ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 28, 4, 513—528, 1980
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

NIESTACJONARNE ODDZIAŁYWANIE ELEMENTÓW KONSTRUKCJI Z OŚRODKIEM (*)

A. N. GUŹ i W. D. KUBIENKO (KIJÓW)

Opracowanie jest poświęcone omówieniu podstawowych wyników badań przeprowadzonych w Instytucie Mechaniki Akademii Nauk USRR ny temat aktualnych zagadnień niestacjonarnego oddziaływania fal z przeszkodami w postaci ciał sztywnych lub sprężystych.

Zagadnienia niestacjonarnego współoddziaływania obciążeń falowych napotykających przeszkody w postaci ciał sztywnych i odkształcalnych przyciągają uwagę matematyków i mechaników dzięki swojej aktualności, złożoności i wielostronności zjawisk cechujących procesy wzajemnych oddziaływań ciał o różnej naturze fizycznej, a także wskutek ich znaczenia z punktu widzenia zastosowań praktycznych. Szczególnie intensywny rozwój tych badań nastąpił w ciągu ostatniego dwudziestolecia. W Związku Radzieckim zostały opublikowane monografie B. W. ZAMYSZLIAJEWA i J. S. JAKOWLEWA [1], J. N. MNIEWA i A. K. PIERCEWA [2], E. J. GRIGOLUKA i A. G. GORSZKOWA [3], L. I. SLEPIANA [4], w których są omówione podstawy niestacjonarnej hydrosprężystości i jest przytoczone wiele rezultatów o charakterze ogólnym i specjalnym. W pracach przeglądowych L. I. BAŁABUCHA [5] i E. I. GRIGOLUKA [6] przeprowadzono analizę stanu badań i ich perspektywy. W Instytucie Mechaniki Akademii Nauk Ukraińskiej SRR od wielu lat prowadzone są prace, których celem jest opracowanie nowych efektywnych metod rozwiązywania zadań dotyczących oddziaływania niestacjonarnych fal akustycznych i sprężystych z napotykanymi przeszkodami i na tej podstawie badano specyficzne zjawiska i procesy oddziaływań wzajemnych. Niniejsza praca jest poświęcona omówieniu podstawowych wyników badań z tej dziedziny wykonywanych w Instytucie Mechaniki AN USRR.

1. Mnogość sposobów podejścia do badań niestacjonarnego oddziaływania obciążeń falowych na elementy konstrukcji w ośrodku akustycznym charakteryzuje się zwykle wykorzystaniem określonych hipotez fizycznych lub matematycznych, pozwalających na uwzględnienie sił hydrodynamicznych na tym lub innym etapie oddziaływań wzajemnych. Istotą większości tych sposobów jest znalezienie przybliżonych wyrażeń analitycznych, tzw. funkcji przejścia, opisujących potencjały fali padającej i odbitej przez ciało. Jako podstawowe można uznać następujące hipotezy:

(*) Praca przeglądowa

hipotezę cieczy nieściśliwej, hipotezę odbicia płaskiego, hipotezę odbicia cylindrycznego, hipotezę cienkiej warstwy, użycie metody przekształceń Laplace'a względem czasu i przekształcenia Fouriera względem współrzędnej kątowej z następnym użyciem metody przejścia, aproksymację transformaty funkcji przejścia funkcją asymptotycznie równoważną, rozkład funkcji przejścia w szereg potęgowy i inne. Nie zatrzymując się szczegółowo na istocie tych metod przybliżonych (są one podane w cytowanych niżej monografiach) wskażemy, że każda z nich ma swój obszar efektywnych zastosowań charakteryzujący się albo małymi (lub na odwrót wielkimi) czasami współdziałania, albo małymi drganiami ciał. Podstawową metodą otrzymania dokładnych (w ramach postawionego zagadnienia) rozwiązań problemów niestacjonarnych współoddziaływania ciał jest przekształcenie Laplace'a i przedstawienie szukanych i danych wielkości (przemieszczeń, ciśnień) w postaci szeregów ortogonalnych układów funkcji. Przekształcenie odwrotne za pomocą teorii residuów jest niezwykle pracochłonnym zadaniem, szczególnie dla postaci drgań wyższego rzędu, ponieważ związane to jest z koniecznością określenia pierwiastków równań przestępnych i obliczenia całek na brzegach przekroju nieskończonego w płaszczyźnie liczb zespolonych. W literaturze istnieje tylko kilka ścisłych rozwiązań otrzymanych za pomocą teorii residuów i dotyczących działania płaskiej fali uderzeniowej na powłokę cylindryczną lub sferyczną [7, 8 i 9]. W jednej z prac HUANGA [10] zadanie określenia postaci drgań powłoki cylindrycznej za pomocą odwrotnej transformacji Laplace'a zostało sprowadzone do równania całkowego. Jednakże przy takim sprowadzeniu należy mieć wyczerpujące tablice wartości odwrotnej transformacji Laplace'a funkcji zawierających w mianowniku funkcję cylindryczną; przy obliczaniu tej tablicy znów napotykamy wyżej wskazane trudności. W ten sposób w badaniach niestacjonarnego oddziaływania fal na elementy konstrukcji zanurzone w cieczy mamy bardzo dużo metod przybliżonych i kilka zagadnień rozwiązanych dokładnie za pomocą pracochłonnych metod tradycyjnych. Wszystko to wskazuje, że niezbędne jest opracowanie takiej efektywnej metody rozwiązywania zagadnień hydrosprężystości niestacjonarnej, która zapewniałaby otrzymanie wysokiej dokładności w dostatecznie dużym przedziale czasowym i posiadałoby algorytm rozwiązania ekonomiczny i wygodny z punktu widzenia zastosowania komputerów.

Należy podkreślić, że znaczna większość badaczy przyjmuje obciążenie działające na ciało w postaci płaskiej fali niestacjonarnej. Jednak w przypadku, gdy źródło fal położone jest w pobliżu ciała, bardziej celowe jest rozpatrywanie działania fali sferycznej lub cylindrycznej. Dla takich fal, po pierwsze, zwiększa się rola drgań ciała o wyższych częstotliwościach, a po drugie, użycie sposobów przybliżonych może nie zapewnić uzyskania wymaganej dokładności. W ten sposób, dla rozwiązywania tego typu zadań potrzebna jest metoda wolna od założeń upraszczających, dotyczących wzajemnego oddziaływania i efektywna przy obliczeniach znacznej ilości postaci drgań.

