

**BADANIA DOŚWIADCZALNE WYBOCZENIA POWŁOKI HIPERBOLOIDALNEJ
OBCIĄŻONEJ NA BRZEGU OSIOWO-SYMETRYCZNIE**

JERZY WIANECKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie stateczności powłok cienkościennych staje się szczególnie ważne obecnie ze względu na dążenie do konstruowania ustrojów powierzchniowych o coraz większych rozpiętościach. Zagadnienie stateczności powłoki hiperboloidalnej nawet w zakresie liniowego ujęcia nie było dotychczas podejmowane, o ile autor mógł to stwierdzić na podstawie dostępnych mu publikacji. W związku z tym zajął się on zagadnieniem stateczności powłoki cienkościennej, której powierzchnię środkową stanowi jednopowłokowa hiperboloida obrotowa, obciążona na krawędziach osiowo-symetrycznie (por. praca doktorska autora [7] lub [8]). Ze względu na brak jakichkolwiek rozwiązań w tym zakresie ograniczono się w tej pracy do ujęcia liniowego, które może mieć zastosowanie dla pewnej klasy powłok.

W rozdziale pierwszym i drugim [7] lub [8] wyprowadzono ogólne równania różniczkowe stateczności obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej na brzegach osiowo-symetrycznie¹. Te trzy jednorodne równania różniczkowe cząstkowe ósmego rzędu ze względu na trzy składowe przemieszczenia u, v, w wyrażono w celu bardziej przejrzystego ich przedstawienia w formie jednego równania macierzowego, podając jednocześnie tablicę macierzy i wartości ich współczynników. Jak można się było spodziewać, są one bardzo skomplikowane i powstaje konieczność wprowadzenia racjonalnych uproszczeń.

Dla znalezienia odpowiedniej podstawy autor przeprowadził doświadczenia, które dały podstawę do zastąpienia tych bardzo skomplikowanych równań stateczności równaniami przybliżonymi stateczności, niewspółmiernie prostszymi. Podamy w tej pracy jedynie ostateczny kształt tych równań odsyłając czytelnika do cytowanej już pracy [7] lub [8].

Badania doświadczalne przedstawione w niniejszym artykule miały również na celu wyjaśnienie, czy przyjęta liniowa teoria powłok może stanowić podstawę do określenia obciążenia krytycznego. Badania te (zostały one tak przeprowadzone, aby zapewnić teoretycznie przewidziany stan błonowy w powłoce) potwierdziły słuszność takich założeń, o czym bliżej będzie jeszcze mowa w zakończeniu.

¹ Wyprowadzenie tych równań oparto na [1, 2, 3, 4 i 5].

Celem tych badań jest sprawdzenie założeń, na których zostały oparte ogólne równania różniczkowe stateczności powłoki hiperboloidalnej dla osiowo-symetrycznego obciążenia brzegowego, przedstawione w II rozdziale pracy [7] lub [8].

Badania te powinny więc dać odpowiedź na trzy pytania:

1. Czy przy przewidzianym schemacie obciążenia powłoki stan błonowy w powłoce zostanie zrealizowany z dobrym przybliżeniem?
2. Czy wyboczenie istotnie będzie sprężyste, tzn. czy utrata stateczności pierwotnej postaci nastąpi przy naprężeniach niższych od granicy plastyczności?
3. Czy rozważany przypadek wyboczenia powłoki hiperboloidalnej mieści się w zastosowanej teorii małych odkształceń?

Oprócz tego celem tego badania jest uzyskanie pewnego materiału doświadczalnego, który można by wyzyskać do znacznego uproszczenia ogólnych równań różniczkowych stateczności. Chodziłoby tu o uzyskanie takiej ich postaci, która byłaby konkretnie przydatna do zastosowań praktycznych.

Warto by podkreślić, że część eksperymentalna tej pracy nastęrczyła dużo trudności już na samym wstępie przy poszukiwaniu wykonawcy tych powłok. Ze względu na to, że zagadnienie dotyczy stateczności powłoki, żądano wysokich tolerancji przy ich wykonaniu. W rezultacie żaden predystynowany do tego zakład w Warszawie, w Krakowie i w Gliwicach nie podjął się ich wykonania. Po rocznych poszukiwaniach dzięki interwencji Centralnego Zarządu Wyrobów Precyzyjnych w Warszawie Zakłady Metalowe w Skarżysku podjęły się wykonania tych powłok.

Pomiary przeprowadzono w laboratorium wytrzymałościowym Katedry Teorii i Konstrukcji Samolotów WAT. Wykorzystano przy tym aparaturę tensometryczną z Katedry Budownictwa Ogólnego Politechniki Warszawskiej.

2. Wybór metody badań

Spośród metod ilościowych eksperymentalnej analizy naprężeń wybrano jako podstawową metodę tensometrii elektro-oporowej. Powody takiego wyboru były następujące:

1. Przy przyjęciu prawa zmiany naprężeń na grubości powłoki jako prawa Naviera znajomość naprężeń na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej pozwala na ustalenie wszystkich innych naprężeń. Tensometria elektro-oporowa jest szczególnie przydatna do mierzenia tego rodzaju naprężeń.

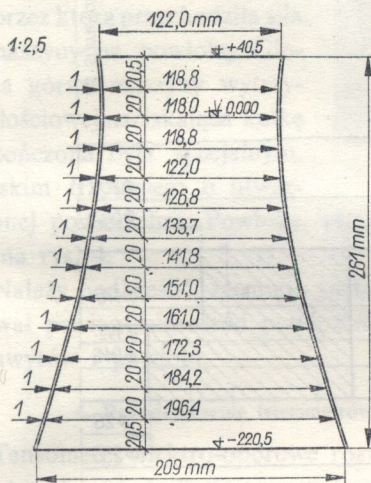
2. Metoda ta odznacza się bardzo dużą dokładnością, co w przypadku badania konstrukcji na stateczność jest rzeczą konieczną, gdyż zapewnić powinna możliwość uchwycenia sprężystej siły krytycznej.

Metoda ta została uzupełniona przez pomiar przemieszczeń przy pomocy czujników mechanicznych, które mają wskazać rząd wielkości przemieszczeń przy sprężystym wyboczeniu powłoki.

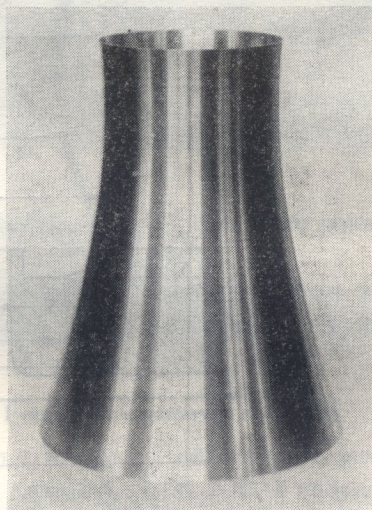
3. Powłoki i układ obciążający

Wymiary powłoki hiperboloidalnej podano na rys. 1².

Tolerancje wykonania powłoki były następujące: 1) równoległość powierzchni górnej i dolnej $\pm 0,02$ mm, 2) wykonanie średnic w tolerancji $\pm 0,15$ mm, 3) odchylenie środków średnio od osi powłoki max 0,05 mm, 4) grubość ścianki $\pm 0,1$ mm.



Rys. 1



Rys. 2

Dane wytrzymałościowe: moduł Younga $E=2,2 \cdot 10^6$ kG/cm², moduł Kirchhoffa $G=8,47 \cdot 10^5$ kG/cm², współczynnik Poissona $\nu=0,3$, granica plastyczności $Q_r=4000$ kG/cm², granica wytrzymałości $R_r=6900$ kG/cm².

Granice plastyczności Q_r i wytrzymałości R_r obliczono jako średnie arytmetyczne z odczytów na wykresach rozciągania czterech płaskich próbek wyciętych z powłoki.

Gotową do badań powłokę przedstawia rys. 2.

