STAN NAPRĘŻENIA WYWOŁANY W PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ DZIAŁANIEM ŹRÓDŁA CIEPŁA ZMIENIAJĄCEGO SIĘ W CZASIE W SPOSÓB HARMONICZNY

Niech w punkcie A, który przyjmiemy za początek układu współrzędnych, działa skupione źródło ciepła o wydajności W, zmieniające się w sposób harmoniczny. Źródło to wywoła również w sposób harmoniczny zmieniające się pole temperatury T oraz w sposób harmoniczny zmieniające się pole naprężeń σ_{ij}. Załóżmy, że częstotliwość drgań źródła ciepła jest nieznaczna, tak że zjawisko rozpatrywane traktować można jako quasi-statyczne. Pominiemy zatem w równaniach przemieszczeniowych teorii sprężystości wyrazy zawierające przyśpieszenia przemieszczeń.

Pole temperatury określone jest przez

$$\nabla^2 T = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W(t)}{k}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z). \tag{1.1}$$

We wzorze tym $k=\lambda/\varrho c$, przy czym λ jest przewodnictwem właściwym, ϱ gęstością a c jest ciepłem właściwym. Ilość ciepła Q wytwarzana przez źródło na jednostkę czasu i objętości wynosi $Q=W\varrho c$. Symbol δ oznacza funkcję Diraca. Ze względu na harmoniczny charakter działania źródła przyjmiemy

$$T(x,y,z,t) = U(x,y,z)\,e^{i(\omega t-\varepsilon)}, \qquad W(t) = W_0 e^{i(\omega t-\varepsilon)}. \tag{1.2}$$

Równanie (1.1) doprowadzimy zatem do postaci

$$\nabla^2 U - i\eta U = -\frac{W_0}{k}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \qquad \eta=\frac{\omega}{k}. \tag{1.3}$$

Rozwiązaniem tego równania w układzie współrzędnych walcowych przy założeniu, że w nieskończoności $T=0$, jest funkcja

$$U = \frac{W_0}{2\pi^2 k}\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha(\alpha^2+\gamma^2+i\eta)^{-1} J_0(\alpha r)\cos\gamma z\, d\alpha\, d\gamma, \qquad r=(x^2+y^2)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Po wykonaniu odpowiednich całkowań otrzymamy

$$U = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1}\exp(-R\sqrt{i\eta}), \qquad R=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Zważywszy na wzór (1.2) otrzymujemy

$$T = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1} \exp[i(\omega t - \varepsilon) - R\sqrt{i\eta}]. \tag{1.6}$$

Pole temperatury [1] T otrzymamy jako część rzeczywistą funkcji (1.6):

$$T = \frac{W_0}{4\pi k} R^{-1} \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \cos\left(\omega t - \varepsilon - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right). \tag{1.7}$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia wygodnie jest posłużyć się potencjałem termosprężystego odkształcenia Φ. Funkcja ta związana jest z polem temperatury związkiem, [1],

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t T. \tag{1.8}$$

Tutaj ν jest stałą P o i s s o n a, a a_t jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej. Ze względu na harmoniczne działanie źródła przyjmujemy, że

$$\Phi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\, e^{i(\omega t - \varepsilon)}. \tag{1.9}$$

Zatem

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t U. \tag{1.10}$$

Rozwiązanie tego równania, zważywszy na związek (1.4), ma postać

$$\Psi = -\frac{W_0}{2\pi^2 k} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha(\alpha^2+\gamma^2)^{-1} (\alpha^2+\gamma^2+i\eta)^{-1} J_0(\alpha r) \cos\gamma z \, d\alpha\, d\gamma, \tag{1.11}$$

albo po wykonaniu zaznaczonych całkowań

$$\Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{a_t W}{4\pi k \eta} i [1 - \exp(-R\sqrt{i\eta})] R^{-1}. \tag{1.12}$$