We współczesnej praktyce budowy maszyn pojawia się potrzeba zastosowania rozwiązań zagadnień wewnętrznych nieustalonej hydrosprężystości, kiedy element konstrukcji jest napełniony ośrodkiem akustycznym i zawiera źródło fal. W literaturze praktycznie nie ma takich rozwiązań zagadnień wewnętrznych hydrosprężystości. Dla bardziej złożonych zadań mieszanych (powłoka jest napełniona cieczą i zanurzona w cieczy) istnieje rozwiązanie poprawne tylko dla małych czasów [11]. Znacznie bardziej skomplikowane są zagadnienia układów powłok włożonych jedna w drugą, dla rozwiązania których w pracy [12] zaproponowany został przybliżony sposób rozwiązania i otrzymano również pewne wyniki liczbowe. Widzimy więc, że wewnętrzne i bardziej skomplikowane zadania mieszane niestacjonarnej hydrosprężystości, a także zadania dla układu ciał (powłok) w cieczy, są mało znane i wymagają gruntownego zbadania.

Celem prac badawczych przedsięwziętych w Instytucie Mechaniki AN USRR, których treść omówiona jest w niniejszej pracy, było opracowanie sposobów pozwalających na otrzymanie z dużą dokładnością rozwiązań zadań, dotyczących oddziaływania słabych fal uderzeniowych i sprężystych z ciałami sztywnymi i odkształcalnymi—z jednoczesnym ścisłym uwzględnieniem oddziaływań hydrosprężystych; rozwiązanie szeregu problemów, które mogą być, z jednej strony potwierdzeniem opracowanych metod i, z drugiej strony, wskazówką przy opracowywaniu metod przybliżonych; rozwiązywanie nowych klas problemów niestacjonarnego oddziaływania fal na elementy konstrukcji, dla których metody przybliżone albo nie zapewniają wymaganej dokładności, albo też nie są jeszcze w ogóle rozwinięte. Do takich problemów zaliczamy w pierwszej kolejności badania odnoszące się do odkształcania się elementów konstrukcji pod działaniem fal, wysyłanych przez źródła położone w skończonej odległości od powierzchni ciała, zarówno na zewnątrz jak i wewnątrz ciała, wykrycie osobliwości odkształcenia i efektów mechanicznych, właściwych dla procesów niestacjonarnego oddziaływania konstrukcji i ośrodków.

2. Sformułujemy w ogólnej postaci zagadnienie brzegowe niestacjonarnej hydrosprężystości dla układu powłok odkształcalnych włożonych jedna w drugą i zanurzonych w ciecz wypełniającą obszar nieograniczony oraz wyznaczonych przez powierzchnie Γ_i, $i=1, ..., N$ ($N \geqslant 1$). Ostatnia, N-ta powłoka może być także zapełniona cieczą. Może ona również być jednorodnym ciałem sztywnym lub posiadać wnętrze wypełnione cieczą. Przestrzeń pomiędzy poszczególnymi powłokami jest także zapełniona cieczą. Zakłada się, że ciecz jest idealnie ściśliwa, a odkształcenie powłok zachodzi w granicach dopuszczających stosowanie liniowych teorii powłok. Oznaczymy gęstość ośrodka zewnętrznego przez ρ_0, a prędkość dźwięku w tym ośrodku przez c_0. Gęstość i prędkość dźwięku w warstwie cieczy pomiędzy i-tą i $i+1$ powłoką oznaczymy odpowiednio przez ρ_i i c_i, $i=1, ..., N$.

Potencjał słabych fal uderzeniowych, rozchodzących się w i-tej warstwie, spełnia równanie falowe

$$\nabla^2 \varphi_i - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i=0, 1, 2, ..., N, \tag{2.1}$$

gdzie ∇^2 oznacza operator Laplace'a. Potencjał ten jest związany z wektorem prędkości ruchu cieczy i ciśnieniem w niej panującym za pomocą wzorów

$$\mathbf{V}_i = \operatorname{grad} \varphi_i, \tag{2.2}$$
$$p_i = -\rho_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad i=0, 1, 2, ..., N.$$

Ruch każdej z powłok opisuje się dowolnymi równaniami liniowymi, które tutaj napiszemy w postaci operatorowej dla przemieszczeń:

$$\mathbf{U}_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \rho_i \begin{pmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{v}_i \\ \ddot{w}_i \end{pmatrix} + \mathbf{F}_i, \quad i=1, 2, ..., N. \tag{2.3}$$

We wzorze powyższym $\mathbf{U}_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ oznacza wektor przemieszczenia, $\mathbf{F}_i$ obciążenie (siły) zewnętrzne dla i-tej powłoki. Kropką oznaczona jest pochodna względem czasu.

Założymy, że źródło zakłóceń falowych położone jest w k-tej warstwie i jego potencjał wynosi φ_k^0. Warunki brzegowe na powierzchni i-tej powłoki sprowadzają się do równości normalnych składowych prędkości w warstwach cieczy zewnętrznej względem Γ_i i normalnej składowej prędkości ruchu powłoki:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i}, \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_i}, \quad i=1, 2, ..., k-1, k+2, ..., N$$

gdzie $\mathbf{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni powłoki. Na powierzchniach Γ_k i Γ_{k+1}, które ograniczają warstwę cieczy zawierającą źródło, warunki brzegowe będą miały postać:

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_k}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial t} = \frac{\partial (\varphi_k + \varphi_k^0)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_k}, \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial (\varphi_k + \varphi_k^0)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{k+1}}, \quad \frac{\partial w_{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{k+1}}$$

Oprócz tego, dla potencjału fal odbitych od ośrodka zewnętrznego, niezbędny jest warunek znikania wymuszeń w nieskończoności

$$\varphi_0 \to 0 \quad \text{przy} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty, \tag{2.6}$$

a dla potencjału fal rozchodzących się w ostatniej N-tej warstwie—warunek ograniczoności wymuszeń około zera. Warunki początkowe dla wszystkich φ_i są zerowe:

$$\varphi_i\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad i=0, 1, ..., N. \tag{2.7}$$

Jeżeli zamiast odkształcalnej powłoki Γ_N mamy sztywny, nieruchomy kontur, to warunki brzegowe na nim będą miały postać

$$\frac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_N}=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \varphi_N}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_N}=0. \tag{2.9}$$

Napisane związki (2.1)–(2.9) stanowią zamknięty układ równań dla każdego konkretnego przypadku.

