

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

WPLYW PEŁZANIA BETONU  
NA SPREŻONE USTROJE PRĘTOWE

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XLV

## SPIS TREŚCI

	Str.
<b>1. Wstęp</b>	229
1.1. Pełzanie betonu i procesy zachodzące w młodym betonie	229
1.2. Przedmiot pracy	232
<b>2. Ustroje sprężone kablami swobodnymi</b>	234
2.1. Układy statycznie wyznaczalne	234
2.2. Układy statycznie niewyznaczalne	241
2.3. Rozwiązania przybliżone	244
2.4. Inne zagadnienia	247
<b>3. Ustroje sprężone kablami obetonowanymi</b>	249
3.1. Układy statycznie wyznaczalne	250
3.2. Układy statycznie niewyznaczalne	258
3.3. Inne zagadnienia	277
<b>4. Inne zagadnienia</b>	280
4.1. Ustroje mieszane	280
4.2. Wpływ uzbrojenia betonu	281
4.3. Ogólne uwagi o wpływie tarcia w ustrojach sprężonych kablami swobodnymi	283
4.4. Obciążenia późniejsze	285



### Ważniejsze oznaczenia

$E_b$	moduł sprężystości betonu,
$E_z$	moduł sprężystości stali,
$F_b$	powierzchnia przekroju poprzecznego betonu,
$F_z$	powierzchnia przekroju poprzecznego stali,
$J_b$	moment bezwładności części betonowej przekroju poprzecznego względem osi poziomej przechodzącej przez jej środek ciężkości,
$M_i$	moment zginający w układzie podstawowym od obciążenia nadliczbową $X_i = 1$ ,
$M_0$	moment zginający w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego,
$N_i$	siła normalna w układzie podstawowym od obciążenia nadliczbową $X_i = 1$ ,
$N_0$	siła normalna w układzie podstawowym od obciążenia zewnętrznego,
$S_k$	siła sprężająca w kablu oznaczonym liczbą $k$ ,
$y$	odległość kabla od środka ciężkości części betonowej przekroju,
$\delta_{i0}, \delta_{ik}$	współczynniki w równaniach warunkowych metody sił,
$\varphi$	moduł pełzania betonu.

## 1. W S T Ę P

### 1.1. Pełzanie betonu i procesy zachodzące w młodym betonie

Pełzaniem betonu nazywamy narastanie z biegiem czasu odkształceń plastycznych zależnych od obciążeń. Rysunek 1 przedstawia typowy wykres zależności odkształcenia jednostkowego  $\varepsilon$  betonu od czasu. W chwili  $t = 0$ , w której obciążono beton, powstają odkształcenia sprężyste  $\varepsilon_0$ ; rosnące odkształcenia plastyczne  $\varepsilon_p$  dążą do pewnej wartości maksymalnej, której osiągnięcie oznacza zakończenie procesu pełzania.



Liczne badania doświadczalne, [1] i [2], pozwoliły na określenie czynników wpływających na omawiane zjawisko. Wyliczymy naprzód te, które z samej swej istoty lub nieuchwytności nie posiadają znaczenia dla teorii pełzania.

(1) Zawartość cementu w betonie: im chudszy jest beton, tym większe pełzanie.

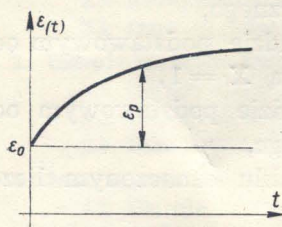
(2) Wilgotność względna otaczającego powietrza: im większa jest wilgotność, tym mniejsze pełzanie. Z tych samych przyczyn odkształcenia plastyczne betonu zanurzonego w wodzie są znacznie mniejsze niż w betonie znajdującym się na powietrzu.

(3) Właściwości cementu użytego do związania betonu.

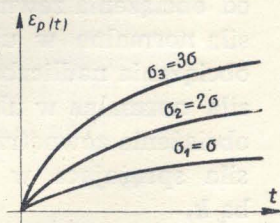
(4) Rodzaj kruszywa.

Najważniejsze stwierdzone doświadczalnie własności pełzania betonu, dające matematyczne podstawy teorii, są następujące.

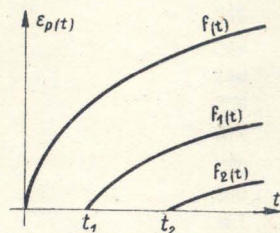
(1) Zależność pełzania od naprężeń. Wielkość odkształceń plastycznych jest proporcjonalna do działających naprężeń (rys. 2). Zależność ta pozwala stosować zasadę superpozycji obciążeń i sprawia, że zjawiska powodowane pełzaniem betonu mają (traktowane jako funkcja obciążeń) charakter liniowy <sup>1)</sup>.



Rys. 1



Rys. 2'



Rys. 3

(2) Zależność pełzania od chwili obciążenia. Na rysunku 3 przedstawiono odkształcenia plastyczne jako funkcję czasu przy stałych naprężeniach. Krzywa  $f(t)$  odpowiada obciążeniu w chwili  $t = 0$ , krzywa  $f_1(t)$  obciążeniu w chwili  $t = t_1$ . Jak widać, im później obciążony jest beton, tym mniejsze wykazuje odkształcenia plastyczne. Stwierdzono, [3], że kolejne krzywe  $f_1(t), f_2(t), \dots$  można uzyskać przesuwając pionowo krzywą  $f(t)$ , czyli że:

$$(1.1.1) \quad f_1(t) = f(t) - f(t_1), \quad f_2(t) = f(t) - f(t_2) \quad \text{itd.}$$

Wprowadzamy pojęcie modułu pełzania  $\varphi(t)$ .

<sup>1)</sup> Przy naprężeniach bardzo dużych, przekraczających naprężenia dopuszczalne, możliwe są odchylenia od takiej zależności.



Modułem pełzania nazywać będziemy stosunek odkształcenia plastycznego do sprężystego, określony przy stałych (działających od chwili  $t = 0$ ) naprężeniach:

$$(1.1.2) \quad \varphi(t) = \frac{f(t)}{\varepsilon_0}.$$

Zatem przy obciążeniu w chwili  $t = 0$  pełne odkształcenie jednostkowe wynosi

$$(1.1.3) \quad \varepsilon_{t_0} = \varepsilon_0 [1 + \varphi(t)].$$

W przypadku gdy obciążenie działa od chwili  $t = t_1$ , otrzymamy uwzględniając zależności (1.1.1) następujący wzór na odkształcenia jednostkowe (przy założeniu, że moduł sprężystości betonu jest wielkością stałą):

$$(1.1.3.1) \quad \varepsilon_{t_1} = \varepsilon_0 [1 + \varphi(t) - \varphi(t_1)].$$

Różniczkowanie wyrażeń (1.1.3) i (1.1.3.1) daje

$$(1.1.4) \quad \frac{d\varepsilon_{t_0}}{dt} = \frac{d\varepsilon_{t_1}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

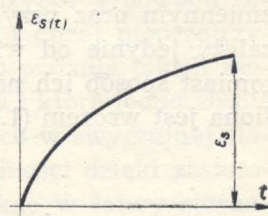
Zależność (1.1.4) wyraża inaczej omówioną wyżej własność drugą i wraz z założeniem liniowości stanowi podstawę podanej przez Disingera, [4] i [5], teorii pełzania betonu.

Wzory (1.1.3), (1.1.3.1) oraz (1.1.4) można bezpośrednio zastosować do badania wszelkich procesów dających się opisać liniowymi funkcjami obciążeń, a w szczególności do badania odkształceń układów statycznych.

Proces pełzania trwa do czterech lat, a nawet dłużej. Wielkość modułu pełzania może dochodzić do sześciu. Należy jednak pamiętać, że przeważająca część odkształceń plastycznych powstaje w stosunkowo niedługim czasie po stężeniu betonu, natomiast naprężenia i, co za tym idzie, pełzanie pojawiają się w konstrukcjach prętowych dopiero po ich rozszalowaniu. Z tego względu w praktyce nigdy nie przyjmuje się do obliczeń wartości większych niż  $\varphi = 4$ , najczęściej zaś  $\varphi = 2-3$ .

W młodym betonie zachodzą poza tym dwa procesy niezależne od obciążeń. Pierwszym z nich jest skurcz; wykres jednostkowych odkształceń skurczowych w zależności od czasu przedstawia rys. 4. Czas skurczu trwa do kilku lat. Dla celów praktycznych można przyjąć, że krzywa  $\varepsilon_s(t)$  jest podobna do krzywej  $f(t)$  na rys. 3, czyli że

$$(1.1.5) \quad \varepsilon_s(t) = \varepsilon_s \frac{\varphi(t)}{\varphi_k}.$$

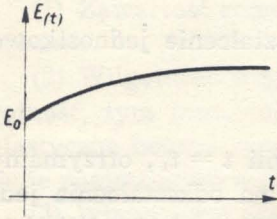


Rys. 4



W powyższym wzorze  $\varphi_k$  oznacza maksymalną przewidywaną wielkość modułu pełzania, zaś  $\varepsilon_s$  maksymalne odkształcenia skurczowe.

Drugim z omawianych procesów jest tzw. twardnienie betonu, czyli narastanie jego modułu sprężystości (rys. 5). W chwili  $t = 0$  moduł wynosi  $E_0$ , następnie rośnie i jest funkcją czasu  $E(t)$ . Wpływem zmienności modułu sprężystości nie będziemy się zajmowali, ponieważ jest nieistotny i zmiany, jakie powoduje, zawierają się na ogół w granicach dokładności założeń.



Rys. 5

Dotychczas mówiliśmy o naprężeniach stałych. W przypadku naprężeń zmiennych  $\sigma(t)$  (oraz, w ogólniejszym założeniu, zmiennego modułu sprężystości) otrzymamy wzór na zmienne odkształcenia jednostkowe  $\varepsilon(t)$  sumując wpływy elementarnych przyrostów  $d\sigma(t_1)$ . Każdy z tych przyrostów jest od chwili  $t_1$  naprężeniem stałym, zatem

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(t_1)}{dt_1} \frac{dt_1}{E(t_1)} + \frac{1}{E_0} \int_0^t \frac{d\sigma(t_1)}{dt_1} [\varphi(t) - \varphi(t_1)] dt_1.$$

Różniczkując względem  $t$  otrzymamy

$$(1.1.6) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma(t)}{E_0} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Drugi wyraz w tym wzorze jest identyczny z (1.1.4), zaś pierwszy przedstawia odkształcenia sprężyste.

Na podstawie wzorów (1.1.4) i (1.1.6) stwierdzamy, co następuje: prędkość narastania odkształceń plastycznych przy obciążeniu stałym lub zmiennym oraz przy stałym lub zmiennym module sprężystości betonu zależy jedynie od wielkości działających w danej chwili naprężeń, natomiast sposób ich narastania nie ma na nią wpływu; prędkość ta określona jest wzorem (1.1.4).

## 1.2. Przedmiot pracy

W ustrojach jednorodnych (betonowych) statycznie wyznaczalnych i liniowych pełzanie zmienia jedynie odkształcenia, natomiast nie ma wpływu na stan naprężeń. To samo odnosi się do ustrojów statycznie niewyznaczalnych znajdujących się pod działaniem obciążeń zewnętrznych <sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Dowód dla układów prętowych można przeprowadzić samodzielnie po zapoznaniu się z treścią rozdziału drugiego. Dowód dla trójosiowego stanu naprężeń przy pewnych założeniach ograniczających podaje Arutiunian, [6].



Natomiast pełzanie zmienia bardzo wydatnie naprężenia wywołane takimi przyczynami, jak zmiana temperatury, skurcz betonu, osiadanie podpór.

W ustrojach niejednorodnych, jakimi są konstrukcje żelbetowe sprężone lub zespolone, pełzanie betonu zmieniając odkształcenia wpływa na stan naprężeń niezależnie od przyczyn, które go wywołały.

W pracy niniejszej omawiamy szczegółowo wpływ pełzania betonu na ustroje sprężone. Wszystkie rozważania zostały oparte na założeniach podanych w p. 1.1 oraz na podstawowych założeniach klasycznej wytrzymałości materiałów lub teorii żelbetu, takich jak zasada płaskich przekrojów, liniowy rozkład naprężeń, zasada *S a i n t - V e n a n t a* itd. Przyjęcie liniowego rozkładu naprężeń jest uzasadnione, ponieważ zajmować się będziemy jedynie rzeczywistym stanem konstrukcji pomijając zagadnienia nośności granicznej.

Główną część pracy stanowią rozdziały drugi i trzeci. W rozdziale drugim przedstawiona jest teoria układów sprężonych kablami swobodnymi, zaś w rozdziale trzecim teoria układów z kablami obetonowanymi, która obejmuje również ustroje żelbetowe pracujące w pierwszej fazie. Dla każdego z wymienionych typów konstrukcji podano rozwiązanie dla obciążeń stałych<sup>3)</sup>, dla skurczu betonu oraz dla osiadania podpór. W rozdziale czwartym podane są uwagi odnoszące się do rozwiązywania układów mieszanych, będących kombinacjami obu omówionych poprzednio rodzajów konstrukcyjnych. Poza tym rozpatrzone są tu dalsze zagadnienia ogólne, między innymi wpływ zbrojenia żelazem miękkim oraz wpływ tarcia w układach sprężonych kablami swobodnymi. Wszystkie metody objaśniono przykładami liczbowymi, które ułatwiają orientację w technice przeprowadzenia obliczeń. Przykłady obliczone są w układzie jednostek: tona, metr.

Rozwiązania ściśle omawianych zagadnień są, z wyjątkiem najprostszycch przypadków, nieprzydatne do praktycznego użytku z powodu towarzyszących im z reguły trudności rachunkowych i dużej nieprzejrzystości. Z tego względu szczególną troską autora było podanie takich metod, których stosowanie byłoby możliwe dla inżyniera i które jednocześnie nie odbiegałyby od schematów rozwiązań stosowanych w zwyczajnej statyce budowlanej. Postulat ten został osiągnięty w zupełności dzięki zastosowaniu szeregów potęgowych, przez co można uzyskać w łatwy stosunkowo sposób dowolnie dokładne przybliżenie rozwiązania ścisłego, oraz dzięki pełnej arytmetyzacji obliczeń. Należy pamiętać, że wszelkie uwagi dotyczące dokładności podanych metod i zbieżności szeregów stosują się jedynie do przedziału  $0 < \varphi < 4$ , większe bowiem wartości modułu pełzania praktycznie nie wchodzi w rachubę, jak o tym już powyżej wspomniano.

<sup>3)</sup> Ściśle biorąc, obciążenia ruchome również mogą mieć pewien wpływ, jednak z powodu krótkotrwałości tych obciążeń można go pominąć.



Pozostaje jeszcze do omówienia celowość i potrzeba prowadzenia obliczeń z uwzględnieniem pełzania betonu. Otóż wpływy tego czynnika są na tyle duże, że przy obecnych wygórowanych naprężeniach dopuszczalnych muszą być brane pod uwagę, tym bardziej iż w konstrukcjach sprężonych konieczna jest pewność, że nie powstaną rysy. Zagadnienie zatem polega nie na tym, czy pełzanie betonu uwzględniać, lecz z jaką dokładnością należy to robić. Jasne jest, że obliczenie uwzględniające pełzanie jest w porównaniu z zasadniczym obliczeniem statycznym elementem drugorzędym. Poza tym należy sobie zdawać sprawę z faktu, że dokładne określenie modułu pełzania nie jest praktycznie możliwe, choćby z powodu wpływu jaki nań mają zmiany klimatyczne. Dlatego dokładność wynosząca np. dziesięć procent może być uznana za zupełnie wystarczającą. Jeżeli nawet inżynier nie ma zaufania do założonej wielkości modułu  $\varphi$ , to znajomość kierunku, charakteru i rzędu wielkości zmian związanych z pełzaniem betonu w układzie sił wewnętrznych konstrukcji ułatwi mu prawidłowe jej zaprojektowanie.

## 2. USTROJE SPRĘŻONE KABLAMI SWOBODNYMI

W rozdziale tym rozpatruje się układy sprężone kablami przebiegającymi w kanałach wykonanych w belce lub przepuszczonymi na zewnątrz belki. Rozwiązanie uzyskamy przy założeniu braku tarcia między kablami i łożyskiem oraz przyjmując, że sprężeniu podlega jednorodny ustrój betonowy niezbrojony. Sposoby ewentualnego uwzględnienia tarcia oraz zbrojenia podane są w rozdziale czwartym. Pojęcie statycznej niewyznaczalności odnosi się do układów sprężanych, tzn. rozpatrywanych z pominięciem kabli.

### 2.1. Układy statycznie wyznaczalne

Rozważymy naprzód prosty przypadek belki sprężonej jednym kablem (rys. 6a). Założymy, że napięcie kabla następuje w chwili  $t = 0$ , której odpowiada  $\varphi = 0$ . Wskutek sprężenia belka podnosi się na rusztowaniu, co powoduje jednoczesne wejście do akcji jej ciężaru własnego. Naprężenia w betonie powodują w chwili  $t = 0$  odkształcenia sprężyste, do których z biegiem czasu dochodzą odkształcenia plastyczne zgodnie ze schematem podanym w rozdziale 1. Odkształcenia plastyczne belki powodują z kolei odkształcenia kabla i w rezultacie zmianę naciągu.

Początkowy naciąg kabla w chwili  $t = 0$  nazwiemy  $S_1$ <sup>4)</sup>, przyrost siły w kablu będący funkcją czasu oznaczymy przez  $X_1$ , znaki dodatnie obu

<sup>4)</sup> Przy sprężeniu jednym kablem indeks przy literze  $S$  nie jest potrzebny, został jednak podany ze względu na związek z oznaczeniami przesunięć  $\delta$  oraz dla analogii z oznaczeniami stosowanymi w przypadku kilku kabli.



wielkości odpowiadać będą rozciąganiu. W celu ułożenia odpowiedniego równania rozważać będziemy również układ podstawowy statycznie wyznaczalny, za który przyjmujemy układ powstały z poprzedniego po rozcięciu kabla (rys. 6b). Ustrój ten znajduje się w dowolnej chwili  $t$  pod działaniem następujących obciążeń:

- (1) obciążeń stałych, mianowicie ciężaru stałego i siły  $S_1$ ,
- (2) obciążenia zmiennego  $X_1$ .