Część rzeczywista funkcji Φ ze wzoru (1.9) przyjmuje postać [2]

$$\Phi = -\frac{1+\nu}{1-\nu} a_t \frac{W_0}{4\pi\omega} R^{-1} \left[\exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) \sin\left(R\sqrt{\frac{\omega}{2k}} - \omega t + \varepsilon\right) + \sin(\omega t - \varepsilon)\right]. \tag{1.13}$$

---

[1] Zakładamy, że $W(t) = W_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$. W przypadku $W(t) = W_0 \sin(\omega t - \varepsilon)$ należy brać urojoną część funkcji T.

[2] Zakładamy, że i tutaj $W(t) = W_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$.

Znajomość funkcji Φ zezwala na wyznaczenie stanu naprężenia ze związków

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} - \nabla^2 \Phi \delta_{ij}\right) \qquad (i, j = x, y, z). \tag{1.14}$$

Tutaj δ_{ij} oznacza symbol Kroneckera.

W rozpatrywanym zagadnieniu mamy do czynienia z symetrią sferyczną. We współrzędnych sferycznych otrzymamy też najprostsze wyrażenia na składowe stanu naprężenia. Mamy mianowicie

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_{rr} = 2G\left(\frac{d^2\Phi}{dR^2} - \nabla^2\Phi\right), \\ &\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2G\left(\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dR} - \nabla^2\Phi\right), \\ &\sigma_{r\varphi} = 0, \qquad \sigma_{\vartheta\varphi} = 0, \qquad \sigma_{r\vartheta} = 0, \\ &\nabla^2\Phi = \frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d\Phi}{dR}. \end{aligned}\right. \tag{1.15}$$

Korzystając ze wzoru (1.13) znajdziemy, że

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_{rr} = {} & \frac{(1+\nu)\alpha_t WG}{(1-\nu)\pi\omega}\left\{\exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\left[\left(1+R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\sin\left(\omega t - \varepsilon - \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) + R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right] - \sin(\omega t - \varepsilon)\right\} R^{-3}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} = {} & \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\sigma_{rr} - \frac{(1+\nu)\alpha_t WG}{(1-\nu)2\pi\omega} R^{-1} \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\cos\left(\omega t - \right. \\ & \left. -\varepsilon - R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) = -\sigma_{rr} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t 2GT, \\ \sigma_{r\varphi} = {} & 0, \qquad \sigma_{r\vartheta} = 0, \qquad \sigma_{\varphi\vartheta} = 0. \end{aligned}\right. \tag{1.16}$$

Na rysunku 1*a* podano wykres funkcji $\sigma_{\varphi\varphi}$, na rysunku 1*b* wykres funkcji σ_{rr} dla kilku wartości parametrów $\mu = R\sqrt{\omega/2k}$, $\tau = \omega t - \varepsilon$.