3. Dla ilustracji metody rozwiązywania tych zagadnień rozpatrujemy zadanie o odkształcaniu sprężystej, okrągłej powłoki cylindrycznej zanurzonej w nieograniczonej cieczy ściśliwej, na którą działa słaba fala uderzeniowa. Zakładamy, że powłoka jest pusta, a źródło fal znajduje się na zewnątrz. Będziemy przyjmować, że we wszystkich przekrojach powłoki prostopadłych do jej osi odkształcenie jest jednakowe (zagadnienie płaskie). Przedstawimy przekrój powłoki we współrzędnych biegunowych r, θ z początkiem w środku przekroju. Wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe, które związane są ze współrzędnymi wymiarowymi za pomocą następujących wzorów:

$$\bar{w}=\frac{w}{R},\qquad \bar{v}=\frac{v}{R},\qquad \bar{p}=\frac{p}{\rho_0\, c_0^2},\qquad \bar{t}=\frac{c_0\, t}{R},\qquad \bar{r}=\frac{r}{R},\qquad \bar{\varphi}=\frac{\varphi}{R\, c_0},$$

gdzie w, v oznaczają promieniowe i styczne przemieszczenia powłoki, a R jej promień. Kreskę nad oznaczeniami będziemy w dalszych wzorach pomijać. Założymy, że potencjał fali padającej φ^0 można napisać w postaci szeregu Fouriera

$$\varphi^0=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n^0 \cos n\theta. \tag{3.1}$$

Potencjału fal odbitych φ^* szukamy z rozwiązania falowego

$$\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{3.2}$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial(\varphi^0+\varphi^*)}{\partial r}\bigg|_{r=1},\qquad \varphi^*_{r\to\infty}\to 0 \tag{3.3}$$

i zerowych warunkach początkowych.

Zastosujemy dla związków (3.1)–(3.3) i liniowych równań powłoki przekształcenie Laplace'a względem t [13]. Transformaty odpowiednich funkcji będziemy oznaczać górnym indeksem L, na przykład

$$\varphi_L(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,\varphi(t)\,dt,\qquad \varphi(t)=\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}\,\varphi_L(s)\,ds,\qquad \mathrm{Re}_\alpha>0,$$

gdzie s oznacza parametr przekształcenia.

Jeśli przedstawić przemieszczenia powłok i obciążenie w postaci szeregów

$$(3.4)\qquad w=\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\theta, \quad v=\sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin n\theta, \quad p=\sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\theta,$$

to w przestrzeni transformaty otrzymamy związek między transformatą normalnego przemieszczenia w_n^L i transformatą ciśnienia p_n^L w postaci

$$(3.5)\qquad M(n,s)\, w_n^L = N(n,s)\, p_n^L, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gdzie M i N oznaczają wielomiany względem n i s, które są wyznaczone przez własności sprężyste i bezwładnościowe powłoki. Związki (3.2)–(3.3) w transformatach posiadają postać

$$(3.6)\qquad \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^L}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial \theta^2}-s^2\varphi^L=0,$$

$$(3.7)\qquad sw^L=\left.\frac{\partial(\varphi^{0L}+\varphi^{*L})}{\partial r}\right|_{r=1}, \quad \varphi^*_{r\to\infty}\to 0.$$

Ogólne rozwiązanie równania (3.6) ma postać

$$(3.8)\qquad \varphi^{*L}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n(sr)\cos n\theta + B_n I_n(sr)\sin n\theta,$$

gdzie K_n oznacza funkcję cylindryczną MacDonalda, I_n zmodyfikowaną funkcję BESSELA [14], A_n, B_n—dowolne stałe. Biorąc pod uwagę drugi warunek (3.7), znajdziemy $B_n=0$. Wykorzystując (3.1), (3.5), (3.7) i (3.8) otrzymamy wzór na transformatę n-tej składowej przesunięcia w_u^L w postaci

$$(3.9)\qquad w_n^L=-\frac{s\varphi_n^{0L}K_n'(s)\,N(n,s)}{M(n,s)\,K_n'(s)+sN(n,s)\,K_n(s)},$$

gdzie prim oznacza pochodną względem r w punkcie $r=1$. Analogiczne związki można otrzymać dla v_n^L, p_n^L, a także dla prędkości i przyspieszeń.

Analogicznie rozpatruje się to zagadnienie dla powłoki kulistej. Jeżeli dla powłoki kulistej i współrzędnych sferycznych r, θ, ψ z początkiem współrzędnych w środku kuli wprowadzić takie same wielkości bezwymiarowe, to zakłócenia falowe rozchodzące się w ośrodku spełniają równania (3.2), (3.3), zapisane we współrzędnych sferycznych. Przedstawiając obciążenia powłoki w postaci szeregów wielomianów Legendre'a (rozpatrujemy odkształcenie osiowo-symetryczne)

$$w=\sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(\cos\theta); \quad v=\sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n\cos\theta)], \ldots,$$

z równań ruchu powłoki otrzymamy w przestrzeni transformat Laplace'a wzory

$$(3.10)\qquad \tilde{M}(n,s)\, w_n^L=\tilde{N}(n,s)\, p_n^L, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

gdzie wielomiany $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$ są określone przez sprężyste i bezwładnościowe właściwości powłoki. Ogólne równanie falowe we współrzędnych kulistych ma postać

$$\varphi^{*L} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+\frac{1}{2}}(sr) + B_n \frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}}(sr) \right] P_n(\cos\theta). \tag{3.11}$$

Rozwiązując zagadnienie graniczne otrzymujemy wzór dla transformaty przemieszczenia

$$w_n^L = \frac{\left\{ \varphi_n^0 \big|_{r=1} \left[-\frac{1}{2} K_{n+\frac{1}{2}}(s) + K'_{n+\frac{1}{2}}(s) \right] + \varphi_n^{0'} K_{n+\frac{1}{2}}(s) \right\} s \tilde{N}(n,s)}{\tilde{M}(n,s) \left[\frac{1}{2} K_{n+\frac{1}{2}}(s) - K'_{n+\frac{1}{2}}(s) \right] - s^2 \tilde{N}(n,s) K_{n+\frac{1}{2}}(s)}, \tag{3.12}$$

4. Z kolei problem sprowadza się do odwrotnego przekształcenia Laplace'a funkcji typu (3.8) lub (3.12). Trudności dokonania ich retransformacji zmusiły nas do zastosowania metod przybliżonych, o których mówimy wyżej. Podamy pokrótce następujący sposób rozwiązania.