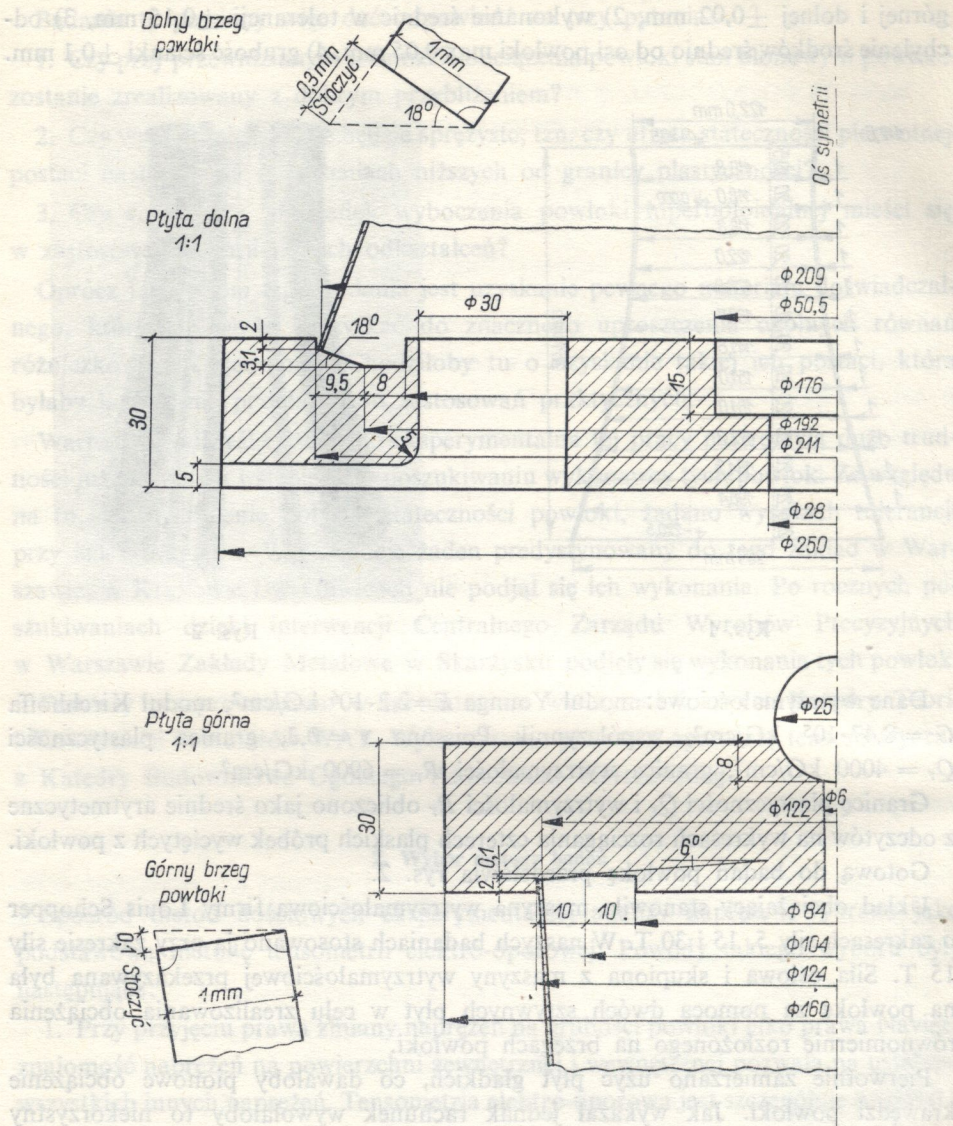
Układ obciążający stanowiła maszyna wytrzymałościowa firmy Louis Schopper o zakresach siły 5, 15 i 30 T. W naszych badaniach stosowano ją przy zakresie siły 15 T. Siła osiowa i skupiona z maszyny wytrzymałościowej przekazywana była na powłokę za pomocą dwóch sztywnych płyt w celu zrealizowania obciążenia równomiernie rozłożonego na brzegach powłoki.

Pierwotnie zamierzano użyć płyt gładkich, co dawałoby pionowe obciążenie krawędzi powłoki. Jak wykazał jednak rachunek wywołałoby to niekorzystny stan zgięciowy przy jej brzegach. Dlatego też zdecydowano się na wykonanie płyt podporowych jak na rys. 3, co zapewniło przyłożenie obciążenia równomiernie rozłożonego na krawędziach powłoki w kierunku stycznym do południków.

Pociągnęło to za sobą konieczność odpowiedniego stoczenia krawędzi powłoki z płaszczyzny na stożek (rys. 3).

² Powłoka ta przedstawia wprawdzie w skali 1:200 model rzeczywistej chłodni wieżowej o wymiarach podanych w artykule [6], ale w tej pracy jest sama dla siebie obiektem badań.

W dolnej płycie podporowej przewidziano sześć otworów wraz z odpowiednimi kanałami dla wyprowadzenia przewodów biegnących od tensometrów naklejonych na wewnętrznej powierzchni powłoki na zewnątrz (rys. 4).



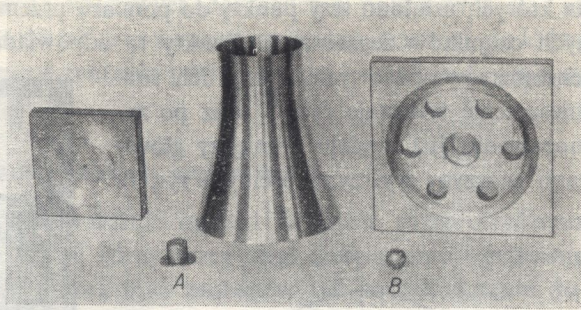
Rys. 3

W celu zapewnienia jak najlepszego centrowania obciążenia wywiercono w środku dolnej płyty podporowej otwór, do którego wchodził specjalnie pasowany trzpień A (por. rys. 4), łączący ją z dolną, ruchomą częścią maszyny wytrzymałościowej. Trzpień ten więc jednocześnie centrował płytę dolną na oś maszyny.

Powłoka z kolei wstawiona była w odpowiedni rowek w płycie, co zapewniało jej osiowe ustawienie. Na górny brzeg powłoki wsunięta była również w odpowiedni

rowek płyta górna, co gwarantowało pozostawanie tych trzech elementów (obu płyt i powłoki) na osi maszyny.

W płycie górnej przewidziano od góry specjalne wgłębienie, w które włożono kulkę B (rys. 4) o średnicy 25 mm, poprzez którą przechodziła siła z maszyny na powłokę. Głowica górna maszyny wytrzymałościowej naciskająca kulkę zakończona była specjalnym, płaskim trzpieniem o utwardzonej powierzchni. Powłoka, płyty i poszczególne elementy centrujące pokazane są na rys. 4.

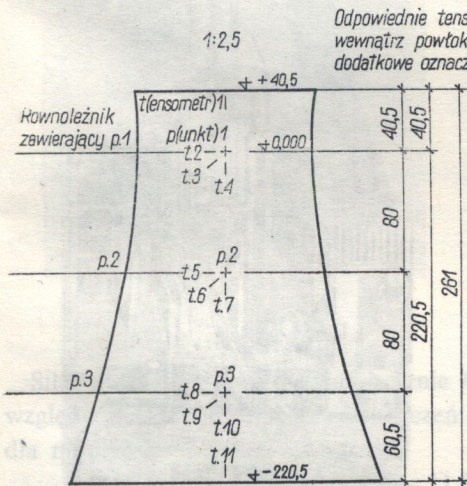


Rys. 4

Należy podkreślić, że mimo spełnienia tych wszystkich warunków zawsze występował pewien mimośród przyłożenia siły, będący wypadkowym błędów maszyny, uchwytów i powłoki.