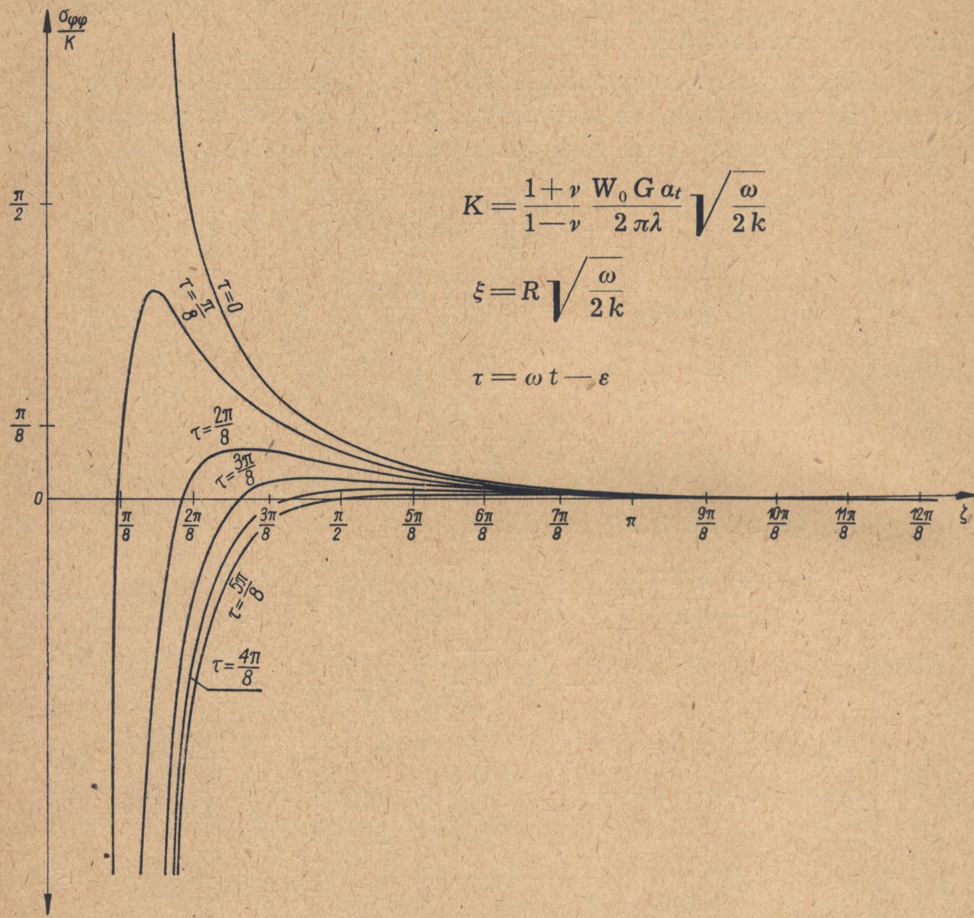
Niech w przestrzeni sprężystej działają źródła ciepła jednostajnie rozmieszczone na osi z. Mamy tu do czynienia z zagadnieniem osiowo symetrycznym.

Równanie przewodnictwa cieplnego ma tu postać

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{k}\delta(r). \tag{1.17}$$

Dla źródła liniowego o wydajności W na jednostkę długości i przy założeniu, że zmienia się ono w czasie w sposób harmoniczny, przyjmiemy, że

$$T(r,t)=U(r)\,e^{i(\omega t-\varepsilon)},\qquad W=W_0\,e^{i(\omega t-\varepsilon)}. \tag{1.18}$$