W postaci ogólnej wyrażenie typu (3.8) można napisać w postaci wzoru

$$X^L(s) = \frac{a(s) K_n(s) + b(s) K_{n+1}(s)}{c(s) K_n(s) + d(s) K_{n+1}(s)}, \tag{4.1}$$

gdzie $a(s)$, $b(s)$, $d(s)$ są wielomianami względem s, a x—wartością poszukiwaną. Jeżeli pomnożyć obie strony (4.1) przez wielkość

$$k^L(s) = \frac{1}{s^m} e^s \left[c(s) K_n(s) + d(s) K_{n+1}(s) \right],$$

gdzie m oznacza najwyższy stopień wielomianów $c(s)$ i $d(s)$, a do transformacji $e^s s^{-l} K_n(s)$, $l=0, 1, \ldots, m$ zastosować wzór

$$e^s K_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{(t+1+\sqrt{(t+1)^2-1})^n + (t+1-\sqrt{(t+1)^2-1})^n}{\sqrt{(t+1)^2-1}} \tag{4.2}$$

oraz wzory wynikające z (4.2) przy całkowaniu funkcji pierwotnej (co jest równoznaczne z pomnożeniem transformaty przez $1/s$ [13]), to na podstawie twierdzenia o splocie łatwo otrzymać równanie całkowe Volterry 1-go rodzaju względem $x(t)$:

$$\int_0^t x(\tau) \, k(t-\tau) \, d\tau = f(t). \tag{4.3}$$

Równanie (4.3) sprowadza się do równania 2-go rodzaju i można dla niego udowodnić istnienie i jednoznaczność rozwiązania oraz stosować ogólnie przyjęte metody analizy. Jądro tego równania jest bardzo rozbudowane, dlatego też najodpowiedniejszym będzie bezpośrednie rozwiązanie liczbowe równania 1-go rodzaju na podstawie dowolnych wzorów kwadraturowych. Dla ciał cylindrycznych równanie (4.3) jest szczególnym przypadkiem równania

$$\int_0^t x(\tau)\frac{z(t,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau=f(t),\quad 0<\alpha<1,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.4}$$

Podczas stosowania schematu rozwiązania numerycznego równania (4.4) przedział całkowania $[0, T]$ dzieli się na N różnych odcinków o długości Δ, ograniczonych punktami t_n. Jeżeli przyjąć w przybliżeniu, że na każdym odcinku wartość $x(t)$ jest stała i równa wartości na środku odcinka, to z wyrażenia (4.4) wynika układ równań algebraicznych:

$$\sum_{m=0}^{h} x^*_{m+\frac{1}{2}} s_{k,m}=f_k,\quad k=1,\ldots,N, \tag{4.5}$$

gdzie

$$x_{m+\frac{1}{2}}=x(t_{m+\frac{1}{2}}),\quad t_{m+\frac{1}{2}}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\Delta,\quad s_{km}=\int_{t_m}^{t_{m+1}}\frac{z(t_k,\tau)}{(t_k-\tau)^\alpha}d\tau.$$

Gwiazdka przy $x_{m+\frac{1}{2}}$ wskazuje na wartość przybliżoną x w punkcie $t_{m+\frac{1}{2}}$. O zbieżności rozwiązania numerycznego (4.5) decyduje następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli*

a) $|z(t,t)|\geqslant k_0>0,\quad 0\leqslant t\leqslant T;$

b) $z(t,\tau)$ *spełnia warunek Lipschitza względem* t, τ, $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$;

c) $x'(t)$ *spełnia warunek Lipschitza* $0\leqslant t\leqslant T$, *to metoda* (4.5) *jest zbieżna z wykładnikiem potęgi* 1.

Prawdziwe jest także

TWIERDZENIE 2. *Jeżli są spełnione warunki a) i b) twierdzenia* 1 *i jeśli* $x(t)$ *spełnia warunek Lipschitza,* $0\leqslant t\leqslant T$, *to metoda* (4.5) *jest zbieżna z wykładnikiem potęgowym* $1-\alpha$.

Twierdzenia 1, 2 są uogólnieniem twierdzeń udowodnionych w pracy [15]. Analogiczna numeryczna metoda rozwiązania równań całkowych Volterry, które wynikają ze wzoru (3.11) dla ciała sferycznego, zapewnia zbieżność z wykładnikiem potęgi 2.

5. Przedstawiona metoda numeryczna pozwala w jednakowy sposób wykonywać obliczenia pewnej liczby postaci drgań w dużym przedziale czasowym. W celu sprawdzenia metody obliczono ciśnienie hydrodynamiczne na powierzchni sztywnego walca kołowego pod działaniem schodkowej, wykładniczo zanikającej fali płaskiej i cylindrycznej. Przy obliczaniu szeregu (3.4) uwzględniono 21 wyrazów szeregu [16 i 17]. Porównanie otrzymanych wyników obliczeń z danymi doświadczalnymi wykazuje ich zgodność. Obliczono ciśnienie hydrodynamiczne na powierzchni sztywnej kuli pod działaniem fal sferycznych [17]. Z otrzymanych rezultatów wynika, że przy umieszczeniu źródła fal w pobliżu ciała, od którego następuje odbicie, występuje znaczny gradient ciśnienia dyfrakcyjnego wzdłuż powierzchni ciała, co może doprowadzić do istotnych zmian w stanie naprężeń i odkształceń konstrukcji sprężystej.