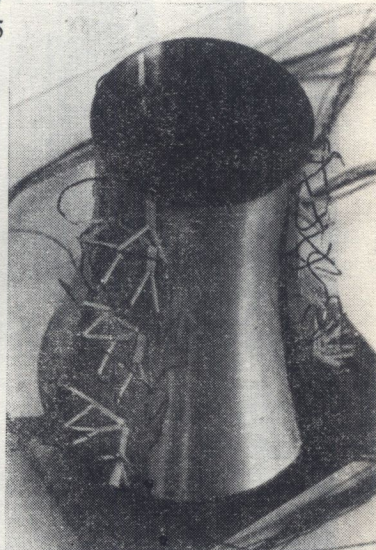
4. Rozmieszczenie tensometrów oporowych i czujników zegarowych na modelu

Tensometry elektro-oporowe rozmieszczono z zewnątrz i od wewnątrz powłoki na trzech południkach oznaczonych cyframi rzymskimi I, II i III i oddalonych od siebie o kąt środkowy 120°. Na każdym południku naklejono 11 tensometrów z zewnątrz i 11 od wewnątrz powłoki. Pozwalały one na pomiar naprężeń w 15-u punktach, po 5



Rys. 5

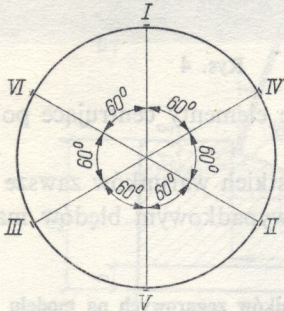
odpowiednie tensometry od wewnątrz powłoki posiadają dodatkowe oznaczenie (')



Rys. 6

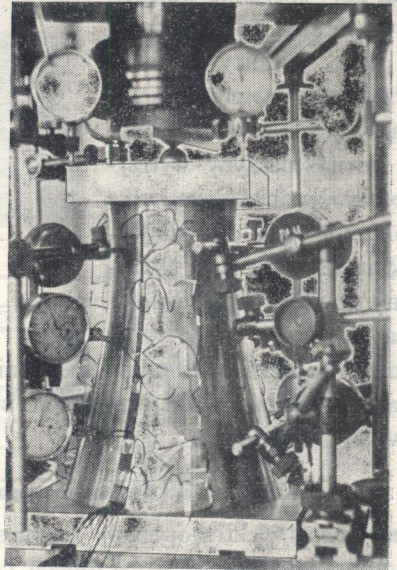
na każdym południku. Sposób rozmieszczenia tych tensometrów wskazuje rys. 5 i 6. Ostateczny wygląd modelu powłoki hiperboloidalnej po naklejeniu tensometrów, założeniu koszulek izolujących i przyłutowaniu końcówek pokazuje rys. 6.

Oprócz południków I, II i III zaznaczono na powłoce południki IV, V i VI (rys. 7), na których ustalono trzy punkty do pomiaru przemieszczeń za pomocą mechanicznych czujników zegarowych. Punkty te odpowiadają punktom pomiarowym dla tensometrów oporowych, a więc ich rozmieszczenie wskazuje rys. 5 oraz po zamocowaniu już modelu pomiędzy głowicami maszyny wytrzymałościowej rys. 8.

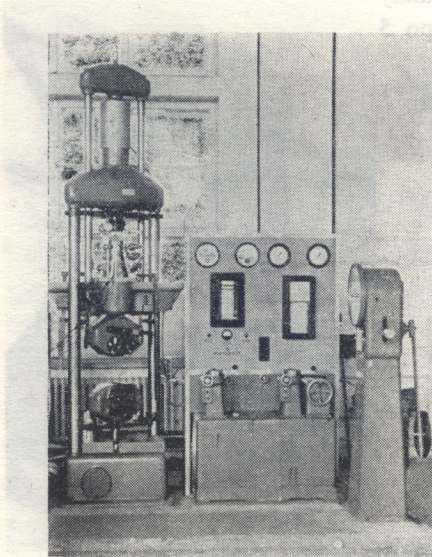


Na południkach I, II, III są tensometry,
na południkach IV, V, VI są czujniki

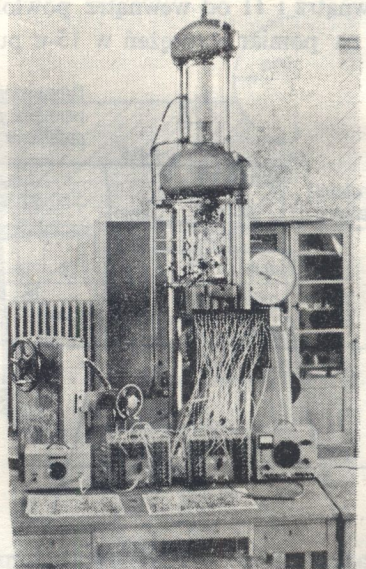
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



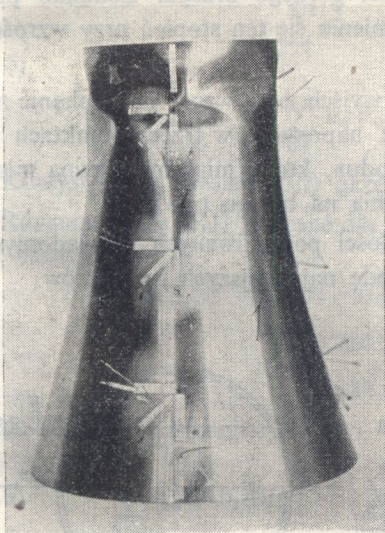
Rys. 10

Oprócz 9 czujników rozmieszczonych na południkach powłoki ustawiono trzy czujniki dla kontrolowania ewentualnych ruchów płyty górnej oraz 2 w tymże samym celu na płycie dolnej.

Końcowy widok powłoki po zamocowaniu w uchwytach maszyny wytrzymałościowej, a przed przystąpieniem do właściwych doświadczeń pokazany został na rys. 9 od strony maszyny i na rys. 10 od strony aparatury tensometrycznej, do której przewody dochodziły od specjalnie w tym celu przygotowanej i oznakowanej tablicy rozdzielczej, umieszczonej na stojaku.

5. Opracowanie i omówienie wyników badań

Opis przebiegu doświadczeń i spostrzeżenia ogólne. W czasie przeprowadzania badań na powłoce 1 okazało się, że jej górny brzeg uległ częściowemu wgnieceniu w rowek płyty górnej, przy czym można było zaobserwować po zakończeniu doświadczenia ciekłą strużynę na powierzchni styku. W związku z tym przed przystąpieniem do dalszych doświadczeń zwiększono promień rowka w płycie górnej o 0,1 mm, jednocześnie odpowiednio tocząc powierzchnię styku. Zjawiska tego przy badaniu powłok 2 i 3 już nie zaobserwowano, przy czym powłoki te podlegały bardzo zbliżonym stanom naprężeń i w efekcie dały identyczną siłę wywołującą uplastycznienie fal sprężystych, wynoszącą $P_{p1} = 11,8$ T.



Rys. 11



Rys. 12

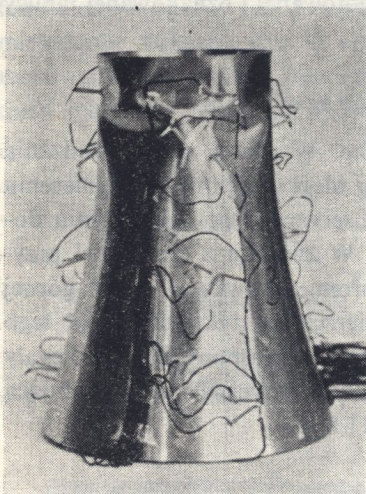
Siła, która wywołała uplastycznienie fal sprężystych powłoki 1 jest większa (ze względu na skrępowanie przemieszczeń na brzegu powłoki) od analogicznych sił dla modeli 2 i 3 tylko o

$$\frac{12,4 - 11,8}{11,8} \cdot 100 = 5\%.$$

Postać uplastycznionych fal sprężystych, które po utrwaleniu obserwujemy na rys. 11, 12 i 13, jest na wszystkich powłokach identyczna.

Można zaobserwować 6 fal na obwodzie w dwóch pasach zlokalizowanych w pobliżu szyjki, przy czym kąt środkowy obejmujący obszar, na którym sfalowanie

wystąpiło w silniejszym stopniu (ze względu na mimośród), wynosi 240° . Sfalowania w poszczególnych pasach są względem siebie przesunięte o długość półfali. Dlatego też dla szczegółowego zbadania samego zjawiska wyoboczenia i uchwycenia sprężystej



Rys. 13

siły krytycznej posłużono się powłokami 2 i 3, wybierając dla nich najbardziej charakterystyczne wykresy. Skorzystano przy tym głównie z powłoki 3, gdyż w miarę postępowania prac doświadczalnych autor doszedł do wniosku, że jest rzeczą wskazaną zageścić przedziały sił w pobliżu wartości $P=10$ T, co zostało dopiero w pełni przeprowadzone dla powłoki 3.

