8/8

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

I

FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych

O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

WARSZAWA 1953

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁASKIEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH WYTRZYMAŁOŚCI TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z ODMIENNYM OŚRODKIEM ZARYSU ELIPTYCZNEGO

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
I

WARSZAWA 1953
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁASKIEGO TEORII SPRĘŻYSTOŚCI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH

W innej pracy mojej[1]) zostały wyprowadzone ogólne wzory określające wartości naprężeń i przynależnych przesunięć w postaci następującej *):

$$2 X_y + i(X_x - Y_y) = -4 i z_1 \omega''(z) - 4 i f''(z), \tag{1}$$

$$X_x + Y_y = 4 \omega'(z) + 4 \omega_1'(z_1), \tag{2}$$

$$\mu(v + i u) = -i z_1 \omega'(z) + i \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \omega_1(z_1) - i f'(z). \tag{3}$$

Jako niewiadome występują tutaj w zasadzie tylko dwie funkcje $\omega'(z)$ i $f'(z)$, które mogą być określone z warunków rozpatrywanego zagadnienia.

Wprowadzając związki

$$\omega'(z) = \varphi + i\psi, \tag{4}$$

$$\omega_1'(z_1) = \varphi - i\psi, \tag{5}$$

$$f'(z) = \xi + i\eta \tag{6}$$

i uwzględniając je w równościach (1) i (2) mamy

---

[1]) F. Szelągowski, *Zagadnienie płaskie teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych*, ARCH. MECH. STOS., t. III, I (1951).

*) Oznaczenie składowych naprężenia stosowane przez autora pochodzi, jak wiadomo, od G. Kirchhoffa i A. E. H. Love'a; używane jest w literaturze radzieckiej i angielskiej. Symbolikę tę stosuje między innymi również N. I. Muschieliszwili, który (w znanym dziele *Niekotoryje osnownyje zadaczi matiematiczeskoj tieorji uprugosti*, wyd. III, Moskwa-Leningrad 1949) dał znakomite rozwinięcie zastosowania teorii funkcji zmiennej zespolonej do zagadnień płaskich teorii sprężystości, które są tematem niniejszej pracy. Dla czytelnika nieprzywykłego do symboliki Love'a podajemy odpowiednie oznaczenia w symbolice T. Kármána: $X_x = \sigma_x$, $Y_y = \sigma_y$, $Z_z = \sigma_z$, $X_y = \tau_{yx}$, $Y_z = \tau_{zy}$, $Z_x = \tau_{xz}$. *Uwaga redakcji ROZPRAW.*

(7) $$2 X_y + i(X_x - Y_y) = -4i(x - iy)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - 4i\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - i\frac{\partial \xi}{\partial y}\right),$$

(8) $$X_x + Y_y = 8\varphi .$$

W dalszym ciągu z równości (7) i (8) otrzymujemy bezpośrednio wartości odnośnych naprężeń w postaci

$$X_x = 2\left(2\varphi - x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

$$Y_y = 2\left(2\varphi + x\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

$$X_y = -2\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial y} + y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Ze wzorów tych widać, że w ogólnym przypadku wyrażenia dla naprężeń zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych zawierają tylko dwie niezależne funkcje harmoniczne, mianowicie φ oraz ξ.

O ile chodzi o wartości przynależnych przesunięć v i u, to można je z kolei określić ze wzoru (3) po uprzednim uwzględnieniu związków (4), (5) i (6). Wzór (3) można przekształcić następująco:

$$\mu(v + iu) = -i(x - iy)(\varphi + i\psi) + i\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int(\varphi - i\psi)\,d(x - iy) - i(\xi + i\eta),$$

wobec czego odpowiednie wartości v i u otrzymujemy w postaci

(9) $$v = \frac{1}{\mu}\left[-y\varphi + x\psi + \eta + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int(\varphi\,dy + \psi\,dx)\right],$$

(10) $$u = \frac{1}{\mu}\left[-x\varphi - y\psi - \xi + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\int(\varphi\,dx - \psi\,dy)\right].$$

Jak można zauważyć, są tutaj cztery funkcje harmoniczne φ, ψ, ξ oraz η.

Spośród tych czterech funkcji tylko dwie są niezależne, mianowicie funkcje φ i ξ; funkcje ψ i η, jako sprzężone z funkcjami φ i ξ, są określone z dokładnością do pewnej stałej za pomocą poniższych wzorów:

(11) $$\psi = \int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\right),$$

$$\eta = \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx\right). \tag{12}$$

Wobec tego wprowadzając zależności (11) i (12) do wzorów (9) i (10) otrzymamy ostatecznie

$$v = \frac{1}{\mu}\left\{-y\varphi + x\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right) + \int\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dy - \frac{\partial\xi}{\partial y}dx\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\left[\int\varphi\, dy + \int dx \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right)\right]\right\},$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left\{-x\varphi - \xi - y\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right) + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}\left[\int\varphi\, dx - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int dy \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right)\right]\right\}.$$

Jak widać, we wzorach powyższych występują również tylko dwie niezależne funkcje harmoniczne φ i ξ.