Rys. 1*a*

Równanie (1.17) doprowadzamy zatem do postaci

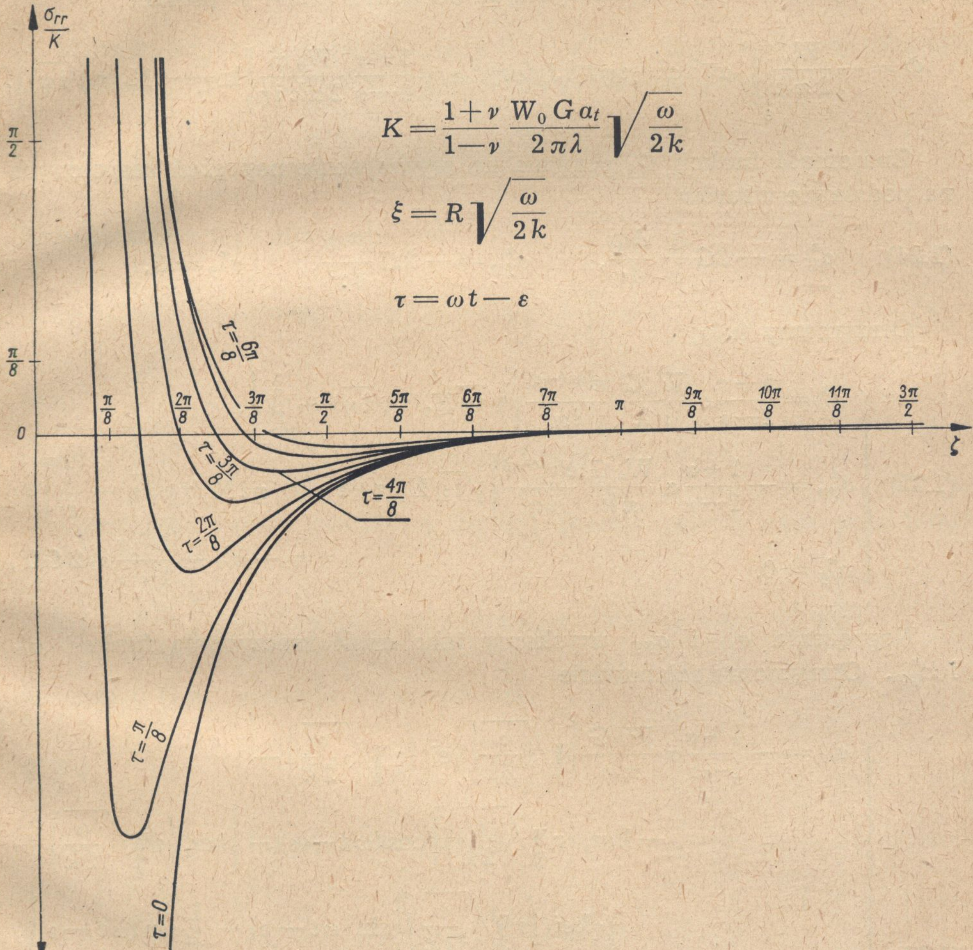
$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}-i\eta U=-\frac{W_0}{k}\delta(r). \tag{1.19}$$

Rozwiązaniem równania (1.19) jest funkcja

$$U=\frac{W_0}{2\pi k}\int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r)(\alpha^2+i\eta)^{-1}\,d\alpha=\frac{W_0}{2\pi k}K_0(r\sqrt{i\eta}). \tag{1.20}$$

Tutaj $K_0(r\sqrt{i\eta})$ jest zmodyfikowaną funkcją B e s s e l a trzeciego rodzaju tzw. funkcją B a s s e t a. Tak więc

$$T = \frac{W_0}{2\pi k} e^{i(\omega t - \varepsilon)} K_0(r\sqrt{i\eta}). \tag{1.21}$$



Rys. 1b

Zważywszy, że

$$e^{-i\nu\pi/2} K_\nu(r\sqrt{i\eta}) = ker_\nu(r\sqrt{\eta}) + i\, kei_\nu(r\sqrt{\eta}),$$

gdzie funkcje $ker_\nu(z)$, $kei_\nu(z)$ są funkcjami K e l v i n a, możemy rzeczywistą część funkcji (1.21) wyrazić wzorem

$$T = \frac{W_0}{2\pi k}\left[ker_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\cos(\omega t - \varepsilon) - kei_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\sin(\omega t - \varepsilon)\right]. \tag{1.22}$$

Z równania

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t T \tag{1.23}$$

wyznaczymy funkcję Φ korzystając ze wzoru (1.20) w postaci

$$\Phi = -\frac{W_0}{2\pi k}\int_0^\infty \alpha^{-1}(\alpha^2+i\eta)^{-1} J_0(\alpha r)\, d\alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{W_0\,\alpha_t}{2\pi k\, i\eta}\left[\ln\frac{a}{r} - K_0(r\sqrt{i\eta})\right].$$

Znajomość funkcji Φ pozwala na wyznaczenie naprężeń zespolonych na podstawie wzorów

$$\sigma_{rr}^* = -2G\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad \sigma_{\varphi\varphi}^* = -2G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{r\varphi}^* = 0. \tag{1.24}$$

