ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 12 (1964)

O NIEUSTALONYM RUCHU CZĄSTKI KULISTEJ W NIERUCHOMYM I LEPKIM PŁYNIE

ANDRZEJ GÓRALSKI (WARSZAWA)

Rozważmy prostoliniowy, nieustalony ruch cząstki kulistej o masie m, średnicy d, gęstości ϱ w płynie o lepkości dynamicznej μ i gęstości ϱ_p. Przyjmijmy dalej, że ruch odbywa się w stałym polu sił zewnętrznych (np. w stałym polu grawitacyjnym o przyśpieszeniu g) i że $\varrho > \varrho_p$, co odpowiada opadaniu cząstki.

Oznaczmy chwilową prędkość cząstki przez u, prędkość początkową przez u_0 oraz prędkość ruchu ustalonego przez u_s.

Równanie prostoliniowego nieustalonego ruchu cząstki ma postać

$$m\frac{du}{dt} = F(t) - R(t) - L(t), \tag{1}$$

gdzie t oznacza czas, $F(t)$ siłę zewnętrzną działającą na cząstkę, $R(t)$ siłę oporu ruchu ustalonego, określoną względem chwilowej prędkości ruchu u oraz $L(t)$ siłę oporu płynu idealnego związaną z nieustalonym charakterem ruchu.

Przyjmując, że ruch cząstki kulistej ma miejsce w stałym polu sił ciężkości otrzymujemy:

$$m\frac{du}{dt} = m\frac{\varrho-\varrho_p}{\varrho}g - \frac{\pi}{8}\varrho_p d^2 cu^2 - \frac{\pi}{12}\varrho_p d^3\frac{du}{dt},$$

gdzie c oznacza współczynnik oporu.

Przekształcając znajdujemy

$$\frac{du}{dt} = \frac{2(\varrho-\varrho_p)}{2\varrho+\varrho_p}g - \frac{3\varrho_p}{2(2\varrho+\varrho_p)}\frac{cu^2}{d}. \tag{2}$$

Ponieważ wartość współczynnika oporu c jest zależna od charakteru ruchu, dogodnie jest wprowadzić jako nową zmienną liczbę Reynoldsa $\mathrm{Re} = ud\varrho_p/\mu$, co daje w wyniku

$$\frac{3\mu}{2(2\varrho+\varrho_p)d^2}dt = \frac{d(\mathrm{Re})}{(4/3\mu^2)\varrho_p(\varrho-\varrho_p)gd^3 - c\,\mathrm{Re}^2}. \tag{3}$$

Zauważymy w tym miejscu, że z równania ruchu ustalonego $F(t) - R(t) = 0$, wynika

$$c_s = \frac{4(\varrho-\varrho_p)g}{3u_s^2\varrho_p}d,$$

gdzie u_s jest prędkością ruchu ustalonego, a c_s współczynnikiem oporu ruchu ustalonego.

Mnożąc obie strony powyższej zależności przez podniesioną do kwadratu liczbę Reynoldsa ruchu ustalonego

$$\mathrm{Re}_s^2 = \frac{u_s^2\, d^2\, \varrho_p^2}{\mu^2}$$

otrzymujemy

$$(c\,\mathrm{Re}^2)_s = \frac{4\,(\varrho-\varrho_p)\,\varrho_p\, g d^3}{3\mu^2}. \tag{4}$$

Uwzględniając (4) napiszemy równanie (3) następująco:

$$dt = \tau\, \frac{d\,(\mathrm{Re})}{(c\,\mathrm{Re}^2)_s - c\,\mathrm{Re}^2}, \tag{5}$$

gdzie

$$\tau = \frac{2\,(2\varrho+\varrho_p)\, d^2}{3\mu}.$$

Zagadnienie uzależnienia wartości współczynnika oporu c od charakteru ruchu, tzn. od wartości Re, zostało rozwiązane przez autora w pracy [1], gdzie wykazano, że niezależnie od charakteru ruchu

$$c = \frac{1}{9}\left(1+\sqrt{1+\frac{216}{\mathrm{Re}}}\right)^2 \tag{6}$$

aż do $\mathrm{Re}_k = 2\cdot 10^5$.