Badano odkształcenia sprężystej powłoki cylindrycznej w warunkach odkształceń płaskich [18]. Bada się równanie drgań nierozciągliwych (oprócz $n=0$) powłoki. Zakłada się, że źródło drgań położone jest w odległości a od osi powłoki. Potencjał fali padającej dobiera się w ten sposób, aby jego transformata miała postać

$$\varphi^{0L} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s^{-3/2} K_0(sr_1), \tag{5.1}$$

gdzie r_1 oznacza odległość od źródła drgań. Funkcja (5.1) określa falę cylindryczną, na froncie której ciśnienie ma skok $r^{-1/2}$, a z upływem czasu w każdym określonym punkcie przestrzeni fala ta zanika. Rozwiązanie otrzymano z dokładnością do ósmego wyrazu w szeregach (3.4). Określono przemieszczenia i ugięcie powłoki dla różnych wartości a. Ustalono, że przy małych wartościach a ugięcie w punkcie czołowym powłoki może kilka razy przewyższać ugięcie w strefie cienia.

Badano odkształcenia powłoki cylindrycznej będącej w stanie naprężenia wstępnego, pod działaniem płaskiej fali schodkowej [16]. Rozwiązano zagadnienie działania fali sferycznej na sprężystą powłokę kulistą [19]. Wykorzystano tu równania bezmomentowej teorii powłok. Przemieszczenia normalne i styczne oraz siły normalne określono z dokładnością do dziewięciu wyrazów w szeregach (3.9), a także prędkości przyspieszenia powłoki. Otrzymane wyniki świadczą o tym, że bliskość źródła wywiera istotny wpływ na rozkład przemieszczeń i sił na powierzchni powłoki. Za pomocą przekształceń Laplace'a i Fouriera otrzymano rozwiązanie zagadnienia działania niestacjonarnych fal sferycznych na powłokę cylindryczną i wyznaczono kierunek inwersji przekształceń na wczesnych etapach oddziaływania [20].

Rozwiązano zagadnienie działania fali sferycznej na nieskończoną płytę (membranę), zamykającą półprzestrzeń cieczy ściśliwej [21]. Wyniki liczbowe otrzymano drogą równoczesnego przekształcenia odwrotnego Laplace'a i Hankela. W ten sposób otrzymano rozwiązanie dla szerokiej klasy zagadnień działania fal niestacjonarnych emitowanych przez źródła punktowe na elementy konstrukcji zanurzone w cieczy. Pozwoliło to na wykrycie osobliwości ich odkształcenia przy różnym oddaleniu źródła fal od powłoki. Ustalono, że charakter stanu odkształceń naprężeń powłoki przy małej odległości źródła od powłoki (nie większej od dwóch, trzech promieni powłoki) zasadniczo różni się od przypadku, kiedy źródło znajduje się w odległości nieskończenie wielkiej. Najbardziej obciążonym obszarem pozostaje obszar w pobliżu punktu czołowego, jednakże w przypadku źródła położonego blisko ugięcia (siły) w punkcie czołowym są kilkakrotnie większe niż w obszarze cienia. Ustalono przedziały odległości pomiędzy źródłem a powłoką, dla których należy brać pod uwagę krzywiznę frontu fal padających.

6. Wyżej już wspomniano o znaczeniu funkcji przejścia w zagadnieniach niestacjonarnej hydrosprężystości. Wyrażenia dla funkcji przejścia łatwo otrzymać w przestrzeni transformat Laplace'a. Zastosowanie równań całkowych Volterry według sposobu podanego w p. 4 pozwala na obliczenie ścisłych wartości funkcji przejścia dla różnych postaci drgań, jednakże często bardziej celowe jest wyznaczenie przybliżenia analitycznego dla funkcji przejścia.

Jeden ze sposobów otrzymania takich wzorów przedstawia się następująco [22]. Przedstawimy rozwiązania równania falowego we współrzędnych cylindrycznych w postaci szeregu

$$\varphi^L = \sum_{mn=0}^{\infty} \varphi^L_{m,n}(r, s) \cos n\theta \cos nz. \tag{6.1}$$

Funkcji $\varphi^L_{m,n}$ szukamy w pobliżu powierzchni ciała; do tego celu korzystamy z następującego rozkładu:

$$\frac{1}{r} = 1-(r-1)+(r-1)^2-\ldots; \quad \frac{1}{r^2} = 1-2(r-1)+3(r-1)^2\ldots, \tag{6.1}$$

W celu określenia φ^L_{mn} z równania falowego otrzymamy równanie

$$\frac{d^2\varphi^L_{mn}}{dr^2} + \frac{d\varphi^L_{mn}}{dr} - (n^2+m^2+s^2)\varphi^L_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(r-1)^k \left[\frac{d\varphi^L_{mn}}{dr} - kn^2\varphi^L_{mn}\right], \tag{6.2}$$

które rozwiązuje się metodą kolejnych przybliżeń. Wówczas z rozwiązania zagadnienia granicznego dla sztywnego walca kołowego widzimy, że potencjał fal odbitych wyraża się przez potencjał fali padającej za pomocą wzoru

$$\varphi^*_{m,n}(1, t) = \int_0^t f_{mn}(t-\tau) \left.\frac{\partial\varphi^0_{mn}}{\partial r}\right|_{r=1} d\tau, \tag{6.3}$$

gdzie transformaty funkcji przejścia f_{mn}, na przykład w pierwszym i drugim przybliżeniu, mają postać

$$f^{(0)L}_{mn} = \frac{1}{\zeta+\frac{1}{2}}, \quad f^{(1)L}_{mn} = \frac{1}{\zeta+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\zeta^{-1}-\frac{1+4n^2}{8}\zeta^{-2}}, \tag{6.4}$$

$$\zeta = s^2+m^2+n^2+\frac{1}{4}.$$

Zaproponowano kilka sposobów wyznaczenia ze wzorów (6.4) przybliżeń analitycznych dla $f_{mn}(t)$ [22]. Analogiczny przykład został wykonany również i dla ciała sferycznego. Dla funkcji przejścia postaci zerowej $f_{00}(t)$, która odpowiada hipotezie «cienkiej warstwy», otrzymano proste wzory analityczne, przydatne w zastosowaniu dla różnych przedmiotów czasowych.

