ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 12 (1964)

OSIOWO-SYMETRYCZNE DRGANIA ZŁOŻONEJ MEMBRANY KOŁOWEJ

VÁCLAV VODIČKA (PLZEŃ)

Wstęp

Zagadnienia matematyczne drgań swobodnych i wymuszonych w jednorodnych ośrodkach izotropowych są ściśle ze sobą związane. Znajduje to odbicie w teorii potencjałów opóźnionych. W przedstawionej pracy pokazano na przypadku osiowo-symetrycznych drgań membrany kołowej, składającej się z n współśrodkowych części jednorodnych, że powyższe powiązania pozostają w mocy również i dla ośrodków warstwowych. W związku z tym istnieje możliwość wykonania dużej części pracochłonnych obliczeń jednocześnie dla drgań swobodnych i wymuszonych. Niektóre z podanych wyników nie były dotychczas znane.

1. Podstawowe zagadnienie matematyczne

Większość przytoczonych niżej rozważań matematycznych stanowi wspólną podstawę do rozwiązywania zarówno zagadnień osiowo-symetrycznych drgań swobodnych kołowej membrany złożonej jak i drgań wymuszonych.

1.1. Zagadnienie podstawowe. Niech c_k $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ oznaczają stałe dodatnie, a ϱ dodatnie współrzędne, przy czym

$$0 = \varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < ... < \varrho_{n-1} < \varrho_n = b.$$

Oznaczmy dalej $\lambda_k = \omega/c_k$ $(k = 1, 2, 3, ..., n)$, gdzie ω jest dowolnym parametrem. W pierwszej kolejności znajdziemy wartości własne oraz funkcje własne dla następującego zagadnienia brzegowego [symbol $(')$ wprowadzono dla oznaczenia pochodnych względem ϱ]:

$$R_k'' + \frac{1}{\varrho} R_k' + \lambda_k^2 R_k = 0, \qquad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.1}$$

$$R_1(\varrho) \text{ ograniczone przy } \varrho \to 0, \qquad R_n(b) = 0, \tag{1.2}$$

$$R_{k+1} = R_k, \qquad R_{k+1}' = R_k', \qquad \varrho = \varrho_k, \qquad 1 \leqslant k < n-1. \tag{1.3}$$

Dalej przytoczone będą rozważania prowadzące do zbudowania odpowiednich szeregów Fouriera-Bessela.

Przyjmując ogólnie

$$(1.4)\qquad R_k(\varrho) = A_k J_0(\lambda_k \varrho) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

znajdujemy z (1.2) i (1.3) następujący układ równań:

$$(1.5)\qquad B_1 = 0, \qquad A_n J_0(\lambda_n b) + B_n Y_0(\lambda_n b) = 0,$$

$$A_{k+1} J_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) + B_{k+1} Y_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) = A_k J_0(\lambda_k \varrho_k) + B_k Y_0(\lambda_k \varrho_k),$$

$$(1.6)\qquad A_{k+1} J_1(\lambda_{k+1}\varrho_k) + B_{k+1} Y_1(\lambda_{k+1}\varrho_k) = \Lambda_k [A_k J_1(\lambda_k \varrho_k) + B_k Y_1(\lambda_k \varrho_k)],$$

$$\Lambda_k = \lambda_k/\lambda_{k+1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

dla wyznaczenia współczynników A_k i B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ występujących w (1.4).

1.2. Rozwiązanie równań (1.5) i (1.6). Korzystając z wronskianu

$$(1.7)\qquad J_1(z) Y_0(z) - J_0(z) Y_1(z) = 2/(\pi z)$$

możemy równania (1.6) przedstawić w postaci macierzowej

$$(1.8)\qquad K_{k+1} = \frac{\pi}{2} \lambda_{k+1} \varrho_k M_k K_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$K_k = \left\| \begin{matrix} A_k \\ B_k \end{matrix} \right\|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad M_k = \left\| \begin{matrix} a_{k1}, & b_{k1} \\ a_{k2}, & b_{k2} \end{matrix} \right\|, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$a_{k1} = \Lambda_k J_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) - J_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1}\varrho_k),$$

