell and also for the purpose of shell design for a prescribed critical pressure. Also the limitations are discussed imposed by the assumption of elastic buckling and a thin-walled shell.

Figs. 1 and 2 summarize the results. A numerical example illustrates the convergence of the series and the approximation errors. These errors are, as a rule, less than one per cent.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji 20 grudnia 1964 r.