

JÓZEF WIECKOWSKI

OBLICZANIE MASY WODY TOWARZYSZĄCEJ  
PRZY DRGANIACH POPRZECZNYCH  
SILNIKÓW OKRĘTOWYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
LXXVI .







1. Zagadnienie wpływu wody na drgania sprężyste kadłuba statku rozpatrywane jest od przeszło trzydziestu lat; zostało ono zapoczątkowane pracami H. W. Nichollsa, [5], G. I. Taylora, [4], i F. M. Lewisa, [3]. Zajmowano się jednak w nich przede wszystkim wpływem wody na kołysania lub drgania giętne i skrętne kadłuba statku jako całości pomijając wpływ wody na drgania elementów kadłuba np. przy drganiach poprzecznych silników okrętowych.

Rozwiązanie tego ostatniego zadania przy różnych upraszczających warunkach podał w 1953 r. O. Grimm, [1]. W pracy tej założono, że wpływ wody na drgania, który można scharakteryzować tzw. pozorną masą wody towarzyszącej, można z wystarczającą dokładnością uwzględnić przeprowadzając obliczenia przy założeniu sinusoidalnej zmienności linii ugięcia w przestrzeni, nawet jeżeli to nie odpowiada ściśle rzeczywistości, oraz przy całkowitym pominięciu wpływu powierzchni swobodnej i skończonych wymiarów drgającego elementu. O. Grimm wyraził w swojej pracy pogląd, że dokładniejsze obliczenia nie opłacają się, gdyż niewielkie zwiększenie ścisłości obliczeń powoduje zbyt duże trudności rachunkowe, niewspółmierne do wartości otrzymanych wyników.

W niniejszej pracy zajmiemy się obliczeniem gęstości pozornej masy wody towarzyszącej przy drganiach poprzecznych silnika w oparciu o równania płaskiego potencjalnego przepływu cieczy idealnej<sup>1</sup> i przy założeniu spokojnej (bez fal swobodnych) powierzchni morza oraz porównaniem otrzymanych wyników z wynikami O. Grimma. Ponieważ pozorną masę wody towarzyszącej zmienia się dość znacznie z częstością tylko dla małych częstości drgań (rzędu powolnych kołysań statku), przeto obliczenia hydrodynamiczne wykonamy przy założeniu, że częstość kątowna drgań  $\omega \rightarrow +\infty$ .

2. Przyjmijmy układ współrzędnych prostokątnych Kartezjusza jak przedstawiono na rys. 1, gdzie oś  $x$  leży na powierzchni swobodnej, a oś  $y$  na osi symetrii przekroju poprzecznego kadłuba statku. Kon-

---

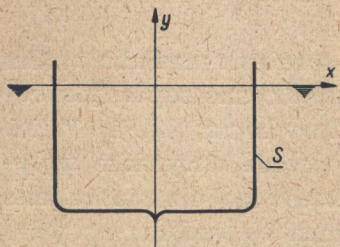
<sup>1</sup> Rozwiązanie zadania przy założeniu ruchu laminarnego lub burzliwego wody, [6], przedstawia tak wielkie trudności matematyczne, że dla potrzeb technicznych zadowolamy się rozwiązaniem opartym na modelu cieczy idealnej.



tur przekroju poprzecznego oznaczmy przez  $S$ . Załóżmy, że drgania harmonicznego konturu  $S$  mają postać

$$(2.1) \quad v_n = f(M) \sin \omega t,$$

gdzie  $M$  oznacza pewien punkt na konturze  $S$ ,  $v_n$  składową normalną prędkość drgań na  $S$  oraz  $\omega$  częstość kątową drgań.



Rys. 1

Wtedy potencjał przepływu  $\varphi$  można przedstawić równaniem

$$(2.2) \quad \varphi(x, y; t) = \varphi_1(x, y) \sin \omega t + \varphi_2(x, y) \cos \omega t.$$

Dla przypadku  $\omega \rightarrow +\infty$  otrzymujemy

$$(2.3) \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(x, y; t) = \varphi_1(x, y) \sin \omega t,$$

co wynika z warunków brzegowych, [2] i [7].

Dla naszego przypadku wystarczy zatem wyznaczyć funkcję  $\varphi_1(x, y)$ . Oczywiście  $\varphi_1$  musi spełniać równanie Laplace'a

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0$$

oraz warunki brzegowe na konturze  $S$ :

$$(2.5.1) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = f(M)$$

$$(2.5.2) \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{dla} \quad y = 0,$$

oraz

$$(2.5.3) \quad \lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} \varphi_1 = 0.$$

Równanie (2.4) z warunkami brzegowymi (2.5) rozwiążemy w ortogonalnych eliptycznych współrzędnych krzywoliniowych  $\alpha, \beta$  związanych ze współrzędnymi  $x, y$  równaniem

$$(2.6) \quad y + ix = -c \cosh(\alpha + i\beta)$$

lub

$$(2.7.1) \quad x = -c \cosh \alpha \cos \beta,$$

$$(2.7.2) \quad y = -c \sinh \alpha \sin \beta,$$

gdzie  $c$  jest połową ogniskowej elips oraz  $\alpha = \text{const.}$



Rozpatrywane równanie wraz z warunkami brzegowymi przyjmuje dla podanych współrzędnych krzywoliniowych i eliptycznego konturu  $S$  postać

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \beta^2} = 0,$$

$$(2.9.1) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = [h]_{\alpha=\alpha_0} f(M),$$

$$(2.9.2) \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{dla} \quad \beta = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$(2.9.3) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_1 = 0,$$

gdzie  $\alpha = \alpha_0$  jest równaniem konturu  $S$  we współrzędnych krzywoliniowych. Mamy również

$$(2.10) \quad h = c \left[ \frac{1}{2} (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

3. Równanie (2.8) z warunkami brzegowymi (2.9) rozwiążemy poszukując  $\varphi_1$  w postaci szeregu

$$(3.1) \quad \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta).$$

Wtedy

$$(3.2) \quad \varphi_{1n} = e^{-n\alpha} (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta).$$

jest całką szczególną równania (2.8) spełniającą warunek brzegowy (2.9.1). Aby był spełniony warunek (2.9.2),  $a_n$  i  $b_n$  muszą spełniać układ równań

$$(3.3.1) \quad a_n \cos n \frac{\pi}{2} + b_n \sin n \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$(3.3.2) \quad a_n \cos n \frac{\pi}{2} - b_n \sin n \frac{\pi}{2} = 0.$$

Aby mogło być  $a_n \neq 0$  lub  $b_n \neq 0$ , musi być zatem spełnione równanie

$$(3.4) \quad \sin n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dla  $n = 2k$ ,  $\sin n \pi/2 = 0$ . Ponieważ wtedy  $\cos n \pi/2 \neq 0$ , to otrzymujemy

$$(3.5.1) \quad a_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, +\infty),$$

$$(3.5.2) \quad b_{2k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, +\infty);$$

współczynniki ostatnie mogą być obrane dowolnie.



Dla  $n = 2k + 1$ ,  $\cos n\pi/2 = 0$ . Ponieważ wtedy  $\sin n\pi/2 \neq 0$ , przeto otrzymujemy

$$(3.5.3) \quad b_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, +\infty),$$

$$(3.5.4) \quad a_{2k+1} \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, +\infty)$$

i współczynniki  $a_{2k+1}$  mogą być dowolnie obrane.