Otrzymamy tutaj

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{rr}^* &= \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{W_0 G}{\pi k}\,\frac{e^{i(\omega t-\varepsilon)}}{i\eta}\left[\sqrt{i\eta}\,K_1(r\sqrt{i\eta}) - \frac{1}{r^2}\right],\\
\sigma_{\varphi\varphi}^* &= -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{W_0 G}{\pi k}\,\frac{e^{i(\omega t-\varepsilon)}}{i\eta}\left[\sqrt{i\eta}\,K_1(r\sqrt{i\eta}) + \eta i K_0(r\sqrt{i\eta}) - \frac{1}{r^2}\right] =\\
&= -\sigma_{rr}^* - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\, 2GT,\\
\sigma_{r\varphi}^* &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{1.25}$$

Naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ uzyskamy jako część rzeczywistą funkcji σ_{rr}^* i $\sigma_{\varphi\varphi}^*$. Otrzymamy mianowicie

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{W_0 G}{\pi\omega}\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\left[kei_1\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) -\right.\right.\\
&\quad \left. - ker_1\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\right]\cos(\omega t-\varepsilon) + \left[ker_1\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right) +\right.\\
&\quad \left.\left. + kei_1\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\right]\sin(\omega t-\varepsilon) + \frac{1}{r^2}\sin(\omega t-\varepsilon)\right\},\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -\sigma_{rr} - W_0\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\frac{G}{\pi k}\left[ker_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\cos(\omega t-\varepsilon) -\right.\\
&\quad \left. - kei_0\left(r\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\sin(\omega t-\varepsilon)\right],\\
\sigma_{r\varphi} &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{1.26}$$

Rozważmy jeszcze następujące zagadnienie. Niech w przestrzeni sprężystej w płaszczyźnie $x = \xi$ działają równomiernie rozłożone źródła cieplne. Wydajność tych źródeł na jednostkę płaszczyzny $x=\xi$ oznaczamy przez $W=W_0\, e^{i(\omega t-\varepsilon)}$. Równanie przewodnictwa ciepła ma tu postać

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{W}{k}\delta(x-\xi). \tag{1.27}$$

Wprowadzając funkcję $T(x,t)=U(x)\, e^{i(\omega t-\varepsilon)}$ doprowadzamy równanie różniczkowe cząstkowe (1.27) do równania zwyczajnego

$$\frac{d^2 U}{d x^2}-i\eta U=-\frac{W_0}{k}\delta(x-\xi). \tag{1.28}$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$U=\frac{W_0}{\pi k}\int\limits_0^\infty (a^2+i\eta)^{-1}\cos a(x-\xi)\, da=\frac{W_0}{2k}(i\eta)^{-1/2}\exp\left[-(x-\xi)\sqrt{i\eta}\right]. \tag{1.29}$$

Stąd

$$T=\frac{W_0}{2k}(i\eta)^{-1/2}\exp\left[i(\omega t-\varepsilon)-(x-\xi)\sqrt{i\eta}\right]. \tag{1.30}$$

Część rzeczywista powyższej funkcji określa poszukiwane pole temperatury:

$$T=\frac{W_0}{4k}(\eta)^{-1/2}\exp\left[-(x-\xi)\sqrt{\eta}\right]\cos\left[\omega t-\varepsilon-(x-\xi)\sqrt{\eta}\right]. \tag{1.31}$$