Określenie stopnia nierównomierności rozłożenia obciążeń na brzegu powłoki. W celu określenia stopnia nierównomierności rozłożenia obciążeń na brzegu powłoki posłużono się odczytami tensometrów naklejonych w bezpośredniej bliskości górnego brzegu. Zbadano przy tym, jak zmienia się ten stopień przy wzroście obciążenia.

Punktem wyjścia były wzory na ściskanie mimośrodowe przekroju pierścieniowego. Mając naprężenia w trzech punktach na obwodzie poszukiwano składowych «mimośrodu», który miał być pewną miarą całkową nierównomierności rozłożenia obciążenia na brzegu powłoki.

Ponieważ liczba równań była większa od ilości poszukiwanych niewiadomych, dlatego też do rozwiązania zastosowano metodę najmniejszych kwadratów.

Pole przekroju poprzecznego (rys. 14)

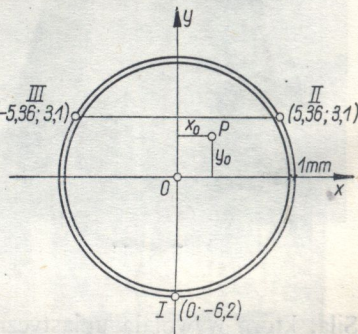
$$F = \pi (6,2^2 - 6,1^2) = 4,08 \text{ [cm}^2\text{]},$$

a kwadraty promieni bezwładności przekroju wynoszą

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{1}{4} (6,2^2 + 6,1^2) = 18,93 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Ogólne równanie przedstawia się następująco:

$$(5.1) \quad \frac{x}{i_y^2} x_0 + \frac{y}{i_x^2} y_0 = -\frac{\sigma F}{P} - 1,$$



Rys. 14

gdzie siłę ścisającą P należy podstawić ze znakiem plus, a odpowiadające jej naprężenie ścisające σ ze znakiem minus.

Mamy trzy równania typu (5.1), co zapiszemy ogólnie

$$(5.2) \quad a_n x_0 + b_n y_0 = c_n, \quad n = 1, 2, 3.$$

Dla $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$ otrzymamy

$$(5.3) \quad a_n x_1 + b_n y_1 = c_n + \Delta c_n.$$

Żądamy w myśl metody najmniejszych kwadratów, aby

$$(5.4) \quad \sum_{n=1}^3 (\Delta c_n)^2 = \min$$

lub obliczając $(\Delta c_n)^2$ z równania (5.3) napiszemy:

$$(5.5) \quad \sum_{n=1}^3 (\Delta c_n)^2 = \sum_{n=1}^3 (a_n x_1 + b_n y_1 - c_n)^2 = \min.$$

Stąd mamy dwa warunki konieczne występowania ekstremum:

$$(5.6) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{n=1}^3 (\Delta c_n)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \sum_{n=1}^3 (\Delta c_n)^2 = 0.$$

Warunki te po rozwinięciu uzyskają postać:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} x_1 \sum_{n=1}^3 a_n^2 + y_1 \sum_{n=1}^3 a_n b_n &= \sum_{n=1}^3 a_n c_n, \\ x_1 \sum_{n=1}^3 a_n b_n + y_1 \sum_{n=1}^3 b_n^2 &= \sum_{n=1}^3 b_n c_n. \end{aligned}$$

Korzystając z równań (5.7) określimy składowe poszukiwanego «mimośrod». Równania typu (5.1) zapisane dla górnego brzegu powłoki (rys. 14) przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} 0 x_0 - 0,328 y_0 &= c_1, \\ 0,284 x_0 - 0,164 y_0 &= c_2, \\ -0,284 x_0 - 0,164 y_0 &= c_3. \end{aligned}$$

Stąd obliczamy:

$$(5.8) \quad \sum_{n=1}^3 a_n^2 = 0,1616, \quad \sum_{n=1}^3 a_n b_n = 0, \quad \sum_{n=1}^3 b_n^2 = 0,1613.$$

Podstawiając (5.8) do (5.7) otrzymamy operatywne wzory do obliczenia poszukiwanych wielkości x_1, y_1 , będących miarą całkową nierównomierności rozłożenia obciążenia na górnym brzegu powłoki:

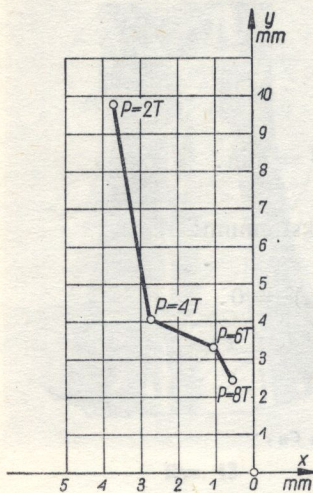
$$(5.9) \quad x_1 = \frac{\sum_{n=1}^3 a_n c_n}{0,1616}, \quad y_1 = \frac{\sum_{n=1}^3 b_n c_n}{0,1613}.$$

Obliczenie naprężeń przy brzegu przeprowadzono według hipotezy płaskich przekrojów i liniowego rozkładu jednoosiowych naprężeń ze względu na możliwość założenia tensometrów tylko wzdłuż południków.

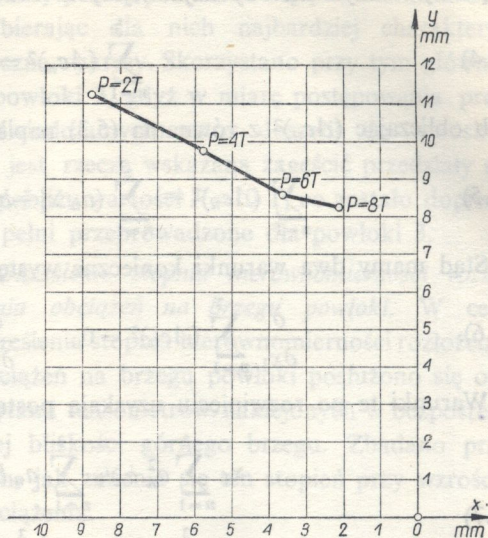
Uzyskane wyniki przedstawiono graficznie na rys. 15.

Wyniki uzyskane dla powłoki 3 przedstawiono graficznie na rys. 16.

Jak widać z powyższych wykresów (rys. 15 i 16) w miarę wzrostu obciążenia maleje «mimośród», który jest pewną miarą całkową nierównomiernego rozłożenia

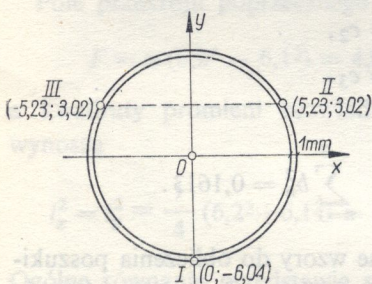


Rys. 15



Rys. 16

obciążenia na brzegu powłoki. Przyczyną tego są wysokie naprężenia stykowe, które wywołują uplastycznienie brzegu powłoki i tym samym zapewniają bardziej równomierny rozkład obciążenia na krawędzi.



Rys. 17

W celu zorientowania się jak daleko sięga wpływ nierównomiernego rozłożenia obciążenia na brzegu powłoki i dla oszacowania górnej granicy wartości rzeczywistego mimośrodu całego układu weźmiemy pod uwagę naprężenia σ_t^{bl} , występujące w przekroju szyjkowym, tzn. na równoleżniku zawierającym punkty 1.