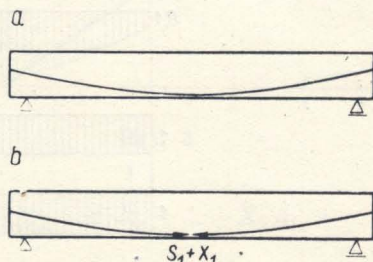
Funkcję  $X_1$  należy tak dobrać, aby w każdej chwili  $t$  rozsunięcie względne  $\delta_1$  końców rozciętego kabla było równe zero. Warunek powyższy można określić albo w odniesieniu do małego przyrostu czasu  $dt$ , albo też odpowiadającego mu przyrostu  $d\varphi$  funkcji  $\varphi$ . W obrębie tego przyrostu siła  $X_1$  zmienia się o małą wielkość  $dX_1$ , która powoduje sprężyste odkształcenia kabla i belki, a w rezultacie przyrost rozsunięcia równy  $dX_1 \delta_{11}$ . Pozostałe obciążenia dają jedynie przyrost odkształceń plastycznych części betonowej. Naciąg początkowy  $S_1$  daje w chwili  $t = 0$  rozsunięcie  $S_1 \delta_{11}$ , przy czym wielkość  $\delta_{11}$  można przedstawić jako sumę dwu składników przedstawiających wpływ odkształceń betonu i stali:  $\delta_{11} = \delta_{11}^b + \delta_{11}^z$ . Zatem przyrost rozsunięcia powodowany siłą  $S_1$  wynosi zgodnie ze wzorem (1.1.4)  $S_1 \delta_{11}^b d\varphi$ . Podobnie przyrost rozsunięcia spowodowany siłą  $X_1$  wynosi  $X_1 \delta_{11}^b d\varphi$ , a przyrost rozsunięcia pod wpływem ciężaru stałego jest równy  $\delta_{10} d\varphi$ .

Sumując wymienione wielkości otrzymamy równanie różniczkowe

$$(2.1.1) \quad \frac{dX_1}{d\varphi} \delta_{11} + X_1 \delta_{11}^b + S_1 \delta_{11}^b + \delta_{10} = 0$$

Rozwiązaniem równania jednorodnego jest funkcja  $X_1 = Ce^{a\varphi}$ , gdzie  $a = -\delta_{11}^b / \delta_{11}$ . Rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego jest:

$$X_1 = -\left(S_1 + \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}^b}\right).$$



Rys. 6

Ostatecznie przy uwzględnieniu warunku brzegowego  $[X_1]_{\varphi=0} = 0$  dostaniemy

$$(2.1.2) \quad X_1 = -\left(S_1 + \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}^b}\right)(1 - e^{a\varphi}).$$

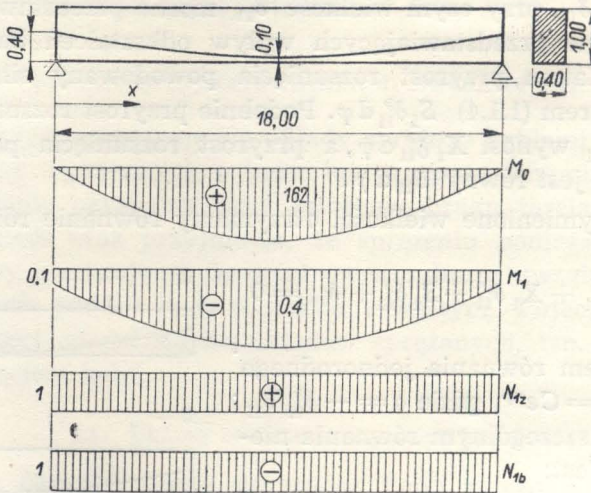
Ze wzoru powyższego widać, że spadek sprężenia powodowany pełzaniem jest tym mniejszy, im mniejsza jest powierzchnia przekroju poprzecznego stali sprężającej. Ponieważ wielkość  $\delta_{10}$  jest zawsze ujemna, przeto teoretycznie zachodzi możliwość zwiększania się siły sprężającej



wskutek pełzania betonu. Dla celów praktycznych fakt ten nie ma oczywiście znaczenia, co najwyżej można by uzyskać stałe sprężenie ( $X_1 \equiv 0$ ) w konstrukcji pracującej jedynie na obciążenie stałe.

W tym celu należy przy danej sile  $S_1$  tak dobrać trasę kabla lub przy założonej trasie tak dobrać siłę  $S_1$ , aby było  $S_1 = -\delta_{10}/\delta_{11}^b$ . Straty naciągu nie rosną nieograniczenie; gdy  $\varphi \rightarrow \infty$ ,  $X_1$  dąży asymptotycznie do wartości  $-(S_1 + \delta_{10}/\delta_{11}^b)$ .

*Przykład liczbowy 1.* Obliczymy wpływ pełzania betonu na belkę przedstawioną na rysunku 7. Dane liczbowe: moduły sprężystości  $E_b = 3 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ ,  $E_z = 1,9 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$ , powierzchnia przekroju poprzecznego kabla  $F_z = 39,82 \text{ cm}^2$ , początkowy naciąg  $S_1 = 360 \text{ t}$ , obciążenie stałe  $p = 4 \text{ t/m}$ . Przyjmujemy również, że trasa kabla jest paraboliczna. Wykresy momentów zginających i sił normalnych od poszczególnych obciążeń przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7

Współczynniki  $\delta$  oblicza się ze wzorów metody sił:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{E_b J_b} ds = -660,96 \cdot 10^{-5},$$

$$\delta_{11}^b = \int \frac{M_1^2}{E_b J_b} ds + \int \frac{N_{1b}^2}{E_b F_b} ds = 3,263 \cdot 10^{-5},$$

$$\delta_{11} = \delta_{11}^b + \int \frac{N_{1z}^2}{E_z F_z} ds = 27,077 \cdot 10^{-5}.$$











Otrzymamy kolejno: układ równań (2.1.4)

$$\begin{aligned} C_1(3,263 + 27,077 a) + C_2(0,911 + 0,911 a) &= 0, \\ C_1(0,911 + 0,911 a) + C_2(1,272 + 44,130 a) &= 0; \end{aligned}$$

równanie charakterystyczne

$$(3,263 + 27,077 a)(1,272 + 44,130 a) - (0,911 + 0,911 a)^2 = 0;$$

jego rozwiązanie

$$\alpha_1 = -0,12597, \quad \alpha_2 = -0,022076;$$

współczynniki  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &= -\frac{3,263 - 27,077 \cdot 0,12597}{0,911 - 0,911 \cdot 0,12597} = 0,18575, \\ \gamma_{22} &= -\frac{3,263 - 27,077 \cdot 0,022076}{0,911 - 0,911 \cdot 0,022076} = -2,9910; \end{aligned}$$

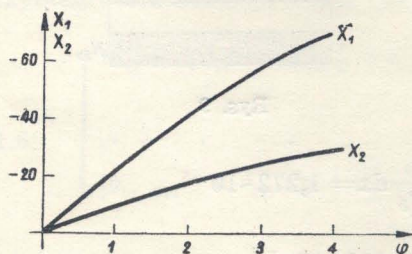
wyrazy wolne układu równań (2.1.3)

$$\begin{aligned} S_1 \delta_{11}^b + S_2 \delta_{12} + \delta_{10} &= 604,84 \cdot 10^{-5}, \\ S_1 \delta_{21} + S_2 \delta_{22}^b + \delta_{20} &= 384,64 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

układ równań do wyznaczenia wielkości  $A_k$

$$\begin{aligned} 3,263 A_1 + 0,911 A_2 + 604,84 &= 0, \\ 0,911 A_1 + 1,272 A_2 + 384,64 &= 0; \end{aligned}$$

rozwiązanie tego układu daje



Rys. 10

$$A_1 = -126,17, \quad A_2 = -212,03;$$

układ równań do wyznaczenia stałych

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - 126,17 &= 0, \\ 0,18575 C_1 - 2,991 C_2 - 212,03 &= 0; \end{aligned}$$

stąd stałe

$$C_1 = 185,52, \quad C_2 = -59,36.$$

Zatem rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} X_1 &= 185,52 e^{-0,126 \varphi} - 59,36 e^{-0,0221 \varphi} - 126,17, \\ X_2 &= 34,46 e^{-0,126 \varphi} + 177,54 e^{-0,0221 \varphi} - 212,03. \end{aligned}$$





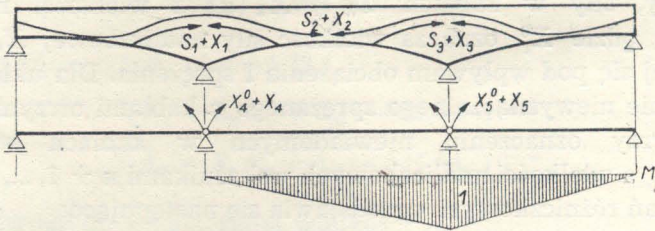


Rozwiązanie powyższego układu przeprowadza się za pomocą wzorów (2.1.4) - (2.1.8).

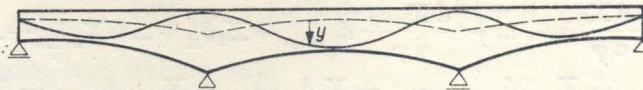
Zajmiemy się obecnie bliżej najważniejszym praktycznie przypadkiem, tzn. belkami ciągłymi<sup>6)</sup>. Układ podstawowy najwygodniejszy tak dla obliczeń statycznych, jak i w ogólnym przypadku dla naszych celów, przedstawiony jest na rys. 11; niewiadomymi wielkościami nadliczbowymi  $X_i$  są tu momenty zginające nad podporami. W ogólnym przypadku należy korzystać z układu równań (2.2.1). W praktyce jednak kable często prowadzi się w pewien specjalny sposób, mianowicie tak, że sprężenie nie wywołuje reakcji podporowych; wówczas moment zginający sprężenia  $k$ -tym kablem oblicza się jak w belce wolnopodpartej, co oznacza (rys. 12), że

$$(2.2.2) \quad M_{(k)} = -S_k y_k.$$

Takie prowadzenie kabla zwane współbieżnym daje duże ułatwienia w obliczeniach, a przy tym zazwyczaj nie koliduje z wymogami konstrukcyjnymi i statycznymi.



Rys. 11



Rys. 12

W celu uzyskania opisanego efektu dla  $k$ -go kabla należy jego trasę tak zaprojektować, aby dla każdego  $i$  spełniony był warunek

$$(2.2.3) \quad \int \frac{M_i M_{(k)}}{E_b J_b} ds = 0.$$

We wzorze powyższym  $M_i$  przedstawia, zgodnie z naszymi oznaczeniami, wykres momentów zginających od obciążenia  $i$ -tą wielkością nadliczbową<sup>7)</sup>, zaś  $M_{(k)}$  należy brać według wzoru (2.2.2).

<sup>6)</sup> Rozważać będziemy belki ciągłe, w których wszystkie przęsła oraz kierunki przesuwania podpór przesuwnych są poziome.

<sup>7)</sup> Przy projektowaniu wygodniejsze jest używanie warunku mniej ogólnego, wystarczającego lecz niekoniecznego; polega on na tym, że wzór (2.2.3) spełnia się na odcinku każdego przęsła z osobna niezależnie.











W tabelicy 3 zestawiono wartości  $X_1^{(1)}(\varphi)$ ,  $X_2^{(1)}(\varphi)$  i procenty błędu obliczone w odniesieniu do rozwiązania ścisłego oraz w odniesieniu do wartości naciągów początkowych  $S_1$  i  $S_2$ .

Tablica 3

$\varphi$	1	2	3	4
$X_1^{(1)}$	- 22,06	- 44,12	- 66,18	- 88,24
$\frac{X_1^{(1)} - X_1}{X_1} 100$	- 6,7	- 13,8	- 21,2	- 28,9
$\frac{X_1^{(1)} - X_1}{S_1} 100$	- 0,4	- 1,5	- 3,2	- 5,5
$X_2^{(1)}$	- 8,26	- 16,52	- 24,78	- 33,04
$\frac{X_2^{(1)} - X_2}{X_2} 100$	- 3,8	- 7,5	- 11,3	- 15,1
$\frac{X_2^{(1)} - X_2}{S_2} 100$	- 0,3	- 1,2	- 2,5	- 4,3

Układ równań dla wyznaczenia współczynników  $x_{k,2}$  jest następujący:

$$27,077 x_{1,2} + 0,911 x_{2,2} - 39,755 = 0,$$

$$0,911 x_{1,2} + 44,130 x_{2,2} - 15,300 = 0;$$

stad

$$x_{1,2} = 1,4576, \quad x_{2,2} = 0,3167.$$

Zatem drugie przybliżenie jest następujące:

$$X_1^{(2)} = - 22,060 \varphi + 1,4576 \varphi^2, \quad X_2^{(2)} = - 8,261 \varphi + 0,3167 \varphi^2.$$

Tablica 4

$\varphi$	1	2	3	4
$X_1^{(2)}$	- 20,60	- 38,29	- 53,06	- 64,91
$\frac{X_1^{(2)} - X_1}{X_1} 100$	+ 0,3	+ 1,2	+ 2,7	+ 5,1
$\frac{X_1^{(2)} - X_1}{S_1} 100$		+ 0,1	+ 0,4	+ 1,0
$X_2^{(2)}$	- 7,94	- 15,26	- 21,93	- 27,97
$\frac{X_2^{(2)} - X_2}{X_2} 100$	+ 0,2	+ 0,6	+ 1,5	+ 2,5
$\frac{X_2^{(2)} - X_2}{S_2} 100$		+ 0,1	+ 0,3	+ 0,7



Układ równań do wyznaczenia współczynników  $x_{k,3}$

$$27,077 x_{1,3} + 0,911 x_{2,3} + 1,6815 = 0,$$

$$0,911 x_{1,3} + 44,130 x_{2,3} + 0,5769 = 0;$$

stąd

$$x_{1,3} = -0,0617, \quad x_{2,3} = -0,0118.$$

Trzecie przybliżenie

$$X_1^{(3)} = -22,060 \varphi + 1,4576 \varphi^2 - 0,0617 \varphi^3,$$

$$X_2^{(3)} = -8,261 \varphi + 0,3167 \varphi^2 - 0,0118 \varphi^3.$$

Tablica 5

$\varphi$	1	2	3	4
$X_1^{(3)}$	-20,66	-33,78	-54,72	-68,86
$\frac{X_1^{(3)} - X_1}{X_1} 100$			-0,3	-0,6
$\frac{X_1^{(3)} - X_1}{S_1} 100$				-0,1
$X_2^{(3)}$	-7,95	-15,35	-22,25	-28,73
$\frac{X_2^{(3)} - X_2}{X_2} 100$				-0,1
$\frac{X_2^{(3)} - X_2}{S_2} 100$				

Jak widać z powyższego przykładu, zbieżność szeregów jest dobra.

W praktyce  $\varphi$  rzadko przekracza 3 i spadki naprężeń nie wynoszą zazwyczaj więcej niż 20% odpowiednich sił sprężających, zatem dwa przybliżenia dają dokładność w każdym wypadku wystarczającą. Jeżeli spadki naprężeń są mniejsze niż 10 - 12%, można zadowolić się nawet pierwszym przybliżeniem. Należy zwrócić uwagę, że pierwsze przybliżenie daje wartości nieco większe niż rzeczywiste, zaś drugie — mniejsze.

## 2.4. Inne zagadnienia

2.4.1. Naprężenia skurczowe. Rozważania poprzednie pozwalają na łatwe uwzględnienie wpływu pełzania betonu na naprężenia powodowane skurczem. Zgodnie ze wzorem (1.1.5) przyrost odkształceń skurczowych w czasie odpowiadającym przyrostowi  $d\varphi$  wynosi

$$d\delta_s(\varphi) = \frac{\delta_s}{\varphi_k} d\varphi.$$





Przy zastosowaniu szeregów potęgowych pierwsze przybliżenie daje dla  $\varphi = 4$  wartość  $X_1 = -9,97$  t.

Skurcz betonu powoduje na ogół znacznie mniejsze spadki sił sprężających w kablach niż pełzanie. Z tego powodu uwzględnianie wpływu pełzania na naprężenia skurczowe nie jest w praktyce konieczne i często można poprzestać na obliczeniu na podstawie zwykłej teorii ustrojów statycznie niewyznaczalnych, co odpowiada przyjęciu pierwszego przybliżenia rozwiązania za pomocą szeregów<sup>8)</sup>.

**2.4.2. Osiadanie podpór.** Osiadanie podpór wpływa na stan naprężeń oczywiście tylko w ustrojach statycznie niewyznaczalnych. W chwili przesunięcia podpory powstają siły w kablach  $S_k$  oraz nadliczbowe reakcje  $X_i^0$ . Wielkości te należy obliczyć metodami teorii ustrojów statycznie niewyznaczalnych i wstawić do równań (2.2.1) przyjmując  $\delta_{i0} = \delta_{k0} = 0$ . W rozpatrywanych poprzednio belkach ciągłych sprężonych współbieżnie pionowe przesunięcia podpór nie dają zmiany sił w kablach powodując jedynie zmianę wielkości nadliczbowych [zatem wystarczy rozwiązać układ równań różniczkowych (2.2.4.2) przyjmując  $X_k \equiv 0$  ( $1 \leq k \leq n$ )]. Pełzanie z reguły działa tutaj korzystnie, zmniejszając naprężenia początkowe tak w betonie, jak i w kablu. Dlatego uwzględnianie pełzania w tym przypadku nie ma praktycznego znaczenia i może być przydatne jedynie przy ocenie rzeczywistego bezpieczeństwa konstrukcji w przypadku awarii fundamentów i to tylko wtedy, gdy wydarzyły się w niedługim stosunkowo czasie po zabetonowaniu podlegających im części konstrukcji.

### 3. USTROJE SPRĘŻONE KABLAMI OBETONOWANYMI

Teoria podana w tym rozdziale odnosi się zarówno do ustrojów sprężonych kablami, które obetonowano po naciągnięciu, jak również do tzw. strunobetonu. Poza tym może być użyta do obliczania wpływów pełzania betonu na ustroje żelbetowe pracujące w fazie pierwszej. Wspólną cechą wymienionych trzech rodzajów konstrukcji jest to, że odkształcenia kabli lub prętów zbrojeniowych i betonu są wspólne, co wymaga rozpatrywania każdego przekroju poprzecznego pręta oddzielnie.

Zmiany naprężeń w kablach na ogół nas nie interesują, ponieważ pełzanie z reguły naprężenia te zmniejsza, poza tym zaś są one zazwyczaj bardzo dalekie od niebezpiecznej granicy. Celem obliczenia będzie zatem przede wszystkim określenie wpływu pełzania na naprężenia w betonie, co jest ważne ze względu na możliwość powstawania rys.