Równanie (1.8) redukuje się do postaci

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}a_t T. \tag{1.32}$$

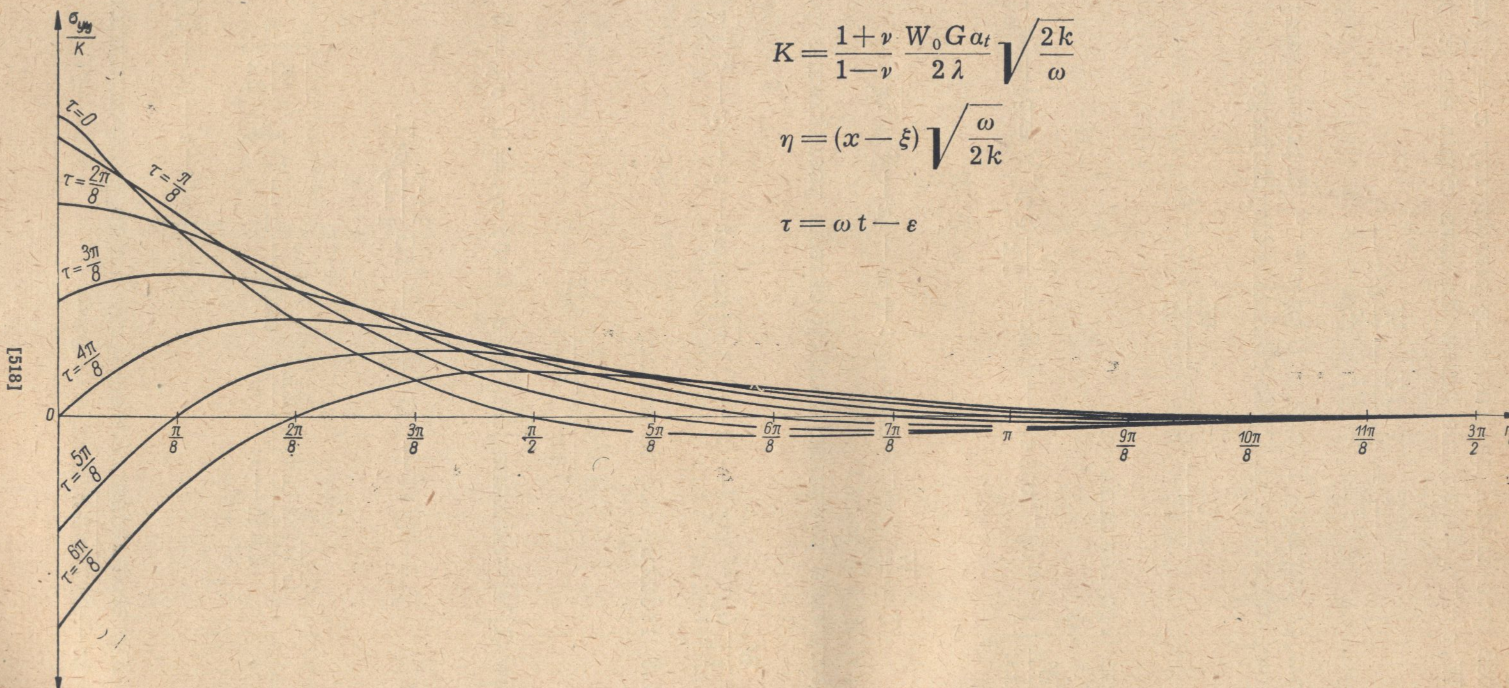
Ze wzorów (1.14) widoczne jest, że $\sigma_{xx}=0$, $\sigma_{zx}=0$, $\sigma_{zy}=0$, $\sigma_{xy}=0$ oraz

$$\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=-2G\frac{1+\nu}{1-\nu}a_t T. \tag{1.33}$$

Zatem

$$\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\frac{G W_0 a_t(1+\nu)}{2k(1-\nu)}\left(\frac{2k}{\omega}\right)^{1/2}\exp\left[-(x-\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]\times \\ \times\cos\left[\omega t-\varepsilon-(x-\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]. \tag{1.34}$$

Na rysunku 2 przedstawiono funkcję σ_{yy} dla rozmaitych wartości parametrów $\mu=(x-\xi)\sqrt{\omega/2k}$ oraz $\tau=\omega t-\varepsilon$.