Pole przekroju poprzecznego wynosi

$$F = \pi (6,04^2 - 5,94^2) = 4,08 \text{ [cm}^2\text{]},$$

kwadraty zaś promieni bezwładności przekroju są następujące:

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{1}{4} (6,04^2 + 5,94^2) = 17,92 \text{ [cm}^2\text{]}.$$

Równania typu (5.1) zapisane dla tego równoleżnika przybierają postać:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} 0 x_0 - 0,336 y_0 &= c_1, \\ 0,292 x_0 + 0,169 y_0 &= c_2, \\ -0,292 x_0 + 0,169 y_0 &= c_3. \end{aligned}$$

Stąd obliczamy

$$(5.11) \quad \sum_{n=1}^3 a_n^2 = 0,170, \quad \sum_{n=1}^3 a_n b_n = 0, \quad \sum_{n=1}^3 b_n^2 = 0,170.$$

Podstawiając (5.11) do (5.7) otrzymamy operatywne wzory dla obliczenia składowych «mimośrodu» obciążenia powłoki:

$$(5.12) \quad x_1 = \frac{1}{0,17} \sum_{n=1}^3 a_n c_n, \quad y_1 = \frac{1}{0,17} \sum_{n=1}^3 b_n c_n.$$

Interesujące nas naprężenia określimy biorąc pod uwagę odkształcenia pomierzone przy pomocy tensometrów oporowych.

Znając w pewnym miejscu dwa odkształcenia ε_θ i ε_t w dwóch kierunkach do siebie prostopadłych możemy obliczyć naprężenia występujące w tych kierunkach w oparciu o prawo Hooke'a dla dwuosiowego stanu naprężenia:

$$(5.13) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_t), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_\theta).$$

Nazwijmy przez σ_θ^z i σ_t^z naprężenia w dowolnym miejscu na powierzchni zewnętrznej powłoki, a przez σ_θ^w i σ_t^w naprężenia w tymże samym miejscu, ale na powierzchni wewnętrznej powłoki.

Zgodnie z definicją naprężeń błonowych i zgięciowych możemy napisać

$$(5.14) \quad \sigma_\theta^{bl} = \frac{1}{2} (\sigma_\theta^z + \sigma_\theta^w), \quad \sigma_\theta^{zg} = \frac{1}{2} (\sigma_\theta^z - \sigma_\theta^w).$$

Podobne wzory możemy napisać dla kierunku t :

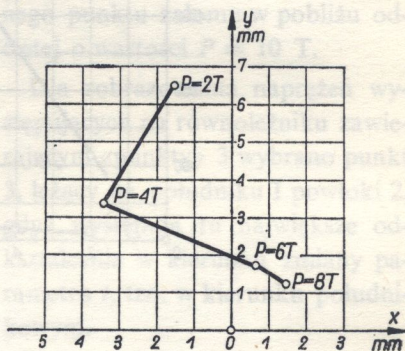
$$(5.15) \quad \sigma_t^{bl} = \frac{1}{2} (\sigma_t^z + \sigma_t^w), \quad \sigma_t^{zg} = \frac{1}{2} (\sigma_t^z - \sigma_t^w).$$

«Mimośród» obciążenia powłoki wyznaczono za pomocą naprężeń σ_θ^{bl} jako dominujących. Obliczenie przeprowadzono dla powłoki 3, gdyż w miarę postępowania prac doświadczalnych autor doszedł do wniosku, że wskazane jest zagęścić przedziały sił, co zostało dopiero w pełni przeprowadzone przy badaniu powłoki 3. Uzyskane wyniki przedstawiono w postaci wykresu na rys. 18.

Te obliczone mimośrody są przede wszystkim miarą nierównomiernego rozkładu obciążenia na krawędzi; rozkład ten wpływa na

przekrój sztykowy w mniejszym stopniu, co widać z porównania rys. 16 z rys. 18.

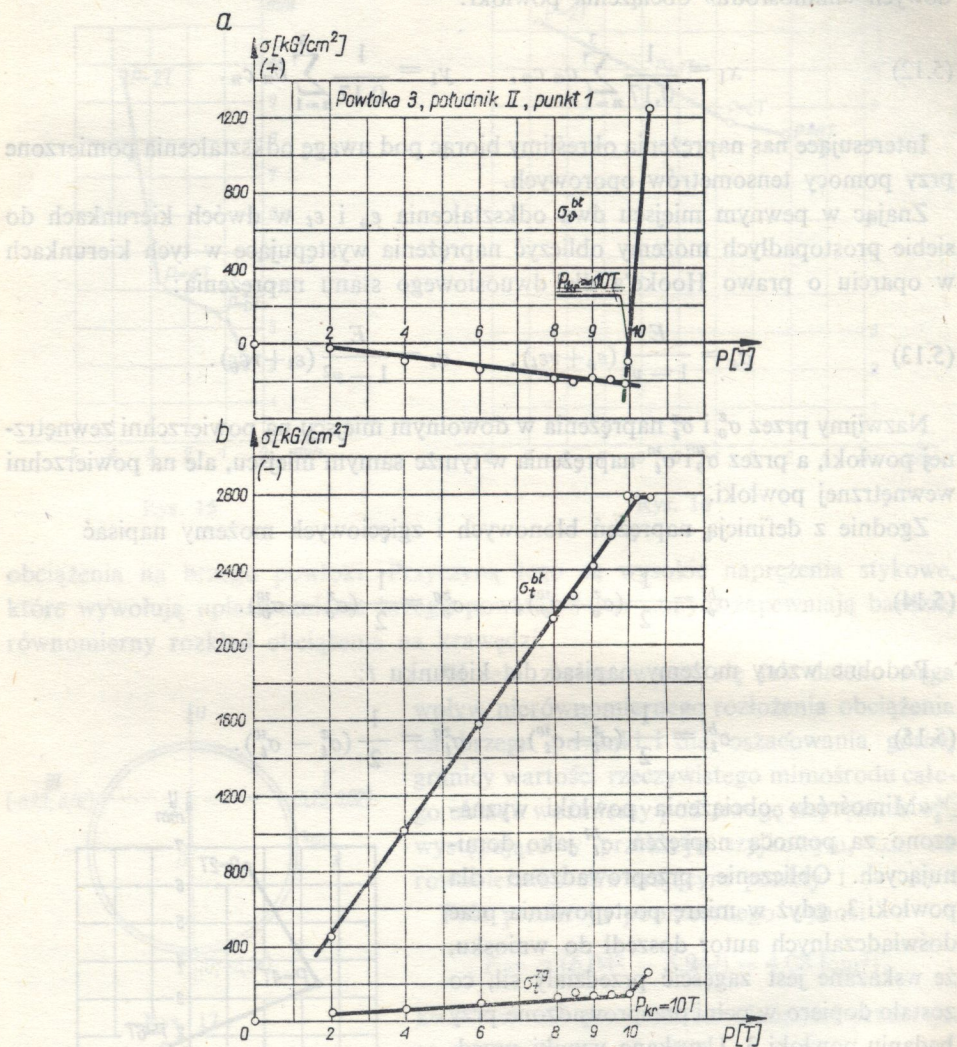
Orientację co do górnej granicy wartości rzeczywistego mimośrodu całego układu może dać jednak rozpatrzone równoleżnik zawierający punkty 1 dla największego



Rys. 18

obciążenia przed utratą stateczności. Rząd wielkości tego mimośrodru wynosi około 2,1 mm.

Wyznaczenie naprężeń w poszczególnych punktach powłoki. Obliczenie oparto na wzorach (5.13), (5.14) i (5.15). Jako pierwszy rozpatrzono punkt 1 na południku II powłoki 3. Wartości przedstawiono w postaci wykresów na rys. 19.



Rys. 19

Interesujące jest tam otoczenie punktu odpowiadającego sile $P = 10$ T, w pobliżu której następuje nagły wzrost naprężeń σ_{θ}^{bt} , połączony ze zmianą znaku tych naprężeń, oraz dwukrotny prawie wzrost naprężeń zginających, co wskazuje na powstanie sfałowania na badanym równoleżniku.

Warto jednocześnie w tym miejscu podkreślić, że przy obciążeniu powłoki siłą $P = 10,5$ T odkształcenia są całkowicie sprężyste, o czym świadczą odczyty tensometrów po odciążeniu (tablice 8, 9 i 10 w [7] lub [8]).