$$b_{k1} = \Lambda_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) Y_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) - Y_0(\lambda_k \varrho_k) Y_1(\lambda_{k+1}\varrho_k),$$

$$a_{k2} = -\Lambda_k J_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) + J_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1}\varrho_k),$$

$$b_{k2} = -\Lambda_k Y_1(\lambda_k \varrho_k) J_0(\lambda_{k+1}\varrho_k) + Y_0(\lambda_k \varrho_k) J_1(\lambda_{k+1}\varrho_k).$$

Uwzględniając w powyższym pierwsze równanie układu (1.5) znajdujemy wyrażenia

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} K_{k+1} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \lambda^{(k)} \varrho^{(k)} \left\| \begin{matrix} p_k^{(11)} \\ p_k^{(21)} \end{matrix} \right\| A_1, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ \lambda^{(k)} &= \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_{k+1}, \qquad \varrho^{(k)} = \varrho_1 \varrho_2, \ldots, \varrho_k \end{aligned}$$

przedstawiające niewiadome współczynniki A_k i B_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ w zależności od A_1, przy czym zgodnie z (1.5) $B_1 = 0$. W (1.9) $p_k^{(rs)}$ przedstawiają elementy macierzy

$$(1.9.1)\qquad P_k = \left\| \begin{matrix} p_k^{(11)}, & p_k^{(12)} \\ p_k^{(21)}, & p_k^{(22)} \end{matrix} \right\| = M_k M_{k-1} \ldots M_2 M_1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Widzimy więc, że rozwiązania A_k i B_k równań (1.5) i (1.6) otrzymujemy przy $B_1 = 0$ ze wzorów (1.9) i (1.9.1), przy czym A_1 pozostaje nieokreślone.

1.3. Równaie charakterystyczne i wartości własne zagadnienia. Przyjmijmy w (1.9) $k = n-1$, wówczas otrzymamy

$$A_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \lambda^{(n-1)} \varrho^{(n-1)} p_{n-1}^{(11)} A_1, \quad B_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \lambda^{(n-1)} \varrho^{(n-1)} p_{n-1}^{(21)} A_1.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do drugiego warunku (1.5) otrzymamy następujące równanie charakterystyczne zagadnienia (1.1)-(1.3):

$$p_{n-1}^{(11)} J_0(\lambda_n b) + p_{n-1}^{(21)} Y_0(\lambda_n b) = 0, \quad \lambda_n = \omega/c_n. \tag{1.10}$$

Widmo wartości własnych zagadnienia przedstawiają dodatnie pierwiastki ω_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) równania (1.10).

1.4. Funkcje własne. Każdej wartości własnej ω_m zagadnienia odpowiada zbiór liczb charakterystycznych

$$\lambda_{km} = \omega_m/c_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.11}$$

które zgodnie z (1.9) zapiszemy w postaci

$$\lambda_m^{(k)} = \lambda_{2m} \lambda_{3m} \ldots \lambda_{k+1, m}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{1.12}$$

oraz zbiór macierzy $P_k(\omega_m) = \|p_k^{(rs)}(\omega_m)\|$, $r, s = 1, 2$ oraz $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Macierze te otrzymujemy z (1.9.1) i (1.8) przez zastąpienie w nich każdego λ_k odpowiadającym mu λ_{km}.

Współczynniki A_{km} i B_{km} odpowiadające wartościom własnym ω_m otrzymujemy z (1.5) i (1.9) w postaci

$$B_{1m} = 0, \quad A_{km} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \lambda_m^{(k-1)} \varrho^{(k-1)} p_{k-1}^{(11)} A_{1m},$$

$$B_{km} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \lambda_m^{(k-1)} \varrho^{(k-1)} p_{k-1}^{(21)} A_{1m}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n,$$

przy czym A_{1m} pozostają nieokreślone.