<sup>8)</sup> W przypadku gdy zasadnicze obliczenie wpływu pełzania przeprowadzamy ściśle, dokładne uwzględnienie skurczu nie następuje trudności, ponieważ wyrazy wolne równań (2.4.1.2) można dodać do wyrazów wolnych w równaniach (2.1.3) lub (2.2.1). Dlatego praktyczna wartość powyższego wniosku nie jest duża.



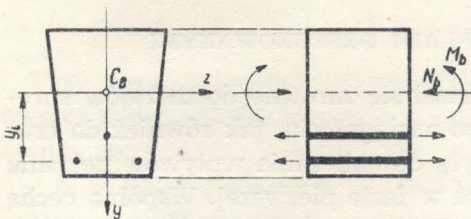
Wypadkową naprężeń działających na część betonową w chwili zapoczątkowania pełzania sprowadzimy do dwu wielkości: wyjściowego momentu zginającego  $M_b^0$  oraz wyjściowej siły normalnej  $N_b^0$ . Niewiadomymi naszego obliczenia będą zmiany wymienionych składowych sił wewnętrznych, powstałe wskutek pełzania. Oznaczmy je odpowiednio  $\Delta M_b$  oraz  $\Delta N_b$ . Wielkości te jak również  $M_b^0$  i  $N_b^0$  odnosić będziemy do środka ciężkości części betonowej, dlatego naprężenia powodowane przez  $\Delta M_b$  oraz  $\Delta N_b$  obliczać należy przy uwzględnieniu przekrojów poprzecznych i wskaźników wytrzymałości samego tylko przekroju betonowego.

Dla wszystkich trzech wymienionych poprzednio rodzajów konstrukcji sposób obliczeń będzie identyczny, jedynie wielkości wyjściowe uzyskuje się oczywiście w każdym z tych przypadków inaczej.

Rozdział podzielony jest na dwie główne części omawiające kolejno ustroje statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne. Niewyznaczalność należy określać dla ustroju z kablami obetonowanymi. W trzeciej części omówione zostały problemy związane z obu typami konstrukcji, mianowicie wpływy skurczu betonu, osiadania podpór oraz sposób obliczania zmian sił sprężających w kablach i naprężeń ścinających w betonie.

### 3.1. Układy statycznie wyznaczalne

Odształcenia ustrojów statycznie wyznaczalnych nie są skrupowane, wobec tego proces pełzania i związane z nim przerzucanie naprężeń odbywa się w każdym przekroju poprzecznym pręta niezależnie.



Rys. 13

Rozpatrzmy naprzód przypadek ogólny sprężenia dowolną ilością kabli. Rysunek 13 przedstawia widok i przekrój poprzeczny elementu o długości  $dx$  wyciętego z pręta. Punkt  $C_B$  jest środkiem ciężkości części betonowej, położenie każdego kabla określone jest jego odległością  $y_i$  od osi  $z$ . Wy-

wypadkową naprężeń działających na część betonową elementu sprowadzimy do dwu wielkości składowych: siły normalnej  $N_b$  zaczepionej w punkcie  $C_B$  oraz momentu zginającego  $M_b$ . Przyjmujemy, że dodatnia siła  $N_b$  ścisną pręt, a dodatni moment  $M_b$  rozciąga włókna znajdujące się po dodatniej stronie osi  $y$ . Stan odkształceń elementu w czasie pełzania da się opisać jednoznacznie odkształceniem jednostkowym  $\varepsilon$  mierzonym w punkcie  $C_B$  i krzywizną  $\rho$ . Krzywizną będziemy uważali za dodatnią, jeżeli powoduje rozciąganie włókien znajdujących się po dodatniej stronie osi  $y$ , zaś odkształcenia jednostkowe uważać będziemy za dodatnie, gdy powodują skrócenie osi pręta. Związki pomiędzy wymie-



nionymi składowymi stanu naprężeń i odkształceń uwzględniając pełzanie betonu przedstawiają się, jak następuje:

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} d\varepsilon = \frac{1}{E_b F_b} (N_b d\varphi + dN_b), \\ d\rho = \frac{1}{E_b J_b} (M_b d\varphi + dM_b). \end{cases}$$

Funkcje  $N_b$  i  $M_b$  rozbijemy na dwa składniki, z których pierwszy przedstawia odpowiednie wielkości wyjściowe (dla  $\varphi = 0$ ), drugi zaś, będący funkcją zmiennej  $\varphi$ , jest przyrostem powodowanym pełzaniem betonu:

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} N_b(\varphi) = N_b^0 + \Delta N_b(\varphi), \\ M_b(\varphi) = M_b^0 + \Delta M_b(\varphi). \end{cases}$$

W układzie statycznie wyznaczalnym siły normalne i momenty zginające nie mogą się zmieniać, zatem  $\Delta N_b$  i  $\Delta M_b$  są uwarunkowane odkształceniami sprężystymi kabli:

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} \Delta N_b = (-\varepsilon \Sigma F_i + \rho \Sigma F_i y_i) E_z, \\ \Delta M_b = (\varepsilon \Sigma F_i y_i - \rho \Sigma F_i y_i^2) E_z. \end{cases}$$

W równaniach powyższych  $F_i$  oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego  $i$ -go kabla<sup>9)</sup>, zaś sumowanie rozciąga się na wszystkie kable.

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

$$\Sigma F_i = F_z, \quad \Sigma F_i y_i = S_z, \quad \Sigma F_i y_i^2 = J_z.$$

Z równań (3.1.3) wyznaczmy  $\varepsilon$  oraz  $\rho$  (w założeniu, że  $F_z J_z - S_z^2 \neq 0$ ):

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} \varepsilon = -\frac{(\Delta N_b J_z + \Delta M_b S_z)}{E_z (F_z J_z - S_z^2)}, \\ \rho = -\frac{(\Delta N_b S_z + \Delta M_b J_z)}{E_z (F_z J_z - S_z^2)}. \end{cases}$$

Wstawiając wyrażenia (3.1.4) i (3.1.2) do równań (3.1.1) otrzymamy układ dwu równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} \frac{d \Delta N_b}{d\varphi} (J_z + k_1) + \frac{d \Delta M_b}{d\varphi} S_z + \Delta N_b k_1 + N_b^0 k_1 = 0, \\ \frac{d \Delta N_b}{d\varphi} S_z + \frac{d \Delta M_b}{d\varphi} (F_z + k_2) + \Delta M_b k_2 + M_b^0 k_2 = 0, \end{cases}$$

<sup>9)</sup> Równania (3.1.3) napisano w założeniu, że naprężenia w kablach są rozłożone równomiernie.

gdzie

$$k_1 = n \frac{F_z J_z - S_z^2}{F_b}, \quad k_2 = n \frac{F_z J_z - S_z^2}{J_b}, \quad n = \frac{E_z}{E_b}.$$

Rozwiązanie tego układu przedstawia się jak następuje:

$$\begin{aligned} \Delta N_b &= -N_b^0 + C_1 e^{\alpha_1 \varphi} + C_2 e^{\alpha_2 \varphi}, \\ \Delta M_b &= -M_b^0 + \gamma_1 C_1 e^{\alpha_1 \varphi} + \gamma_2 C_2 e^{\alpha_2 \varphi}. \end{aligned}$$

Pierwiastki  $\alpha$  należy wyznaczyć z równania charakterystycznego

$$[(J_z + k_1)\alpha + k_1][(F_z + k_2)\alpha + k_2] - \alpha^2 S_z^2 = 0.$$

Współczynniki  $\gamma$  określone są wzorem

$$\gamma_{1,2} = -\frac{(J_z + k_1)\alpha_{1,2} + k_1}{S_z \alpha_{1,2}}$$

lub

$$\gamma_{1,2} = -\frac{S_z \alpha_{1,2}}{(F_z + k_2)\alpha_{1,2} + k_2}.$$

Wzory na stałe  $C$  są następujące:

$$C_1 = \frac{\gamma_2 N_b^0 - M_b^0}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad C_2 = \frac{M_b^0 - \gamma_1 N_b^0}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Jak widać, ściśle obliczenie wymaga dosyć dużego nakładu pracy rachunkowej. Z tego względu, jak również dla dalszych celów, podamy rozwiązanie przybliżone stosując rozwinięcie w szereg potęgowe:

$$\begin{aligned} \Delta N_b &= n_1 \varphi + n_2 \varphi^2 + \dots + n_r \varphi^r + \dots, \\ \Delta M_b &= m_1 \varphi + m_2 \varphi^2 + \dots + m_r \varphi^r + \dots \end{aligned}$$

Współczynniki oblicza się z następujących wzorów:

$$(3.1.6) \quad \begin{cases} n_r = -\frac{1}{r} \frac{k_1(F_z + k_2)}{K} n_{r-1} + \frac{1}{r} \frac{k_2 S_z}{K} m_{r-1}, \\ m_r = \frac{1}{r} \frac{k_1 S_z}{K} n_{r-1} - \frac{1}{r} \frac{k_2(J_z + k_1)}{K} m_{r-1}, \end{cases}$$

gdzie

$$K = (J_z + k_1)(F_z + k_2) - S_z^2.$$

Dla otrzymania wyrazów  $n_1$  oraz  $m_1$  należy podstawić  $n_0 = N_b^0$ ,  $m_0 = M_b^0$ . Zbieżność tych szeregów jest z reguły gorsza niż w szeregach stosowanych w rozdziale pierwszym. W silnie zbrojonych belkach teo-



wych byłoby czasem konieczne przy większych wartościach  $\varphi$  obliczanie czterech wyrazów. Dobre przybliżenie można uzyskać za pomocą wzorów, które wymagają obliczenia jedynie dwu pierwszych wyrazów, a których dokładność odpowiada na ogół obliczeniu przy użyciu trzech lub czterech wyrazów rozwinięcia szeregowego:

$$(3.1.7) \quad \begin{cases} \Delta N_b = -\frac{n_1}{a}(1 - e^{a_1 \varphi}), & a_1 = \frac{2n_2}{n_1}, \\ \Delta M_b = -\frac{m_1}{a}(1 - e^{a_2 \varphi}), & a_2 = \frac{2m_2}{m_1}. \end{cases}$$

Dla dalszych celów przedstawimy rozwinięcie w szereg funkcji  $\Delta M_b$  oraz  $\Delta N_b$  osobno dla obciążenia siłą  $N_b = 1$  i obciążenia momentem  $M_b = 1$ :

dla obciążenia  $N_b = 1$

$$(3.1.8.1) \quad n_{N,1} = -\frac{k_1(F_z + k_2)}{K}, \quad m_{N,1} = \frac{k_1 S_z}{K};$$

dla obciążenia  $M_b = 1$

$$(3.1.8.2) \quad n_{M,1} = \frac{k_2 S_z}{K}, \quad m_{M,1} = -\frac{k_2(J_z + k_1)}{K}.$$

Dla  $r > 1$  ważne są wzory (3.1.6).

Jeżeli w przekroju poprzecznym jest tylko jeden kabel, wówczas będzie  $F_z J_z - S_z^2 = 0$ , wobec tego nie można wyznaczyć z równań (3.1.3) wielkości  $\varepsilon$  oraz  $\varrho$ . W przypadku tym obowiązuje prosta zależność

$$(3.1.9) \quad \Delta M_b = -y \Delta N_b.$$

Po łatwych przekształceniach otrzymamy dla wyznaczenia funkcji  $\Delta N_b$  równanie różniczkowe

$$(3.1.10) \quad \frac{d \Delta N_b}{d \varphi} \left( 1 + n \frac{F_z}{F_b} + n \frac{J_z}{J_b} \right) + \Delta N_b \left( n \frac{F_z}{F_b} + n \frac{J_z}{J_b} \right) + N_b^0 n \frac{F_z}{F_b} - M_b^0 n \frac{S_z}{J_b} = 0,$$

gdzie  $n = E_z/E_b$ .

Rozwiązaniem jego jest

$$(3.1.11) \quad \Delta N_b = (N_b^0 \beta_N + M_b^0 \beta_M) (1 - e^{a \varphi}),$$

gdzie

$$(3.1.12) \quad a = -\frac{n F_z (J_b + F_b y^2)}{J_b F_b + n F_z (J_b + F_b y^2)}$$



oraz

$$(3.1.13) \quad \beta_N = -\frac{J_b}{J_b + F_b y^2}, \quad \beta_M = \frac{F_b y}{J_b + F_b y^2}.$$

Współczynnik  $\alpha$  jest wielkością charakteryzującą w dużej mierze zachowanie się przekroju w czasie pełzania. Współczynnik ten jest zawsze ujemny i co do bezwzględnej wartości tym większy, im silniejsze jest uzbrojenie oraz im dalej od osi pręta leży kabel. Poza tym w przekrojach teowych jest większy niż w prostokątnych. Wzrostowi współczynnika  $\alpha$  towarzyszą większe zmiany  $\Delta N_b$  i  $\Delta M_b$  w siłach wewnętrznych.

Uwagi powyższe dotyczą również wzorów (3.1.7).

Rozwinięcie funkcji (3.1.11) w szeregi analogicznie do rozwinięć (3.1.8) daje z uwzględnieniem zależności (3.1.9) wzory

$$(3.1.14) \quad \begin{cases} n_{N,r} = -\beta_N \frac{\alpha^r}{r!}, & n_{M,r} = -\beta_M \frac{\alpha^r}{r!}, \\ m_{N,r} = -y n_{N,r}, & m_{M,r} = -y n_{M,r}. \end{cases}$$

Wzory te podobnie jak wzory (3.1.6) pozwalają na obliczenie rekurencyjne współczynników  $n_r$  i  $m_r$ .

Jak widać, w przypadku jednego kabla obliczenie jest znacznie prostsze niż w przypadku kilku kabli. W belkach sprężonych kable na ogół są zgrupowane w jednej części przekroju poprzecznego. Dlatego można często przeprowadzić obliczenia zakładając kabel zastępczy o równoważnej powierzchni, leżący w środku ciężkości danych kabli. Należy jednak pamiętać, że błąd tego przybliżenia rośnie gwałtownie w miarę oddalania kabli od siebie. Dlatego ta metoda jest dopuszczalna na ogół tylko wtedy, gdy odległość między skrajnymi kablami nie przekracza czwartej części wysokości belki.

Rozwiązanie problemu dla przypadku jednego kabla można uzyskać również stosując wprost wzór (2.1.2):

$$X_1 = -\left(S_1 + \frac{\delta_{10}^b}{\delta_{11}^b}\right)(1 - e^{\alpha\varphi}),$$

gdzie  $\alpha = -\delta_{11}^b / \delta_{10}^b$ .

Symbol  $X_1$  oznacza tu stratę naciągu kabla, wielkości  $\delta$  oblicza się na zasadach ogólnych stosując je do elementu  $dx$  wyciętego z belki, czyli (przyjmując  $dx = 1$ ) według wzorów

$$\delta_{10}^b = \frac{N_0}{E_b F_b} - \frac{M_0 y}{E_b J_b}, \quad \delta_{11}^b = \frac{1}{E_b F_b} + \frac{y^2}{E_b J_b}, \quad \delta_{11} = \delta_{11}^b + \frac{1}{E_z F_z}.$$

Symbole  $N_0$  i  $M_0$  oznaczają tu, zgodnie z rozdziałem drugim, siły normalne i momenty zginające od obciążenia zewnętrznego (zatem w bel-



kach ciągłych z reguły  $N_0 = 0$ ). Wzór (2.1.2) jest oczywiście identyczny ze wzorem (3.1.11), jednak jest bardziej przejrzysty, dlatego zaleca się go do stosowania w układach statycznie wyznaczalnych.

*Przykład liczbowy 5.* Rozwiążemy zadanie 1 w założeniu, że kable obetonowano bezpośrednio po naciągnięciu. Obliczenie przeprowadzimy dla sześciu punktów położonych w równych odstępach co 1,80 m stosując wzór (2.1.2).

Wartościami stałymi są w tym przypadku

$$\frac{1}{E_b F_b} = 0,0833 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{1}{E_b J_b} = 10^{-5}, \quad \frac{1}{E_z F_z} = 1,3227 \cdot 10^{-5}.$$

Tablica 6

Punkt	0	1	2	3	4	5
$y$	0,100	0,208	0,292	0,352	0,388	0,400
$M_0$		58,3	103,7	136,1	155,5	162,0
$y^2/E_b J_b \cdot 10^5$	0,01	0,0433	0,0853	0,1239	0,1505	0,1600
$\delta_{11}^b \cdot 10^5$	0,0933	0,1266	0,1686	0,2072	0,2338	0,2433
$\delta_{11} \cdot 10^5$	1,4160	1,4493	1,4913	1,5299	1,5565	1,5660
$\delta_{10} \cdot 10^5$		-12,13	-30,28	-47,91	-60,33	-64,80
$\delta_{10}/\delta_{11}^b$		-95,8	-179,6	-231,2	-258,0	-266,3
$-(S_1 + \delta_{10}/\delta_{11}^b)$	-360	-264,2	-180,4	-128,8	-102,0	-93,7
$\alpha$	-0,066	-0,087	-0,113	-0,135	-0,150	-0,155
$(1 - e^{-\alpha\varphi}) \varphi = 4$	0,2165	0,2939	0,3637	0,4173	0,4512	0,4621
$X_1$	-77,9	-77,6	-65,6	-53,7	-46,0	-43,3
$X_1/S_1 \cdot 100$	-21,7	-21,5	18,2	-14,9	-12,8	-12,0

Straty naciągu obliczono dla  $\varphi = 4$ . Jak widać, wyniki różnią się znacznie od otrzymanych dla kabla swobodnego. Porównajmy jeszcze wykresy momentów zginających  $\Delta M_b = -X_1 y$  w obu przypadkach, zestawiając w tym celu tablicę 7.

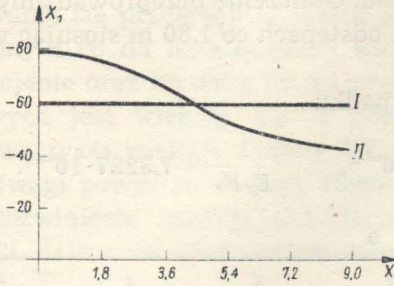
Tablica 7

Punkt	0	1	2	3	4	5
$\Delta M$ (kabel swob.)	6,0	12,5	17,6	21,2	23,3	24,1
$\Delta M$ (kabel obet.)	7,8	16,1	19,2	18,9	17,9	17,3

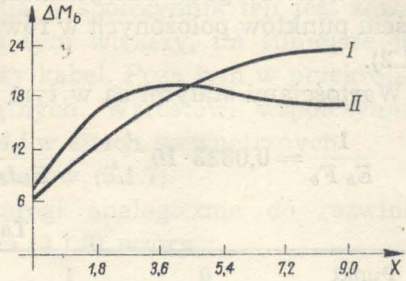
Wykresy  $X_1(x)$  i  $\Delta M_b(x)$  dla przypadku kabla swobodnego (I) i obetonowanego (II) przedstawiono na rys. 14 i 15.