Zatem ogólne rozwiązanie równania (2.8) z warunkami (2.9.2) i (2.9.3) można przedstawić w postaci szeregu

$$(3.6) \quad \varphi_1(a, \beta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} e^{-(2k+1)\alpha} \cos(2k+1)\beta + \sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k} e^{-2k\alpha} \sin 2k\beta.$$

Można teraz tak dobrać współczynniki w szeregu (3.6), aby był spełniony pozostały jeszcze warunek (2.9.1). W tym celu wprowadzimy oznaczenie

$$(3.7) \quad f(M)[h]_{\alpha=\alpha_0} = F(\alpha_0, \beta)$$

oraz obliczymy pochodną względem  $\alpha$  potencjału  $\varphi_1$  na konturze elipsy:

$$(3.8) \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) a_{2k+1} e^{-(2k+1)\alpha_0} \cos(2k+1)\beta - \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} 2k b_{2k} e^{-2k\alpha_0} \sin 2k\beta.$$

Rozwijając (3.7) w szereg postaci (3.8) otrzymamy po wykonaniu rachunków następujące całki dla  $a_{2k+1}$  i  $b_{2k}$ :

$$(3.9.1) \quad a_{2k+1} = -\frac{4 e^{(2k+1)\alpha_0}}{(2k+1)\pi} \int_0^{\pi/2} [h]_{\alpha=\alpha_0} f(M) \cos(2k+1)\beta d\beta,$$

$$(3.9.2) \quad b_{2k} = -\frac{2 e^{2k\alpha_0}}{k\pi} \int_0^{\pi/2} [h]_{\alpha=\alpha_0} f(M) \sin 2k\beta d\beta.$$

W przypadku gdy kontur nie jest eliptyczny, trzeba postąpić nieco inaczej. Warunek brzegowy (2.9.1) komplikuje się wtedy znacznie, gdyż pochodna potencjału  $\varphi_1$  w kierunku normalnej zewnętrznej wyraża się dość złożonym równaniem w postaci

$$(3.10) \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_{\alpha=\alpha(\beta)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \cos(n, x) - \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(n, y) \right) \right]_{\alpha=\alpha(\beta)} + \\ + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \cos(n, y) - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos(n, x) \right) \right]_{\alpha=\alpha(\beta)}$$



gdzie  $\alpha = \alpha(\beta)$  jest równaniem konturu  $S$  we współrzędnych krzywoliniowych, natomiast wyznacznik

$$(3.11) \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix},$$

jest jacobianem przekształcenia (2.6).

Wprowadzając oznaczenia

$$(3.12.1) \quad \Psi_1(\beta) \equiv \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial y}{\partial \beta} \cos(n, x) - \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(n, y) \right]_{\alpha=\alpha(\beta)},$$

$$(3.12.2) \quad \Psi_2(\beta) \equiv \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial x}{\partial \beta} \cos(n, y) - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cos(n, x) \right]_{\alpha=\alpha(\beta)},$$

można zapisać warunek brzegowy (2.5.1) dla rozwiązania (3.6) w postaci

$$(3.13) \quad f(M)[h]_{\alpha=\alpha(\beta)} = - \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} [(2k+1) \Psi_1(\beta) e^{-(2k+1)\alpha(\beta)} \cos(2k+1)\beta + (2k+1) \Psi_2(\beta) e^{-(2k+1)\alpha(\beta)} \sin(2k+1)\beta] - \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k} [2k \Psi_1(\beta) e^{-2k\alpha(\beta)} \sin 2k\beta - 2k \Psi_2(\beta) e^{-2k\alpha(\beta)} \cos 2k\beta].$$

Dobór współczynników  $a_{2k+1}$  i  $b_{2k}$  może być teraz dokonany jakąkolwiek metodą, np. metodą najmniejszych kwadratów. Ponieważ w końcowym rachunku korzystać będziemy nie z pochodnych potencjału, a z samego potencjału  $\varphi_1$ , błędy wynikające z przybliżonego rachunku [uwzględnienia skończonej liczby wyrazów szeregu (3.1)] nie będą duże.

4. Przy obliczaniu sprężystych drgań poprzecznych silników okrętowych, w których bierze udział zarówno fundament jak i sąsiadujące części poszycia, istotną rolę odgrywają siły hydrodynamiczne proporcjonalne do przyspieszenia. Składnik ciśnienia dynamicznego, proporcjonalny do przyspieszenia, wyraża się według równania Bernoulliego zależnością

$$(4.1) \quad P_d = - \rho_w \varphi_1 \omega \cos \omega t,$$

gdzie  $\rho_w$  oznacza gęstość wody.

Obciążenie ciągłe na konturze  $S$  od ciśnienia dynamicznego  $P_d$  jest

$$(4.2) \quad \mathbf{q} = - P_d \mathbf{n} = \rho_w \mathbf{n} \varphi_1 \omega \cos \omega t,$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnej zewnętrznej do konturu  $S$ .



Ponieważ składową normalną  $w_n$  przyspieszenia dowolnego punktu drgającego konturu można przedstawić w postaci

$$(4.3) \quad \mathbf{w}_n = \mathbf{n} f(M) \omega \cos \omega t,$$

zatem współczynnik proporcjonalności pomiędzy  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{w}_k$ , który oznaczymy przez  $-\Theta$ , jest wielkością skalarną o wymiarze gęstości i wyraża się zależnością

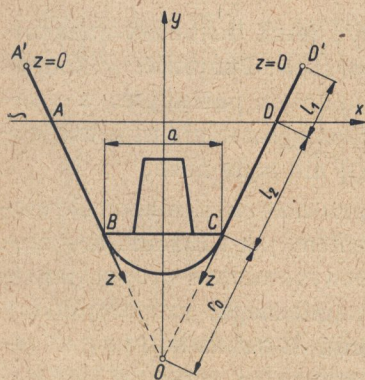
$$(4.4) \quad -\Theta = \frac{\rho_w \varphi_1}{f(M)}.$$

Zatem omówione wyżej siły hydrodynamiczne zmieniają pozornie gęstość powierzchniową drgających sprężystie elementów kadłuba o wielkość

$$(4.5) \quad \Theta = -\frac{\rho_w \varphi_1}{f(M)},$$

przy czym pozorny wzrost gęstości występuje jedynie dla ruchu w kierunku normalnej zewnętrznej.

W rozważaniach będzie nas interesowała przede wszystkim wartość ilorazu  $\Theta/\rho_w$  o wymiarze długości. Iloraz ten ma prostą interpretację: jest to grubość warstwy *pozornej* masy wody towarzyszącej, drgającej wraz z poszyciem kadłuba.



Rys. 2

5. Przejdziemy teraz do obliczenia drgań poprzecznych fundamentu silnika i poszycia statku przyjmując do obliczeń schemat na rys. 2, który może w przybliżeniu odpowiadać np. drganiom poprzecznym silnika w kutrach stalowych. Pomińmy na razie wpływ sił hydrodynamicznych traktując te obliczenia jako wstępne, konieczne do wyznaczenia rozkładu prędkości na drgającym konturze.

Obliczenia wykonamy przy następujących założeniach:

(1) Pomijamy zmianę kształtu linii drgającej poszycia statku w przekrojach poprzecznych uważając ją za stałą wzdłuż długości fundamentu. Umożliwia to rozpatrywanie drgań tylko w jednym przekroju i zastąpienie poszycia równoważnym kontinuum jednowymiarowym (belką).

(2) Silnik i fundament przyjmujemy za doskonale sztywne w porównaniu ze sztywnością poszycia.



(3) Zamocowanie w punktach  $A'$  i  $D'$  (rys. 2) będziemy traktowali jak zamocowania przegubowe, gdyż odkształcenia są tam stosunkowo niewielkie i można przyjąć, że są zawarte w granicach nieuniknionych luzów połączeń.

(4) Zamocowania w punktach  $B$  i  $C$  (rys. 2) będziemy traktowali jako doskonale sztywne, gdyż odkształcenia są tam stosunkowo duże.

(5) Wręgi  $A'AB$  i  $D'DC$  będziemy uważali za prostoliniowe, co wprawdzie również nie odpowiada rzeczywistości, jednak stanowi dość dobre przybliżenie.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$l_1 = \overline{AA'} = \overline{DD'}$  niezwilżona długość wręgi,

$l_2 = \overline{AB} = \overline{DC}$  zwilżona długość wręgi,

$l = l_1 + l_2$  całkowita długość wręgi,

$\delta$  kąt obrotu silnika względem położenia równowagi,

$r_0$  chwilowy promień obrotu dla punktów  $B$  i  $C$  fundamentu,

$\Psi$  kąt pomiędzy wręgą i podstawą silnika w położeniu równowagi,

$a = \overline{BC}$  szerokość fundamentu,

$\Delta\Psi$  zmiana kąta  $\Psi$  przy obrocie silnika o kąt  $\delta$ ,

$\zeta$  chwilowe przesunięcie punktów wręgi lub fundamentu podczas drgań (przy czym  $\zeta > 0$ , gdy przesunięcie jest skierowane na zewnątrz konturu odpowiadającego położeniu równowagi).