Резюмэ

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Автор приводит общее решение плоской проблемы теории упругости в прямоугольных координатах, используя формулы из своей предыдущей статьи, озаглавленной Проблема плоской теории упругости в функциях комплексной переменной; последняя печаталась в АРХ. ПРИКЛ. МЕХ., том III, 1 (1951).

Résumé

SOLUTION DU PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES

L'auteur présente la solution générale du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées rectangulaires, en utilisant les formules de son article précédent, intitulé *Problème plan de l'élasticité en fonctions de variable complexe*, ARCH. MECH. STOS. vol. III, 1 (1951).

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1952 r.

O PEWNYCH SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH WYTRZYMAŁOŚCI TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z ODMIENNYM OŚRODKIEM ZARYSU ELIPTYCZNEGO

Badanie stanu napięcia w tarczy nieograniczonej z ośrodkiem odmiennej sprężystości zarysu niekołowego może być w teorii sprężystości przeprowadzone najdogodniej za pomocą odwzorowania wiernego.

W rozpatrywanych tutaj przypadkach rozważane będzie odwzorowanie wierne płaszczyzny z otworem eliptycznym na płaszczyznę z otworem kołowym przez wprowadzenie funkcji

$$z = \omega(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \tag{1}$$

w której

$$\zeta = \varrho\, e^{i\Theta},$$

a parametry rzeczywiste K i m są określone nierównościami następującymi:

$$K > 0,$$

$$0 \leqq m < 1.$$

Okręgowi koła $|\zeta| = 1$ odpowiada tutaj elipsa ze środkiem znajdującym się w początku układu i z półosiami

$$a = K(1 + m),$$

$$b = K(1 - m).$$

Przy danych wartościach a i b jest, oczywiście,

$$K = \frac{a+b}{2},$$

$$m = \frac{a-b}{a+b}.$$

W przypadku gdy $m = 0$, elipsa przekształca się w koło, zaś w przypadku gdy $m = 1$, elipsa przekształca się w odcinek osi x o długości $4K$ zawarty pomiędzy punktami $x = \pm 2K$, co oznacza, że dany obszar w tym szczególnym przypadku przekształca się w płaszczyznę nieograniczoną ze szczeliną prostą.

Zasadnicze wzory dotyczące zagadnienia dwuwymiarowego będą miały postać następującą:

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}\omega_1(\zeta_1)\Phi'(\zeta)\frac{1}{\omega'(\zeta)} + F(\zeta), \tag{2}$$

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2}[\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)], \tag{3}$$

$$v + iu = -\frac{i}{8\mu}\omega_1(\zeta_1)\Phi(\zeta) + \tag{4}$$

$$+\frac{i}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int \Phi_1(\zeta_1)\omega_1'(\zeta_1)\,d\zeta_1 + \frac{1}{4\mu}\int F(\zeta)\omega'(\zeta)\,d\zeta.$$

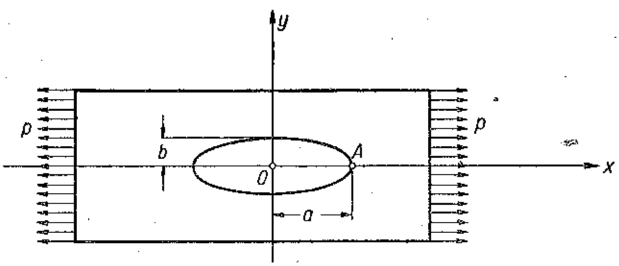
Po uwzględnieniu zależności (1) otrzymujemy

$$2X_y + i(X_x - Y_y) = -\frac{i}{2}K\left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right)\Phi'(\zeta)\frac{1}{K\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} + F(\zeta),$$

$$X_x + Y_y = \frac{1}{2}[\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)],$$

$$v + iu = -\frac{i}{8\mu}K\left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right)\Phi(\zeta) +$$

$$+\frac{i}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int \Phi_1(\zeta_1)K\left(1 - \frac{m}{\zeta_1^2}\right)d\zeta_1 + \frac{1}{4\mu}\int F(\zeta)K\left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)d\zeta.$$



Rys. 1

Po omówieniu powyższych spraw podstawowych można przejść z kolei do rozpatrzenia zagadnienia pierwszego, dotyczącego jednokierunkowego rozciągania tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu eliptycznego (rys. 1).

Określimy najpierw przesunięcia dowolnego punktu obwodu elipsy dla tarczy jednorodnej rozciąganej jednokierunkowo.

