ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

IX

WŁADYSŁAW FISZDON

O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań wymuszonych

WARSZAWA 1954

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (IX)

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1420+150 egz. Papier druk. sat. 70x100/16, 60 g. Arkuszy wydawniczych 0,7. Arkuszy drukarskich 5/8. Oddano do składania dn. 3.IX.53 r. Druk ukończono dn. 28.II.54 r. Zam. 183. 5-B-55590 Cena zł 4,—

Stoł. Zakł. Graf. Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WŁADYSŁAW FISZDON

O PEWNEJ METODZIE OBLICZANIA AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
IX

WARSZAWA 1954
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Uniknięcie rezonansu w całym zakresie użytkowym jest rzeczą niemożliwą w wielu spotykanych obecnie konstrukcjach sprzętu ruchomego. Zachodzi wówczas konieczność obliczenia amplitud drgań wymuszonych w celu stwierdzenia, czy są one dopuszczalne ze względu na wytrzymałość lub wygodę użytkowania sprzętu. Jako przykład może posłużyć samolot z silnikiem tłokowym, który jest źródłem szerokiej gamy harmonicznych sił wzbudzających.

Ponieważ klasyczne metody obliczenia drgań układów złożonych o wielu stopniach swobody ograniczają się na ogół do obliczenia częstości własnych i wymagają dużo pracy rachunkowej, wzorując się na metodach używanych w elektrotechnice Carter, Biot i Duncan, [1], [2] i [3], zastosowali metodę podatności harmonicznej do obliczenia częstości własnych. Metodę powyższą autor tej pracy dostosował do praktycznego obliczenia amplitud drgań wymuszonych, [4] i [5].

Pojęcie podatności harmonicznej najlepiej zilustrować na przykładzie masy m zawieszonej na nieważkiej sprężynie. Działając na tę masę siłą statyczną $Q = Q_s$ uzyskamy przesunięcie masy na odległość $q = q_s$ i wówczas podatność «statyczna» równoznaczna odwrotności sztywności jest równa

(1) $$p_s = \frac{q_s}{Q_s}.$$

Jeżeli zamiast siły statycznej przyłożymy siłę zmieniającą się harmonicznie, $Q = Q_0 \sin \omega t$, to można obliczyć amplitudę drgań z równania różniczkowego ruchu rozpatrywanego układu

$$m \frac{d^2 q}{d t^2} - \frac{1}{p_s} q = Q_0 \sin \omega t.$$

Podatność «harmoniczna», to jest stosunek przesunięcia rozpatrywanego punktu do wielkości siły, która go wywołała, w tym przypadku jest równa

(2) $$p = \frac{q}{Q} = \frac{1}{-m \omega^2 + 1/p_s}.$$

Widzimy, że dla nie tłumionego układu podatność dąży do nieskończoności, gdy częstość siły wzbudzającej dąży do częstości własnej. Zauważymy, że gdy nie ma sprężyny, to

$$p_s = \infty, \qquad p = -\frac{1}{m\,\omega^2}. \tag{3}$$

Jeżeli uwzględnimy tłumienie w rozpatrywanym układzie i przyjmiemy, że siła określona jest za pomocą funkcji $Q = Q_0 e^{i\omega t}$, to równanie ruchu jest

$$m\frac{d^2 q}{d t^2} + c\frac{d q}{d t} + \frac{1}{p_s} q = Q_0 e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Podstawiając do powyższego równania $q = q_0 e^{i\omega t}$ otrzymamy

$$p = \frac{q}{Q} = \frac{1}{-m\,\omega^2 + i c\,\omega + 1/p_s}. \tag{5}$$

Podatność harmoniczna jest więc w tym przypadku wielkością zespoloną scharakteryzowaną przez amplitudę i fazę, której szczególnym przypadkiem jest przypadek poprzednio rozpatrywany.

Aby obliczyć amplitudę drgań masy m, wystarczy pomnożyć podatność przez amplitudę siły wzbudzającej.

Powyższy prosty przykład ilustruje istotę rozszerzenia pojęcia podatności statycznej na harmoniczną.