W podobny sposób obliczono również naprężenia dla tej samej powłoki 3, w punkcie 1, ale na południku I. Ograniczono się przy tym do kilku wartości sił, leżących w pobliżu interesującej nas wartości $P=10$ T.

W pozycji 11 tablicy 20 podobnie jak w teźże pozycji tablicy 19 (patrz praca [7] lub [8]) mamy nagły wzrost naprężeń σ_t^{bt} połączony ze zmianą znaku w pobliżu siły $P = 10$ T, co potwierdza uprzednie przypuszczenie o powstaniu fali na badanym równoleżniku.

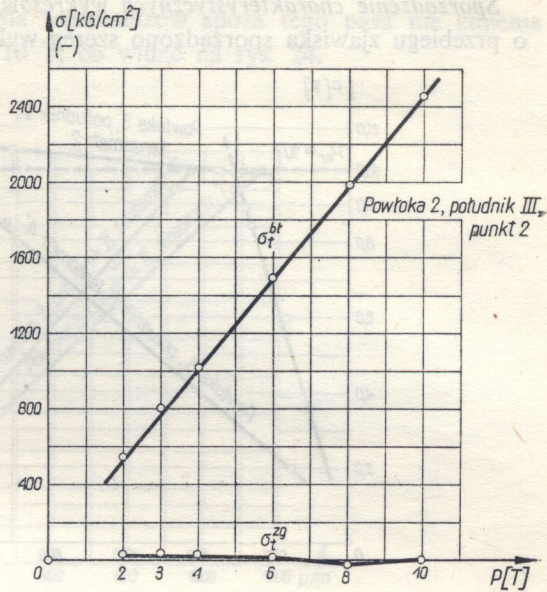
Dla zobrazowania naprężeń występujących na równoleżniku zawierającym «punkty» 2 wybrano południk III na powłoce 2, gdyż występują tam największe odkształcenia w kierunku zmiany parametru t , tzn. wzdłuż południka.

Wykres σ_t^{bt} oraz σ_t^{zg} przedstawiono na rys. 20.

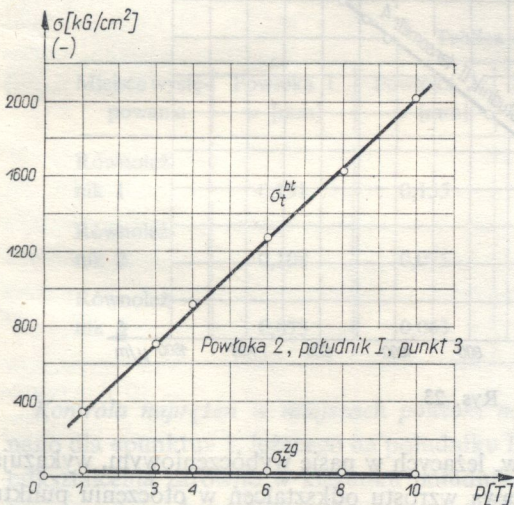
Nie obserwujemy tu tego zjawiska, które zachodziło na równoleżniku, zawierającym punkty 1 w pobliżu $P = 10$ T. Prawo wzrostu naprężeń zachowuje stale ten sam liniowy charakter bez żadnego punktu załomu w pobliżu odciętej o wartości $P = 10$ T.

Dla zobrazowania naprężeń występujących na równoleżniku zawierającym «punkty» 3 wybrano punkt 3, leżący na południku I powłoki 2, gdyż występują tu największe odkształcenia w kierunku zmiany parametru t , tzn. w kierunku południkowym.

Wykresy σ_t^{bt} i σ_t^{zg} przedstawiono na rys. 21. Charakter ich jest analogiczny do wykresów tychże naprężeń na równoleżniku zawierającym punkty 2. Prawo wzrostu naprężeń



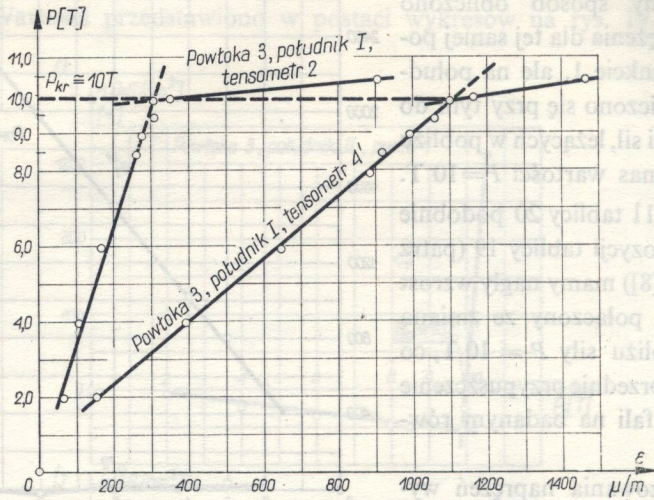
Rys. 20



Rys. 21

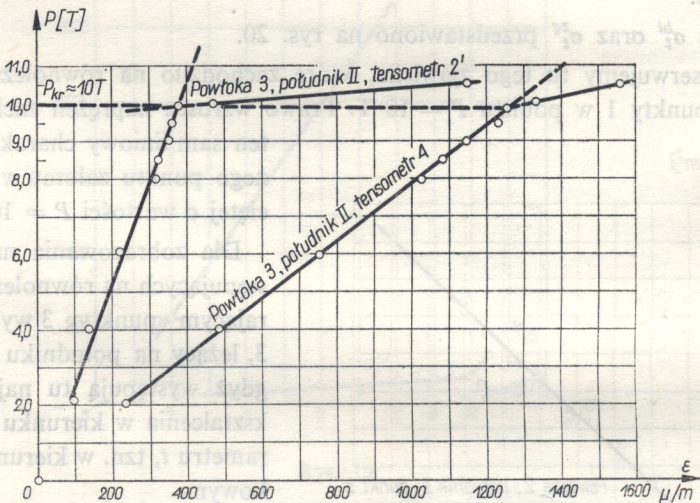
zachowuje stale ten sam liniowy charakter bez żadnego punktu załomu w pobliżu odciętej o wartości $P = 10$ T.

Sporządzenie charakterystycznych wykresów. W celu uzyskania dalszych danych o przebiegu zjawiska sporządzono szereg wykresów $P = P(\epsilon)$ dla poszczególnych



Rys. 22

tensometrów wybranych z pasa szyjkowego, który uległ wyboczeniu, jak i też spoza niego dla różnych południków (rys. 22, 23, 24).

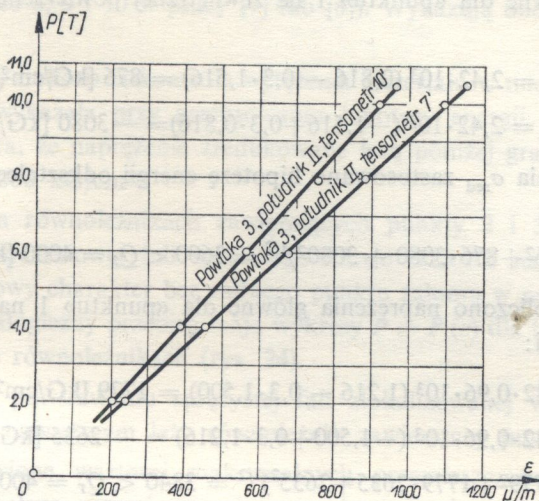


Rys. 23

Wykresy $P = P(\epsilon)$ dla tensometrów, leżących w pasie wybozeniowym, wykazują (jak widać z rys. 22 i 23) zmianę prawa wzrostu odkształceń w otoczeniu punktu o rzędnej $P = 10$ T. Wykreślone proste pozwalają uchwycić punkt załomu, któremu

odpowiada siła $P = 10$ T. Z dokładnością do 1% możemy przyjąć wartość sprężystej siły wybozeniowej $P_{kr} = 10$ T.

Charakter wykresów $P = P(\epsilon)$ dla tensometrów spoza tego pasa nie zmienia się w otoczeniu wartości siły $P = 10$ T, co widać na rys. 24.