Wprowadzimy również oznaczenie  $\delta = \Psi - \pi/2$ .

Przy założeniu doskonale sztywnego układu i przegubowych połączeń w punktach  $A'$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D'$  oraz nieruchomych punktów  $A'$  i  $D'$  otrzymujemy łatwo następujące związki geometryczne dla małych drgań:

$$(5.1) \quad r_0 = \frac{a}{2 \sin \delta},$$

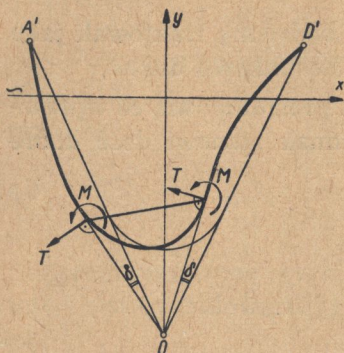
$$(5.2) \quad \Delta\Psi = \zeta \left( \frac{1}{l} + 2 \frac{\sin \delta}{a} \right),$$

$$(5.3) \quad \delta = \frac{\zeta}{r_0}.$$

6. Ułożymy teraz warunki brzegowe dla równania drgań poszycia statku. Wzajemne oddziaływanie fundamentu i poszycia w punktach  $B$  i  $C$  można sprowadzić do momentu gnącego  $M$  i siły poprzecznej  $T$ . Niech  $M$  i  $T$  oznaczają moment gnący i siłę poprzeczną, będące oddziaływaniem poszycia na fundament (rys. 3). Oznaczając jeszcze moment bez-



władności masy silnika i fundamentu względem chwilowego środka obrotu przez  $J$  możemy napisać równanie ruchu silnika i fundamentu przy małych drganiach w postaci



Rys. 3

$$(6.1) \quad J \ddot{\delta} = 2M + 2Tr_0.$$

Ze związku (5.3) znajdziemy

$$(6.2) \quad \ddot{\delta} = \frac{\left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right]_{z=l}}{r_0},$$

zatem możemy napisać

$$(6.3) \quad \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right]_{z=l} = \frac{2r_0}{J} (M + Tr_0).$$

Ponieważ

$$(6.4) \quad M = -EI \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right]_{z=l}$$

oraz

$$(6.5) \quad T = -EI \left[ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3} \right]_{z=l},$$

przeto otrzymujemy po podstawieniu (6.4) i (6.5) do wzoru (6.3) następujący warunek brzegowy dla  $z = l$ :

$$(6.6) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2 \frac{r_0 EI}{J} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + r_0 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3} \right) = 0.$$

Drugi warunek brzegowy dla  $z = l$  otrzymamy z warunku niezmienności kąta  $\Psi$ . Ponieważ połączenie w punktach B i C jest sztywne, kąt ugięcia w punkcie B lub C będzie co do wartości bezwzględnej równy kątowi obrotu fundamentu  $\delta$ . Zatem mamy

$$(6.7) \quad \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right]_{z=l} = -\delta.$$

Uwzględniając zależność (5.3) otrzymamy dla  $z = l$

$$(6.8) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\zeta}{r_0} = 0.$$

Ostatecznie więc równanie drgań poszycia będzie analogiczne do odpowiedniego równania dla belki:

$$(6.9) \quad EI \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^4} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$



Warunki brzegowe będą następujące:

$$(6.10.1) \quad \zeta = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0,$$

$$(6.10.2) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0,$$

$$(6.10.3) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + 2 \frac{r_0 EI}{J} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + r_0 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad z = l,$$

$$(6.10.4) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\zeta}{r_0} = 0 \quad \text{dla} \quad z = l.$$

Przedstawiając funkcję  $\zeta(z, t)$  w postaci

$$\zeta(z, t) = \zeta_0(z) \cos \omega t,$$

otrzymujemy z równania (6.9) równanie dla  $\zeta_0(z)$

$$(6.11) \quad EI \frac{d^4 \zeta_0}{dz^4} - \omega^2 \rho \zeta_0 = 0,$$

oraz z warunków brzegowych (6.10) warunki brzegowe dla funkcji  $\zeta_0(z)$ :

$$(6.12.1) \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0,$$

$$(6.12.2) \quad \frac{d^2 \zeta_0}{dz^2} = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0,$$

$$(6.12.3) \quad \omega^2 \zeta_0 - 2 \frac{r_0 EI}{J} \left( \frac{d^2 \zeta_0}{dz^2} + r_0 \frac{d^3 \zeta_0}{dz^3} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad z = l,$$

$$(6.12.4) \quad \frac{d \zeta_0}{dz} + \frac{\zeta_0}{r_0} = 0 \quad \text{dla} \quad z = l.$$

7. Ogólne rozwiązanie równania (6.11) z warunkami brzegowymi (6.12), jeśli przyjąć oznaczenie

$$(7.1) \quad k = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho}{EI}},$$

jest następujące:

$$(7.2) \quad \zeta = C_1 \cosh kz + C_2 \sinh kz + C_3 \cos kz + C_4 \sin kz.$$

Warunki brzegowe (6.12.1) i (6.12.2) prowadzą do równań

$$(7.3) \quad C_1 = C_3 = 0,$$

natomiast warunki (6.12.3) i (6.12.4) po wprowadzeniu parametrów bezwymiarowych

$$(7.4.1) \quad x = kl,$$

$$(7.4.2) \quad \mu = \frac{J}{2 \rho l r_0^2},$$

$$(7.4.3) \quad \nu = \frac{l}{r_0}$$



prowadzą do równań

$$(7.5.1) \quad C_2(\mu \kappa^2 \sinh \kappa - \nu \sin \kappa - \kappa \cosh \kappa) + \\ + C_4(\mu \kappa^2 \sin \kappa + \nu \sin \kappa + \kappa \cos \kappa) = 0,$$

$$(7.5.2) \quad C_2(\kappa \cosh \kappa + \nu \sinh \kappa) + C_4(\kappa \cos \kappa + \nu \sin \kappa) = 0.$$

Z warunku istnienia niezerowych rozwiązań dla  $C_2$  i  $C_4$  otrzymujemy po przekształceniach równanie częstości w następującej postaci:

$$(7.6) \quad \frac{\mu \kappa^2 \operatorname{tgh} \kappa - \nu \operatorname{tgh} \kappa - \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tgh} \kappa} = \frac{\mu \kappa^2 \operatorname{tg} \kappa + \nu \operatorname{tg} \kappa + \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tg} \kappa}.$$

W celu znalezienia kolejnych wartości pierwiastków równania (7.6) dla danych  $\mu$  i  $\nu$  sporządzamy wykresy funkcji

$$(7.7.1) \quad F_1(\kappa) = \frac{\mu \kappa^2 \operatorname{tgh} \kappa - \nu \operatorname{tgh} \kappa - \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tgh} \kappa}$$

oraz funkcji

$$(7.7.2) \quad F_2(\kappa) = \frac{\mu \kappa^2 \operatorname{tg} \kappa + \nu \operatorname{tg} \kappa + \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tg} \kappa}.$$

Ponieważ dla  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $F_1(\kappa)$  i  $F_2(\kappa)$  są nieokreślone, obliczymy granice  $F_1(\kappa)$  i  $F_2(\kappa)$  przy  $\kappa \rightarrow 0$ . Stosując znane sposoby obliczania granic otrzymujemy

$$(7.8.1) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} F_1(\kappa) = -1,$$

$$(7.8.2) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} F_2(\kappa) = 1.$$

Do obliczeń przyjmujemy następujące wartości  $^2$   $l$ ,  $r_0$ ,  $J$  i  $\rho$ :

$$l = 3 \text{ m}, \quad r_0 = 2 \text{ m}, \quad J = 7,2 \cdot 10^2 \text{ kG sek}^2 \text{ m}, \quad \rho = 2 \cdot 10^2 \text{ kG sek}^2 \text{ m}^{-2}.$$

Otrzymamy wtedy następujące wartości dla bezwymiarowych parametrów:  $\nu = 1,5$ ,  $\mu = 0,1$  oraz następujące funkcje  $F_1$  i  $F_2$ :

$$(7.9.1) \quad F_1(\kappa) = \frac{0,1 \kappa^2 \operatorname{tgh} \kappa - 1,5 \operatorname{tgh} \kappa - \kappa}{\kappa + 1,5 \operatorname{tgh} \kappa},$$

$$(7.9.2) \quad F_2(\kappa) = \frac{0,1 \kappa^2 \operatorname{tg} \kappa + 1,5 \operatorname{tg} \kappa + \kappa}{\kappa + 1,5 \operatorname{tg} \kappa}.$$

Wykresy funkcji  $F_1(\kappa)$  i  $F_2(\kappa)$ , z których można odczytać kolejne wartości  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  i  $\kappa_3$  zostały przedstawione na rys. 4.