Sposób obliczenia według wzoru (3.1.11) podaliśmy w pierwszej części przykładu liczbowego 7.

*Przykład liczbowy 6.* Obliczymy wpływ pełzania betonu na przekrój środkowy belki z przykładu drugiego.



Rys. 14



Rys. 15

(1) Obliczenie ściśle:

kabel 1

$$F_{z1} = 0,003982 \text{ m}^2, \quad y_1 = 0,40 \text{ m},$$

kabel 2

$$F_{z2} = 0,001106 \text{ m}^2, \quad y_2 = 0,30 \text{ m};$$

stad

$$F_b = 0,4 \text{ m}^2, \quad J_b = 0,03333 \text{ m}^4,$$

$$S_z = 0,001925 \text{ m}^3, \quad J_z = 0,0007367 \text{ m}^4,$$

$$k_1 = 6,97874 \cdot 10^{-7}, \quad k_2 = 83,7449 \cdot 10^{-7};$$

równanie charakterystyczne

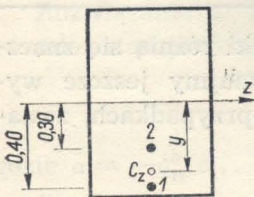
$$5,3722 a^2 + 0,97315 a + 0,00058443 = 0,$$

pierwiastki równania charakterystycznego

$$a_1 = -0,1805, \quad a_2 = -0,000603;$$

współczynniki  $\gamma$

$$\gamma_1 = -0,3811, \quad \gamma_2 = 0,2181;$$



Rys. 16

wielkości wyjściowe

$$N_b^0 = 360 + 100 = 460 \text{ t}, \quad M_b^0 = 162 - 360 \cdot 0,4 - 100 \cdot 0,3 = -12 \text{ tm};$$

stałe

$$C_1 = 187,5, \quad C_2 = 272,5.$$



Zatem otrzymaliśmy poszukiwane rozwiązanie:

$$\Delta N_b = -460 + 187,5 e^{\alpha \cdot \varphi} + 272,5 e^{\alpha \cdot \varphi},$$

$$\Delta M_b = 12 - 71,5 e^{\alpha \cdot \varphi} + 59,5 e^{\alpha \cdot \varphi}.$$

Dla  $\varphi = 4$  otrzymamy

$$\Delta N_b = -97,1 \text{ t}, \quad \Delta M_b = 36,6 \text{ tm.}$$

(2) Stosując szeregi otrzymamy

$$K = 0,05373 \cdot 10^{-6},$$

$$n_1 = -34,05, \quad m_1 = 12,88,$$

$$n_2 = 3,06, \quad m_2 = -1,16,$$

$$n_3 = -0,184, \quad m_3 = 0,0702.$$

W tablicy 8 zestawiliśmy wartości kolejnych przybliżeń dla  $\varphi = 4$ .

Stosując wzory (3.1.7) otrzymamy

$$\Delta N_b = -189,2 (1 - e^{-0,18\varphi}),$$

$$\Delta N_b(4) = -97,1 \text{ t},$$

$$\Delta M_b = 71,6 (1 - e^{-0,18\varphi}),$$

$$\Delta M_b(4) = 36,7 \text{ tm.}$$

Tablica 8

	$\Delta N_b$	$\Delta M_b$
1	-136,6	55,5
2	-87,6	32,8
3	-99,4	37,3

(3) Obliczenie metodą kabła zastępczego (rys. 15).

Powierzchnia kabła wynosi

$$0,3982 y = 0,1106 (10 - y), \quad y = 0,02174 \text{ m};$$

stąd znajdziemy

$$\delta_{11}^b = 0,2264 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_{11} = 1,2609 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha = -0,1796,$$

$$\delta_{10} = -61,278 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}^b} = -270,7, \quad X_1 = -189,3 (1 - e^{-0,1796\varphi}).$$

Dla  $\varphi = 4$  otrzymamy

$$X_1 = -97,0 \text{ t}, \quad \Delta M_b = 97,0 \cdot 0,3783 = 36,7 \text{ tm.}$$

Obliczenie metodą kabła zastępczego dało prawie dokładny wynik, ponieważ oba kable znajdują się blisko siebie. Gdy odległość między dwoma jednakowymi kablami zbliża się do połowy wysokości belki, błąd w obliczeniu  $\Delta M_b$  przy zastosowaniu tej metody może wynosić kilkadziesiąt procent.

### 3.2. Układy statycznie niewyznaczalne

Teoria układów statycznie niewyznaczalnych, którą obecnie przedstawimy, nawiązuje do metody sił, będącej podstawową metodą rozwiązywania tego rodzaju zagadnień w zakresie teorii sprężystości. Dla danego ustroju statycznie niewyznaczalnego zakładać będziemy odpowiedni układ podstawowy, na który w dowolnej chwili określonej zmienną  $\varphi$  działać będzie stałe obciążenie wyjściowe i zmienne wielkości nadliczbowe. Obciążenie wyjściowe układu podstawowego określimy jako sumę obciążenia zewnętrznego, sprężenia i wielkości nadliczbowych, obliczonych na zasadach stosowanych w mechanice budowli dla  $\varphi = 0$ .

Stosując zasadę superpozycji rozbijemy rozwiązanie ustroju statycznie niewyznaczalnego na dwie części.

(1) W części pierwszej uwzględnimy wpływ obciążeń wyjściowych w założeniu, że działają na układ podstawowy i nie wywołują wielkości nadliczbowych; obliczenie należy przeprowadzić za pomocą wzorów p. 3.1. Otrzymane składowe siły wewnętrznych będziemy oznaczali symbolami

$$\Delta N_b^{(0)}, \quad \Delta M_b^{(0)}.$$

(2) W części drugiej uwzględnimy wpływ wielkości nadliczbowych; siły wewnętrzne powstałe w rezultacie ich działania oznaczmy symbolami

$$\Delta N_b^{(X)}, \quad \Delta M_b^{(X)}.$$

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań musimy określić związki między odkształceniami elementu  $dx$  pręta, a działającymi nań obciążeniami. Całkując równania (3.1.1) w przedziale  $(0, \varphi)$  i uwzględniając wzory (3.1.2) otrzymamy

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon(\varphi) = \frac{N_b^0 \varphi}{E_b F_b} + \frac{1}{E_b F_b} \int_0^\varphi \Delta N_b d\varphi + \frac{\Delta N_b}{E_b F_b}, \\ \varrho(\varphi) = \frac{M_b^0 \varphi}{E_b J_b} + \frac{1}{E_b J_b} \int_0^\varphi \Delta M_b d\varphi + \frac{\Delta M_b}{E_b J_b}. \end{cases}$$

W dalszym ciągu potrzebne będą funkcje  $\varepsilon$  oraz  $\varrho$  przedstawione jako szeregi potęgowe, które przyjmiemy w postaci następującej:

$$\varrho = a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \dots + a_r \varphi^r + \dots,$$

$$\varepsilon = b_1 \varphi + b_2 \varphi^2 + \dots + b_r \varphi^r + \dots$$



Podstawiając powyższe szeregi do lewych stron równań (3.2.1), zaś szeregowo rozwinięcia funkcji  $\Delta N_b$  i  $\Delta M_b$  do prawych stron otrzymamy wzory na współczynniki  $a_r$  i  $b_r$ :

dla obciążenia  $N_b = 1$

$$(3.2.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} r=1 \\ r \geq 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{N,1} = \frac{1}{E_b J_b} m_{N,1}, \quad b_{N,1} = \frac{1}{E_b F_b} (1 + n_{N,1}), \\ a_{N,r} = \frac{1}{E_b J_b} \left( m_{N,r} + \frac{1}{r} m_{N,r-1} \right), \\ b_{N,r} = \frac{1}{E_b F_b} \left( n_{N,r} + \frac{1}{r} n_{N,r-1} \right); \end{array} \right.$$

dla obciążenia  $M_b = 1$

$$(3.2.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r=1 \\ r \geq 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{M,1} = \frac{1}{E_b J_b} (1 + m_{M,1}), \quad b_{M,1} = \frac{1}{E_b F_b} n_{M,1}, \\ a_{M,2} = \frac{1}{E_b J_b} \left( m_{M,2} + \frac{1}{r} m_{M,r-1} \right), \\ b_{M,r} = \frac{1}{E_b F_b} \left( n_{M,r} + \frac{1}{r} n_{M,r-1} \right). \end{array} \right.$$

Powyższe wzory przedstawiają zmienność krzywizny  $\varrho$  oraz odkształcenia jednostkowego  $\varepsilon$  pod wpływem stałego obciążenia  $N_b = 1$  lub  $M_b = 1$ .

Obecnie możemy rozważyć najogólniejszy przypadek ustroju statycznie niewyznaczalnego. Niech na układ podstawowy działa począwszy od  $\varphi = 0$  wielkość nadliczbowa  $X_k = 1$ . W dowolnym punkcie układu określonym współrzędną  $s$  wywołuje ona odkształcenia plastyczne powodując zmianę krzywizny  $\varrho_k(\varphi, s)$  oraz odkształceń jednostkowych osi prętów  $\varepsilon_k(\varphi, s)$ . Określmy teraz następującą funkcję zmiennej  $\varphi$ :

$$(3.2.3) \quad \bar{\delta}_{ik}(\varphi) = \int_s M_i(s) \varrho_k(\varphi, s) ds + \int_s N_i(s) \varepsilon_k(\varphi, s) ds.$$

Oznaczenia  $M_i$  i  $N_i$  przyjęto z metody sił; również  $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$  jest wielkością analogiczną do współczynnika  $\delta_{ik}$  mającego zastosowanie w tej metodzie z tą tylko różnicą, że przedstawia wpływ odkształceń plastycznych. Pierwsza całka daje wpływ zmiany krzywizny prętów, druga, przedstawiająca wpływ wydłużeń prętów, może być często pominięta, zaś w belkach ciągłych zawsze jest równa zero.

Wzór (3.2.3) ważny jest dla stałe działającej wielkości nadliczbowej  $X_k = 1$ . Analogiczny wzór dla zmiennej nadliczbowej  $X_k(\varphi)$  otrzymamy sumując wpływy elementarnych obciążeń  $dX_k(\varphi)$ :

$$\int_{\varphi_1=0}^{\varphi} dX_k(\varphi_1) \bar{\delta}_{ik}(\varphi - \varphi_1) = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi} \frac{dX_k(\varphi_1)}{d\varphi_1} \delta_{ik}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1.$$



W dalszym ciągu określimy jeszcze funkcję zmiennej  $\varphi$  analogiczną do współczynników  $\delta_{i0}$  metody sił, a przedstawiającą wpływ odkształceń plastycznych wywołanych obciążeniem wyjściowym:

$$(3.2.4) \quad \bar{\delta}_{i0}(\varphi) = \int_s M_i(s) \varrho_0(\varphi, s) ds + \int_s N_i(s) \varepsilon_0(\varphi, s) ds.$$

Wyrażenia  $\varrho$  oraz  $\varepsilon$  występujące pod całkami wzorów (3.2.3) i (3.2.4) uzyskamy sumując wpływy momentów i sił normalnych:

$$(3.2.5.1) \quad \begin{cases} \varrho_k(\varphi, s) = M_{kb}(s) \varrho_M(\varphi, s) + N_{kb}(s) \varrho_N(\varphi, s), \\ \varepsilon_k(\varphi, s) = M_{kb}(s) \varepsilon_M(\varphi, s) + N_{kb}(s) \varepsilon_N(\varphi, s); \end{cases}$$

$$(3.2.5.2) \quad \begin{cases} \varrho_0(\varphi, s) = M_b^0(\varphi, s) \varrho_M(\varphi, s) + N_b^0(\varphi, s) \varrho_N(\varphi, s), \\ \varepsilon_0(\varphi, s) = M_b^0(\varphi, s) \varepsilon_M(\varphi, s) + N_b^0(\varphi, s) \varepsilon_N(\varphi, s). \end{cases}$$

Funkcje  $\varrho$  oraz  $\varepsilon$  dane są równaniami (3.2.1), indeksy  $M$  oraz  $N$  oznaczają obciążenie elementu  $dx$  momentem  $M_b = 1$  lub siłą  $N_b = 1$ . Indeksy  $b$  we wzorach (3.2.5.1) wprowadzono ze względu na to, że reakcje nadliczbowe działają na przekrój żelbetowy, natomiast funkcje  $\varrho$  i  $\varepsilon$  są określone w zależności od obciążeń działających na część betonową.

Wykresy  $M_{kb}$  oraz  $N_{kb}$  obliczamy z następujących wzorów otrzymanych z elementarnych przeliczeń:

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} M_{kb} = M_k \frac{J_b}{J_c} + N_k \frac{J_b y_c}{J_c}, \\ N_{kb} = N_k \left( \frac{F_b}{F_c} + \frac{F_b y_c^2}{J_c} \right) + M_k \frac{F_b y_c}{J_c}. \end{cases}$$

Objaśnieniem do tych wzorów jest rys. 17.  $C_B$  oznacza środek ciężkości części betonowej,  $C$  środek ciężkości pełnego przekroju żelbetowego; dodatni kierunek odmierzenia współrzędnych  $y_c$  jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi  $y$ ,  $J_c$  jest wprowadzonym momentem bezwładności przekroju żelbetowego względem osi  $z_1$ ,  $J_b$  momentem bezwładności części betonowej względem osi  $z$ ,  $F_c$  jest wprowadzoną powierzchnią przekroju żelbetowego<sup>10)</sup>.

Wzory (3.2.6) są ważne w założeniu, że wykresy  $M_k$  oraz  $N_k$  są sporządzone dla układu, którego siatka geometryczna pokrywa się z osiami ciężkości części betonowej prętów<sup>11)</sup>.

Obecnie możemy napisać równania warunkowe dla układu  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalnego. Otrzymamy je rozpatrując odkształce-

<sup>10)</sup> Powierzchnie  $F_c$  oraz momenty bezwładności  $J_c$  należy obliczać zgodnie z teorią żelbetu mnożąc powierzchnię żelaza przez  $n = E_z/E_b$ .

<sup>11)</sup> To samo założenie dotyczy wykresów  $M_i$  i  $N_i$  we wzorach (3.2.3) i (3.2.4).





przy czym wielkości  $q$  oraz  $\varepsilon$  należy wyrazić odpowiednimi szeregami. Znajdziemy w ten sposób

$$(3.2.9.1) \quad \bar{\delta}_{ik,r} = \int_s M_i (M_{kb} a_{M,r} + N_{kb} a_{N,r}) ds + \int_s N_i (M_{kb} b_{M,r} + N_{kb} b_{N,r}) ds,$$

$$(3.2.9.2) \quad \bar{\delta}_{i0,r} = \int_s M_i (M_b^0 a_{M,r} + N_b^0 a_{N,r}) ds + \int_s N_i (M_b^0 b_{M,r} + N_b^0 b_{N,r}) ds.$$

Jak widać, w ogólnym wypadku jest  $\bar{\delta}_{ik} \neq \bar{\delta}_{ki}$ . Natomiast w układach, w których nie występują siły normalne  $N$  lub momenty zginające  $M$ , zachodzą związki analogiczne do znanych w mechanice budowli, mianowicie  $\bar{\delta}_{ik}(\varphi) \equiv \bar{\delta}_{ki}(\varphi)$ .

Całki te, praktycznie biorąc, można obliczyć tylko numerycznie.

Niewiadome funkcje przyjmiemy w postaci szeregów

$$(3.2.10) \quad X_k(\varphi) = x_{k,1} \varphi + x_{k,2} \varphi^2 + \dots + x_{k,r} \varphi^r + \dots$$

Przy użyciu wyrażeń (3.2.8.1) i (3.2.10) oraz wzoru

$$\int_0^{\varphi} \varphi_1^m (\varphi - \varphi_1)^n d\varphi_1 = \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)} \varphi^{n+m+1}$$

otrzymuje się po krótkich przeliczeniach rozwinięcie w szereg całek określonych

$$(3.2.11) \quad \int_0^{\varphi} \frac{dX_k}{d\varphi_1} \bar{\delta}_{ik}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 = z_{ik,2} \varphi^2 + z_{ik,3} \varphi^3 + \dots + z_{ik,r} \varphi^r + \dots,$$

przy czym współczynniki  $z_{ik,r}$  określone są następującymi wzorami:

$$z_{ik,2} = \frac{1}{2} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,1},$$

$$z_{ik,3} = \frac{1}{3} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,2} + \frac{1}{3} x_{k,2} \bar{\delta}_{ik,1},$$

$$z_{ik,4} = \frac{1}{4} x_{k,1} \bar{\delta}_{ik,3} + \frac{1}{6} x_{k,2} \bar{\delta}_{ik,2} + \frac{1}{4} x_{k,3} \bar{\delta}_{ik,1}.$$

Ogólnie

$$z_{ik,r} = \sum_{p=1}^{r-1} x_{k,p} \bar{\delta}_{ik,r-p} \frac{1}{\binom{r}{p}}.$$



Podstawiając wyrażenia (3.2.8.2), (3.2.10) oraz (3.2.11) do układu równań (3.2.9) otrzymamy

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} (x_{k,1} \varphi + x_{k,2} \varphi^2 + \dots + x_{k,r} \varphi^r + \dots) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n (z_{1k,2} \varphi^2 + \dots + z_{1k,r} \varphi^r + \dots) + \bar{\delta}_{10,1} \varphi + \dots + \bar{\delta}_{10,r} \varphi^r + \dots = 0,$$

.....

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} (x_{k,1} \varphi + \dots + x_{k,r} \varphi^r + \dots) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n (z_{nk,2} \varphi^2 + \dots + z_{nk,r} \varphi^r + \dots) + \bar{\delta}_{n0,1} \varphi + \dots + \bar{\delta}_{n0,r} \varphi^r + \dots = 0.$$

Układy równań do wyznaczenia współczynników  $x_{k,r}$  otrzymane przez grupowanie wyrazów przy kolejnych potęgach  $\varphi$  przedstawiają się, jak następuje:

dla współczynników  $x_{k,1}$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} x_{k,1} + \bar{\delta}_{10,1} = 0,$$

.....