7. W poprzednich punktach rozpatrzono problemy zewnętrzne niestacjonarnej hydrosprężystości, tzn. zakładano, że element konstrukcji jest zanurzony w nieograniczonym ośrodku i poddany działaniu fal, przychodzących z zewnątrz. Ważną i praktycznie nie zbadaną klasą zagadnień są zadania wewnętrzne, kiedy zamknięty element konstrukcji lub pewna objętość elementu napełniona jest cieczą i posiada wewnętrzne źródło fal. W przypadku obszaru cylindrycznego, zawierającego źródło fal cylindrycznych (zagadnienie płaskie), ogólnego rozwiązania równania falowego w transformatach (3.6) przy danych warunkach brzegowych [23, 24 i 25]

(7.1) $$s\,(\varphi^{0L}+\varphi^{*L})|_{r=1}=0, \qquad \varphi^{*L}|_{r\to 0}\to\text{const},$$

szukamy w postaci

(7.2) $$\varphi^{*L}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n I_n(sr)\cos n\theta,$$

gdzie B_n jest dowolną stałą.

Wówczas transformata ciśnienia hydrodynamicznego na powierzchni wewnętrznej ma postać

(7.3) $$p^L=\sum_{n=0}^{\infty} p_n^L \cos n\theta,$$

gdzie

(7.4) $$p_0^L=\sqrt{\frac{2(1-a)}{\pi}}\, s^{-3/2}\,\frac{I_0(as)}{I_1(s)},$$
$$p_n^L=\sqrt{\frac{2(1-a)}{\pi}}\, 4s^{-3/2}\,\frac{I_n(as)}{I_{n+1}(s)+I_{n-1}(s)}, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

zaś a oznacza odległość między osią źródła i osią cylindra.

Wzory (7.4) pisane są dla potencjału fali padającej (5.1). Jeżeli wyrażenie (7.4) napiszemy w formie rozwiniętej i wykorzystamy tablice przekształceń

(7.5) $$\frac{1}{s^n} I_n(as)\, e^{-as}=\int_0^t e^{-st}\,\frac{H(2a-t)\,(2at-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$
$$\frac{1}{s^{m+1}}=\int_0^t e^{-st}\,\frac{t^m}{\Gamma(m+1)}\,dt$$

oraz zastosujemy twierdzenie o splocie «oryginałów», to otrzymamy równanie Volterry 1-go rodzaju względem $p_n(t)$, $n=0, 1, 2, \ldots$,

(7.6) $$\int_{\alpha(t_*)}^{t_*} p_n(\tau)\, k_n(t_*-\tau)\, d\tau=f_n(t_*),$$
$$t_*=t-1, \qquad \alpha(t_*)=H(t_*-2)\,(t_*-2).$$

We wzorach (7.5), (7.6), $H(t)$ oznacza funkcję jednostkową Heaviside'a, a $\Gamma(n)$ funkcję gamma.

Za pomocą równań (7.6) metodą numeryczną określono ciśnienie hydrodynamiczne na powierzchni pustki (obszaru wewnętrznego) w przypadku osiowosymetrycznym ($a=0$) i w przypadku $a=1/5$ dla fali padającej, w której wykres ciśnienia w przybliżeniu ma postać nieskończonego skoku, zanikającej funkcji wykładniczej i trójkąta.

W przypadku pustki sferycznej [23] poddanej działaniu wewnętrznej fali sferycznej, transformata ciśnienia na powierzchni pustki ma postać

$$p^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^L P_n(\cos\theta), \tag{7.7}$$

a dla padającej fali schodkowej—postać

$$p_n^L = \frac{1-a}{\sqrt{a}} \frac{2n+1}{s} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(a, s)}{sI_{n+\frac{3}{2}}(s)+nI_{n+\frac{1}{2}}(s)}. \tag{7.8}$$

Ze związku (7.8) w sposób analogiczny do poprzedniego przypadku można otrzymać równanie całkowe Volterry. Bardziej celowe okazało się badanie funkcji $I_n+1/2(s)$ przedstawionych w postaci sum skończonych [14] i rozłożenie prawej części [23] w szereg o postaci

$$p_n^L = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j f_{n,j}^L(s)\, e^{-2js}\, e^{-(1-a)s}.$$

Funkcję $f_{n,j}(t)$ określa się za pomocą metod teorii residuów. W rezultacie $p_n(t)$ przedstawimy w postaci szeregu

$$p_n(t_*) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j f_{n,j}(t_*-2_j)\, H(t_*-2_j). \tag{7.9}$$

Wyniki liczbowe otrzymano dla $a=0$, $a=3/5$ przy działaniu fal o profilu schodkowym, prostokątnym, trójkątnym i tłumionym wykładniczo.

Otrzymane wyniki opisują charakterystyczne osobliwości cechujące zagadnienia wewnętrzne: skokowe podwojenie ciśnienia w tych punktach pustki, w których następuje normalne odbicie fali padającej; podwyższenie ciśnienia na powierzchni pustki w kolejnych chwilach czasu; zależność ciśnienia w pustce od prędkości przepływu ośrodka w fali padającej.

8. Ogólniejsze są zagadnienia, w których zakłada się występowanie ośrodka akustycznego zarówno na zewnątrz elementu konstrukcyjnego jak i w jego wnętrzu. Należy również koniecznie brać pod uwagę ośrodek wewnętrzny i zewnętrzny, jeśli ich właściwości akustyczne są sobie bliskie lub identyczne.

W przypadku powłoki cylindrycznej, analogicznie do sposobu postawienia zagadnienia podanego w p. 2 i rozwiązania ogólnego równania falowego (3.8), zagadnienie zostaje sprowadzone do rozwiązania równania Volterry 1-go rodzaju, którego jądro określone jest splotem pierwotnych funkcji cylindrycznych [26]. Dla przykładu otrzymano rozwiązanie zagadnienia odkształceń powłoki, zanurzonej w ściśliwej cieczy, a napełnioną cieczą nieściśliwą—pod działaniem schodkowej fali płaskiej. Określono przemieszczenia i ugięcia dla różnych stosunków gęstości ośrodka wewnętrznego i zewnętrznego.

Do rozwiązania równań całkowych Volterry zostało także sprowadzone zagadnienie powłoki sferycznej napełnionej cieczą i zanurzonej w cieczy. Otrzymano rozwiązanie zagadnienia o działaniu wewnętrznego źródła falowego na powłokę, zanurzoną w ściśliwej cieczy i napełnioną cieczą ściśliwą. Rozwiązanie przedstawiono w postaci szeregu dla fal odbitych (2.7). Określono ugięcie powłoki i ciśnienie na jej powierzchni dla padających impulsów różnej postaci.