<sup>2</sup> Odpowiadają one orientacyjnie wartościom parametrów dla kuteńców stalowych.

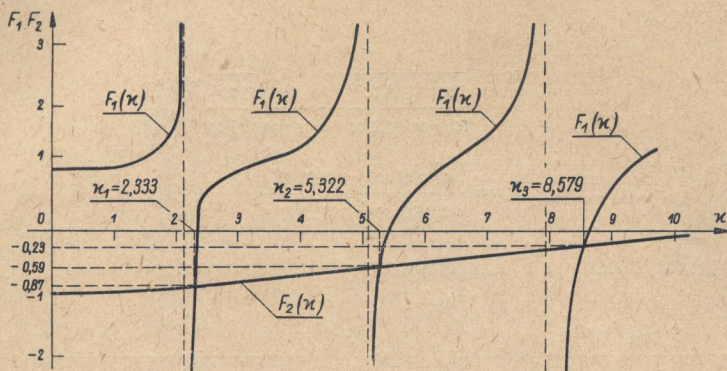


Otrzymaliśmy

$$\kappa_1 = 2,333, \quad \kappa_2 = 5,322, \quad \kappa_3 = 8,579.$$

Stałe  $C_2$  i  $C_4$  dla powyższych wartości  $\kappa$  są ze sobą związane zależnością

$$(7.10) \quad C_{2i} = \lambda_i C_{4i}.$$



Rys. 4

Wielkość  $\lambda_i$  można obliczyć np. z równania (7.5.2) otrzymując

$$(7.11) \quad \lambda_i = \frac{\kappa_i \cos \kappa_i + \nu \sin \kappa_i}{\kappa_i \cosh \kappa_i + \nu \sinh \kappa_i}.$$

Po podstawieniu do powyższego równania kolejnych wartości zgodnie ze wzorem (7.11) otrzymano

$$\lambda_1 = -0,026587, \quad \lambda_2 = +0,002599, \quad \lambda_3 = -0,000170.$$

Zatem ogólne rozwiązanie dla  $\zeta_0$  jest następujące:

$$(7.12) \quad \zeta_0 = C_4 (\sin k_i z + \lambda_i \sinh k_i z),$$

gdzie

$$(7.13) \quad k_i = \frac{\kappa_i}{l}.$$

Natomiast rozwiązanie dla  $\zeta$  jest:

$$(7.14) \quad \zeta = C_4 (\sin k_i z + \lambda_i \sinh k_i z) \cos \omega t.$$

Stąd prędkość drgań sprężystych poszycia

$$(7.15) \quad \dot{\zeta} = \bar{C}_4 (\sin k_i z + \lambda_i \sinh k_i z) \sin \omega t,$$

przy czym

$$(7.16) \quad \bar{C}_4 = -\omega C_4.$$



Aby w konkretnych przypadkach obliczeń nie trzeba było rozwiązywać niewygodnego równania przestępnego (7.6), sporządzono wykresy i tablice funkcji

$$(7.17.1) \quad \mu_i = F_3(\kappa_i, \nu) \quad (\nu = \text{const}, i = 1, 2, 3),$$

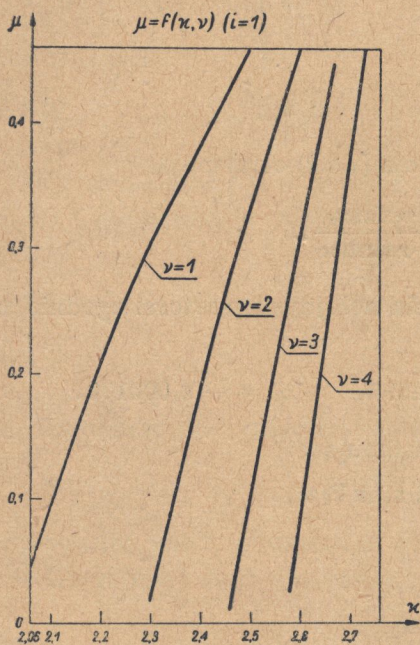
$$(7.17.2) \quad \lambda_i = F_4(\kappa_i, \nu) \quad (\nu = \text{const}, i = 1, 2, 3)$$

według wzorów

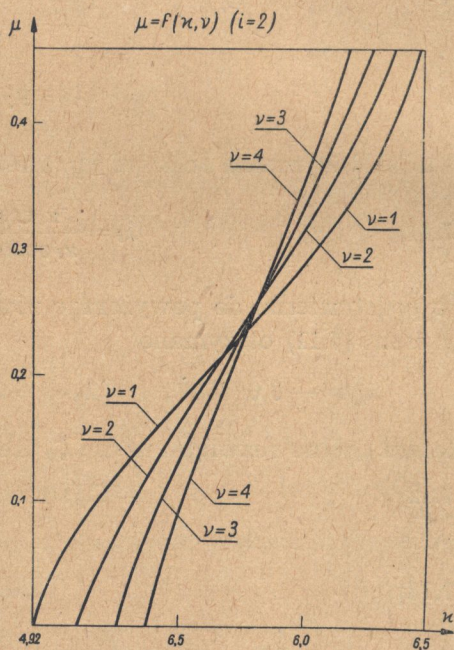
$$(7.18.1) \quad \mu = \frac{2}{\frac{\kappa^2 \operatorname{tgh} \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tgh} \kappa} - \frac{\kappa^2 \operatorname{tg} \kappa}{\kappa + \nu \operatorname{tg} \kappa}},$$

$$(7.18.2) \quad \lambda = \frac{\kappa \cos \kappa + \nu \sin \kappa}{\kappa \cosh \kappa + \nu \sinh \kappa}$$

dla zakresu wartości  $\mu$  i  $\lambda$  spotykanego w praktyce.



Rys. 5



Rys. 6

Wykresy powyższych funkcji przedstawiono na rys. 5-10. Mając określone wartości parametrów  $\mu$  i  $\nu$  korzystamy najpierw z wykresów  $\mu = F_3(\kappa)$ , wykreślając prostą  $\mu = \text{const}$ . Współrzędne  $\kappa$  punktów przecięcia się prostej  $\mu = \text{const}$  z krzywymi  $\mu = F_3(\kappa)$  dla danej wartości  $\nu$  dadzą kolejne wartości  $\kappa_i$ . Następnie dla znalezionych  $\kappa_i$  odczytujemy z wykresów  $\lambda = F_4(\kappa)$  kolejne wartości  $\lambda_i$  dla danego  $\nu$ . Korzystając z zależności (7.15) możemy



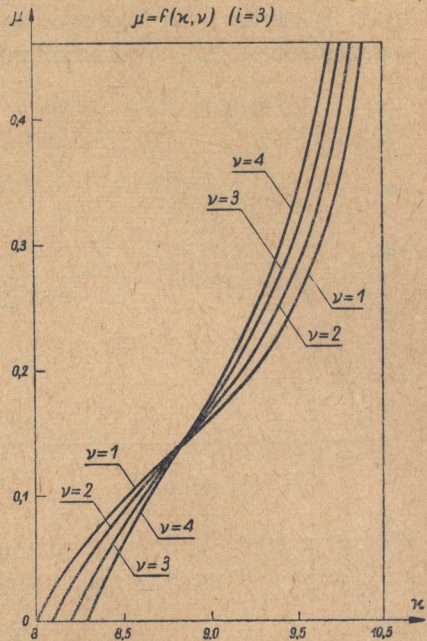
teraz znaleźć kształt krzywej rozkładu prędkości na konturze przekroju poprzecznego kadłuba statku.