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} x_{k,1} + \bar{\delta}_{n0,1} = 0;$$

ogólnie dla  $r \geq 2$

$$\sum_{k=1}^n \delta_{1k} x_{k,r} + \sum_{k=1}^n z_{1k,r} + \bar{\delta}_{10,r} = 0,$$

.....

$$\sum_{k=1}^n \delta_{nk} x_{k,r} + \sum_{k=1}^n z_{nk,r} + \bar{\delta}_{n0,r} = 0.$$

Jak widać, do obliczenia współczynników  $x_{k,r}$   $r$ -go rzędu potrzebne są współczynniki  $\bar{\delta}_{k0,r}$  rzędu  $r$ -go oraz  $\bar{\delta}_{ik,r}$  rzędu  $r-1$ .

Szeregi (3.2.10) są prawie zawsze bardzo wolnozbieżne i w niektórych przypadkach wymagałyby obliczania kilkunastu kolejnych wyrazów (dla  $\varphi = 4$ ). W celu otrzymania szeregów szybkozbieżnych należy rozwiązanie przedstawić w postaci

$$(3.2.12) \quad X_k(\varphi) = (1 - e^{u_k \varphi}) (w_{k,0} + w_{k,1} \varphi + \dots + w_{k,r} \varphi^r + \dots).$$

Wzory na współczynniki  $w_{k,r}$  przedstawiają się, jak następuje:

$$w_{k,0} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,1},$$

$$w_{k,1} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,2} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,0},$$

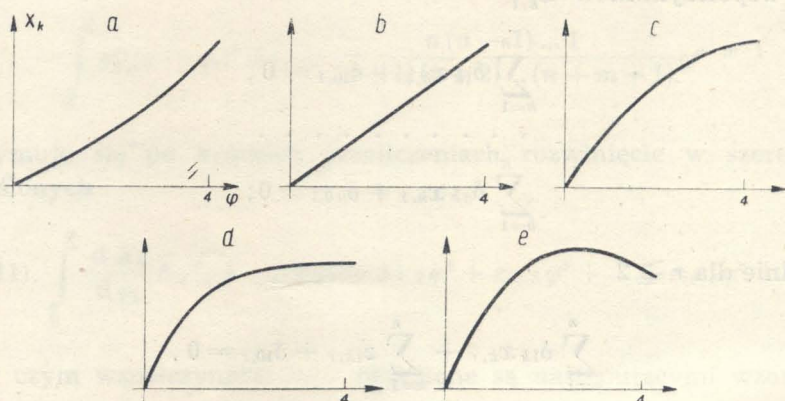
$$w_{k,2} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,3} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,1} - \frac{1}{6} \mu_k^2 w_{k,0},$$

$$w_{k,3} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,4} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,2} - \frac{1}{6} \mu_k^2 w_{k,1} - \frac{1}{24} \mu_k^3 w_{k,0},$$

$$w_{k,4} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,5} - \frac{1}{2} \mu_k w_{k,3} - \frac{1}{6} \mu_k^2 w_{k,2} - \frac{1}{24} \mu_k^3 w_{k,1} - \frac{1}{120} \mu_k^4 w_{k,0}.$$

Ogólnie dla  $r \geq 1$ :

$$w_{k,r} = -\frac{1}{\mu_k} x_{k,r+1} - \sum_{p=1}^r \frac{1}{(p+1)!} \mu_k^p w_{k,r-p}.$$



Rys. 18

Najszybszą zbieżność otrzymuje się na ogół przyjmując

$$(3.2.13) \quad \mu_k = \frac{2 x_{k,2}}{x_{k,1}}.$$

Wtedy  $w_{k,1} = 0$ , zaś wystarczającą dokładność (rzędu kilka procent) daje z reguły obliczenie 3-4 wyrazów dla  $\varphi = 3-4$  lub dwu wyrazów dla  $\varphi < 2-3$ . Jeżeli współczynnik  $\mu_k$  określony wzorem (3.2.13) jest mały — bardzo często można zadowolić się pierwszym przybliżeniem

$$X_k(\varphi) = w_{k,0} (1 - e^{\mu_k \varphi}).$$



Oczywiście możliwe są również wypadki, gdy zbieżność szeregu  $x_{k,r}$  jest dobra i dwa lub trzy pierwsze wyrazy dają wystarczająco dokładny wynik nawet dla  $\varphi = 4$ .

Teraz podamy ogólne uwagi odnośnie przebiegu funkcji nadliczbowych w interesującym nas przedziale  $0 < \varphi < 4$ . Wykres typowy przedstawia krzywa  $c$  na rys. 18, przy czym stopień zakrzywienia może być bardzo różny: od wykresu prostoliniowego  $b$  do krzywej  $d$ , której rzędne ustalają się już dla  $\varphi < 4$ . W przypadkach wyjątkowych można otrzymać wykres typu  $a$  o pochodnej rosnącej lub typu  $e$ , w którym rzędne funkcji  $X_k(\varphi)$  przechodzą przez maksimum, a nawet zmieniają znak. Charakter wykresu  $X_k(\varphi)$  zależy przede wszystkim od przebiegu funkcji  $\bar{\delta}_{k0}(\varphi)$ ; poza tym duże znaczenie ma stosunek  $\bar{\delta}_{kk}(1)/\bar{\delta}_{kk}$ , mianowicie większym wartościom tego ułamka odpowiada silniejsze zakrzywienie funkcji nadliczbowej  $X_k(\varphi)$ . Przebieg funkcji nadliczbowej ma duże znaczenie dla zbieżności rozwiązań. Oczywiście najszybszą zbieżność dają wykresy zbliżone do prostoliniowych.

Wystarczająco dokładne określenie funkcji  $\bar{\delta}_{k0}(\varphi)$  oraz  $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$  dają zazwyczaj trzy wyrazy szeregów  $\bar{\delta}_{k0,r}$  oraz  $\bar{\delta}_{ik,r}$ . Wpływ dalszych wyrazów jest mały i przeważnie można je pomijać<sup>13)</sup>.

Obliczone reakcje nadliczbowe działają na pełny przekrój żelbetowy. Momenty zginające i siły normalne wielkości nadliczbowych, działające na część betonową pręta, określone są następującymi wzorami:

$$(3.2.14) \quad \begin{cases} M_b^{(X)} = X_1 M_{1b} + X_2 M_{2b} + \dots + X_n M_{nb}, \\ N_b^{(X)} = X_1 N_{1b} + X_2 N_{2b} + \dots + X_n N_{nb}. \end{cases}$$

Naprężenia powstałe pod wpływem obciążeń  $M_b^{(X)}$  i  $N_b^{(X)}$  wzbudzają odkształcenia plastyczne i w rezultacie powodują zmianę składowych sił wewnętrznych o  $\delta M_b^{(X)}$  oraz  $\delta N_b^{(X)}$ . Wielkości te obliczymy z następujących wzorów:

$$(3.2.15) \quad \begin{cases} \delta M_b^{(X)} = \int_0^\varphi \frac{dM_b^{(X)}}{d\varphi_1} \Delta M_{bM}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 + \int_0^\varphi \frac{dN_b^{(X)}}{d\varphi_1} \Delta M_{bN}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1, \\ \delta N_b^{(X)} = \int_0^\varphi \frac{dM_b^{(X)}}{d\varphi_1} \Delta N_{bM}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 + \int_0^\varphi \frac{dN_b^{(X)}}{d\varphi_1} \Delta N_{bN}(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1. \end{cases}$$

We wzorach powyższych funkcje  $\Delta M_{bM}$ ,  $\Delta M_{bN}$ ,  $\Delta N_{bM}$ , i  $\Delta N_{bN}$  są rozwiązaniami układu równań różniczkowych (3.1.5) dla obciążenia odpowiednio  $M_b^0 = 1$  lub  $N_b^0 = 1$ .

<sup>13)</sup> Z reguły zbieżność szeregów  $\bar{\delta}_{ik,r}$  jest szybsza niż szeregów  $\bar{\delta}_{k0,r}$ .



Wyrażając funkcje podcałkowe szeregami potęgowymi można uzyskać nowe szeregi na wielkości  $\delta M_b^{(X)}$  oraz  $\delta N_b^{(X)}$ , których zbieżność jest jednak niewystarczająca. Można ją polepszyć przez wydzielenie odpowiednich funkcji, podobnie jak to uczyniliśmy dla wielkości nadliczbowych.

Opisany sposób obliczenia wymaga zbyt dużego nakładu pracy rachunkowej; z tego względu podamy metodę przybliżoną o dużej jednak dokładności.

Założmy, że wielkość nadliczbową  $X_k(\varphi)$  przedstawia wzór

$$(3.2.16) \quad X_k(\varphi) = X_k^* (1 - e^{\mu_k \varphi}),$$

zaś wielkości  $\Delta M_b$  oraz  $\Delta N_b$  wzory

$$(3.2.17) \quad \begin{cases} \Delta M_{bM} = \beta_{MM} (1 - e^{\alpha_1 \varphi}), & \Delta M_{bN} = \beta_{MN} (1 - e^{\alpha_2 \varphi}), \\ \Delta N_{bM} = \beta_{NM} (1 - e^{\alpha_3 \varphi}), & \Delta N_{bN} = \beta_{NN} (1 - e^{\alpha_4 \varphi}). \end{cases}$$

Podstawiając te wyrażenia do równań (3.2.15) i przeprowadzając całkowanie otrzymamy

$$(3.2.18) \quad \begin{cases} \delta M_b^{(X_k)} = M_b^{(X_k)} \beta_{MM} P(\mu_k, \alpha_1, \varphi) + N_b^{(X_k)} \beta_{MN} P(\mu_k, \alpha_2, \varphi), \\ \delta N_b^{(X_k)} = M_b^{(X_k)} \beta_{NM} P(\mu_k, \alpha_3, \varphi) + N_b^{(X_k)} \beta_{NN} P(\mu_k, \alpha_4, \varphi). \end{cases}$$

Funkcję  $P$  przedstawia wzór

$$P = 1 - \frac{\mu}{\mu - \alpha} \frac{e^{\alpha \varphi} - e^{\mu \varphi}}{1 - e^{\mu \varphi}},$$

zaś w wypadkach szczególnych mamy<sup>14)</sup>:

$$\alpha = \mu, \quad P = 1 + \mu \frac{e^{\mu \varphi} \varphi}{1 - e^{\mu \varphi}},$$

$$\mu = 0, \quad P = 1 + \frac{1}{\alpha} \frac{1 - e^{\alpha \varphi}}{\varphi}.$$

Wartości funkcji  $P(\mu, \alpha, \varphi)$  dla praktycznie możliwych współczynników  $\mu$  i  $\alpha$  oraz dla  $0 < \varphi < 4$  podano w tablicach.

W przypadku gdy wystarcza użycie jednego wyrazu szeregu  $w_{k,r}$ , jest

$$(3.2.19) \quad X_k^* = w_{k,0}$$

i obliczone wielkości  $\delta N_b^{(X)}$ ,  $\delta M_b^{(X)}$  będą ściśle odpowiadały przyjętemu przebiegowi funkcji nadliczbowej; współczynnik  $\mu_k$  do określenia wartości funkcji  $P(\alpha, \mu, \varphi)$  należy wtedy brać według wzoru (3.2.13).

<sup>14)</sup> W przypadku  $\mu_k = 0$  zakładamy  $X_k = X_k^* \varphi$ .



Jeżeli konieczne jest uwzględnianie dalszych wyrazów  $w_{r,r}$ , wówczas równania (3.2.15) dają wartości przybliżone; współczynnik  $\mu_k$  należy w tych przypadkach dobierać tak, aby zastępcza funkcja (3.2.16) możliwie dobrze oddawała rzeczywisty przebieg nadliczbowej. W rzadkim przypadku, gdy nadliczbowa zmienia znak, należy ją przedstawić dwoma wyrazami typu (3.2.16).

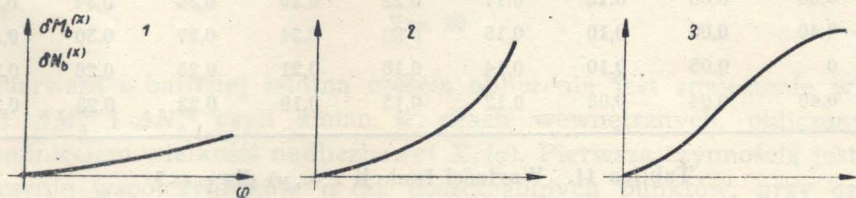
Współczynnik  $a$  w przypadku jednego kabla jest przedstawiony wzorem (3.1.12), przy czym oczywiście będzie  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = a$ . Współczynniki  $\beta$  określone są wówczas wzorami (3.1.13) z uwzględnieniem zależności (3.1.9)

$$\begin{aligned} \beta_{MM} &= \beta_M, & \beta_{NN} &= \beta_N, \\ \beta_{NM} &= -y\beta_M, & \beta_{MN} &= -y\beta_N. \end{aligned}$$

W przypadku kilku kabli i niemożności stosowania kabla zastępczego można przyjąć następujące wartości dające dobre przybliżenie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2m_{M,2}}{m_{M,1}}, & \alpha_2 &= \frac{2m_{N,2}}{m_{N,1}}, \\ \alpha_3 &= \frac{2n_{M,2}}{n_{M,1}}, & \alpha_4 &= \frac{2n_{N,2}}{n_{N,1}}, \\ \beta_{MM} &= -\frac{m_{M,1}}{\alpha_1}, & \beta_{MN} &= -\frac{m_{N,1}}{\alpha_2}, \\ \beta_{NM} &= -\frac{n_{M,1}}{\alpha_3}, & \beta_{NN} &= -\frac{n_{N,1}}{\alpha_4}. \end{aligned}$$

Jak widać, w przypadku jednego kabla oraz możliwości stosowania wzoru (3.2.19) podana metoda obliczania wielkości  $\delta M_b^{(X)}$  i  $\delta N_b^{(X)}$  jest



Rys. 19

ściśła. W pozostałych przypadkach błędy w odniesieniu do wielkości wzbudzających  $M_b^{(X)}$  i  $N_b^{(X)}$  nie przekraczają kilku procent.

Wykresy funkcji  $\delta M_b^{(X)}$  lub  $\delta N_b^{(X)}$  przedstawia rys. 19. Typową jest krzywa 2, jednak przy małych wartościach  $a$  wykres może zbliżyć się do linii prostej 1, zaś przy dużych wartościach  $a$  i wielkości nadliczbowej

o zmienności typu  $d$  lub  $e$  do krzywej 3. Pochodna dla  $\varphi = 0$  jest zawsze równa zero. Stosunek wielkości  $\delta M_b^{(X)}$  oraz  $\delta N_b^{(X)}$  do odpowiednich wielkości wzbudzających nie osiąga na ogół wartości większych niż 0,2-0,3, jednak w przypadkach bardzo silnie uzbrojonych belek teowych może dla  $\varphi = 4$  przekroczyć 0,5. Z załączonych tablic widać, że stosunek ten rośnie wraz ze współczynnikiem  $\alpha$ , czyli jest większy w belkach silnie uzbrojonych, szczególnie teowych.

Ostatecznie wartości sił wewnętrznych powstałych pod wpływem wielkości nadliczbowych otrzymujemy ze wzorów

$$\Delta M_b^{(X)} = M_b^{(X)} + \delta M_b^{(X)}, \quad \Delta N_b^{(X)} = N_b^{(X)} + \delta N_b^{(X)}.$$

Dalsze uwagi natury praktycznej znajdzie czytelnik w omówieniu przykładu liczbowego 7.

Tablica 9. Wartości funkcji  $P(\alpha, \mu)$  dla  $\varphi = 1$

$\mu \backslash \alpha$	-0,05	-0,10	-0,15	-0,20	-0,25	-0,30	-0,35	-0,40
-1,20	0,03	0,06	0,09	0,11	0,14	0,16	0,18	0,21
-0,80	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,17	0,20
-0,40	0,03	0,05	0,07	0,10	0,12	0,14	0,17	0,19
0	0,02	0,05	0,07	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18
0,40	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,16

Tablica 10. Wartości funkcji  $P(\alpha, \mu)$  dla  $\varphi = 2$

$\mu \backslash \alpha$	-0,05	-0,10	-0,15	-0,20	-0,25	-0,30	-0,35	-0,40
-1,20	0,07	0,13	0,18	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
-0,80	0,06	0,12	0,17	0,22	0,26	0,30	0,34	0,38
-0,40	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,27	0,30	0,35
0	0,05	0,10	0,14	0,18	0,21	0,25	0,28	0,31
0,40	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,22	0,25	0,27

Tablica 11. Wartości funkcji  $P(\alpha, \mu)$  dla  $\varphi = 3$

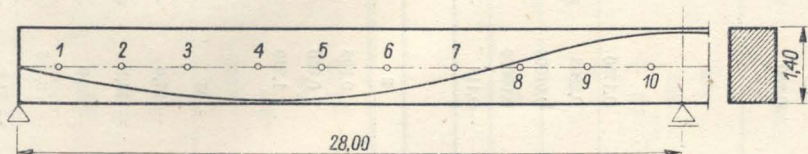
$\mu \backslash \alpha$	-0,05	-0,10	-0,15	-0,20	-0,25	-0,30	-0,35	-0,40
-1,20	0,11	0,20	0,28	0,36	0,42	0,48	0,53	0,58
-0,80	0,10	0,18	0,26	0,33	0,39	0,44	0,49	0,54
-0,40	0,09	0,16	0,23	0,29	0,35	0,40	0,44	0,48
0	0,07	0,14	0,20	0,25	0,30	0,34	0,38	0,42
0,40	0,06	0,11	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,35



Tablica 12. Wartości funkcji  $P(\alpha, \mu)$  dla  $\varphi = 4$

$\mu \backslash \alpha$	-0,05	-0,10	-0,15	-0,20	-0,25	-0,30	-0,35	-0,40
-1,20	0,15	0,27	0,39	0,47	0,54	0,61	0,66	0,71
-0,80	0,13	0,25	0,35	0,43	0,49	0,57	0,62	0,66
-0,40	0,12	0,22	0,30	0,38	0,44	0,50	0,55	0,60
0	0,10	0,17	0,25	0,31	0,37	0,42	0,46	0,50
+0,40	0,07	0,13	0,19	0,24	0,29	0,33	0,36	0,40

Przykład liczbowy 7. Obliczymy wpływ pełzania betonu na symetryczną belkę dwuprzęsłową sprężoną kablami obetonowanymi po naciągnięciu. Obliczenie przeprowadzimy tabelarycznie dla dziesięciu punktów położonych w odstępach co 2,8 m. Wysokość belki o przekroju prostokątnym stała  $h = 1,40$  m. Szerokość na odcinku A - 7 wynosi 0,5 m, na odcinku 8 - 8' belka jest poszerzona do 0,7 m. Sprężenie uzyskano za pomocą dwu kablów. Jeden o powierzchni przekroju poprzecznego  $55 \text{ cm}^2$  przebiega na całej długości belki, drugi o powierzchni  $35 \text{ cm}^2$  tylko na odcinku 8 - 8' po obu stronach podpory środkowej. Trasy obu kablów pokrywają się. Siła sprężająca na pierwszym odcinku wynosi 500 t, na drugim 800 t. Wielkości wyjściowe  $M_b^0$  i  $N_b^0$  traktować będziemy jako dane. Jak w poprzednich przykładach obliczenie przeprowadzimy w układzie jednostek tona, metr. Przyjmujemy  $\varphi = 3$ . Stosunek modułów sprężystości  $n = 6,333$ .