Biorąc to pod uwagę znajdujemy z (1.4) wyrażenia $S_{km}(\varrho)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), przedstawiające układ funkcji własnych odpowiadających wartościom własnym ω_m badanego zagadnienia:

$$R_{km}(\varrho) = A_{1m} S_{km}(\varrho), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$S_{1m}(\varrho) = J_0(\omega_m \varrho/c_1), \tag{1.13}$$

$$S_{km}(\varrho) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k-1} \varrho^{(k-1)} \lambda_m^{(k-1)} [p_{k-1}^{(11)}(\omega_m) J_0(\omega_m \varrho/c_k) + p_{k-1}^{(21)}(\omega_m) Y_0(\omega_m \varrho/c_k)], \quad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

1.5. Ortogonalność funkcji własnych. Znajdziemy pewne związki ortogonalności między funkcjami własnymi $S_{km}(\varrho)$. Związki te posiadają zasadnicze znaczenie przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych fizyki matematycznej. Punktem wyjścia będzie dla nas fakt, że wyrażenia $R_{km}(\varrho)$ spełniają podstawowe związki (1.1)-(1.3). To samo dotyczy oczywiście również i funkcji własnych $S_{km}(\varrho)$ $(k=1,2,...,n)$. Możemy zapisać to następująco:

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{km})+\lambda_{km}^2\,\varrho S_{km}=0,\qquad \varrho_{k-1}<\varrho<\varrho_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n, \tag{1.14}$$

$$S_{nm}(b)=0,\qquad S_{k+1,m}=S_{km},\qquad S'_{k+1,m}=S'_{km},\qquad \varrho=\varrho_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-1. \tag{1.15}$$

Powyższe związki są spełnione dla dowolnego $m=1,2,3,...$.

Weźmy pod uwagę dwie funkcje własne $S_{kr}(\varrho)$ i $S_{ks}(\varrho)$, wówczas z (1.14) otrzymujemy

$$(\lambda_{kr}^2-\lambda_{ks}^2)\,\varrho S_{kr}S_{ks}=S_{kr}\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{ks})-S_{ks}\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{kr})=$$

$$=\frac{d}{d\varrho}[\varrho(S_{kr}S'_{ks}-S'_{kr}S_{ks})],\qquad \varrho_{k-1}<\varrho<\varrho_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Całkując to wyrażenie w granicach $\varrho_{k-1}<\varrho<\varrho_k$ znajdujemy

$$(\lambda_{kr}^2-\lambda_{ks}^2)\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{kr}(\varrho)\,S_{ks}(\varrho)\,d\varrho=\varrho_k\begin{vmatrix}S_{kr}(\varrho_k), & S_{ks}(\varrho_k)\\ S'_{kr}(\varrho_k), & S'_{ks}(\varrho_k)\end{vmatrix}-$$

$$-\varrho_{k-1}\begin{vmatrix}S_{kr}(\varrho_{k-1}), & S_{ks}(\varrho_{k-1})\\ S'_{kr}(\varrho_{k-1}), & S'_{ks}(\varrho_{k-1})\end{vmatrix},\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$D_{ors}=0,\quad D_{krs}=\varrho_k\begin{vmatrix}S_{kr}(\varrho_k), & S_{ks}(\varrho_k)\\ S'_{kr}(\varrho_k), & S'_{ks}(\varrho_k)\end{vmatrix},\qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

oraz biorąc pod uwagę (1.15) możemy zapisać poprzednią relację całkową w postaci

$$(\lambda_{kr}^2-\lambda_{ks}^2)\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{kr}(\varrho)\,S_{ks}(\varrho)\,d\varrho=D_{krs}-D_{k-1,rs},\qquad 1\leqslant k\leqslant n,$$

przy czym zgodnie z (1.15) mamy $D_{nrs}=0$ oraz $D_{ors}=0$ zgodnie z definicją. Sumując otrzymany związek stronami względem k i biorąc pod uwagę (1.12) otrzymamy równość