Wartości liczbowe funkcji  $\mu_i = F_3(\kappa)$  i  $\lambda_i = F_4(\kappa)$  zostały zestawione w tablicach 1-6.

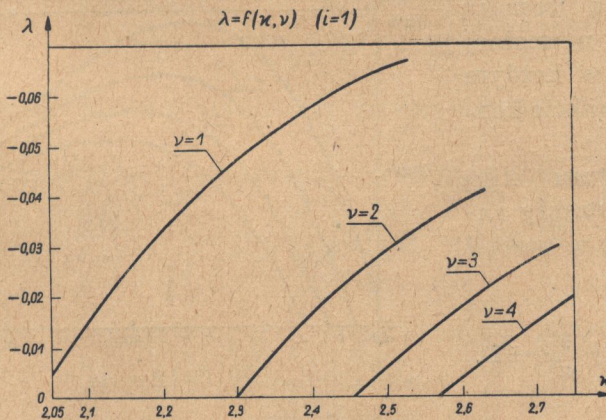
8. Ponieważ przykład liczbowy wyznaczenia gęstości masy wody towarzyszącej zostanie wykonany dla zastępczego konturu przekroju poprzecznego statku o kształcie eliptycznym, podamy równanie ułatwiające dobór wymiarów takiego przekroju w przypadku ogólnym, gdy znana jest długość wręgi zwilżonej  $l_2$  oraz chwilowy promień obrotu  $r_0$ .

Proste rachunki prowadzą tutaj do następujących zależności. Półosie zastępczego konturu eliptycznego  $a$  (na osi  $y$ ) i  $b$  (na osi  $x$ ) spełniają przy danych  $l_2$  i  $r_0$  równanie elipsy (w układzie współrzędnych  $a, b$ ) postaci

$$(8.1) \quad \frac{a^2}{\frac{l_2^2}{1 - \left(1 - \frac{l_2}{l_2 + r_0}\right)^2}} + \frac{b^2}{(l_2 + r_0)^2} = 1,$$



Rys. 7



Rys. 8

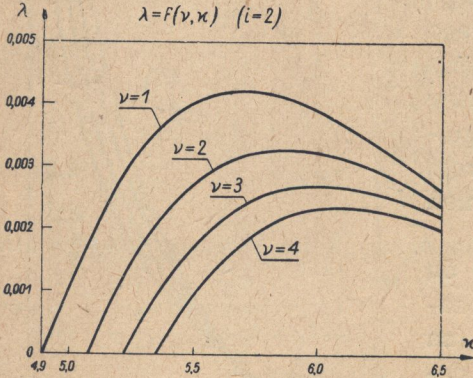
a stosunek wysokości fundamentu do zanurzenia konturu

$$(8.2) \quad \bar{a} = 1 - \left[ 1 - \left( 1 - \frac{l_2}{l_2 + r_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$



Dla przykładu liczbowego przyjmijmy  $b = 1,4$  m; podstawiając przyjęte wartości  $l_2$  i  $r_0$  do równań (8.1) i (8.2) otrzymamy  $a = 2,163$  m,  $\bar{a} = 0,134$  m.

Przyjęty zastępczy kontur eliptyczny do obliczenia sił hydrodynamicznych i kontur, dla którego wyznaczono kształt rozkładu prędkości bez uwzględnienia sił hydrodynamicznych, zostały przedstawione na rys. 11.



Rys. 9

9. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem funkcji  $f(M)$ , tzn. składowej normalnej prędkości drgań konturu. Jeżeli znamy tylko rozkład prędkości całkowitej  $\mathbf{v}$  na drgającym konturze, to zadanie sprowadza się do obliczenia iloczynu skalarowego prędkości  $\mathbf{v}$  i wektora normalnej zewnętrznej  $\mathbf{n}$  do konturu statku według równania

$$(9.1) \quad v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

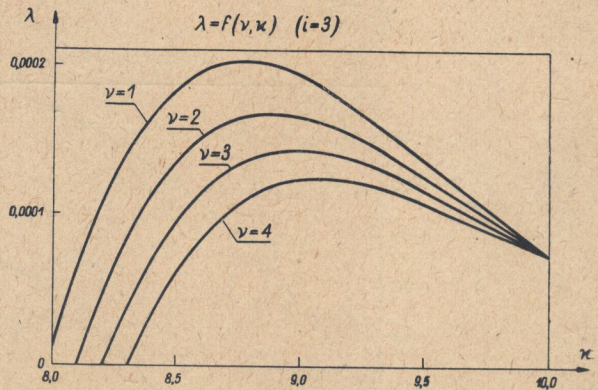
Wektor  $\mathbf{n}$  łatwo obliczyć z równania konturu przekroju poprzecznego statku  $\varphi(x, y) = 0$  według zależności

$$(9.2) \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } \varphi}{|\text{grad } \varphi|},$$

przy czym  $\varphi(x, y)$  musi być funkcją rosnącą w kierunku normalnej zewnętrznej w każdym zwilżonym punkcie konturu.

Dla konturu eliptycznego wystarczy napisać funkcję w postaci

$$(9.3) \quad \varphi(x, y) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1,$$



Rys. 10

skąd wektor normalnej zewnętrznej

$$(9.4) \quad \mathbf{n} = \frac{x}{b^2 \sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}}} \mathbf{i} + \frac{y}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}}} \mathbf{j}.$$



Do wyznaczenia gęstości masy wody towarzyszącej w naszym przykładzie liczbowym przyjmijmy następującą zależność pomiędzy rozkładem prędkości drgań, obliczonym dla konturu o płaskim poszyciu  $\zeta(z)$ , i prędkości drgań  $v(y)$  konturu eliptycznego

$$(9.5) \quad v(y) = \dot{\zeta} \left( -\frac{y}{\cos \varepsilon} + l_1 \right).$$

Oznacza to założenie równych prędkości drgań na konturze eliptycznym i prostoliniowym dla punktów o tej samej współrzędnej  $y$  (rys. 11).

Przedstawiając  $\mathbf{v}$  w postaci wektorowej

$$(9.6) \quad \mathbf{v} = -v \cos \varepsilon \mathbf{i} + v \sin \varepsilon \mathbf{j},$$

gdzie  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  są to wersory w kierunku osi  $x$  i  $y$ , a  $\varepsilon$  oznacza kąt pomiędzy osią symetrii przekroju i prostą  $CD$ , oraz posługując się równaniem (9.1) otrzymujemy

$$(9.7) \quad v_n = \begin{cases} \frac{v}{\sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}}} \left( \frac{\sin \varepsilon}{b^2} y - \frac{\cos \varepsilon}{a^2} x \right) & \text{dla łuku } DC, \\ -\frac{v}{\sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}}} \left( \frac{\sin \varepsilon}{b^2} y + \frac{\cos \varepsilon}{a^2} x \right) & \text{dla łuku } AB. \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze do obliczenia rozkład prędkości na fundamencie. Prosty rachunek prowadzi do następującego równania dla prędkości:

$$(9.8) \quad \mathbf{v} = \frac{v(y_0)}{r_0} [(y_0 - y) \mathbf{i} + x \mathbf{j}],$$

gdzie  $y_0$  jest współrzędną  $y$  chwilowego środka obrotu fundamentu i silnika.

Po podstawieniu (9.8) do (9.1) otrzymamy składową normalną prędkości

$$(9.9) \quad v_n = \frac{v(y_0)}{r_0} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}}} \left[ y \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{y_0}{b^2} \right].$$

Do ostatecznego rozwiązania zadania trzeba teraz wyznaczyć funkcję

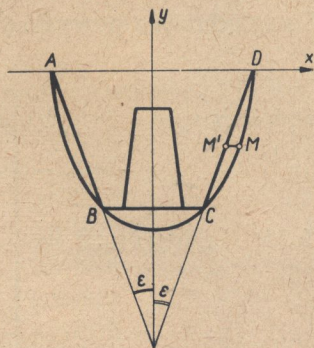
$$(9.10) \quad f(M) [h]_{\alpha=\alpha_0} = v_n [h]_{\alpha=\alpha_0}$$

w zależności od współrzędnej krzywoliniowej  $\beta$ .