Rys. 20

Pierwszą i bardziej istotną częścią obliczenia jest znalezienie wielkości  $\Delta M_b^{(0)}$  i  $\Delta N_b^{(0)}$ , czyli zmian w siłach wewnętrznych, obliczonych z pominięciem wielkości nadliczbowej  $X_1(\varphi)$ . Pierwszą czynnością jest tu obliczenie współczynników  $\alpha$  dla poszczególnych punktów, przy czym należy korzystać ze wzoru (3.1.12). W tablicy 13 zestawiono dane wielkości geometryczne oraz wszystkie działania rachunkowe. Tablica 14 zawiera kolejno obliczenie współczynników  $\beta_N$  i  $\beta_M$  [wzory (3.1.13)] (przy czym korzysta się z wierszy 5 i 8 oraz 3 tablicy 13), zestawienie danych wielkości  $N_b^0$  i  $M_b^0$  oraz obliczenie  $\Delta N_b^0$  [wzór (3.1.11)] i  $\Delta M_b^{(0)}$  [wzór (3.1.9)]. Tym sposobem zakończony jest pierwszy etap obliczeń. Takie same obliczenia należy przeprowadzić dla układu statycznie wyznaczalnego.



Tablica 13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	0,16	0,40	0,50	0,60	0,60	0,46	0,24	-0,12	-0,47	-0,62
$y^2$	0,0256	0,160	0,250	0,360	0,360	0,2116	0,0576	0,0144	0,2209	0,3844
$F_b$				0,70					0,98	
$nF_z$				0,08488					0,0570	
$J_b$				0,1148					0,1600	
$J_b F_b$				0,08001					0,1568	
$F_b y^2$	0,0179	0,1120	0,1750	0,2520	0,2520	0,1481	0,0408	0,0141	0,2165	0,9767
$J_b + F_b y^2$	0,1322	0,2268	0,2898	0,3668	0,3668	0,2624	0,1546	0,1741	0,3765	0,5867
$nF_z (J_b + F_b y^2)$	0,00460	0,00788	0,01008	0,01276	0,01276	0,00914	0,00538	0,0099	0,0215	0,0806
$J_b F_b + nF_z (J_b + F_b y^2)$	0,08461	0,08769	0,09009	0,09277	0,09277	0,08915	0,08539	0,1667	0,1788	0,1874
$\alpha$	-0,054	-0,090	-0,112	-0,138	-0,138	-0,103	-0,063	-0,059	-0,121	-0,163

Tablica 14

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta_N$	-0,865	-0,505	-0,395	-0,312	-0,312	-0,436	-0,739	-0,656	-0,425	-0,298
$F_b y$	0,112	0,280	0,350	0,420	0,420	0,332	0,168	-0,1186	-0,460	-0,608
$\beta_M$	0,847	1,237	1,210	1,147	1,147	1,227	1,087	-0,675	-1,222	-1,132
$N_b^0$				500					800	
$M_b^0$	-15	-27	-45	-53	-50	-42	-23	53	102	125
$N_b^0 \beta_N$	-432,5	-252,5	-197,5	-156,0	-156,0	-218,0	-369,5	-524,8	-340,0	-238,4
$M_b^0 \beta_M$	-12,7	-33,4	-54,5	-60,8	-57,4	-51,5	-25,0	-35,8	-124,6	-141,5
$N_b^0 \beta_N + M_b^0 \beta_M$	-445,2	-285,9	-252,0	-216,2	-213,4	-269,5	-394,5	-560,6	-464,6	-379,9
$[1 - e^{\alpha \varphi}]_{\varphi=3}$	0,150	0,237	0,285	0,339	0,339	0,266	0,172	0,162	0,304	0,387
$\Delta N_b^{(0)}$	-66,8	-67,7	-71,8	-73,4	-72,3	-71,7	-67,8	-90,8	-141,2	-147,0
$\Delta M_b^{(0)}$	10,7	27,1	35,9	44,0	43,4	33,0	16,3	-10,9	-66,4	-91,1



Tablica 15

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi \beta_N$		-0,138	-0,202	-0,197	-0,187	-0,187	-0,201	-0,177	0,079	0,200	0,185
	$r=1$	74,7	182	221	258	258	207	112	-46,4	-242	-301
	$m_{N,r} \cdot 10^4$	-2,02	-8,16	-12,3	-17,8	-17,8	-10,6	-3,53	1,37	14,6	24,5
$\psi \beta_M$		0,135	0,495	0,605	0,688	0,688	0,564	0,261	0,081	0,574	0,702
	$r=1$	-73,1	-445	-617	-950	-950	-581	-164	-47,8	-695	-1144
	$m_{M,r} \cdot 10^4$	1,97	20,0	34,6	65,5	65,5	29,9	5,18	1,40	42,1	93,2
	$r=3$	-0,0854	-0,601	-1,290	-3,014	-3,014	-1,027	-0,109	-0,0276	-1,695	-5,063

Tablica 16

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J_{b_1}/J_b$		1,000					0,7143				
$a_{N,r} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$	$r=1$	74,7	182	221	258	258	207	112	-33,1	-173	-215
	$r=2$	35,3	32,8	98,2	111,2	111,2	93,2	52,5	-15,6	-76,1	-90
	$r=3$	-0,637	-2,48	-3,64	-5,11	-5,11	-3,17	-1,10	0,507	3,06	4,88
$a_{M,r} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$	$r=1$	9927	9555	9383	9050	9050	9419	9836	7109	6647	6326
	$r=2$	-34,6	-202,5	-373,9	-409,5	-409,5	-260,6	-76,8	-16,1	-218,1	-342,0
	$r=3$	0,621	6,067	10,24	18,82	18,82	8,940	1,618	0,3196	8,814	18,57

Tablica 17

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$	
$M_1 N_b^0$	25	75	125	175	225	275	325	600	680	760		
$M_1 M_b^0$	-0,75	-4,05	-11,25	-18,5	-22,5	-22,0	-15,0	39,7	86,7	116,8		
$M_1 N_b^0 a_{N,1} E_b J_{b_1}$	0,187	1,365	2,762	4,515	5,805	5,692	3,640	-1,986	-11,764	-16,340	-6,124	
$M_1 M_b^0 a_{M,1} E_b J_{b_1}$	-0,745	-3,689	-10,559	-16,742	-20,362	-20,722	-14,754	28,223	57,629	73,888	+72,167	
				$\bar{\delta}_{10,1} E_b J_{b_1} = 66,043 \cdot 2,8 = 184,92$								+66,043
$M_1 N_b^0 a_{N,2} E_b J_{b_1}$	0,088	0,0621	1,227	1,946	2,502	2,563	1,706	-0,936	-5,175	-6,840	-2,298	
$M_1 M_b^0 a_{M,2} E_b J_{b_1}$	0,002	0,082	0,421	0,758	0,921	0,573	0,115	-0,064	-1,891	-3,994	-3,077	
				$\bar{\delta}_{10,2} E_b J_{b_1} = -5,375 \cdot 2,8 = -15,05$								-5,375
$M_1 N_b^0 a_{N,3} E_b J_{b_1}$	-0,0016	-0,0186	-0,0455	-0,0894	-0,1150	-0,0872	-0,0357	0,0184	0,2081	0,9709	+0,2044	
$M_1 M_b^0 a_{M,3} E_b J_{b_1}$		-0,0025	-0,0115	-0,0348	-0,0423	-0,0197	-0,0024	0,0012	0,0764	0,2169	+0,1813	
				$\bar{\delta}_{10,3} E_b J_{b_1} = 0,3857 \cdot 2,8 = 1,080$								+0,3857

Tablica 18

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$	
$J_c$	0,1152	0,1197	0,1226	0,1263	0,1263	0,1213	0,1162	0,1607	0,1719	0,1897		
$J_b/J_c$	0,9922	0,9549	0,9323	0,9050	0,9050	0,9423	0,9837	0,9957	0,9308	0,8434		
$F_b y_c/J_c$	0,0460	0,1111	0,1354	0,1576	0,1576	0,1261	0,0688	-0,0348	-0,1268	-0,1518		
$M_{1b}$	0,0496	0,1432	0,2331	0,3152	0,4052	0,5183	0,6394	0,7468	0,7912	0,8012		
$N_{1b}$	0,0023	0,0167	0,0338	0,0552	0,0709	0,0693	0,0447	-0,0261	-0,1078	-0,1442		
$M_1^2$	0,0025	0,0225	0,0625	0,1225	0,2025	0,3025	0,4225	0,5625	0,7625	0,9025		
$M_1^2 \cdot J_b/J_b \cdot J_b/J_c$	0,0025	0,0215	0,0583	0,1109	0,1833	0,2850	0,4156	0,4001	0,4804	0,5437	2,5013	
				$\delta_{11} E_b J_{b_1} = 2,5013 \cdot 2,8 = 7,004$								



Tablica 19

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma$
$M_1 N_{1b}$		0,0025	0,0084	0,0193	0,0319	0,0381	0,0290	-0,0196	-0,0915	-0,1370	
$M_1 M_{1b}$	0,0025	0,0215	0,0583	0,1103	0,1823	0,2851	0,4156	0,5601	0,6725	0,7611	
$M_1 N_{1b} a_{N,1} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$		0,46	1,86	4,98	8,23	7,89	3,25	0,65	15,83	29,45	78
$M_1 M_{1b} a_{M,1} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$	25	205	547	998	1650	2685	4088	3982	4470	4815	23465
					$\bar{\delta}_{11,1} E_b J_{b_1} = 2,354 \cdot 2,8 = -6,591$						23538
$M_1 N_{1b} a_{N,2} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$		0,21	0,82	2,15	3,55	3,55	1,52	0,31	6,96	12,33	31,4
$M_1 M_{1b} a_{M,2} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$		-4,4	-21,8	-45,2	-74,6	-74,3	-31,9	-9,0	-146,7	-260,3	-668,2
					$\bar{\delta}_{11,2} E_b J_{b_1} = -0,06968 \cdot 2,8 = -0,1783$						-636,8
$M_1 N_{1b} a_{N,3} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$		-0,006	-0,031	-0,099	-0,163	-0,121	-0,032	-0,006	-0,280	-0,668	-1,41
$M_1 M_{1b} a_{M,3} E_b J_{b_1} \cdot 10^4$		0,12	0,60	2,07	3,43	2,55	0,67	0,18	5,93	14,13	-29,68
					$\bar{\delta}_{11,3} E_b J_{b_1} = 0,002827 \cdot 2,8 = 0,007916$						28,27

Tablica 20

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_b^{(X)}$	-1,04	-3,02	-4,92	-6,65	-8,67	-10,93	-13,7	-15,7	-16,7	-16,9
$N_b^{(X)}$	-0,05	-0,95	-0,71	-1,16	-1,50	-1,46	-0,94	0,55	2,28	3,04
$P(\alpha)$	0,12	0,18	0,22	0,26	0,26	0,20	0,13	0,13	0,23	0,30
$M_b^{(X)} P(\alpha) \beta_{MM}$	0,01	0,27	0,65	1,19	1,55	1,24	0,46	0,16	2,21	3,63
$N_b^{(X)} P(\alpha) \beta_{MN}$		-0,01	-0,03	-0,07	-0,07	-0,06	-0,02	-0,01	-0,10	-0,17
$\delta M_b^{(X)}$	0,01	0,26	0,62	1,12	1,48	1,18	0,44	0,15	2,11	3,46
$M_b^{(X)} P(\alpha) \beta_{NM}$	-0,10	-0,67	-1,31	-1,98	-2,58	-2,69	-1,94	1,38	4,70	5,73
$N_b^{(X)} P(\alpha) \beta_{NN}$		0,03	0,66	0,11	0,11	0,13	0,09	-0,04	-0,22	-0,27
$\delta N_b^{(X)}$	-0,10	-0,64	-1,25	-1,87	-2,47	-2,56	-1,85	1,34	4,48	5,46
$\Delta M_b^{(X)}$	-1,03	-2,76	-4,30	-5,53	-7,19	-9,75	-13,3	-15,6	-14,6	-13,4
$\Delta N_b^{(X)}$	-0,15	-0,99	-1,96	-3,03	-3,97	-4,02	-2,75	1,89	6,76	8,50
$\Delta M_b$	9,7	24,3	31,6	38,5	36,2	23,3	3,6	-26,5	-81,0	-104,5
$\Delta N_b$	-67,0	-68,7	-73,8	-76,4	-76,3	-75,7	-70,6	-88,9	-134,4	-138,5

W dalszym ciągu obliczamy współczynniki  $m_{N,r}$  oraz  $m_{M,r}$  dla  $r = 1, 2, 3$  (tablica 15). Współczynniki te nie będą bezpośrednio potrzebne, służą jedynie do obliczenia współczynników  $a_{N,r}$  i  $a_{M,r}$ <sup>15)</sup>. Korzystamy przy tym ze wzorów (3.1.14), zatem np.

$$m_{N,1} = -y\beta_N a, \quad m_{N,2} = \frac{1}{2} a m_{N,1}, \quad m_{N,3} = \frac{1}{3} a m_{N,2}.$$

W tablicy 16 zestawiono współczynniki  $a_{M,r}$  oraz  $a_{N,r}$  obliczone za pomocą wzorów (3.2.2.1) oraz (3.2.2.2). Jako porównawczy moment bezwładności  $J_{b1}$  przyjęto moment odcinka belki A-7. Zatem np.

$$E_b J_{b1} a_{N,1} = m_{N,1} \frac{J_{b1}}{J_b}, \quad E_b J_{b1} a_{N,2} = \left( m_{N,2} + \frac{1}{2} m_{N,1} \right) \frac{J_{b1}}{J_b},$$

$$E_b J_{b1} a_{N,3} = \left( m_{N,3} + \frac{1}{3} m_{N,2} \right) \frac{J_{b1}}{J_b}.$$

Obecnie można przystąpić do obliczenia współczynników rozwinięcia w szereg funkcji  $\bar{\delta}_{10}(\varphi)$ . Korzystamy ze wzoru (3.2.9), przy czym ponieważ jest  $N_1 = 0$ , istnieje tylko pierwsza całka, którą obliczamy numerycznie przez sumowanie iloczynów (tablica 17).

Do znalezienia rzędnych wykresów  $M_{1b}$  oraz  $N_{1b}$  konieczne są współczynniki zawarte we wzorach (3.2.6). Ze względu na to, że obliczenie ich oparte jest na elementarnych zasadach teorii żelbetu, podajemy tylko jego wyniki (tablica 18). W tejże tablicy obliczony jest współczynnik  $\delta_{11}$  drogą całkowania numerycznego:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{E_b J_c} ds = \frac{1}{E_b J_b} \int \frac{J_{b1}}{J_b} \frac{J_b}{J_c} M_1^2 ds.$$

Tablica 19 obejmuje obliczenie współczynników szeregu  $\bar{\delta}_{11}(\varphi)$  według wzoru (3.2.9).

Obecnie możemy przystąpić do obliczenia nadliczbowej; naprzód znajdziemy współczynniki  $x_{1,r}$ :

$$x_{1,1} = -\frac{184,92}{7,004} = -26,40, \quad E_b J_b z_{11,2} = -\frac{1}{2} 26,40 \cdot 6,591 = -87,01,$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{7,004} (-87,01 - 15,05) = 14,57,$$

<sup>15)</sup> W układach sprężonych kilkoma kablami współczynniki  $m_r$  oraz  $n_r$  są potrzebne do obliczenia wielkości  $\alpha$  i  $\beta$  we wzorach (3.2.17).



$$E_b J_b, z_{11,3} = \frac{1}{3} 14,57 \cdot 6,591 + \frac{1}{3} 26,40 \cdot 0,1783 = 33,58,$$

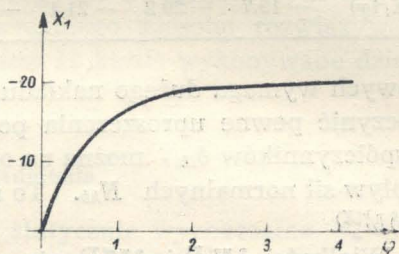
$$x_{1,3} = -\frac{1}{7,004} (33,58 + 1,08) = -4,949,$$

$$E_b J_b, z_{11,4} = -\frac{1}{4} 4,949 \cdot 6,591 - \frac{1}{6} 14,57 \cdot 0,1783 - \frac{1}{4} 26,40 \cdot 0,007916 = -8,639,$$

$$x_{1,4} = \frac{1}{7,004} 8,639 = 1,234,$$

$$E_b J_b, z_{11,5} = -\frac{1}{5} 1,234 \cdot 6,591 + \\ + \frac{1}{10} 4,949 \cdot 0,1783 + \\ + \frac{1}{10} 14,57 \cdot 0,007916 = 1,726,$$

$$x_{1,5} = -\frac{1}{7,004} 1,726 = -0,2465.$$



Rys. 21

W dalszym ciągu przechodzimy do obliczenia współczynników  $w_{k,r}$ :

$$\mu_1 = -\frac{29,14}{26,40} = -1,104,$$

$$w_{1,0} = -\frac{26,40}{1,104} = -23,91,$$

$$w_{1,2} = -\frac{4,949}{1,104} + \frac{1}{6} 1,104^2 \cdot 23,91 = 0,3760,$$

$$w_{1,3} = \frac{1,234}{1,104} + \frac{1}{2} 1,104 \cdot 0,3760 - \frac{1}{24} 1,104^3 \cdot 23,91 = -0,01562,$$

$$w_{1,4} = -\frac{0,2465}{1,104} - \frac{1}{2} 1,104 \cdot 0,01562 - \frac{1}{6} 1,104^2 \cdot 0,3760 + \\ + \frac{1}{120} 1,104^4 \cdot 23,91 = -0,0121.$$

Jak widać, szereg  $x_{k,r}$  jest bardzo wolnozbieżny i obliczonych pięć wyrazów mogłoby posłużyć do wyznaczenia rzędnych funkcji  $X_1(\varphi)$  co najwyżej dla  $\varphi = 1,5$ . Zbieżność szeregu  $w_{k,r}$  jest bez porównania lepsza. Wartości funkcji  $X_1(\varphi)$  zestawiono w tabelicy 21, zaś jej wykres przedstawia rys. 21.