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^2}\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{kr}(\varrho)\,S_{ks}(\varrho)\,d\varrho=0, \tag{1.16}$$

która jest spełniona przy $r,s=1,2,3,...$. Na podstawie (1.16) dochodzimy do poszukiwanego warunku ortogonalności

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^2}\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\varrho S_{kr}(\varrho)\,S_{ks}(\varrho)\,d\varrho=0,\qquad r\neq s,\qquad r,s=1,2,3,... \tag{1.17}$$

między dwoma zbiorami funkcji własnych $S_{kr}(\varrho)$ i $S_{ks}(\varrho)$ odpowiadających dowolnej parze wartości własnych ω_r i ω_s.

1.6. Przypadek $s = r$. Gdy $s = r$, to (1.16) staje się tożsamością i nie możemy stąd wyciągać wniosków odnośnie wyrażeń

$$N_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{kr}^2(\varrho)\, d\varrho, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.18}$$

które, mimo wszystko, są ważne w szeregu zastosowań. Z tego powodu poczynimy kilka uwag, które ułatwią obliczanie wartości (1.18). Oznaczając (′) pochodną względem ϱ i biorąc pod uwagę (1.14) otrzymamy

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{kr})^2 = 2\varrho S'_{kr} \frac{d}{d\varrho}(\varrho S'_{kr}) = -2\lambda_{kr}^2 \varrho^2 S_{kr} S'_{kr} = -\lambda_{kr}^2 \varrho^2 \frac{dS_{kr}^2}{d\varrho}.$$

Całkując powyższe wyrażenie przez części znajdujemy

$$-\frac{1}{\lambda_{kr}^2}(\varrho S'_{kr})^2 = \varrho^2 S_{kr}^2 - 2\int \varrho S_{kr}^2(\varrho)\, d\varrho.$$

Stąd widzimy, że całki wchodzące do (1.18) przyjmują postaci

$$\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{kr}^2(\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{2}\left[\varrho^2\left\{S_{kr}^2(\varrho) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2}\left[\frac{dS_{kr}(\varrho)}{d\varrho}\right]^2\right\}\right]_{\varrho=\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

które oczywiście można przekształcić przy pomocy związków (1.15).

Biorąc pod uwagę (1.15) otrzymamy dla $2 \leqslant k \leqslant n$

$$2\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{kr}^2(\varrho)\, d\varrho = \varrho_k^2\left[S_{kr}^2(\varrho_k) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{kr}(\varrho_k)\right] - \varrho_{k-1}^2\left[S_{kr}^2(\varrho_{k-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{kr}(\varrho_{k-1})\right] = \varrho_k^2\left[S_{kr}^2(\varrho_k) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{kr}(\varrho_k)\right] -$$

$$-\varrho_{k-1}^2\left[S_{k-1,r}^2(\varrho_{k-1}) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{k-1,r}(\varrho_{k-1})\right],$$

przy czym związki te obejmują również $k = 1$ ze względu na to, że $\varrho_0 = 0$. Stąd możemy napisać:

$$2\int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{kr}^2(\varrho)\, d\varrho = \varrho_k^2\left[S_{kr}^2(\varrho_k) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{kr}(\varrho_k)\right] -$$

$$-\varrho_{k-1}^2\left[S_{k-1,r}^2(\varrho_{k-1}) + \frac{1}{\lambda_{kr}^2} S'^2_{k-1,r}(\varrho_{k-1})\right], \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.19}$$

Podstawiając (1.19) do (1.18) oraz uwzględniając (1.11) otrzymamy

$$2N_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} [\varrho_k^2 S_{kr}^2 (\varrho_k) - \varrho_{k-1}^2 S_{k-1,r}^2 (\varrho_{k-1})] + $$

$$+ \frac{1}{\omega_r^2} \sum_{k=1}^{n} [\varrho_k^2 S_{kr}'^2 (\varrho_k) - \varrho_{k-1}^2 S_{k-1,r}'^2 (\varrho_{k-1})], \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

oraz ostatecznie

$$N_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{kr}^2 (\varrho)\, d\varrho = \left[\frac{b^2}{2\omega_r^2} \left[\frac{dS_{nr}(\varrho)}{d\varrho} \right]^2 \right]_{\varrho=b} + \tag{1.20}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k^2 \left(\frac{1}{c_k^2} - \frac{1}{c_{k+1}^2} \right) S_{kr}^2 (\varrho_k), \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