Na konturze współrzędne  $x$  i  $y$  można przedstawić przez współrzędną  $\beta$  za pomocą zależności

$$(9.11.1) \quad y = -a \cos \beta,$$

$$(9.11.2) \quad x = -b \sin \beta.$$



Rys. 11



Łatwo również wykazać, że spełnione jest następujące równanie na konturze:

$$(9.12) \quad \sqrt{\frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}} = \frac{[h]_{\alpha=\alpha_0}}{ab}.$$

Uwzględniając powyższe równania po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$(9.13) \quad f(M)[h]_{\alpha=\alpha_0} = \begin{cases} v(\beta) \left( \frac{b^2}{a} \cos \varepsilon \sin \beta - \frac{a^2}{b} \sin \varepsilon \cos \beta \right) & \text{dla łuku } DC \left( -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq -\beta_0 \right), \\ v(\beta_0) \left( \frac{b^2 - a^2}{r_0} \cos \beta - \frac{y_0 a}{r_0} \right) \sin \beta & \text{dla fundamentu } (-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0), \\ v(\beta) \left( \frac{b^2}{a} \cos \varepsilon \sin \beta + \frac{a^2}{b} \sin \varepsilon \cos \beta \right) & \text{dla łuku } AB \left( \beta_0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right), \end{cases}$$

gdzie  $\beta$  jest współrzędną krzywoliniową punktu  $B$ . Natomiast

$$(9.14) \quad v(\beta) = C_4 \left[ \sin k_i \left( \frac{a}{\cos \varepsilon} \cos \beta + l_1 \right) + \lambda_i \sinh k_i \left( \frac{a}{\cos \varepsilon} \cos \beta + l_1 \right) \right].$$

Obliczymy teraz  $a_{2k+1}$  i  $b_{2k}$  według równań (3.9), a następnie przejdziemy do obliczenia  $\Theta/\varrho_w$  według (4.6), tzn. do wyznaczenia rozkładu masy wody towarzyszącej na drgającym konturze statku. Zadanie to dla parametrów przyjętych na str. 470 i konturu eliptycznego przyjętego na str. 473 rozwiążemy poniżej dla rozkładów prędkości odpowiadających trzem pierwszym drganiom własnym konturu.

10. Przedstawimy wyniki rozwiązane przykładowego liczbowego. Przyjęto oraz obliczono następujące parametry charakteryzujące geometryczne oraz mechaniczne własności układu <sup>3</sup>:

$$\begin{array}{lll} l = 3 \text{ m}, & r_0 = 2 \text{ m}, & \beta_0 = \frac{\pi}{6}, \\ l_1 = 1 \text{ m}, & a = 2,163 \text{ m}, & \sin \varepsilon = 0,35000, \\ l_2 = 2 \text{ m}, & b = 1,4 \text{ m}, & \cos \varepsilon = 0,93675, \\ \alpha_1 = 2,333, & \lambda_1 = -0,026587, & \nu = 1,5, \\ \alpha_2 = 5,322, & \lambda_2 = 0,002599, & \mu = 0,1, \\ \alpha_3 = 8,579, & \lambda_3 = -0,000170, & \bar{C}_4 = 1 \text{ m sek}^{-1}. \end{array}$$

<sup>3</sup> Wartość stałej dowolnej  $\bar{C}_4$  nie wpływa na końcowy wynik rachunku.



Ponieważ funkcja (9.13) jest nieparzysta względem  $\beta$ , to

$$(10.1) \quad a_{2k+1} = 0.$$

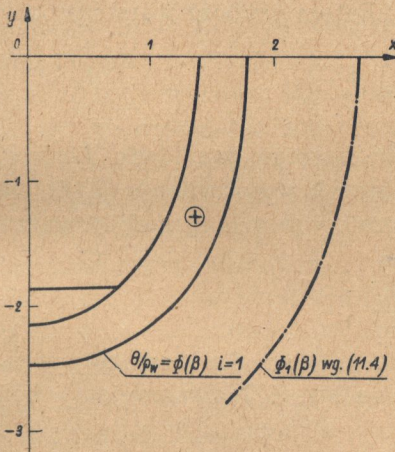
Całkowanie występujące w równaniu (3.9.1) wykonano numerycznie metodą trapezów przyjmując

$$(10.2) \quad \Delta\beta = \frac{\pi}{180}.$$

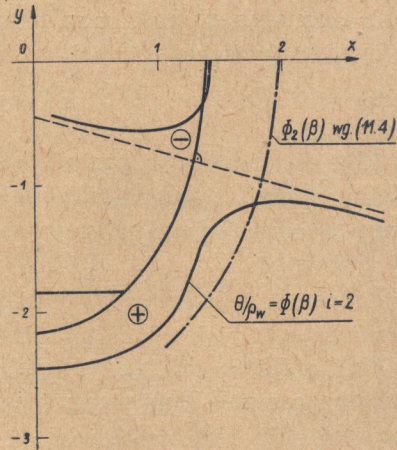
W wyniku rachunku otrzymano dla kolejnych częstości drgań własnych  $i = 1, 2, 3$  następujące wartości dla stałych  $b_{2k} e^{-2k\alpha_0} = \bar{b}_{2k}$  w jednostkach  $m^2 \text{sek}^{-1}$ :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$\bar{b}_2$	-0,705528	0,464019	1,079877
$\bar{b}_4$	0,061832	0,076301	0,298683
$\bar{b}_6$	-0,021562	-0,073402	0,154222
$\bar{b}_8$		+0,030762	-0,065472

Dalszych wyrazów szeregu Fouriera wobec szybko malejących współczynników  $\bar{b}_{2k}$  nie uwzględniono.



Rys. 12



Rys. 13

Posługując się równaniami (3.6) i (4.5) znaleziono

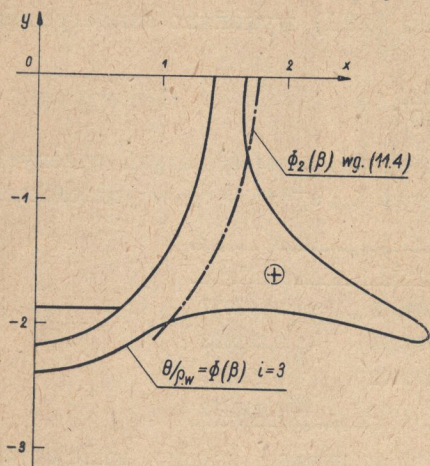
$$(10.3) \quad \Phi(\beta) = \frac{\Theta}{\rho_w} \quad \left( 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Funkcja ta, jak łatwo sprawdzić, jest parzysta względem  $\beta$ . Wartości  $\Phi(\beta)$  podano w metrach w tabelicy 7 oraz przedstawiono wykresnie na rys. 12, 13 i 14. Wartości funkcji  $\Phi$  odkładano na tych wykresach w kierunku normalnej zewnętrznej w skali rysunku.

Jak widać z rysunków 12, 13 i 14 tylko dla pierwszej częstości drgań własnych rozkład masy wody towarzyszącej jest w przybliżeniu stały.



Dla częstości wyższych zmienność jest bardzo znaczna, a dla drugiej częstości drgań (rys. 13) występuje nawet zmiana znaku funkcji  $\Phi$ , co oznacza, że w tym obszarze siły hydrodynamiczne są skierowane zgodnie z przyspieszeniem ruchu drgającego poszycia.