Rozpatrzmy z kolei podatność harmoniczną innego prostego układu, mianowicie belki ciągłej o masie μ na jednostkę długości. Układ ten będzie posiadał nieskończoną ilość stopni swobody. Z warunku równowagi elementu belki (na który to element działa siła tnąca F i którego przesunięcie jest y) mamy znaną zależność

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,d x = \frac{\partial F}{\partial x}\,d x. \tag{6}$$

Przyjmijmy, że opory tarcia wewnętrznego są proporcjonalne do prędkości wydłużenia $\partial\,\varepsilon/\partial\,t$, wówczas zależność między naprężeniem σ i wydłużeniem ε jest określona wzorem

$$\sigma = \left(\varepsilon + \Theta\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,t}\right) E. \tag{7}$$

Stąd wynika, że moment zginający w danym przekroju jest

(8) $$M = -EI\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Z równania (7) i zależności między momentem zginającym a siłą tnącą otrzymamy

(9) $$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\left(1 + \Theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Równanie to różni się od równania belki ogólnie znanego z wytrzymałości jedynie wyrażeniem w nawiasie.

Rozwiązanie powyższego równania ma postać $y = y_0(x)e^{st}$, czyli

(10) $$\frac{d^4 y_0}{dx^4} - k^4 y_0 = 0; \qquad k^4 = -\mu s^2 \frac{1}{EI(1+\Theta_s)}.$$

Dla drgań harmonicznych, dla których $s = i\omega$ parametr k staje się wielkością zespoloną. Ogólne rozwiązanie jest następujące:

(11) $$y_0 = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx + A_3 \cosh kx + A_4 \sinh kx.$$

Aby obliczyć podatność harmoniczną pod wpływem siły $Q_1 e^{i\omega t}$, musimy obliczyć stałe całkowania równania (11) z warunków brzegowych; na przykład dla belki swobodnej, o długości L gdy siła przyłożona znajduje się w przekroju $x = 0$, mamy

$$\frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 y(0)}{dx^3} = \frac{-Q_1}{EI(1 + i\Theta\omega)},$$

$$\frac{d^2 y(L)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 y(L)}{dx^3} = 0.$$

Ponieważ ruch belki określają w zasadzie dwa parametry, przeto rozróżniamy podatności przesunięć i pochyleń, które występują pod wpływem przyłożonych sił lub momentów. Jeżeli przesunięcie w przekroju $x = 0$ jest $y(0) = q_1 e^{i\omega t}$, a pochylenie w tymże przekroju $dy(0)/dx = q_2 e^{i\omega t}$, to odpowiednie podatności w tym przekroju są

(12) $$\begin{cases} p_{11} = \dfrac{q_1}{Q_1} = \dfrac{kL}{\mu L\omega^2}\,\dfrac{\sinh kL \cos kL - \cosh kL \sin kL}{1 - \cosh kL \cos kL}, \\[2ex] p_{21} = \dfrac{q_2}{Q_1} = \dfrac{kL^2}{\mu L\omega^2 L}\,\dfrac{\sinh kL \sin kL}{1 - \cosh kL \cos kL}. \end{cases}$$

Podobnie, przykładając momenty określone wzorem $Q_2 e^{i\omega t}$ w przekroju $x=0$, znajdujemy podatności

$$p_{12}=\frac{q_3}{Q_2}, \qquad p_{22}=\frac{q_4}{Q_2}. \tag{13}$$

Obliczając przesunięcia $y(x)$ lub pochylenia $dy(x)/dx$ w przekroju x znajdziemy jakby «wpływowe» podatności harmoniczne, które służą do obliczania amplitud w obranym przekroju w zależności od sił wzbudzających:

$$q_x = p_{x1}Q_1 + p_{x2}Q_2. \tag{14}$$

Powyższa metoda ma największe zastosowanie do układów złożonych z kilku zespołów o znanych lub łatwo obliczalnych podatnościach. W celu obliczenia podatności takiego układu należy rozróżnić różne przypadki zależnie od liczby parametrów niezbędnych do zupełnego określenia danego połączenia.