1.7. Szeregi Fouriera-Bessela. Niech $F_k(\varrho)$ będzie funkcją określoną w przedziale $\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Weźmy pod uwagę następujące rozwinięcia w szeregi przy znanych założeniach odnośnie funkcji:

$$F_k (\varrho) = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r S_{kr} (\varrho), \qquad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.21}$$

Współczynniki γ_r znajdziemy w następujący sposób. Mnożąc kolejno stronami równości (1.21) przez $(\varrho/c_k^2)\, S_{ks}(\varrho)$ i całkując w granicach $\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k$, a następnie sumując otrzymane wyrażenia względem $1 \leqslant k \leqslant n$ otrzymamy po uwzględnieniu (1.17) i (1.18)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho F_k (\varrho) S_{ks} (\varrho)\, d\varrho = \gamma_s \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \varrho S_{ks}^2 (\varrho)\, d\varrho = \gamma_s N_s.$$

Stąd współczynniki γ_r szeregu (1.21) przyjmą postać

$$\gamma_r = \frac{f_r}{N_r}, \qquad f_r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k^2} \int\limits_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \xi F_k (\xi) S_{kr} (\xi)\, d\xi, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.22}$$

Wchodzące tu wyrażenia $S_{kr}(\xi)$ określa (1.13), a wartości N_r – (1.20).

Wyniki powyższych rozważań możemy stosować bezpośrednio zarówno do rozwiązywania zagadnień drgań swobodnych, jak i wymuszonych membran kołowych złożonych ze skończonej liczby jednorodnych pierścieni współśrodkowych. Te zagadnienia są treścią dalszych rozważań.

2. Drgania swobodne złożonej membrany kołowej

Rozważmy membranę złożoną z n jednorodnych, izotropowych pierścieni o promieniach

$$\varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \varrho_0 = 0, \qquad \varrho_n = b$$

oraz masie przypadającej na jednostkę powierzchni każdego pierścienia wynoszącą odpowiednio σ_k. Membrana utwierdzona na obwodzie poddana jest równomiernemu rozciąganiu o jednostkowym napięciu S oraz w położeniu równowagi pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$. Określimy poprzeczne drgania wywołane początkowym przemieszczeniem $f(\varrho)$ oraz początkową prędkością przemieszczenia $g(\varrho)$.

2.1. Matematyczne sformułowanie problemu. Z matematycznego punktu widzenia szukamy rozwiązania $u_k = u_k(\varrho, t)$ równań

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c_k^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_k}{\partial \varrho}\right), \tag{2.1}$$

$$\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad t > 0, \quad c_k^2 = S/\sigma_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

spełniające następujące warunki brzegowe

$$u_1(\varrho, t) \text{ ograniczone dla } \varrho \to 0, \quad u_n(b, t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$$u_{k+1} = u_k, \quad \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varrho} = \frac{\partial u_k}{\partial \varrho}, \quad \varrho = \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{2.3}$$

oraz warunki początkowe

$$u_k(\varrho, 0) = f(\varrho), \quad \left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\right]_{t=0} = g(\varrho), \quad \varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.4}$$

2.2. Całki szczególne równań (2.1)-(2.3). Zakładając całki szczególne $v_k = v_k(\varrho, t)$ równań (2.1)-(2.3) w znanej postaci

$$v_k(\varrho, t) = R_k(\varrho)\, T(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.5}$$

znajdujemy

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t, \tag{2.6}$$

gdzie C i D są stałymi całkowania, a funkcje $R_k(\varrho)$ spełniają równania (1.1)-(1.3).