$$K = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{W_0 G \alpha_t}{2\lambda}\sqrt{\frac{2k}{\omega}}$$

$$\eta = (x-\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}$$

$$\tau = \omega t - \varepsilon$$

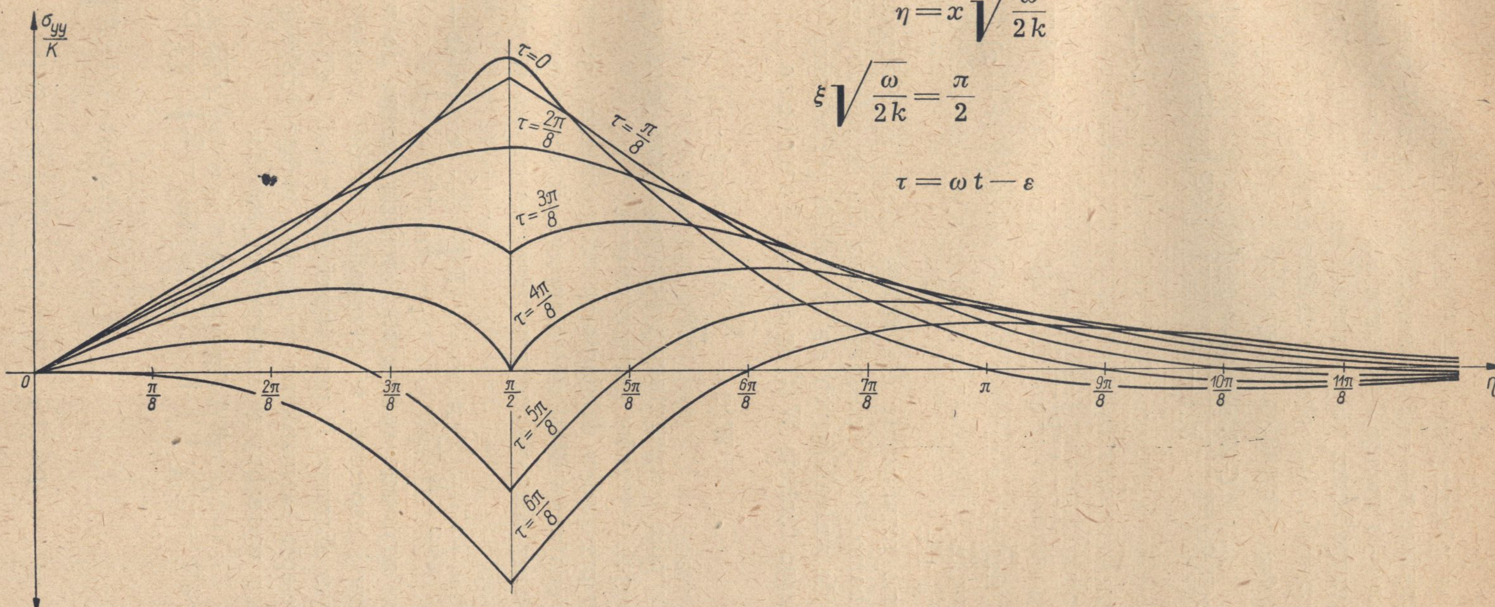
Rys. 2

$$K = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{W_0 G \alpha_t}{2\lambda} \sqrt{\frac{2k}{\omega}}$$

$$\eta = x \sqrt{\frac{\omega}{2k}}$$

$$\xi \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau = \omega t - \varepsilon$$