W oparciu o zależności (5) i (6) znajdujemy

$$dt = 9\tau\, \frac{d\,(\mathrm{Re})}{\Omega^2 - \mathrm{Re}^2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{216}{\mathrm{Re}}}\right)^2}, \tag{7}$$

gdzie

$$\Omega^2 = \mathrm{Re}_s^2\left(1+\sqrt{1+\frac{216}{\mathrm{Re}_s}}\right)^2.$$

Całkując równanie (7) znajdziemy czas potrzebny na to, by kulista cząstka osiągnęła pewną prędkość u (przy czym dla $\varrho > \varrho_p$ odnosi się warunek $u_0 < u < u_s$):

$$t = 9\tau \int\limits_{\mathrm{Re}_0}^{\mathrm{Re}} \frac{d\,(\mathrm{Re})}{\Omega^2 - \mathrm{Re}^2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{216}{\mathrm{Re}}}\right)^2}. \tag{8}$$

Dla ułatwienia rachunków wprowadzimy nową zmienną

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{216}{\mathrm{Re}}}$$

i napiszemy równanie (8) następująco:

$$t = -\frac{18\tau}{\Omega^2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{216(\lambda - 1)\, d\lambda}{\lambda^2 \left[\lambda - \left(2 + \frac{216}{\Omega}\right)\right]\left[\lambda - \left(2 - \frac{216}{\Omega}\right)\right]}. \tag{9}$$

Po koniecznych przekształceniach znajdujemy

$$t = -\frac{9\tau}{\Omega}\left[\frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \ln \frac{\lambda_0(\lambda - \alpha)}{\lambda(\lambda_0 - \alpha)} - \frac{\beta - 1}{\beta^2} \ln \frac{\lambda_0(\lambda - \beta)}{\lambda(\lambda_0 - \beta)} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\right], \tag{10}$$

gdzie

$$\tau = \frac{2(2\varrho + \varrho_p)\, d^2}{3\mu}, \quad \lambda_0 = 1 + \sqrt{1 + \frac{216}{\mathrm{Re}_0}},$$

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{216}{\mathrm{Re}}}, \quad \alpha = 2 + \frac{216}{\Omega}, \quad \beta = 2 - \frac{216}{\Omega},$$

$$\Omega = \mathrm{Re}_s \left(1 + \sqrt{1 + \frac{216}{\mathrm{Re}_s}}\right).$$

Równanie (10) pozwala na określenie czasu, jaki upłynie, nim kulista cząstka o średnicy d, gęstości ϱ poruszająca się prostoliniowo w nieruchomym lepkim płynie o gęstości ϱ_p i lepkości dynamicznej μ osiągnie prędkość u pod warunkiem, że prędkość początkowa wynosiła u_0 i że $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_s \leqslant 2 \cdot 10^5$.

Omawiane równanie jest więc rozwiązaniem ogólnym, niezależnym od bieżącego charakteru ruchu zagadnienia określenia czasu trwania nieustalonego, prostoliniowego ruchu cząstki kulistej w nieruchomym lepkim płynie.

Literatura cytowana w tekście

[1] A. Góralski, *O prędkości swobodnego opadania kuli, brył izometrycznych, płytki i walca w nieruchomym płynie*, Zeszyty Naukowe Pol. Warszawskiej, Budownictwo, 23, 1965.

Резюме

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕПОДВИЖНОЙ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Даются общие решения задачи, касающиейся нестационарного движения сферической частицы. Полученный результат является общим в том смысле, что дает возможность определить длительность нестационарного движения частицы, независимо от характера этого движения.

Summary

NON-STATIONARY MOTION OF A SPHERICAL PARTICLE IN AN IMMOVABLE VISCOUS FLUID

The paper gives the general solution of the above problem. This generality is to be understood in the sense of enabling the determination of the durability of non-stationary motion, independently of the character of that motion.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 lutego 1964 r.