Rys. 14

11. Porównamy teraz wyniki rachunku przeprowadzonego w niniejszej pracy z obliczeniami tego samego przypadku według przybliżonych wzorów O. Grimma, [1]. Autor ten podaje następujący wzór dla obliczenia gęstości powierzchniowej masy wody towarzyszącej  $\Theta$ :

$$(11.1) \quad \Theta = \rho_w \frac{s}{\pi},$$

gdzie  $s$  oznacza długość łuku sinusoidy. Zatem grubość warstwy pozornej wody towarzyszącej wynosi

$$(11.2) \quad \Phi = \frac{\Theta}{\rho_w} = \frac{s}{\pi}.$$

Aby zastosować równanie (11.2) do naszego przykładu liczbowego, musimy pominąć składnik zawierający  $\sinh k_i z$  w równaniu (7.14). Otrzymamy wtedy równanie dla grubości warstwy pozornej wody towarzyszącej w postaci:

$$(11.3) \quad \Phi = \frac{l}{\kappa}.$$

Podstawiając do (11.3) kolejne wartości  $\kappa_i$  dla naszego przykładu liczbowego i  $l = 3$  m według założeń na str. 477 otrzymujemy kolejne wartości:

$$(11.4) \quad \Phi_1 = 1,288 \text{ m}, \quad \Phi_2 = 0,564 \text{ m}, \quad \Phi_3 = 0,350 \text{ m}.$$

Jak widać z powyższych wzorów, przybliżone wartości według O. Grimma znacznie odbiegają od odpowiednich wartości  $\Phi$  w tablicy 7. W celu porównania obydwu wyników naniesiono na rysunkach 12, 13 i 14 wykresy funkcji  $\Phi$  wzorów (11.4). Oczywiście wykresy te mogą być przedstawione wyłącznie dla wręgi, ponieważ równania (11.1) nie stosuje się do sztywnego fundamentu. Z wykresów tych jasno widać konieczność obliczania pozornej masy wody towarzyszącej dokładniejszymi metodami, szczególnie dla niższych częstości drgań.

12. Oczywiście omówione tutaj zagadnienie stanowi tylko fragment problemów związanych z drganiami poprzecznymi silników na kutrach



stalowych. Celem niniejszej pracy było tylko wskazać dokładniejsze metody obliczania sił hydrodynamicznych, działających na drgające poszycie i fundament kutra.

W dalszym etapie należałoby zbadać siły hydrodynamiczne w zależności od częstości drgań i stanu morza, tzn. w rzeczywistych warunkach pracy kutra, wyznaczając oprócz pozornej masy wody towarzyszącej również tłumienie hydromechaniczne oraz opracowując realne dla praktyki metody obliczeń.

Oddzielną klasę zagadnień stanowi obliczenie sił sprężystości podczas drgań poprzecznych silnika. Powstaje pytanie, w jakim kierunku powinny pójść tutaj dalsze badania, aby uzyskać lepsze wyniki, lepszą zgodność z rzeczywistością. Ciekawą odpowiedź na to pytanie dają pomiary częstości drgań własnych przy drganiach poprzecznych silników na kutrach stalowych<sup>4</sup>. W wyniku pomiarów drugiej częstości drgań własnych na dwóch kutrach stalowych tego samego typu w jednakowych warunkach pracy (na spokojnej wodzie) otrzymano dwie różne częstości drgań:

$$N_1 = 600 \text{ min}^{-1}, \quad N_2 = 756 \text{ min}^{-1}.$$

Różnica nie może być spowodowana ani różnymi wymiarami czy materiałami obydwu kadłubów, ani różnymi warunkami hydrodynamicznymi, gdyż te były jednakowe, ale wyłącznie wykonaniem połączeń elementów kutra. Od ich wykonania bowiem zależy niejednorodność warunków brzegowych oraz tłumienie w konstrukcji. Zatem dalszym przedmiotem badań powinno być ustalenie ściślejszych warunków brzegowych i zbadanie tłumienia. Jak wiadomo, warunki brzegowe mają bardzo istotny wpływ na częstości drgań własnych.

Pozostaje jeszcze rozstrzygnąć pytanie, jak przedstawia się sprawa uwzględnienia nieliniowych sił sprężystości, które niewątpliwie będą odgrywały rolę przy dużych amplitudach drgań. Odpowiedź na to pytanie można znaleźć w wynikach wspomnianych pomiarów oraz w wynikach obliczeń przeprowadzonych w związku z tymi pomiarami. Obliczenia te wykonano posługując się analogicznym schematem liniowym do schematu podanego w niniejszej pracy. Pozorną masę wody towarzyszącej dla drugiej częstości drgań własnych wyznaczono metodą Grimma. W wyniku przeprowadzonego rachunku otrzymano drugą częstość drgań własnych  $N = 720 \text{ min}^{-1}$ , zatem różnica procentowa w odniesieniu do częstości pomierzonej wynosi dla pierwszego kutra 9,09%, a dla drugiego kutra —4,76%. Widzimy zatem, że obliczenia przeprowadzone na prostym schemacie liniowym dają dość dobrą średnią wartość częstości.

Amplitudy drgań mierzone na głowicy jednego z cylindrów silnika były zawsze mniejsze od 1,5 mm. Wobec kilkumetrowych wymiarów

<sup>4</sup> Według badań przeprowadzonych wspólnie z T. Agopsowiczem, [8].



przekroju poprzecznego kutra są to amplitudy bardzo małe, dla których nieliniowość nie ma tak istotnego wpływu jak niejednorodność warunków brzegowych.

Ostateczne zbadanie wpływu nieliniowości może być przeprowadzone dopiero po wykonaniu dużej liczby pomiarów i przeprowadzeniu szczegółowej analizy.

Tablica 1.  $i = 1$

$\chi \backslash \mu_\nu$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
2,06	0,04419			
2,08	0,07092			
2,10	0,09652			
2,12	0,12105			
2,14	0,14458			
2,16	0,16717			
2,18	0,19864			
2,20	0,20975			
2,22	0,23017			
2,24	0,24888			
2,26	0,26785			
2,28	0,28586			
2,30	0,30327	0,02054		
2,32	0,31988	0,05656		
2,34	0,33638	0,09140		
2,36	0,35218	0,12501		
2,38	0,36752	0,15749		
2,40	0,38259	0,18898		
2,42	0,46125	0,22638		
2,44	0,41125	0,24883		
2,46	0,41939	0,27743	0,01057	
2,48	0,43815	0,30522	0,05819	
2,50	0,45724	0,33224	0,10438	
2,52		0,35853	0,14921	
2,54		0,38412	0,19279	
2,56		0,40916	0,23518	
2,58		0,43358	0,27646	0,02978
2,60		0,45746	0,31446	0,09080
2,62			0,35598	0,15025
2,64			0,39437	0,20823
2,66			0,43191	0,26482
2,68			0,46871	0,32016
2,70			0,50479	0,37429
2,72				0,42764
2,74				0,47940



Tablica 2.  $i = 1$

$\lambda_\nu$ $x$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
2,06	-0,007068			
2,08	-0,011362			
2,10	-0,015479			
2,12	-0,019491			
2,14	-0,023193			
2,16	-0,026798			
2,18	-0,030237			
2,20	-0,033516			
2,22	-0,036737			
2,24	-0,038966			
2,26	-0,042421			
2,28	-0,045091			
2,30	-0,047616	-0,001912		
2,32	-0,050000	-0,005256		
2,34	-0,052246	-0,008459		
2,36	-0,055783	-0,011525		
2,38	-0,056352	-0,014458		
2,40	-0,058197	-0,017257		
2,42	-0,059928	-0,019928		
2,44	-0,061540	-0,022474		
2,46	-0,063034	-0,024895	-0,000635	
2,48	-0,064414	-0,027196	-0,003475	
2,50	-0,065683	-0,029379	-0,006196	
2,52		-0,031447	-0,008798	
2,54		-0,033403	-0,011286	
2,56		-0,035660	-0,013661	
2,58		-0,036989	-0,015926	-0,001236
2,60		-0,038624	-0,018082	-0,003739
2,62			-0,020134	-0,006134
2,64			-0,022082	-0,008424
2,66			-0,023930	-0,010612
2,68			-0,025679	-0,012699
2,70			-0,027322	-0,014687
2,72				-0,016580
2,74				-0,018379



Tablica 3.  $i = 2$

$\kappa \backslash \mu_\nu$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
4,92	0,00299			
5,0	0,03549			
5,1	0,07067	0,00616		
5,2	0,10129	0,05070		
5,3	0,12853	0,09007	0,03549	
5,4	0,15351	0,12592	0,08440	0,02894
5,5	0,17637	0,15852	0,12868	0,08685
5,6	0,20027	0,18953	0,17052	0,14129
5,7	0,21973	0,21947	0,21063	0,19320
5,8	0,23905	0,24912	0,25002	0,24387
5,9	0,26324	0,27929	0,28974	0,29460
6,0	0,28659	0,30990	0,33094	0,34684
6,1	0,31219	0,34501	0,37507	0,40237
6,2	0,34113	0,38318	0,42400	0,46350
6,3	0,36084	0,41847	0,45737	0,50525
6,4	0,41688	0,48175	0,54862	0,61753
6,5	0,47076			