Rys. 3

Niech w płaszczyźnie $x=\xi$ działa dodatnie płaskie źródło ciepła, a w płaszczyźnie $x=-\xi$ ujemne źródło ciepła. W tym przypadku w płaszczyźnie $x=0$ mamy $T=0$ oraz $\sigma_{yy}=0$, $\sigma_{xx}=0$. Mamy tutaj do czynienia z przypadkiem półprzestrzeni sprężystej $(x>0)$, w której w płaszczyźnie $x=\xi$ działa płaskie źródło ciepła. W przypadku $x>\xi$ naprężenia σ_{yy}, σ_{zz} otrzymamy ze wzorów

$$(1.35)\quad \sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\frac{G W_0 \alpha_t (1+\nu)}{2k(1-\nu)}\left(\frac{2k}{\omega}\right)^{1/2}\left\{\exp\left[-(x-\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]\times\right.$$
$$\times\cos\left[\omega t-\varepsilon-(x-\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]-$$
$$\left.-\exp\left[-(x+\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]\cos\left[\omega t-\varepsilon-(x+\xi)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right]\right\}.$$

Dla $x<\xi$ należy na miejsce $(x-\xi)$ wstawić $(\xi-x)$.

Na rysunku 3 przedstawiono funkcję σ_{yy} dla rozmaitych wartości parametrów μ i τ.

Uzyskane rozwiązania dla źródła ciepła zmieniającego się w czasie w sposób harmoniczny posłużyć mogą dla skonstruowania rozwiązań dla źródeł ciepła zmieniających się w sposób periodyczny w czasie.

Rozwijając funkcję $W(t)$ w szereg Fouriera

$$(1.36)\quad W(t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t-\varepsilon_n),$$

otrzymamy pole temperatury i pole naprężeń jako wynik superpozycji poszczególnych wyrazów harmonicznych.

I tak w przypadku działania w nieograniczonej przestrzeni sprężystej źródła o wydajności $W(t)$ zmieniającego się w czasie w sposób periodyczny otrzymamy dla pola temperatury następujące wyrażenie:

$$(1.37)\quad T=\frac{1}{4\pi k R}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega n}{2k}}\right)\cos\left(n\omega t-\varepsilon_n-R\sqrt{\frac{\omega n}{2k}}\right).$$

Ponadto uzyskane rozwiązania posłużyć mogą do wyznaczenia pola temperatury i naprężeń w przypadku źródeł ciepła rozmieszczonych w dowolnym obszarze Γ przestrzeni sprężystej. Jeśli w obszarze Γ działa źródło ciepła harmoniczne w czasie i będące funkcją miejsca, to pole temperatury wyrazimy w następujący sposób:

$$T(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi k}\iiint_{(\Gamma)}\frac{W_0(\xi,\eta,\zeta)}{R}\exp\left(-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\omega t-\varepsilon-R\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

gdzie

$$R=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}.$$

Literatura cytowana w tekście

[1] E. Melan i H. Parcus, *Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder,* Wiedeń 1953.

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ ИСТОЧНИКА ТЕПЛА, ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ГАРМОНИЧЕСКИ ВО ВРЕМЕНИ

Работа задается целью определить напряженное состояние, вызванное действием источника тепла, изменяющегося гармонически во времени. Рассматриваются последовательно: действие сосредоточенного источника, линейного источника и наконец плоского источника, находящегося в бесконечном упругом пространстве. Из решения уравнения теплопроводности (1.1) получают поле температуры. При использовании потенциала термоупругого перемещения Φ, связанного с температурой уравнением (1.8), определяют из уравнений (1.14) составляющие напряженного состояния σ_{ij}. Задача решается при пренебрежении инерционными силами, следовательно, как квазистатическая.

Summary

THE STATE OF STRESS IN AN ELASTIC SPACE DUE TO A SOURCE OF HEAT VARYING WITH TIME IN A HARMONIC MANNER

This paper seeks to determine stresses due to a heat source varying with time in a harmonic manner. A concentrated, linear and plane source is considered in an infinite elastic space. From the solution of the heat equation (1.1), the temperature field is obtained. Using the thermoelastic potential of displacements Φ, related to the temperature by the Eq. (1.8), the stress components σ_{ij} are found from the Eqs. (1.14). The problem is solved disregarding the inertia forces. It is therefore considered to be a quasi-static problem.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 marca 1957 r.