Każdej częstości drgań swobodnych ω_m otrzymanej z równania (1.10) odpowiada zbiór n funkcji $R_{km}(\varrho)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, określonych wzorami (1.13). Wobec tego każdemu ω_m odpowiada n następujących rozwiązań szczególnych:

$$v_{km}(\varrho, t) = A_{1m} S_{km}(\varrho)\, T_m(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.7}$$

Rozwiązania te spełniają równania (2.1) oraz warunki (2.2) i (2.3). Funkcje własne $S_{km}(\varrho)$ otrzymujemy z (1.13), a $T_m(t)$ — z (2.6), przyjmując tam $\omega = \omega_m$. Współczynniki A_{1m} pozostają na razie nieokreślone.

2.3. Rozwiązanie równań (2.1)-(2.4). Rozwiązania tych równań poszukujemy, jak zwykle, w postaci

$$u_k(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{km}(\varrho, t), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.8}$$

przy czym jedynie warunki początkowe (2.4) nie zostały jeszcze spełnione. Podstawiając (2.7) do (2.8), a otrzymany wynik do (2.4) znajdujemy

$$f(\varrho)=\sum_{m=1}^{\infty} CA_{1m} S_{km}(\varrho), \quad g(\varrho)=\sum_{m=1}^{\infty} DA_{1m}\,\omega_m S_{km}(\varrho), \quad \varrho_{k-1}\leqslant\varrho\leqslant\varrho_k, \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Dwa powyższe równania pozwalają na wyznaczenie niewiadomych dotąd stałych CA_{1m} i DA_{1m}. Porównując otrzymane wyżej wyrażenia z (1.21) i (1.22) i stosując następujące oznaczenia skrótowe

$$\begin{aligned}\frac{f_m}{g_m} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k^2}\int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k}\xi S_{km}(\xi)\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\,d\xi, \quad m=1,2,3,\ldots,\\ N_m &= \left[\frac{b^2}{2\omega_m^2}\left[\frac{dS_{nm}(\varrho)}{d\varrho}\right]^2\right]_{\varrho=b}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\varrho_k^2\left(\frac{1}{c_k^2}-\frac{1}{c_{k+1}^2}\right)S_{km}^2(\varrho_k), \quad m=1,2,3,\ldots,\end{aligned} \tag{2.9}$$

otrzymamy

$$CA_{1m}=\frac{f_m}{N_m}, \quad DA_{1m}=\frac{g_m}{\omega_m N_m}, \quad m=1,2,3,\ldots.$$

Stąd rozwiązanie problemu przyjmie ostatecznie postać

$$u_k(\varrho,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{S_{km}(\varrho)}{N_m}\left(f_m\cos\omega_m t+\frac{g_m}{\omega_m}\sin\omega_m t\right), \quad \varrho_{k-1}\leqslant\varrho\leqslant\varrho_k, \quad t>0, \quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{2.10}$$

2.4. Membrana jednorodna. Rozważmy membranę jednorodną o promieniu równym b, tzn. $0\leqslant\varrho\leqslant b$ oraz o stałej masie σ przypadającej na jednostkę pola powierzchni. Membrana poddana jest równomiernemu rozciąganiu o jednostkowym napięciu S. W przypadku tym otrzymamy (E oznacza macierz jednostkową)

$$\sigma_k=\sigma, \quad c_k^2=c^2=S/\sigma, \quad \lambda_k=\omega/c, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \quad \Lambda_k=1,$$
$$M_k=\frac{2c}{\pi\omega\varrho_k}E, \quad 1\leqslant k\leqslant n-1$$

i wzór ogólny (2.10) po pewnych przekształceniach przyjmie następującą postać, [1],

$$u(\varrho,t)=\frac{2}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(\omega_m\varrho/c)}{J_1^2(\omega_m b/c)}\int_0^b \xi J_0(\omega_m\xi/c)\left[f(\xi)\cos\omega_m t+\frac{g(\xi)}{\omega_m}\sin\omega_m t\right]d\xi, \tag{2.11}$$

gdzie ω_m są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\omega b/c)=0$.