Tablica 4.  $i = 2$

$\kappa \backslash \lambda_\nu$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
4,9	0,000079			
5,0	0,001030			
5,1	0,002003	0,000131		
5,2	0,002563	0,001026		
5,3	0,003337	0,001742	0,000531	
5,4	0,003747	0,002297	0,001193	0,000323
5,5	0,004014	0,002710	0,001713	0,000925
5,6	0,004159	0,002998	0,002101	0,001401
5,7	0,004202	0,003178	0,002389	0,001763
5,8	0,004150	0,003258	0,002569	0,002020
5,9	0,004049	0,003277	0,002679	0,002201
6,0	0,003885	0,003229	0,002719	0,002311
6,1	0,003674	0,003120	0,002687	0,002340
6,2	0,003444	0,002983	0,002622	0,002332
6,3	0,003171	0,002794	0,002496	0,002256
6,4	0,002907	0,002607	0,002371	0,002180
6,5	0,002639			



Tablica 5.  $i = 3$

$\mu_\nu$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
8,0	0,00541			
8,1	0,02830	0,00103		
8,2	0,04798	0,01183		
8,3	0,06518	0,04780	0,02568	
8,4	0,08098	0,06776	0,05035	0,02874
8,5	0,09540	0,08595	0,07278	0,05590
8,6	0,10900	0,10303	0,09379	0,08129
8,7	0,12210	0,11942	0,11389	0,10551
8,8	0,13500	0,13550	0,13353	0,12911
8,9	0,14802	0,15163	0,15317	0,15262
9,0	0,16147	0,16822	0,17326	0,17659
9,1	0,17574	0,18571	0,19436	0,20166
9,2	0,19129	0,20469	0,21714	0,22863
9,3	0,20878	0,22592	0,24250	0,25853
9,4	0,22910	0,25047	0,27172	0,29285
9,5	0,25365	0,27999	0,30671	0,33382
9,6	0,28467	0,31717	0,35064	0,38508
9,7	0,32616	0,36674	0,40903	0,45305
9,8	0,38597	0,43800	0,49280	0,55035
9,9	0,49260	0,56485		

Tablica 6.  $i = 3$

$\lambda_\nu$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
8,0	— 0,000013			
8,1	— 0,000067	— 0,000002		
8,2	— 0,000110	— 0,000048		
8,3	— 0,000143	— 0,000086	— 0,000039	
8,4	— 0,000168	— 0,000115	— 0,000071	— 0,000034
8,5	— 0,000185	— 0,000136	— 0,000096	— 0,000063
8,6	— 0,000196	— 0,000152	— 0,000115	— 0,000085
8,7	— 0,000201	— 0,000161	— 0,000129	— 0,000101
8,8	— 0,000202	— 0,000166	— 0,000137	— 0,000113
8,9	— 0,000198	— 0,000168	— 0,000142	— 0,000120
9,0	— 0,000192	— 0,000165	— 0,000143	— 0,000125
9,1	— 0,000184	— 0,000161	— 0,000141	— 0,000125
9,2	— 0,000173	— 0,000154	— 0,000136	— 0,000124
9,3	— 0,000162	— 0,000145	— 0,000132	— 0,000120
9,4	— 0,000149	— 0,000137	— 0,000124	— 0,000115
9,5	— 0,000136	— 0,000125	— 0,000116	— 0,000108
9,6	— 0,000123	— 0,000114	— 0,000107	— 0,000101
9,7	— 0,000110	— 0,000103	— 0,000098	— 0,000093
9,8	— 0,000097	— 0,000092	— 0,000088	— 0,000085
9,9	— 0,000085	— 0,000082		



Tablica 7.

$\beta$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\beta$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
	$\frac{\Theta}{\varrho_w}$	$\frac{\Theta}{\varrho_w}$	$\frac{\Theta}{\varrho_w}$		$\frac{\Theta}{\varrho_w}$	$\frac{\Theta}{\varrho_w}$	$\frac{\Theta}{\varrho_w}$
$[\beta^\circ]$	$m$	$m$	$m$	$[\beta^\circ]$	$m$	$m$	$m$
0	0,321	0,281	0,232	48	0,448	0,329	0,894
3	0,321	0,282	0,232	51	0,445	0,335	1,367
6	0,321	0,290	0,232	54	0,441	0,350	2,016
9	0,331	0,302	0,232	57	0,434	0,382	2,130
12	0,339	0,319	0,233	60	0,427	0,445	1,150
15	0,349	0,339	0,234	63	0,421	0,596	0,832
18	0,361	0,360	0,240	66	0,414	1,237	0,650
21	0,374	0,378	0,243	69	0,409	-1,804	0,487
24	0,386	0,390	0,250	72	0,404	-0,354	0,381
27	0,402	0,393	0,265	75	0,400	-0,142	0,339
30	0,415	0,387	0,280	78	0,396	-0,040	0,304
33	0,427	0,376	0,304	81	0,393	-0,020	0,282
36	0,438	0,362	0,345	84	0,389	0,001	0,269
39	0,444	0,348	0,396	87	0,390	0,012	0,262
42	0,448	0,337	0,484	90	0,390	0,026	0,260
45	0,449	0,331	0,631				

Literatura cytowana w tekście

[1] O. Grimm, *Über den Einfluss der mitschwingenden Wassermasse auf die Schwingungseigenschaften lokaler Schwingungsfähiger Systeme*, Schiff und Hafen, 11 (1953), s. 538.

[2] N. E. Koczin, *Teorija wołn, wynužadajemych kolebanjami tiela pod swobodnoj powierchnostju tiazoloj nieszimajemoj židkosti*, Sobr. soczin., t. 2, Moskwa 1949.

[3] F. M. Lewis, *The Inertia of Water Surrounding a Vibrating Ship*, Soc. N. A. W. E., t. 37, 1928.

[4] G. I. Taylor, *Vibration of Ships*, Trans. I. N. A., t. 72, 1930, s. 162.

[5] H. W. Nicholls, *Vibration of Ships*, Trans. I. N. A., t. 66, 1924, s. 141.

[6] J. Więckowski, *O równaniach ruchu cieczy rzeczywistych*, Arch. Hydr. t. 2, 3 (1955).

[7] J. Więckowski, *Równania drgań giętych kadłuba statku*, w druku.

[8] T. Agopsowicz i J. Więckowski, *Projekt wyeliminowania szkodliwych drgań poprzecznych silników Kromhout na 17 metrowych kutrach stalowych*, Prace Inst. Morsk., Gdańsk 1956.



ИСЧИСЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ВОДЫ  
ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СУДОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

В работе дается определение поверхностей плотности присоединенной массы воды при поперечных колебаниях судовых двигателей. Расчет основывается на уравнении плоского потенциального потока идеальной жидкости, при предположении бесконечно большой частоты колебаний частиц воды, пренебрегая при этом влиянием свободных волн.

Дается числовой пример для эллиптического контура принимая, что значения геометрических и механических параметров, характеризующих контур, отвечают значениям, встречаемым в случае рыболовных стальных ботов.

Сравнение полученных значений для плотности присоединенной массы воды, с приближенными значениями по Г р и м м у, [1], указывает на необходимость проведения точных расчетов.

В заключение обсуждаются вопросы, связанные с поперечными колебаниями двигателей, на фоне измерений колебаний, [8], проведенных на рыболовных стальных ботах.

## Summary

COMPUTATION OF THE ADDED MASS OF WATER DURING  
TRANSVERSE VIBRATION OF A MARINE ENGINE

Based on the equations of plane potential flow of an ideal liquid, a computation is made of surface density of the apparent added mass of water during transverse vibration of a marine engine, assuming infinitely high frequency of water particles and disregarding the influence of free waves.

A numerical example illustrates the calculations for an elliptical contour, assuming the values of the geometrical and mechanical parameters characterizing the contour from real steel cutters.

A comparison of the values obtained for the density of the added mass of water, with approximate values according to O. Grimm, [1], has shown the necessity of accurate calculation.

Finally, problems connected with transverse vibrations of engines are discussed in the light of the results of vibration measurements, [8], for steel cutters.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 stycznia 1957 r.*