Jeżeli układ można scharakteryzować za pomocą jednego parametru, to biorąc pod uwagę, że w punkcie połączenia obu zespołów «a» i «b» przesunięcia są równe oraz że suma sił działających w punkcie połączenia jest równa zeru, otrzymamy

$$\begin{cases} {}_aq_1 = {}_bq_1 = q_1, \\ {}_aQ_1 + {}_bQ_1 = Q_1. \end{cases} \tag{15}$$

Podatność zespołu w punkcie połączenia jest określona wzorem następującym:

$$p_1=\frac{q_1}{Q_1}=\frac{1}{\dfrac{{}_aQ_1}{{}_aq_1}+\dfrac{{}_bQ_1}{{}_bq_1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{{}_ap_1}+\dfrac{1}{{}_bp_1}}. \tag{16}$$

Jeżeli połączenie scharakteryzowane jest za pomocą dwu parametrów, to oba rodzaje uogólnionych przesunięć muszą być równe i oba rodzaje uogólnionych sił muszą być w równowadze. Stąd mamy

$$\begin{cases} {}_aq_1 = {}_bq_1 = q_1, \qquad {}_aQ_1 + {}_bQ_1 = Q_1, \\ {}_aq_2 = {}_bq_2 = q_2, \qquad {}_aQ_2 + {}_bQ_2 = Q_2. \end{cases} \tag{17}$$

Przesunięcia każdego zespołu są następujące:

$$\begin{cases} {}_aq_1 = {}_ap_{11}\,{}_aQ_1 + {}_ap_{12}\,{}_aQ_2, \qquad {}_bq_1 = {}_bp_{11}\,{}_bQ_1 + {}_bp_{12}\,{}_bQ_2, \\ {}_aq_2 = {}_ap_{21}\,{}_aQ_1 + {}_ap_{22}\,{}_aQ_2, \qquad {}_bq_2 = {}_bp_{21}\,{}_bQ_1 + {}_bp_{22}\,{}_bQ_2. \end{cases} \tag{18}$$

Eliminując z powyższych równań ${}_aq_i$, ${}_bq_i$, ${}_aQ_i$ oraz ${}_bQ_i$ otrzymamy poszukiwane podatności z równań

$$q_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \qquad q_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2. \tag{19}$$

Obliczenie amplitudy w obranym przekroju układu złożonego wymaga obliczenia siły działającej na składowy element. Mając wpływowe podatności można obliczyć żądaną amplitudę.

Dokładne obliczenie podatności harmonicznej układu wewnętrznie tłumionego można praktycznie wykonać tylko w przypadku prostych zespołów. Przy bardziej złożonych układach praca rachunkowa niepomiernie wzrasta i dlatego przybliżone lub półdoświadczalne metody obliczeń są całkowicie uzasadnione.

W przypadku belki o zmiennym przekroju, na którą działa siła X na jednostkę długości, równanie równowagi analogiczne do równania (9) ma postać

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(1 + i\Theta\omega)\frac{d^2 y}{dx^2}\right] + \mu\omega^2 y + X = 0. \tag{20}$$

Możemy rozwiązać to równanie stosując na przykład przybliżoną metodę Galerkina, jeżeli przyjmiemy Y_r jako liniowo niezależne funkcje określające drgania znanych podobnych układów. Przesunięcie w przekroju x jest wówczas

$$y(x) = \Sigma q_r Y_r(x), \tag{21}$$

gdzie q_r są wielkościami zespolonymi. Podatność harmoniczną oblicza się z zależności

$$p = \frac{y}{X_i}. \tag{22}$$

Metoda energetyczna korzystająca z ogólnego równania Lagrange'a jest szczególnie przydatna, jeżeli znamy drgania własne podobnych układów. Polega ona na rozwiązaniu układu równań

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, \tag{23}$$

w których uogólnionymi współrzędnymi są wartości własne drgań, T i U są odpowiednio energiami kinetyczną i potencjalną układu, a F jest funkcją tłumienia przedstawiającą połowę energii zużytej na pokonanie sił tłumienia w jednostce czasu. Na przykład dla drgań giętnych będzie ta ostatnia funkcja równa

$$F=\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\Theta\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right]^2 dx. \tag{24}$$

Przyjmując, że

$$Q_r = Q_r' e^{i\omega t}, \qquad q_r = q_r' e^{i\omega t}, \tag{25}$$

otrzymamy następujący układ równań:

$$\sum_s (a_{rs}\omega^2 + i b_{rs}\omega + c_{rs})\, q_s' = Q_r'. \tag{26}$$

Rozwiązując ten układ znajdziemy, że

$$q_r' = \frac{1}{\Delta}\sum_s \Delta_{rs} Q_s', \tag{27}$$

gdzie Δ jest wyznacznikiem układu, zaś Δ_{rs} są odpowiednimi minorami.