W tabelicy 20 podano pełne obliczenie wartości  $\delta M_b^{(X)}$  oraz  $\delta N_b^{(X)}$  według wzorów (3.2.18). W pierwszych dwu wierszach zestawione są wartości  $M_b^{(X)}$  oraz  $N_b^{(X)}$  [wzory (3.2.14)]. Trzeci wiersz zawiera współczynniki  $P(a)$  wzięte z tabelicy dla  $\varphi = 3$  oraz  $\mu_1 = -1,2$ . W ostatnich wierszach zestawiono wartości  $\Delta M_b^{(X)}$  oraz  $\Delta N_b^{(X)}$  przedstawiające pełny wpływ nadliczbowych na siły wewnętrzne układu oraz całkowite zmiany  $\Delta M_b$ ,  $\Delta N_b$  sił wewnętrznych układu.

Tabelica 21

$\varphi$	1	2	3	4
$X_1(\varphi)$	-15,7	-20,2	-21,1	-21,7

Jak widać, obliczenie nadliczbowych wymaga dużego nakładu pracy rachunkowej. W praktyce można poczynić pewne uproszczenia polegające na tym, że przy obliczaniu współczynników  $\delta_{ik,r}$  można na ogół (w belkach ciągłych zawsze) pominąć wpływ sił normalnych  $N_{kb}$ . To samo dotyczy obliczenia wielkości  $\delta N_b^{(X)}$  i  $\delta M_b^{(X)}$ .

Wielkości  $\delta N_b^{(X)}$  i  $\delta M_b^{(X)}$  nie mają istotnego wpływu na wyniki obliczeń poza punktami, w których  $\Delta N_b^{(0)}$  lub  $\Delta M_b^{(0)}$  są bliskie zeru, które to punkty jednak są zazwyczaj najbardziej bezpieczne i nie wymagają dokładnego sprawdzenia. Z tych względów obliczenie tych wielkości można na ogół pominąć, lub ograniczyć je do punktów niebezpiecznych (podpory, punkty środkowe przęseł), w których zresztą przeważnie ich wpływ procentowy na wielkości  $\Delta N_b$  i  $\Delta M_b$  jest największy.

Nie można podać ogólnych wskazań stwierdzających, kiedy wpływ wielkości nadliczbowych ( $\Delta N_b^{(X)}$  i  $\Delta M_b^{(X)}$ ) jest duży lub mały w porównaniu z wielkościami  $\Delta N_b^{(0)}$  i  $\Delta M_b^{(0)}$ , ponieważ zbyt wiele czynników odgrywa tu jednakowo decydującą rolę. Najważniejszymi z nich są: przebieg (wielkości i znaki) wykresów  $N_b^0$  i  $M_b^0$ , ich wzajemny stosunek i przebieg (odległość od osi) oraz położenie (górze - dół) kabli. Należy zauważyć, że współbieżne prowadzenie kabli samo przez się nie ma tu istotnego znaczenia. Niemniejszą rolę odgrywają momenty bezwładności  $J_b$  i powierzchnie przekroju poprzecznego  $F_b$  w przypadku zmiennego przekroju pręta. Jeżeli przy obliczaniu wielkości  $\delta_{i0}$ ,  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{ik}$  konieczne jest uwzględnienie odkształceń osiowych (skręceń i wydłużeń prętów w niektórych układach ramowych), stwarza to dalsze komplikacje. Na ogół wielkości nadliczbowe (szczególnie w belkach ciągłych) nie są zbyt duże. Powodem jest fakt, że współczynniki  $\delta_{i0,r}$  oblicza się z reguły jako różnice dwu niewiele różniących się od siebie liczb, co jest wynikiem zmiany znaku momentów wyjściowych  $M_b^0$  i współrzędnych  $y$ , określających położenie kabli. W przeciwnym przypadku wielkości nadliczbowe byłyby bardzo duże.

Z powyższych przyczyn obliczenie numeryczne wszystkich całek musi być dokładne, to znaczy należy brać pod uwagę większą liczbę punktów



z przedziału całkowania. Niedopuszczalne jest (w ogólnym przypadku) przyjmowanie uproszczonego przebiegu kabli (np. po liniach prostych na dłuższych odcinkach). W razie niewypełnienia tych wymagań można otrzymać błędy nie tylko co do wielkości, lecz nawet co do znaku obliczonych nadliczbowych.

Na zakończenie podkreślimy, że podana powyżej metoda pozwala na rozwiązywanie najbardziej nawet skomplikowanych zagadnień z omawianej dziedziny za pomocą wprawdzie wielu, lecz bardzo prostych operacji czysto rachunkowych. W szczególności godne uwagi jest to, że cały tok obliczeń nie odbiega pojęciowo od normalnego sposobu rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych oraz że każde wykonywane działanie rachunkowe ma jasny sens fizyczny.

### 3.3. Inne zagadnienia

**3.3.1. Naprężenia skurczowe.** Ustroje statycznie wyznaczalne. W przypadku kilku kabli otrzymujemy układ dwu równań różniczkowych analogiczny do (3.1.5). Jego rozwiązaniem przy założeniu opisanej w rozdziale pierwszym zmienności  $\varepsilon_s(\varphi)$  jest

$$\Delta N_{bs} = -E_b F_b \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} + C_1 e^{\alpha_1 \varphi} + C_2 e^{\alpha_2 \varphi},$$

$$\Delta M_{bs} = \gamma_1 C_1 e^{\alpha_1 \varphi} + \gamma_2 C_2 e^{\alpha_2 \varphi},$$

gdzie

$$C_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} E_b F_b \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k}, \quad C_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} E_b F_b \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k}.$$

Dla rozwiązania metodą rozwinięcia w szereg otrzymamy

$$n_{s,1} = -\frac{k_1(F_z + k_2)}{K} E_b F_b \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k}, \quad m_{s,1} = \frac{k_1 S_z}{K} E_b F_b \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k}.$$

Dalsze wyrazy szeregów należy obliczać według wzorów (3.1.6).

W przypadku jednego kabla rozwiązanie równania różniczkowego odpowiadającego równaniu (3.1.10) daje

$$\Delta N_{bs} = \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b \beta_N (1 - e^{\alpha \varphi}), \quad \Delta M_{bs} = -y \Delta N_{bs}.$$

Z rozwinięcia w szereg tych funkcji otrzymamy

$$n_{s,r} = \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k} E_b F_b \beta_N \frac{\alpha^r}{r!}, \quad m_{s,r} = -y n_{s,r}.$$

Przy prowadzeniu obliczeń metodą opisaną w p. 2.2 korzystniejsze jest stosowanie wzoru analogicznego do wzoru (2.3.6):

$$X_1 = -\frac{\varepsilon_s}{\varphi_k \delta_{11}^b} (1 - e^{\alpha\varphi}).$$

Do wszystkich powyższych wzorów należy podstawiać jednostkowe skrócenie skurczowe  $\varepsilon_s$  jako liczbę dodatnią.

W przypadku układów statycznie niewyznaczalnych wielkości nadliczbowe uzyskuje się przez rozwiązanie układu równań typu (3.2.7) z tym zastrzeżeniem, że zamiast  $\bar{\delta}_{i,0}(\varphi)$  należy podstawić wielkości  $\bar{\delta}_{is}(\varphi)$  określone w sposób następujący:

$$\bar{\delta}_{is}(\varphi) = \int_s M_i(s) \varrho_s(\varphi, s) ds + \int_s N_i(s) \varepsilon_s(\varphi, s) ds.$$

Funkcję tę należy przedstawić w postaci szeregu

$$\bar{\delta}_{is}(\varphi) = \bar{\delta}_{is,1}\varphi + \bar{\delta}_{is,2}\varphi^2 + \dots + \bar{\delta}_{is,r}\varphi^r + \dots,$$

gdzie

$$\bar{\delta}_{is,r} = \int_s M_i(s) a_{s,r} ds + \int_s N_i(s) b_{s,r} ds.$$

Wzory na współczynniki  $a_{s,r}$  oraz  $b_{s,r}$  są następujące:

dla  $r = 1$

$$a_{s,1} = \frac{1}{E_b J_b} m_{s,1},$$

$$b_{s,1} = \frac{1}{E_b F_b} (1 + n_{s,1}) + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_k},$$

dla  $r \geq 2$

$$a_{s,r} = \frac{1}{E_b J_b} \left( m_{s,r} + \frac{1}{r} m_{s,r-1} \right), \quad b_{s,r} = \frac{1}{E_b F_b} \left( n_{s,r} + \frac{1}{r} n_{s,r-1} \right).$$

**3.3.2. Osiadanie podpór.** W chwili przesunięcia podpór powstają w układzie statycznie niewyznaczalnym momenty zginające i siły normalne. Należy je obliczyć z uwzględnieniem pełnych sztywności przekrojów żelbetowych w układzie statycznym, którego siatka geometryczna pokrywa się ze środkami ciężkości przekrojów żelbetowych. Z otrzymanych w ten sposób wielkości  $M^0$  oraz  $N^0$  należy obliczyć wielkości wyjściowe

$$(3.3.2.1) \quad M_b^0 = M^0 \frac{J_b}{J_c}, \quad N_b^0 = N^0 \frac{F_b}{F_c} + M^0 \frac{F_b y_c}{J_c}.$$

Dalszy tok obliczeń jak w p. 3.2.

**3.3.3. Obliczanie zmian sił w kablach.** Ustroje statycznie wyznaczalne. W przypadku jednego kabla zmiana siły wynosi  $\Delta S_1 = \Delta N_b$ .



Przy kilku kablach należy za pomocą wzorów (3.1.4) obliczyć wielkości  $\varepsilon$  oraz  $\rho$ ; wówczas zmiana siły w  $k$ -ym kablu wynosi

$$\Delta S_k = (-\varepsilon + \rho y_k) F_{zk} E_z.$$

W powyższych wzorach dodatnie wartości  $S_k$  oznaczają rozciąganie kabla.

Ustroje statycznie niewyznaczalne. Zmiany sił w kablach odpowiadające wielkościom  $\Delta M_b^{(0)}$  i  $\Delta N_b^{(0)}$  oraz  $\delta M_b^{(0)}$  i  $\delta N_b^{(0)}$  obliczyć należy w sposób podany dla ustrojów statycznie wyznaczalnych. Natomiast wpływ wielkości  $M_b^{(X)}$  i  $N_b^{(X)}$  należy uwzględnić obciążając układ statycznie wyznaczalny wielkościami nadliczbowymi i obliczając naprężenia w kablach według zasad teorii żelbetu dla fazy I.

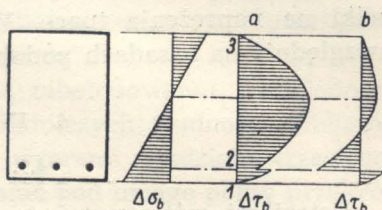
**3.3.4. Obliczanie naprężeń tnących.** Układy statycznie wyznaczalne. W układzie sprężonym jednym kablem naprężenia tnące, działające na beton, powodowane zmianami w siłach wewnętrznych, wynoszą (rys. 22):

na odcinku 1 - 2

$$\Delta \tau_b = \frac{\Delta T_b S_b}{J_b b},$$

na odcinku 2 - 3

$$\Delta \tau_b = \frac{\Delta T_b S_b}{J_b b} + \frac{d \Delta S}{ds} \frac{1}{b}.$$

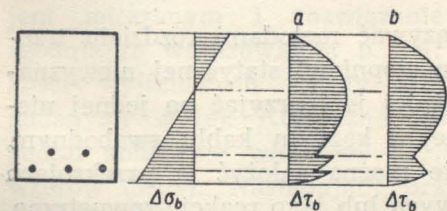


Rys. 22

We wzorach tych  $S_b$  oznacza moment statyczny powierzchni betonu leżącej poniżej rozpatrywanego przekroju, zaś  $b$  szerokość belki w tym przekroju. Pochodną  $d \Delta S/ds$  oraz siły tnące zastępcze

$$\Delta T_b = \frac{d \Delta M_b}{ds},$$

można obliczyć numerycznie lub (czasem) analitycznie. W wykresie naprężeń tnących otrzymamy skok na poziomie kabla (rys. 22a). Jeżeli kabel jest równoległy do osi belki, to pole powierzchni wykresu naprężeń tnących  $\Delta \tau_b$  (lub przy zmiennej szerokości  $b$  przekroju poprzecznego — pole powierzchni wykresu siły rozwarstwiającej) musi być równe zero (rys. 22b). W przypadku wielu kablów obliczenie należy przeprowadzić w podobny sposób; każdemu kablowi

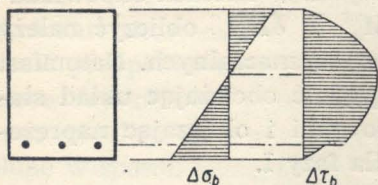


Rys. 23

odpowiada wówczas skok w wykresie naprężeń tnących (rys. 23a). Jeżeli kable są zagęszczone, można ominąć obliczenie wielkości  $\Delta S_k$  dla każdego z nich, biorąc całkowitą stratę sił w kablach równą  $\Delta N_b$ ; wówczas otrzymamy wykres przybliżony na odcinku między kablami (rys. 23b).



Układy statycznie niewyznaczalne. Naprężenia tnące powstałe pod wpływem wielkości  $\Delta M_b^{(0)}$  i  $\Delta N_b^{(0)}$  oraz  $\delta M_b^{(X)}$  i  $\delta N_b^{(X)}$  należy obliczać jak dla ustroju statycznie wyznaczalnego. Wielkości  $M_b^{(X)}$  i  $N_b^{(X)}$  dają rozkład naprężeń tnących jak w przekroju żelbetowym pracującym w fazie pierwszej (rys. 24), tzn. wyliczyć je można ze wzoru



Rys. 24

$$\Delta \tau_b^{(X)} = \frac{T_b^{(X)} S_c}{J_c b},$$

przy czym moment statyczny  $S_c$  należy brać z uwzględnieniem  $n$ -krotnego powiększenia powierzchni kabli, zaś

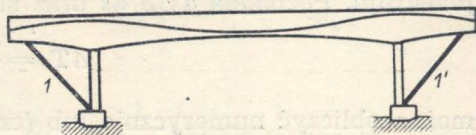
$$T_b^{(X)} = \frac{d M_b^{(X)}}{ds}.$$

Wszystkie podane wzory nie uwzględniają wpływu zmiennej wysokości belki na naprężenia tnące. Wpływ ten, często bardzo istotny, można uwzględnić na zasadach podobnych do stosowanych w teorii żelbetu.

#### 4. INNE ZAGADNIENIA

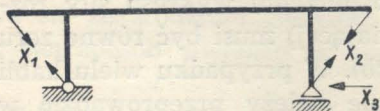
##### 4.1. Ustroje mieszane

Ustrojami mieszanymi nazywać będziemy układy sprężone, w których część kabli pozostaje swobodna, zaś część po naciągnięciu podlega obetonowaniu. Należą tu przede wszystkim mosty ramowe. Przykład tego rodzaju konstrukcji przedstawiono na rys. 25. Bardzo silne zespoły kabli 1 i 1' realizują tu zamocowanie belki, która oprócz tego jest dodatkowo sprężona kablami obetonowanymi. Kable 1 i 1' można uważać za swobodne. Ewentualne pokrycie warstwą ochronną betonu nie gra roli.



Rys. 25

Ustroje tego rodzaju należy rozwiązywać metodami rozdziału trzeciego. Liczba niewiadomych odpowiada stopniowi statycznej niewyznaczalności układu sprężonego. Najwygodniej jest przyjąć po jednej niewiadomej w każdym kablu swobodnym, pozostałe można założyć w przekrojach żelbetowych lub jako reakcje zewnętrzne.



Rys. 26

Układ przedstawiony na rys. 25 jest (przy założeniu przegubowego oparcia na fundamentach) trzykrotnie niewyznaczalny.

Przykład przyjęcia niewiadomych dla tego układu przedstawia rys. 26.

W omawianych ustrojach wielkości  $\delta_{i0}$  należy prawie zawsze obliczać z uwzględnieniem odkształceń osiowych prętów, tzn. przy użyciu



pełnych wzorów (3.2.4). W mniejszym stopniu odnosi się to również do wielkości  $\bar{\delta}_{ik}$  i  $\delta_{ik}$ .

Współczynniki  $\delta_{ik}$  należy obliczyć biorąc pod uwagę pełne szywności przekrojów żelbetowych w układzie, którego siatka geometryczna pokrywa się z osiami ciężkości przekrojów żelbetowych. Rzecz jasna, przy obliczaniu wielkości  $\delta_{i0}$  oraz  $\bar{\delta}_{ik}$  należy brać pod uwagę jedynie części betonowe i żelbetowe układu a pomijać kable, które nie ulegają odkształceniom plastycznym, co zresztą wynika z budowy odpowiednich wzorów. Obliczenie prostego układu mieszanego pokazane jest w przykładzie liczbowym 8.

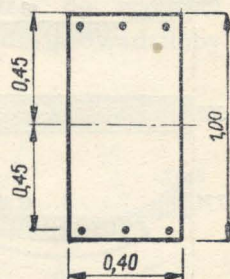
#### 4.2. Wpływ uzbrojenia betonu

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że sprężeniu podlega ustrój betonowy. W praktyce jednak beton zawsze jest uzbrojony żelazem miękkim, tzn. zwykłą stalą zbrojeniową.