Otrzymano rozwiązanie zagadnienia działania nieskończonej fali płaskiej na zanurzony w cieczy układ ciał, składający się ze sprężystej powłoki sferycznej, zapełniającej ją cieczy ściśliwej i sztywnego jądra sferycznego umieszczonego koncentrycznie [28]. Dla n-tej składowej przesunięcia normalnego $w_n(t)$ powłoki otrzymano równanie całkowe Volterry 2-go rodzaju

$$
\begin{gathered}
w_n(t)+\int_0^t F_1(t-x)\, w_n(x)\, dx - w_n(t-2\tau_0)- \\
-\int_0^t F_2(t-2\tau_0-x)\, w_n(x)\, dx = F_3(t)-F_4(t-2\tau_0), \\
\tau_0=\frac{c_0}{c_1}\left(1-\frac{R_0}{R}\right),
\end{gathered}
\tag{8.1}
$$

gdzie funkcje $F_1, \ldots, F_4$ określa się metodami teorii residuów dla ich transformat, będących wielomianami s. Oprócz tego

$$
F_i=F_i(c_0, c_1, \rho_0, \rho_1, \rho_{pow}, R, R_0, h, E, \nu), \quad i=1, \ldots, 4,
$$

gdzie ρ_{pow} oznacza gęstość materiału powłoki, R i R_0 odpowiednio promień powłoki i jądra, h, E, ν grubość, moduł sprężystości i współczynnik Poissona materiału powłok. Zastosowano równania teorii powłok cienkich.

Równanie całkowe rozwiązano liczbowo dla ośrodków stanowiących wodę i spirytus oraz dla stosunku $R_0/R=1/2$. Określono równomierne ściskanie powłoki, a także przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie. Ustalono, że obecność ośrodka wewnętrznego i jądra w zasadniczy sposób wpływa na odkształcenia powłoki, zmniejszając jej podatność. Przy tym, że prównaniu z pustą powłoką, znacznie obniża się wielkość przemieszczeń, prędkość i przyspieszenie. Dla rozpatrzonego przypadku, kiedy właściwości akustyczne zewnętrznego i wewnętrznego ośrodka są bliskie sobie, wykresy przemieszczeń i prędkości dla powłoki z jądrem i powłoki całkowicie zapełnionej cieczą różnią się nieznacznie. Różnice zarówno ilościowe jak i jakościowe obserwuje się przy porównywaniu przyspieszeń.

Rozpatrzono zagadnienie działania niestacjonarnej płaskiej fali na zanurzony w cieczy ściśliwej układ dwóch koncentrycznych powłok sprężystych, przestrzeń pomiędzy którymi zapełniona jest cieczą ściśliwą [29]. W celu określenia n-tych składowych ugięcia powłok zewnętrznej $w_n^I(t)$ i wewnętrznej $w_n^{II}(t)$ otrzymano układ dwóch równań całkowych Volterry 2-go rodzaju

$$
\begin{aligned}
w_n^I(t)+\int_0^t M_1(t-\tau)\,w_n^I(\tau)\,d\tau-w_n^I(t-2\tau_0)-\int_0^{t-2\tau_0} M_2(t-2\tau_0-\tau)\,w_n^I(\tau)d\tau\,+\\
+\int_0^{t-\tau_0} M_3(t-\tau_0-\tau)\,w_n^{II}(\tau)\,d\tau=M_4(t)-M_5(t-2\tau_0),
\end{aligned}
$$

(8.2)

$$
\begin{aligned}
w_n^{II}(t)+\int_0^t N_1(t-\tau)\,w_n^{II}(\tau)\,d\tau-w_n^{II}(t-2\tau_0)-\int_0^{t-2\tau_0} N_2(t-2\tau_0-\tau)\,w_n^{II}(\tau)\,d\tau=\\
\int_0^{t-\tau_0} N_3(t-\tau_0-\tau)\,w_n^I(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Funkcje $M_1, \ldots, M_5, N_1, N_2, N_3$ określa się metodami teorii residuów ich transformat, które są wielomianami s.

Układ równań (8.2) rozwiązuje się numerycznie przez sprowadzenie ich do dwóch układów równań algebraicznych z macierzami trójkątnymi. Obliczenia wykonano dla ośrodków złożonych z wody i spirytusu przy stosunku $R^{II}/R^I=1/2$. Określono równomierne ściskanie powłoki wewnętrznej i zewnętrznej, a także ich przemieszczenia, prędkość i przyspieszenie. Z otrzymanych rezultatów wynika, że w przypadku układu powłok ugięcia w_0^I, w_0^{II} zmniejszają się znacznie w porównaniu z pustą pojedynczą powłoką. Powłoka zewnętrzna znacznie zmniejsza ugięcie powłoki wewnętrznej (w rozpatrzonym przypadku około czterech razy). Oprócz tego, jeśli dla pustej powłoki prędkość przemieszczenia narasta prawie monotonicznie, to dla rozpatrzonego układu powłok krzywe prędkości posiadają ostro zaznaczone ekstrema, przy czym dla powłoki wewnętrznej następują one nieco wcześniej niż dla zewnętrznej. Zauważymy, że przemieszczenia, prędkość i przyspieszenie powłoki wewnętrznej mogą być większe niż zewnętrznej.

9. Metoda sprowadzenia zagadnienia do rozwiązania równań całkowych Volterry została również uogólniona na badanie współdziałania fal niestacjonarnych z przeszkodami w ośrodku sprężystym. Jako przeszkody rozpatruje się otwory cylindryczne i sferyczne w nieograniczonym ciele sprężystym [30]. W szczególności badano rozprzestrzenianie się impulsu sprężystego, wywołanego równomiernym ciśnieniem przyłożonym nagle do konturu pustki kołowej, cylindrycznej lub sferycznej w nieograniczonym, niejednorodnym ośrodku anizotropowym [31 i 32]. Zakłada się, że ośrodek jest cylindrycznie (sferycznie) anizotropowy i jego moduły sprężystości zmieniają się wykładniczo w zależności od współrzędnej promieniowej:

$$
(9.1) \qquad E=E_1\,e^m, \qquad E=E_2\,r^m.
$$

Stwierdzono, że rozwiązanie zagadnienia w zależności od wykładnika potęgowego m zawiera trzy przypadki

$$
m<2, \quad m=2, \quad m>2
$$

Każdy z tych przypadków rozpatrzono oddzielnie.