Rys. 24

Zestawienie maksymalnych przemieszczeń w odpowiadających sprężystej sile krytycznej. Czujniki zegarowe, jak przypuszczano na wstępie, a co potwierdziły badania, nie nadają się jako zbyt mało czułe do wyznaczenia chwili, w której następuje wyboczenie sprężyste. Wprowadzono je do badań jako czynnik uzupełniający, który dał rząd wielkości przemieszczeń w prostopadłych do powłoki.

Maksymalne przemieszczenia w dla $P_{kr} = 10$ T zestawiono w tabelicy 1.

Tabelica 1

Miejsce występowania	Powłoka 1 w [mm]	Powłoka 2 w [mm]	Powłoka 3 w [mm]	Bezwzgl. najw. w [mm]	$\frac{w_{max}}{2h}$
Równoleżnik 1	0,191	0,155	0,161	0,191	$\frac{1}{5,2}$
Równoleżnik 2	0,108	0,075	0,124	0,124	$\frac{1}{8}$
Równoleżnik 3	0,073	0,063	0,074	0,074	$\frac{1}{14}$

Kontrola naprężeń w miejscach powłoki najbardziej wyteżonych. Kontrolę dokonano dla «punktu» 1, leżącego na południku II powłoki 3, gdzie wystąpiły największe odkształcenia zarówno w kierunku południkowym jak i równoleżnikowym, a przy tym przeciwnych znaków i przy wartości siły $P = 10,5$ T, a więc większej od sprężystej siły krytycznej $P_{kr} = 10$ T. Sprawdzenie naprężeń przeprowadzono we wska-

zanym wyżej miejscu zarówno na zewnętrznej, jak i na wewnętrznej powierzchni powłoki.

Mając zmierzone odkształcenia w trzech kierunkach zastosowano konstrukcję wykresną Mohra dla wyznaczenia odkształceń głównych.

Naprężenia główne dla «punktu» 1 na zewnętrznej powierzchni powłoki są następujące:

$$\sigma_1^z = 2,42 \cdot 10^3 (0,816 - 0,3 \cdot 1,516) = 876 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

$$\sigma_3^z = 2,42 \cdot 10^3 (-1,516 + 0,3 \cdot 0,816) = -3080 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

W celu obliczenia σ_{red} zastosowano hipotezę energii odkształcenia postaciowego Hubera:

$$\sigma_{\text{red}} = (876^2 + 876 \cdot 3080 + 3080^2)^{1/2} = 3600 < Q_r = 4000 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Analogicznie obliczono naprężenia główne dla «punktu» 1 na powierzchni wewnętrznej powłoki:

$$\sigma_1^{zw} = 2,42 \cdot 0,96 \cdot 10^3 (1,216 - 0,3 \cdot 1,500) = 1779 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

$$\sigma_3^{zw} = 2,42 \cdot 0,96 \cdot 10^3 (-1,500 + 0,3 \cdot 1,216) = -2635 \text{ [kG/cm}^2\text{]},$$

$$\sigma_{\text{red}} = (1779^2 + 1779 \cdot 2635 + 2635^2)^{1/2} = 3840 < Q_r = 4000 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Uwagi ogólne i wnioski. Biorąc pod uwagę zebrany i opracowany materiał doświadczalny możemy w sposób dostatecznie jasny prześledzić przebieg zjawiska.

Przy niższych obciążeniach (P od 2 do 4 T) występowało dość znaczne nierównomierne rozłożenie siły P na brzegu powłoki. W miarę jednak wzrostu obciążenia następowało uplastycznienie brzegu w wyniku wysokich naprężeń stykowych, co sprzyjało bardziej równomiernemu rozłożeniu tego obciążenia. Wyraziło się to zarówno w zmniejszeniu się «mimośrod» jako miary całkowitej nierównomierności rozłożenia obciążenia na górnym brzegu powłoki (rys. 15 i rys. 16), jak też i nierównomiernego rozkładu obciążenia w przekroju szyjkowym (rys. 18), który pozwolił nam też na orientacyjne określenie górnej granicy wartości rzeczywistego mimośrodu układu. Rząd ten dla modelu 3 wyniósł około 2,1 mm, a obliczony został dla siły $P = 8$ T.

Przy tym mimośrodowym obciążeniu przy $4 < P < 10$ T można przyjąć, że powłoka pracowała aż do chwili wyboczenia w stanie błonowym (tablice 19, 20, 21 i 22, poz. 17 i 18 w pracy [7] lub [8]). Powstawanie fali sprężystej rozpoczęło się na powłoce 3 od południka II w przekroju szyjkowym, zawierającym punkty 1 przy siły $P = 10$ T. W miejscu tym stwierdzono nagły wzrost naprężeń σ_ϕ^{bl} połączony ze zmianą znaku oraz prawie dwukrotny wzrost naprężeń zginających σ_ϕ^{zg} i σ_t^{zg} (tabl. 19, poz. 11, 12 w pracy [7] lub [8]).

Podobnie nagły wzrost naprężeń σ_ϕ^{bl} obserwujemy również przy $P = 10$ T w tymże przekroju szyjkowym powłoki 3, ale na południku I (tabl. 20, poz. 11 w pracy [7] lub [8]).

Jeżeli jednocześnie weźmiemy pod uwagę wykresy na rys. 22 i 23, które wskazują zmianę prawa odkształceń z jednej linii prostej na inną prostą, ale bardziej nachy-

loną do osi odciętych, to uzyskujemy punkt przecięcia się tych prostych, któremu odpowiada sprężysta siła wybozeniowa $P_{kr} = 10$ T.

O tym, że zjawisko przebiega w obszarze sprężystym, mówią nam odczyty zerowe dokonane po uprzednim obciążeniu modelu siłą $P = 10,5$ T, a więc większą od $P_{kr} = 10$ T (tablice 8, 9 i 10 w pracy [7] lub [8]). Wykazują one brak odkształceń trwałych.

Z drugiej strony dokonana kontrola wyteżenia materiału w miejscach najbardziej niebezpiecznych wykazała przy zastosowaniu hipotezy energii odkształcenia postaciowego Hubera, że naprężenia zredukowane leżą poniżej granicy plastyczności materiału $Q_r = 4000$ kG/cm².

Jednocześnie na równoleżnikach zawierających punkty 2 i 3 nie stwierdzono powstawania wybozeniowej fali sprężystej. Prawo wzrostu naprężeń zachowuje stale ten sam liniowy charakter bez żadnego punktu załomu w pobliżu $P_{kr} = 10$ T (rys. 20 i 21). Analogiczny przebieg mają wykresy $P = P(\epsilon)$ dla tensometrów położonych na tychże równoleżnikach (rys. 24).

Świadczy to o powstawaniu sprężystej fali zlokalizowanej w pobliżu szyjki, w której miejscu najwęższym leży równoleżnik zawierający punkty 1.

Ponadto zestawione wartości maksymalnych przemieszczeń dla $P_{kr} = 10$ T świadczą, że wywołane przemieszczenia są małe w porównaniu z głównymi wymiarami powłoki, co łącznie z liniowymi wykresami $P = P(\lambda)$ świadczy o możliwości zastosowania do rozważanego zagadnienia stateczności powłoki hiperboloidalnej teorii małych odkształceń.

Przy dalszym wroście obciążenia (przy $P > 10,5$ T) następuje szybki wzrost odkształceń i przekroczenie granicy plastyczności. Przy dalszym jeszcze wroście siły przy wartości $P_{pl} = 11,8$ T następuje całkowite uplastycznienie sprężystych fal wybozeniowych, na co wskazuje utworzenie się trwałych fal na powłoce (rys. 11, 12 i 13).

Nawiązując do sformułowanych na wstępie pytań, na które odpowiedź powinny dać nasze badania, należy stwierdzić, że istotnie odpowiedź tę uzyskaliśmy.

Oto ona:

1. W przypadku podparcia nie czyniącego całkowicie zadość wymogom teorii błonowej stan błonowy powłoki został zrealizowany z dobrym przybliżeniem.

2. Wyboczenie miało charakter liniowo-sprężysty, tzn. utrata stateczności początkowej postaci powłoki nastąpiła przy naprężeniach niższych od granicy plastyczności dla materiału $Q_r = 4000$ kG/cm².