Uogólniona podatność harmoniczna wynosi

$$_qP_{rs} = \frac{\partial q_r'}{\partial Q_s'} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta}, \tag{28}$$

a ugięcia w żądanym przekroju x są równe

$$y(x) = \sum_r q_r' y_r(x). \tag{29}$$

Żądane podatności harmoniczne są określone wzorami

$$P_{xP_i} = \frac{\partial y(x)}{\partial P_i} = \sum_r \left\{ y_r(x)\left[\sum_s {}_qP_{rs}\, y_s(x_i)\right]\right\}. \tag{30}$$

Zauważmy, że w przypadku zastosowania dokładnych funkcji drgań własnych metoda ta daje wynik ścisły.

W przypadku, gdy posiadamy już gotową konstrukcję, np. samochód, można znaleźć podatność harmoniczną układu przyłożywszy w danym punkcie siłę harmoniczną $Q e^{i\omega t}$ i mierząc przesunięcie $q e^{i(\omega t+\varphi)}$. Następnie możemy już znaleźć podatność harmoniczną

$$P_{xQ} = \frac{q}{Q} e^{i\varphi}. \tag{31}$$

Znając siłę wzbudzającą można z łatwością obliczyć amplitudę drgań. Metoda ta pozwala na dokładne określenie podatności przy uwzględnieniu rzeczywistego stanu konstrukcji, a następnie na takie dobranie elementów sprężystego zawieszenia silnika, które zapewniłoby najkorzystniejsze warunki użytkowania sprzętu.

Literatura cytowana w tekście

[1] B. C. Carter, *The Vibration of Airscrew Blades with Particular Reference to Harmonic Torque Impulses in the Drive*, R. a. M. 1738 (1936).

[2] M. A. Biot, *Coupled Oscillations of Aircraft Engine Propeller Systems*, Journ. Aeron. Sc., July 1940.

[3] W. J. Duncan, *The Admittance Method for Obtaining the Natural Frequencies of Systems*, Phil. Mag., Nov. 1941.

[4] W. Fiszdon, D. B. C. Cooper, L. A. Tate, *A Practical Method of Estimating Resonance Frequencies of an Aircraft Engine System*, R. A. E. Report No S. M. E. 3293 (1944).

[5] W. Fiszdon, R. P. N. Jones, D. L. Woodcock, *Effect of Damping in Different Parts of an Aircraft Structure on Forced Vibrations as Studied on Simplified Systems*, R. a. M. 2103 (1945).

Резюмэ

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ АМПЛИТУД ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Автор рассматривает сущность и обоснование применения метода «гармонической податливости» для вычисления амплитуд вынужденных колебаний упругой системы с учетом влияния внутренного затухания. Предлагаемый метод позволяет учесть действительные свойства: упругости, инерции и затухания системы со многими степенями свободы. Это позволяет вычислить амплитуды вынужденных колебаний более точно, чем методами обычно применяемыми в настоящее время.

Кроме того автором рассмотрены приближенные способы применения метода, в частности на основании прежних опытов над подобными системами.

Предлагаемый метод применим в особенности в случае необходимости вычисления оптимальной жёсткости подвешения значительной массы на упругой системе конечной массы, например мотора на самолёте или автомобиле.

Summary

A CERTAIN METHOD OF CALCULATION OF AMPLITUDES OF FORCED VIBRATIONS

The use of the admittance method for the determination of amplitudes of forced vibrations of deformable elastic systems with internal damping is described. This method enables to take into account the real elastic, inertial and damping characteristics of systems with many degrees of freedom thus giving the possibility of a more accurate calculation of forced amplitudes than in the usually employed methods.

An approximate method using previous experience on similar systems is indicated.

This method is particularly suitable for the determination of the best flexibility of the suspension of a large mass on a flexible finite mass.

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1953 r.