3. Drgania wymuszone złożonej membrany kołowej

Będziemy rozważali tę samą membranę co w p. 2 z tym, że będzie ona wykonywała drgania wymuszone zmiennym ciśnieniem $q(\varrho, t)$ działającym na jednostkę pola powierzchni membrany począwszy od chwili $t=0$.

3.1. Sformułowanie problemu. Przemieszczenia poprzeczne $u_k = u_k(\varrho, t)$ są rozwiązaniami układu równań różniczkowych

$$(3.1)\quad \begin{gathered} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c_k^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_k}{\partial \varrho}\right) + Q_k(\varrho, t), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad t > 0, \\ c_k^2 = S/\sigma_k, \quad Q_k(\varrho, t) = q(\varrho, t)/\sigma_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \end{gathered}$$

spełniającymi warunki brzegowe (2.2) i (2.3) oraz następujące warunki początkowe

$$(3.2)\quad u_k(\varrho, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u_k}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \quad \varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3.2. Zagadnienie pomocnicze. Wprowadzając dodatni parametr τ oraz oznaczając przez $U_k(\varrho, t; \tau)$ rozwiązanie następującego zagadnienia pomocniczego:

$$(3.3)\quad \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} = c_k^2\left(\frac{\partial^2 U_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial U_k}{\partial \varrho}\right), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$(3.4)\quad U_1(\varrho, t; \tau) \text{ ograniczone dla } \varrho \to 0, \quad U_n(b, t; \tau) = 0, \quad t > 0,$$

$$(3.5)\quad U_{k+1} = U_k, \quad \frac{\partial U_{k+1}}{\partial \varrho} = \frac{\partial U_k}{\partial \varrho}, \quad \varrho = \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$(3.6)\quad U_k(\varrho, \tau; \tau) = 0, \quad \left[\frac{\partial U_k}{\partial t}\right]_{t=\tau} = Q(\varrho, \tau), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

łatwo zauważyć, że poszukiwane rozwiązanie $u_k(\varrho, t)$ zagadnienia (3.1)–(3.2) może być przedstawione w postaci

$$(3.7)\quad u_k(\varrho, t) = \int_0^t U_k(\varrho, t; \tau)\, d\tau, \quad \varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3.3. Rozwiązanie zagadnienia (3.3)–(3.6). Zagadnienie (3.3)–(3.6) posiada oczywiście te same wartości ω_m i te same funkcje własne $S_{km}(\varrho)$ co zagadnienie rozpatrywane w p. 2. Weźmy zatem pod uwagę całki szczególne (2.7) oraz funkcje $T_m(t)$ jak w (2.6); stąd

$$(3.8)\quad v_{km}(\varrho, t) = S_{km}(\varrho)\, T_m(t), \quad T_m(t) = C_m \cos \omega_m t + D_m \sin \omega_m t.$$

Rozwiązania $U_k(\varrho, t; \tau)$ zagadnienia (3.3)–(3.6) przyjmujemy jak zwykle w postaci

$$(3.9)\quad U_k(\varrho, t; \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{km}(\varrho, t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

przy czym rozwiązania te nie uwzględniają jeszcze warunków (3.6). Uwzględniając warunki (3.6) otrzymamy układ równań

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_{km}(\varrho)\, T_m(\tau) = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} S_{km}(\varrho)\, T'_m(\tau) = Q_k(\varrho, \tau), \quad \varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

z których drogą porównania z (1.21) i (1.22) znajdujemy równania dla $T_m(\tau)$ oraz $T'_m(\tau) = [dT_m(t)/dt]_{t=\tau}$:

$$T_m(\tau) = C_m \cos \omega_m \tau + D_m \sin \omega_m \tau = 0,$$

$$T'_m(\tau) = -\omega_m C_m \sin \omega_m \tau + \omega_m D_m \cos \omega_m \tau = \frac{q_m}{N_m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.10}$$