3. Rozważany przypadek wyboczenia powłoki hiperboloidalnej mieści się w zastosowanej teorii małych odkształceń.

Ponadto, jak już wspominaliśmy we wstępie, uzyskany materiał doświadczalny pozwolił nam zastąpić ogólne równania różniczkowe stateczności obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie na brzegach o nader skomplikowanej postaci równaniami przybliżonymi niewspółmiernie prostszymi, które mają już dzięki swej stosunkowo prostej budowie wyraźny aspekt praktyczny.

Odsyłając czytelnika do pracy [7] lub [8] podajemy ich postać końcową:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta \partial t} - \left(\frac{b}{aB} - \frac{rab}{B^3} \right) \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \partial t} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{ab}{B^3} - \frac{rb}{aB} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ & \left(\frac{b}{aB} - \frac{rab}{B^3} \right) \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \left(\frac{ab}{B^3} - \frac{rb}{aB} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial t} - \left[\left(\frac{b}{aB} - \frac{ab}{B^3} \right)^2 + \frac{2(1-\nu)b^2}{B^4} \right] \times \\ & \quad \times w - \frac{h^2}{3} \left[\frac{1}{A^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^4} + \frac{2}{A^2 B^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^2 \partial t^2} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right] + \\ & \quad + \frac{1-\nu^2}{2Eh} q^* \left[\frac{2a^5 b \operatorname{sh} t - 3a^2 b (a^2 + b^2) A \operatorname{sh} 2t}{2A^3 B^5} v - \frac{a^2 b}{A^3 B^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \right. \\ & \quad + \frac{a^2 b}{A^2 B^3} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2a^4 \operatorname{sh} t - a(a^2 + b^2) A \operatorname{sh} 2t}{2A^3 B^3} \frac{\partial w}{\partial t} \\ & \quad \left. - \frac{a^3}{A^4 B} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} - \frac{a}{A^2 B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = 0, \end{aligned}$$

gdzie $A = a \operatorname{ch} t$, $B = (a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{1/2}$, a jest rzeczywistą półosią hiperboli, b urojoną półosią hiperboli, $2h$ oznacza grubość powłoki:

$$q^* = q \frac{\operatorname{ch} t_g}{\left(\operatorname{tg} h^2 t_g + \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}}.$$

We wzorze powyższym q jest obciążeniem równomiernie rozłożonym, działającym stycznie do południków na górnej krawędzi powłoki.

Przy danych warunkach brzegowych wartości własne tych równań określają sprężystą siłę krytyczną P_{kr} , a ich rozwiązania dają postać wyboczoną powłoki.

Warunki brzegowe należałoby formułować w zależności od rzeczywistych warunków pracy powłoki. W przypadku powłoki podpartej w sposób analogiczny do podparcia zrealizowanego w doświadczeniach warunki brzegowe można by zapisać w następującej postaci:

$$\gamma_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{R_2} \right) = 0,$$

$$u = 0, \quad v \approx 0, \quad w = 0.$$

Warunki te należałoby spełnić dla obu krawędzi powłoki, tzn. dla $t = t_g$ i $t = t_a$.

Zakończenie

Określenie siły krytycznej w oparciu o ogólne równania przedstawione w rozdziale drugim pracy [7] lub [8] jest, zdaniem autora, przynajmniej z praktycznego punktu widzenia na razie nierealne. Ogólna postać tych równań może być ewentualnie w przyszłości wykorzystana tylko przy zastosowaniu elektronowych maszyn cyfrowych.

Wyniki doświadczeń stwarzają możliwość przyjęcia znacznie prostszego układu przybliżonych równań stateczności obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie na brzegach, które mają już dzięki swojej stosunkowo prostej budowie wyraźną wartość praktyczną.

W pracy [7] czy też w [8] uzasadniono możliwość zastosowania tych równań do przypadku, który był przedmiotem doświadczeń, a zatem można z całą pewnością stwierdzić, że istnieje taka klasa powłok, dla których te równania są w pełni uzasadnione. Praktycznie biorąc w każdym konkretnym przypadku końcowe wyniki rozwiązania analitycznego wskażą na słuszność czy niesłuszność przyjęcia tych równań przybliżonych (na podstawie obliczenia wskaźnika zmienności t , por. [7] lub [8]).

Wyniki doświadczeń potwierdzają też możliwość oparcia rozwiązania zagadnienia stateczności obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie na brzegach na gruncie liniowej teorii zarówno w sensie fizycznym (w zakresie uogólnionego prawa Hooke'a) i co ważniejsze w geometrycznym (nieuwzględnianie zjawiska przeskoaku). Na możliwość zastosowania teorii liniowej w sensie fizycznym w każdym konkretnym przypadku wskażą również wyniki rozwiązania analitycznego (porównanie naprężeń z granicą plastyczności).

Można przypuszczać wreszcie, że przybliżone równania po odpowiednim napisaniu wzoru na powierzchniowe obciążenie fikcyjne³ Z będą mogły być zastosowane do obliczeń na stateczność powłok hiperboloidalnych obciążonych w sposób dowolny, np. przy obliczaniu na stateczność hiperboloidalnych chłodni wieżowych obciążonych ciężarem własnym i przy uwzględnieniu innych czynników jak parcie wiatru i wpływy termiczne.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. FLÜGGE, *Die Stabilität der Kreiszyinderschale*, Ing.-Archiv. B, III, 1932.
- [2] A. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва 1953.
- [3] A. PFLÜGER, *Stabilität dünner Kegelschalen*, Ing.-Archiv. B. VIII, 1937.
- [4] В. В. Новожилов, *Теория тонких оболочек*, Судпромгиз 1951.
- [5] В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.
- [6] J. LEDWOŃ, *Metoda sukcesywnego obliczania sił wewnętrznych w hiperboloidalnych chłodniach wieżowych obciążonych wiatrem*, Inżyn. i Budown., 6 (1957).
- [7] J. WIANECKI, *Stateczność obrotowej powłoki hiperboloidalnej obciążonej osiowo-symetrycznie na brzegach*, praca doktorska w maszynopisie, marzec 1962, biblioteka IPPT PAN.
- [8] J. WIANECKI, *Stabilité d'une coque en forme d'hyperboloïde de révolution sous des charges uniformément réparties sur les bords et symétriques par rapport à son axe*, Cahiers de la Recherche Théorique et Expérimentale, No 19, Eyrolles, Paris 1965.

³ Por. [5], s. 462.

Резюме

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫПУЧИВАНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПОД ВЛИЯНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮ-
ЩЕЙ НА ЕЕ КРАЯХ

В работе автора, цитированной в перечне литературы в [7] или [8], даются общие и приближенные уравнения устойчивости гиперболической оболочки вращения, нагруженной осесимметрически на краях. Ввиду отсутствия каких либо решений в этой области, автор ограничивается линейным представлением. Это последнее предположение требует, таким образом, экспериментальной проверки. С этой целью, автор провел эксперименты, описанием которых и сделанным заключениям, посвящается настоящая работа. Эти эксперименты показали полное обоснование, принятых в работе [7] или [8], предположений, отнесенных к некоторому классу гиперболических оболочек. Кроме того экспериментальные исследования обосновывают замену тонких, но очень сложных уравнений устойчивости, приведенных в работе [7] или [8], гораздо более простым приближенными уравнениями устойчивости.

Summary

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE BUCKLING PROCESS
OF A HYPERBOLOIDAL SHELL SUBJECT TO AN AXIALLY SYMMETRIC LOAD
ACTING ON THE EDGES

In the author's paper [7] or [8] are derived general and approximate equations of stability of a hyperboloidal shell of revolution subject to an axially symmetric load on the edges. In view of the lack of any solution in this class of problems the author confines himself to the linear approach. This assumption requires experimental verification. For this purpose the author has carried out some experiments of which the description and conclusion are the subject matter of this paper. These experiments have fully justified the assumptions of [7] or [8], concerning a certain class of hyperboloidal shells. In addition, the experimental investigations described have given a justification of a procedure, consisting in replacing the accurate but very complicated stability equations obtained in [7] or [8] by the approximate ones of much simpler form.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1962 r.