W ustrojach, w których kable podlegają zabetonowaniu, uwzględnienie tego zbrojenia nie nasuwa żadnych zasadniczych trudności. Obliczenie należy przeprowadzać posługując się wzorami rozdziału trzeciego, przy czym do obliczenia  $F_z$ ,  $S_z$  i  $J_z$  należy brać pod uwagę pełny przekrój kabli i żelaza miękkiego (ewentualne różnice modułów sprężystości nie posiadają istotnego znaczenia, zresztą można je uwzględnić stosując odpowiednie współczynniki  $n$ ). Pewne różnice występują jedynie w obliczeniu wielkości wyjściowych  $M_b^0$  i  $N_b^0$ , ponieważ obciążenia wyjściowe działają na przekrój żelbetowy złożony z betonu i żelaza miękkiego. Dlatego wielkości wyjściowe należy obliczyć za pomocą wzorów (3.3.2.1), przy czym do  $F_c$  oraz  $J_c$  wchodzi jedynie żelazo miękkie.

Ustrój sprężony kablami swobodnymi staje się, w przypadku uzbrojenia części betonowej, ustrojem mieszanym i rozwiązanie należy prowadzić zgodnie ze wskazówkami p. 4.1. W obliczeniu wielkości wyjściowych należy kierować się uwagami podanymi wyżej. Konieczne jest w każdym przypadku obliczenie wielkości  $\delta_{i0}$ ,  $\bar{\delta}_{ik}$  i  $\delta_{ik}$  z pełnych wzorów (3.2.9). Następujący przykład wyjaśni omawiane zagadnienia.

*Przykład liczbowy 8.* Obliczymy wpływ pełzania betonu na zmianę siły w kablu dla belki z przykładu pierwszego, zakładając obustronne, symetryczne, jednakowe na całej długości zbrojenie żelazem miękkim według rys. 27 w ilości po 35 cm góra i dołem, razem 1,75‰. Moduł sprężystości tego zbrojenia  $E_{z1} = 2,1 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$ ,  $E_{z1}/E_b = 7$ .



Rys. 27



Kabel jest swobodny, zatem układ należy rozwiązywać jako mieszany. Za niewiadomą przyjmijmy siłę  $X_1$  w kablu. Współczynnik  $\delta_{11}$  obliczymy podobnie jak w przykładzie 1, lecz z uwzględnieniem sztywności przekrojów żelbetowych:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{E_b J_c} ds + \int \frac{N_{1b}^2}{E_b F_b} ds + \int \frac{N_{1z}^2}{E_z F_z} ds = 26,50 \cdot 10^{-5}.$$

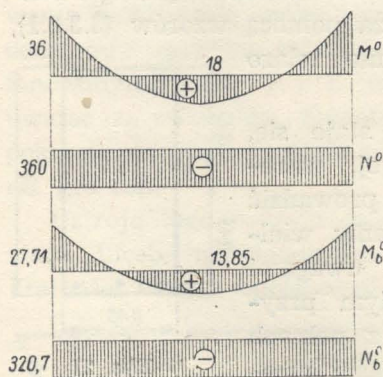
Wykresy podcałkowe  $M$  i  $N$  można brać z rys. 7, ponieważ wskutek symetrii uzbrojenia środka ciężkości  $C$  oraz  $C_b$  się pokrywają. Jak widać, wskutek zwiększenia sztywności belki, wielkość  $\delta_{11}$  uległa małemu zmniejszeniu. W dalszym ciągu obliczamy za pomocą wzorów (3.1.8) współczynniki  $m_r$  i  $n_r$ :

$$\begin{aligned} n_{N,1} &= -0,1091, & m_{M,1} &= -0,2294, \\ n_{N,2} &= 0,00595, & m_{M,2} &= 0,0263, \\ n_{N,3} &= -0,000216, & m_{M,3} &= -0,00201. \end{aligned}$$

Współczynniki  $n_{M,r}$  oraz  $m_{N,r}$  są równe zeru wskutek symetrii uzbrojenia. W dalszym ciągu obliczamy:

$$\begin{aligned} a_{M,1} &= 0,7706 \cdot 10^{-5}, & b_{N,1} &= 0,7423 \cdot 10^{-5}, \\ a_{M,2} &= -0,0884 \cdot 10^{-5}, & b_{N,2} &= -0,00405 \cdot 10^{-5}, \\ a_{M,3} &= 0,00676 \cdot 10^{-5}, & b_{N,3} &= 0,000147 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Wykresy wyjściowe (rys. 28) otrzymujemy ze wzorów (3.3.2.1):



Rys. 28

$$\begin{aligned} \frac{J_b}{J_c} &= 0,7697, & \frac{F_b}{F_c} &= 0,8909, \\ M_{(l/2)}^0 &= 18 \text{ tm}, & N^0 &= 360 \text{ t}, \\ M_{b(l/2)}^0 &= 13,85 \text{ tm}, & N_b^0 &= 320,7 \text{ t}. \end{aligned}$$

Korzystając (co tutaj ma zasadnicze znaczenie) z pełnych wzorów (3.2.9) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{10,1} &= 420,0 \cdot 10^{-5}, & \bar{\delta}_{11,1} &= 2,236 \cdot 10^{-5}, \\ \bar{\delta}_{10,2} &= -21,03 \cdot 10^{-5}, & \bar{\delta}_{11,2} &= -0,1849 \cdot 10^{-5}, \\ \bar{\delta}_{10,3} &= 0,668 \cdot 10^{-5}, & & \end{aligned}$$

Obecnie można przystąpić do obliczenia nadliczbowej:

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= -15,85, & x_{1,2} &= 1,46, & x_{1,3} &= -0,103, \\ \mu_1 &= -0,184, & w_{1,0} &= -86,1, & w_{1,2} &= -0,0748. \end{aligned}$$



Zatem

$$X_1(\varphi) = -(86,1 + 0,0748 \varphi^2) (1 - e^{-0,184 \varphi}).$$

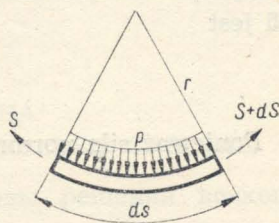
Liczbowo wynik różni się znacznie od otrzymanego w przykładzie 1; np. dla  $\varphi = 2$  jest  $X_1 = -26,6$ , zaś dla  $\varphi = 4$  jest  $X_1 = -45$ , zatem zmiany sił w kablu są do 30% mniejsze niż w belce nieuzbrojonej. Łatwo stwierdzić, że w przypadku tym trzy wyrazy szeregu  $x_{1,r}$  dają dostatecznie dokładne wyniki, szczególnie dla  $\varphi < 3$ . Również pominięcie wyrazu  $w_{1,2}$  dałoby błąd nie przekraczający 1,5% nawet dla  $\varphi = 4$ .

Jak widać, uzbrojenie wpływa wydatnie na procesy pełzania. Zaznaczyć przy tym należy, że o ile wpływ uzbrojenia w układach z kablami swobodnymi można traktować w pewnym sensie jako drugorzędny, to w układach z kablami obetonowanymi działanie uzbrojenia miękkiego jest jakościowo identyczne z działaniem kabli, a różnice mogą być tylko ilościowe.

W układach z kablami swobodnymi uzbrojenie zmniejsza zmiany w naciągach kabli, ponieważ zmniejsza obciążenia wyjściowe betonu, oraz wywołuje powstawanie sił wewnętrznych  $\Delta M_b$  i  $\Delta N_b$  skierowanych przeciwnie do obciążeń wzbudzających, które wywołują pełzanie. To samo dotyczy układów statycznie wyznaczalnych z kablami obetonowanymi oraz wielkości  $\Delta M_b^{(0)}$  i  $\Delta N_b^{(0)}$  w układach statycznie niewyznaczalnych tego typu. Jeżeli chodzi o wielkości nadliczbowe, to zbrojenie w zasadzie je powiększa.

#### 4.3. Ogólne uwagi o wpływie tarcia w ustrojach sprężonych kablami swobodnymi

W rozdziale drugim wszystkie rozwiązania otrzymano w założeniu, że nie ma tarcia między kablem i jego łożyskiem. W rzeczywistości tarcie istnieje, przy czym współczynnik tarcia może dochodzić do wartości  $\mu = 0,4$ . Ścisłe obliczenie z uwzględnieniem tego czynnika prowadziłoby do zagadnień nieliniowych. Dlatego poniżej podamy tylko ogólne uwagi na ten temat. Jest rzeczą oczywistą, że podane rozwiązania zachowują ważność (i to w przybliżeniu) tylko wtedy, gdy powstałe wskutek pełzania betonu różnice sił w sąsiednich przekrojach kabla są większe niż siły tarcia. W przeciwnym przypadku przesunięcie kabla względem łożyska nie jest możliwe i przekrój zachowuje się jak żelbetowy. Na rysunku 29 przedstawiono wycinek kabla o długości  $ds$ , przy czym promień krzywizny wynosi  $r$ . W kablu panuje naciąg początkowy  $S$ . Rzutowanie obciążeń na kierunek normalny do krzywej kabla daje



Rys. 29

$$p = S \frac{1}{r},$$



gdzie  $p$  jest intensywnością rozłożonej reakcji oddziaływania łożyska na kabel. Jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $\mu$ , a przez  $\Delta S$  oznaczymy zmianę siły w kablu powstałą wskutek pełzania betonu, to przesunięcie kabla względem łożyska będzie tylko wtedy możliwe, gdy spełniona jest nierówność

$$(4.3.1) \quad \left| \frac{d \Delta S}{ds} \right| > \left| S \frac{1}{r} \mu \right|.$$

Obliczenie układu sprężonego kablami swobodnymi można zatem przeprowadzić naprzód w założeniu, że odkształcenia kabli i belki są wspólne, czyli jak dla układu o kablach obetonowanych, następnie sprawdzić dla obliczonych w ten sposób wielkości  $\Delta S$  powyższą nierówność. Jeżeli nierówność nie jest spełniona, to obliczenie jest dokładne. Natomiast w przypadku gdy nierówność jest spełniona, dokładne obliczenie jest praktycznie niemożliwe.

Gdy różnice sił  $\Delta S$  nieznacznie przekraczają siły tarcia, to obliczenie dla kabli obetonowanych można uznać za wystarczająco dobre. Jeżeli natomiast siły  $\Delta S$  są znacznie większe od sił tarcia, lepiej będzie przeprowadzić obliczenie przyjmując, że kable są swobodne lub swobodne na części swojej długości.

*Przykład liczbowy 9.* Sprawdzimy podaną nierówność dla belki z przykładów 1 i 5. Współczynnik tarcia  $\mu = 0,3$ . Trasa kabla jest paraboliczna, wobec tego można przyjąć (dla paraboli płaskiej) stały promień krzywizny  $r = l^2/8f$ <sup>16)</sup>, gdzie  $f$  jest strzałką paraboli, zatem

$$r = \frac{18^2}{8 \cdot 0,4} = 101 \text{ m.}$$

Przy obliczeniu belki z kablami obetonowanymi otrzymuje się najmniejszą różnicę w siłach  $X_1$  między punktami 4 i 5; zatem na odcinku 4-5 jest

$$\frac{d \Delta S}{ds} \approx \frac{3,10}{1,8} = 1,72 \text{ t/mb.}$$

Ponieważ siła normalna od obciążenia stałego wynosi 360 t, zatem

$$\left| S \frac{1}{r} \mu \right| = 1,07 \text{ t/mb.}$$

Nierówność (4.4.1) jest spełniona, zaś na innych odcinkach będzie jeszcze wyraźniej spełniona. Dlatego założenie, że kable są swobodne, jest w tym przypadku uzasadnione, jakkolwiek, szczególnie w okolicy środka belki, nieściśle.

<sup>16)</sup> Przy dowolnym prowadzeniu kabla można przyjmować w przybliżeniu  $r = 1/y''$  (numerycznie).



Nierówność (4.3.1) może być spełniona w przypadku kabli silnie zakrzywionych, co może zdarzyć się na podporach wewnętrznych w belkach ciągłych. W tych przypadkach obliczenie ściślejsze wymagałoby traktowania ustroju jako mieszanego o kablach obetonowanych w okolicy podpór i swobodnych w przęsłach. Konieczne jest wówczas sprawdzenie, czy siły tarcia przenoszą różnice napięcia kabli z sąsiednich odcinków.

#### 4.4. Obciążenia późniejsze

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że wszystkie obciążenia wywołujące pełzanie przyłożone są w tej samej chwili, mianowicie  $t = 0$ , tzn. w chwili rozszalowania konstrukcji. W praktyce niejednokrotnie znaczna część obciążeń stałych może działać dopiero w późniejszym okresie (np. jezdnie w mostach). Dla tych obciążeń obliczenia należy przeprowadzać na zasadach ogólnych z tym, że konieczne jest odpowiednie zmniejszenie modułu pełzania. Dla obciążenia przyłożonego w chwili  $t = t_1$  moduł wynosić będzie  $\varphi_1(t) = \varphi(t) - \varphi(t_1)$ .

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] W. G l a n v i l l e, *Studies on Reinforced Concrete. The Creep or Flow of Concrete under Load*, Techn. Pap. 12.
- [2] R. D a v i s, *Flow of Concrete under Sustained Compressive Stress*. J. Amer. Conc. Inst., 1928, 1931.
- [3] C. W h i t n e y, *Plain and Reinforced Arches*, J. Amer. Conc. Inst., 1935.
- [4] F. D i s c h i n g e r, *Untersuchungen über die Knicksicherheit die elastische Verformung und das Kriechen*, Bauing., 1937.
- [5] F. D i s c h i n g e r, *Elastische und plastische, Verformung der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken*, Bauing., 1937.
- [6] N. A r u t i u n i a n, *Niekotoryje woprosy teorji polzuczesti*, Moskwa 1952.

#### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

#### НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

В настоящей работе приводятся общие методы решения всякого рода вопросов из обсуждаемой области.

В первой главе приводятся теоретические принципы, заимствованные из теории ползучести Д и ш и н г е р а.

Во второй главе рассматриваются системы предварительно напряженные посредством арматуры несвязанной с бетоном. Решение получается путем составления системы дифференциальных уравнений (2.1.3) для статически определимых систем или (2.2.1) для статически неопределимых систем. Неизвестными функциями модуля ползучести



$\varphi$  являются изменения сил в арматурных элементах, а также лишние неизвестные.

Для практических целей удобно решение при помощи степенных рядов (2.3.1). Последовательные коэффициенты  $x_{k,r}$  вычисляются из системы уравнений (2.3.3); достаточная точность получается для  $\varphi < 4$  при применении двух членов; для небольших значений  $\varphi$  достаточен нередко и один член ряда.

В третьей главе рассматриваются системы, предварительно напряженные посредством обетонированной арматуры. В первой части приводятся решения так функциональные, как и в виде рядов для статически определимых систем. Во второй части представлена общая теория статически неопределимых систем. С целью найти лишние неизвестные  $X_k(\varphi)$ , составляется система интегральных уравнений (3.2.7). Функции  $\delta_{i,0}(\varphi)$  выражают влияние пластических деформаций, вызванных начальной нагрузкой ( $M_b^0, N_b^0$ ), а функции  $\delta_{ik}(\varphi)$  — влияние пластических деформаций, вызванных постоянно действующей лишней неизвестной  $X_k=1$ .

Решение системы (3.2.7) принимается в виде степенных рядов (3.2.10). Сходимость рядов  $x_{k,r}$  в общем слабая; хорошо сходимые ряды  $w_{k,r}$  получаются при применении (3.2.12), причем коэффициент  $\mu_k$  следует принимать согласно (3.2.13). Чтобы получить точность порядка нескольких процентов достаточны два или три члена ряда  $w_{k,r}$ . Численный пример (7) объясняет технику расчета статически неопределимой системы. В первых двух таблицах содержится вычисление изменений  $\Delta M_b^{(0)}$  и  $\Delta N_b^{(0)}$  внутренних сил основной системы при предположении, что лишняя неизвестная  $X_k(\varphi)$  равна нулю. В следующих таблицах содержится расчет лишней неизвестной, а также ее влияние на внутренние силы системы  $\Delta M_b^{(X)}$ ,  $\Delta N_b^{(X)}$ . На практике вторую часть расчетов можно значительно сократить.

В четвертой главе обсуждаются комбинированные системы и влияния: армирования бетона, а также трения в системах, предварительно напряженных арматурой несвязанной с бетоном (свободной).

Некоторым достоинством методов, приведенных автором, является арифметизация расчетов, а также их сходство с обычными статическими вычислениями.

#### S u m m a r y

#### CONCRETE CREEP IN PRESTRESSED BEAM STRUCTURES

This paper is concerned with some general methods of solution of problems under consideration.

In the first section the theoretical foundations are discussed according to Dischinger's theory of creep. In the second section structures prestressed with non-grouted cables are considered. A solution is obtained



by means of the system (2.1.3) of differential equations for statically determinate, and the system (2.2.1) for statically indeterminate structures. The unknown functions of creep modulus  $\varphi$  are force changes in cables and the redundant forces.

For practical purposes the solution by means of power series (2.3.1) is convenient. The coefficients  $x_{k,r}$  are determined from the system of equations (2.3.3). Sufficient exactness for  $\varphi < 4$  is obtained with two terms, for small values of  $\varphi$  one term is often sufficient.

In the third section structures prestressed with grouted cables are considered. In the first part, solution in the form of a series as well as an approximate solution are given for statically determinate structures. In the second part a general theory of statically indeterminate structures is developed. In order to find the redundant forces  $X_k(\varphi)$  a system of integral equations (3.2.7) is established. The functions  $\bar{\delta}_{i0}(\varphi)$  represent the influence of plastic deformations due to the initial load ( $M_b^0$  and  $N_b^0$ ), and the functions  $\bar{\delta}_{ik}(\varphi)$  — the influence of plastic deformations due to the permanently acting redundant force  $X_k = 1$ . The solution of the system (3.2.7) is assumed in the form of the power series (3.2.10). The convergence of the series  $x_{k,r}$  is slow in general; more rapidly convergent series  $w_{k,r}$  are obtained using (3.2.12), where the coefficient  $\mu_k$  should be assumed according to (3.2.13). For a degree of exactness of several percent two or three terms of the series  $w_{k,r}$  are, in general, sufficient. The procedure, for statically indeterminate structures is illustrated by the numerical example 7. The first two tables present the computation of the changes  $\Delta M_b^{(0)}$  and  $\Delta N_b^{(0)}$  of internal forces in the basic system with the assumption that the redundant quantities  $X_1(\varphi)$  are equal to zero. The next tables are devoted to the computation of a redundant quantity and its influence on the internal forces of the structure  $\Delta M_b^{(X)}$  and  $\Delta N_b^{(X)}$ . In practice however the second part of the calculation can be reduced by some 30 to 50 percent.

In the fourth section «combined» structures are discussed as well as the influence of reinforcement and the problem of friction in structures prestressed with non-grouted cables.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 czerwca 1955 r.*