Literatura cytowana w tekście

1. Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев, *Динамические нагрузки при подводном взрыве*, 387, Судостроение, Ленинград 1967.
2. Е. Н. Мнев, А. К. Перцев, *Гидроупругость оболочек*, 365, Судостроение, Ленинград 1970.
3. Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков, *Нестационарная гидроупругость оболочек*, 208, Судостроение, Ленинград 1974.
4. Л. И. Слепян, *Нестационарные упругие волны*, 406, Судостроение, Ленинград 1972.
5. Л. И. Балабух, *Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом*, Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 935–944, Наука, Баку–Москва 1966.
6. Э. И. Григолюк, *Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью*, Труды VII Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, 755–778, Наука‘ Москва 1970.
7. P. Mann–Nachbar, *The interaction of an acoustic wave and an elastic spherical shell*, Quart. Appl. Math., **15**, 1. 83–93 1957.
8. H. Huang, Y. F. Wang, *Transient interactions of plane accoustic waves with a spherical elastic shell*, J. Acoust. Soc. Amer., **45**, 3, 228–235, 1969.
9. M. J. Forrestal, *Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, acoustic pulse*, Trans. ASME, **35**, 3, 614–616, 1968.
10. H. Huang, *An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical shell*, Trans. ASME, **37**, 4, 1091–1099, 1970.
11. L. A. Peralta, S. Raynor, *Initial response of a fluid-filled, elastic, cylindrical shell to a shock wave in acoustic medium*, J. Acoust. Soc. Amer., **36**, 3, 476–488, 1964.
12. Е. Я. Вороненок, *Задачи нестационарной гидроупругости для системы двух цилиндрических оболочек*, Теория пластин и оболочек, 33–39, Наука, Москва 1971.
13. В. А. Даткин, А. П. Прудников, *Операционное исчисление*, Высшая школа, 406, Москва 1966.
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, 2, 295, Наука, Москва 1966.
15. R. S. Anderssen, R. Weiss, *A product integration method for a class of singular first kind Volterra equations*, Num. Mathem., **18**, 5, 1972.
16. В. Д. Кубенко, Н. Н. Панасюк, *Действие нестационарных волн на цилиндрические теал в сжимаемой жидкости*, Прикл. мех., **9**, 12, 77–82, 1973.
17. В.Д. Кубенко, Н. Н. Панасюк, *Нестационарная дифракция акустических сферической и цилиндрической волн на жесткой сфере и цилиндре*, Прикл. мех., **13**, 9, 14–20, 1977.
18. В. Д. Кубенко, *Смещение в цилиндрической оболочке при действии цилиндрической волны в акустической среде*, Известия АН СССР, Мех. тверд. тела, 6, 67–72, 1972.
19. В. Д· Кубенко, *Деформирование сферической оболочки под действием нестационарной сферической гидроакустической волны*, Прикл. мех., **8**, 10, 106–110, 1972.
20. В. Д. Кубенко, *Взаємодія сферичної хвилі та круговоі циліндричноі оболочки в акустичному середовищі*, ДАН УРСР, серія А, 3, 251–254, 1970.
21. В. Д. Кубенко, *Действие нестационарной сферической волны на тонкую мембрану, покрывающую акустическое полупространство*, Прикл. мех., 7, 5, 68-72, 1971.
22. В. Д. Кубенко, *До питання про побудову перехідных функцій у задачах взаємодіі складних ударних хвиль із циліндричними і сферичними поверхнями*, ДАН УРСР, Серія А, 2, 148–152 1973.
23. А. Э. Бабаев, А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, *Определение нестационарных нагрузок при действии внутренних волновых источников*, Избранные проблемы прикладной механики, 53–62, Наука, Москва 1974.
24. А. Э. Бабаев В. Д. Кубенко, *Дифракція внутрішньоі нестаціонарноі хвилі тиску на цилндіричній поверхні*, ДАН УРСР, Серія А, 6, 541–546, 1974.
25. А. Э. Бабаев, В. Д. Кубенко, *Действие внутренней нестационарной акустической волны на жесткую цилиндрическую поверхность*, Прикл. мех., **10**, 4, 14–20, 1974.

26. В. Д. Кубенко, *Нестационарное деформирование заполненной жидкостью оболочки под действием слабых ударных волн*, Прикл. мех., **11**, 6, 64–71, 1975.
27. А. Э. Бабаев, В. Д. Кубенко, *Действие внутренней слабой ударной волны на упругую сферическую оболочку*, Прикл. мех., **13**, 5, 73–78, 1977.
28. А. Э. Бабаев, В. Д. Кубенко, *Деформирование сферической оболочки с внутренним жестким ядром под действием слабой ударной волны*, ДАН УССР, серия А, **11**, 984–990, 1976.
29. А. Э. Бабаев, В. Д. Кубенко, *Взаимодействие нестационарной волны давления с системой двух сферических оболочек*, Известия АН СССР, Мех. тверд, тела, 2, 135–141, 1977.
30. В. Д. Кубенко, *О решении задач дифракции нестационарных упругих волн на препятствиях цилиндрической и сферической формы*, ДАН УССР, серия А, **10**, 901–906, 1979.
31. В Д. Кубенко, *Распространение упругих волн от кругового отверстия в анизотропной неоднородной пластине*, Прикл. мех., **1**, 2, 25–33, 1965.
32. В. Д. Кубенко, *Распространение упругой волны расширения от кругового отверстия в цилиндрически анизотропной неоднородной пластине*, Концентрация напряжений, 1, Наукова думка, 164–173, 1965.

Р е з ю м е

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ И СРЕДЫ

Разработка посвящена обсуждению основных результатов исследований, проведенных в Институте Механики Академии Наук УССР, на тему актуальных вопросов нестационарного взаимодействия волновых нагрузок, встречающих преграды в виде жестких или упругих тел.

S U M M A R Y

NONSTATIONARY INTERACTION OF THE STRUCTURAL ELEMENTS WITH THE MEDIUM

The paper is devoted to the discussion of fundamental results of investigations performed in the Institute of Mechanics of the USSR Academy of Sciences on the modern problems of non-stationary interaction of waves with rigid and elastic obstacles.

AKADEMIA NAUK USRR
INSTYTUT MECHANIKI, KIJÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 września 1978 r.