W powyższych wyrażeniach wartości N_m określamy z (2.9) a q_m — z (3.1); stąd

$$q_m = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} \int_{\varrho_{k-1}}^{\varrho_k} \xi S_{km}(\xi)\, q(\xi, \tau)\, d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.11}$$

Równania (3.10) rozwiązujemy względem C_m i D_m, a następnie wartości te podstawiamy do (3.8) i (3.9). W ten sposób rozwiązanie $U_k(\varrho, t; \tau)$ problemu pomocniczego (3.3)-(3.6) przyjmie postać

$$U_k(\varrho, t; \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m}{\omega_m N_m} S_{km}(\varrho) \sin \omega_m (t-\tau), \tag{3.12}$$

$$\varrho_{k-1} < \varrho < \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3.4. Rozwiązanie dla drgań wymuszonych. Podstawiając (3.12) do (3.7) otrzymujemy żądane rozwiązanie, przedstawiające poprzeczne przemieszczenia membrany $u_k(\varrho, t)$ w trakcie drgań wymuszonych:

$$u_k(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{km}(\varrho)}{\omega_m N_m} \int_0^t q_m(\tau) \sin \omega_m (t-\tau)\, d\tau, \tag{3.13}$$

$$\varrho_{k-1} \leqslant \varrho \leqslant \varrho_k, \quad t > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

W powyższym wzorze ω_m są dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego (1.10), funkcje własne $S_{km}(\varrho)$ są określone wzorem (1.13), N_m — wzorem (2.9) oraz $q_m = q_m(\tau)$ — wzorem (3.11).

3.5. Drgania wymuszone membrany jednorodnej. Przy tych samych oznaczeniach jak w p. 2.4 znajdujemy w tym przypadku dla wszystkich wartości $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$S_{km}(\varrho) = J_0(\omega_m \varrho/c), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad N_m = \frac{b^2}{2c^2} J_1^2(\omega_m b/c),$$

$$q_m(\tau) = \frac{1}{S} \int_0^b \xi J_0(\omega_m \xi/c)\, q(\xi, \tau)\, d\xi,$$

a zatem rozwiązanie ogólne (3.13) przyjmie postać

$$u(\varrho, t) = \frac{2}{b^2 \sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_m \varrho/c)}{\omega_m J_1^2(\omega_m b/c)} \int_0^t \sin \omega_m (t-\tau)\, d\tau \int_0^b \xi q(\xi, \tau) J_0(\omega_m \xi/c)\, d\xi, \tag{3.14}$$

$$0 \leqslant \varrho \leqslant b, \quad t > 0,$$

gdzie ω_m są dodatnimi pierwiastkami równania $J_0(\omega b/c) = 0$.

Literatura cytowana w tekście

[1] V. Vodička, J. Phys. Soc. Jap., 17 (1962), 4.

Резюме

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОЙ КРУГОВОЙ МЕМБРАНЫ

Математические вопросы, касающиеся свободных и вынужденных колебаний в неоднородных изотропных средах, тесно связанны между собой. Это находит отражение в теории запаздывающих потенциалов. В представленной работе показано на случае осесимметрических колебаний круговой мембраны, состоящей из n коаксиальных однородных колец, что отмеченные выше связи остаются справедливыми также и для слоистых сред. В связи с этим существует возможность выполнения большинства трудоемких исчислений одновременно для свободных и вынужденных колебаний. Некоторые из приведенных результатов не были до сих пор известны.

Summary

AXIALLY SYMMETRIC VIBRATIONS OF A COMPOSITE CIRCULAR MEMBRANE

The mathematical problem of free and forced vibrations of homogeneous isotropic bodies are closely connected. This fact finds its reflection in the theory of retarded potentials. In the present paper it is shown by means of the example of axially symmetric vibrations of a circular membrane composed of n concentric homogeneous parts, that these connections remain valid in the case of layered bodies, it being thus possible to carry out many tedious computations for free and forced vibrations simultaneously. Some of the results obtained are original.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1964 r.