Odpowiednie przesunięcia będą równe

$$u = \frac{p}{E} x = \frac{p}{E} K(1+m)\cos\Theta, \tag{5}$$

$$v = -\frac{\sigma p}{E} y = -\frac{\sigma p}{E} K(1-m)\sin\Theta, \tag{6}$$

gdyż z zależności (1) wynika, że jest

$$z = x + iy = K\left[\varrho(\cos\Theta + i\sin\Theta) + \frac{m}{\varrho}(\cos\Theta - i\sin\Theta)\right],$$

skąd

$$x = K\left(\varrho + \frac{m}{\varrho}\right)\cos\Theta,$$

$$y = K\left(\varrho - \frac{m}{\varrho}\right)\sin\Theta,$$

przy czym dla $\varrho = 1$ jest

$$x = K(1+m)\cos\Theta,$$

$$y = K(1-m)\sin\Theta.$$

Przesunięcia u i v określone wzorami (5) i (6) można napisać, jak łatwo sprawdzić, w postaci zespolonej

$$-v + iu = \frac{ipK}{2E}\left[\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)(1+\sigma) + \left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right)(1-\sigma)\right]$$

lub w postaci nieco odmiennej

$$-v + iu = \frac{ipK}{2E}\left[\left(\frac{1}{\zeta_1} + \frac{m}{\zeta}\right)(1+\sigma) + \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1}\right)(1-\sigma)\right], \tag{7}$$

gdyż dla punktów położonych na okręgu koła o promieniu równym jedności zachodzi związek następujący:

$$\zeta\zeta_1 = 1. \tag{8}$$

W ten sposób, w wyniku przekształceń, otrzymana zależność (7) odpowiada warunkom rozpatrywanego zagadnienia.

Odrzućmy teraz wiadome obciążenie p i do punktów obwodu elipsy przyłóżmy, dla części tarczy znajdującej się wewnątrz tej elipsy, naprężenia p, lecz odwrotnego znaku; dla części tarczy położonej na zewnątrz elipsy przyłóżmy takie naprężenia, które spowodowałyby przesunięcia odwrotne do określonych równością (7), przy czym naprężenia te w punktach dostatecznie odległych od obwodu elipsy (teoretycznie rzecz biorąc — dla punktów tarczy położonych w nieskończoności) nie powinny już wywoływać jakichkolwiek przemieszczeń tarczy.

Tak sformułowane zagadnienie rozwiążemy stosując wzory przytoczone na wstępie.

Biorąc pod uwagę zależność (8) otrzymamy tutaj dla wzoru wyjściowego (4) następującą postać:

$$(9)\qquad -\frac{ip}{2E}\left[\left(\frac{1}{\zeta_1}+\frac{m}{\zeta}\right)(1+\sigma)+\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{m}{\zeta_1}\right)(1-\sigma)\right]=-\frac{i}{8\mu}\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right)\Phi(\zeta)+$$

$$+\frac{i}{8\mu}\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\int\Phi_1(\zeta_1)\left(1-\frac{m}{\zeta_1^2}\right)d\zeta_1+\frac{1}{4\mu}\int F(\zeta)\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)d\zeta.$$

Związkowi (9), jak łatwo sprawdzić, czynią zadość następujące funkcje

$$\Phi(\zeta)=\frac{4p\mu}{Ek}\left[1+\sigma+m(1-\sigma)\right]\frac{1}{\zeta^2-m},$$

$$\Phi_1(\zeta_1)=\frac{4p\mu}{Ek}\left[1+\sigma+m(1-\sigma)\right]\frac{1}{\zeta_1^2-m},$$

$$F(\zeta)=\frac{i2p\mu}{E}\frac{1}{\zeta^2-m}\left\{1-\sigma+m(1+\sigma)+\frac{1}{k}\left[1+\sigma+\right.\right.$$

$$\left.\left.+m(1-\sigma)\right]\frac{m(1-\zeta^4)-\zeta^2(3+m^2)}{(\zeta^2-m)^2}\right\},$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

Uwzględniając powyższe funkcje $\Phi(\zeta), \Phi_1(\zeta_1)$ oraz $F(\zeta)$, można z kolei z równań (2) i (3) określić odpowiednie naprężenia w tarczy (na zewnątrz elipsy).

Największa wartość naprężenia X'_x zachodzi w punkcie A elipsy (rys. 1), tj. dla $\Theta=0$, i może być przedstawiona w postaci następującej:

$$[X'_x]_A=\frac{p}{2}\frac{1}{1-m}\left[m+\frac{1-\sigma}{1+\sigma}+\frac{1+\sigma+m(1-\sigma)}{3-\sigma}\right].$$

Dodając teraz na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń rozpatrzone wyżej dwa stany obciążenia tarczy, otrzymamy jako ostateczny wynik jednokierunkowe rozciąganie tarczy z ośrodkiem sztywnym zarysu eliptycznego.

Największe naprężenie rozciągające w punkcie A tarczy określa zatem ostatecznie następujący wzór[1]):

$$[X_x]_A = p + [X'_x]_A . \tag{10}$$

W przypadku ośrodka sztywnego zarysu kołowego, tj. $m = 0$, ze wzoru (10) otrzymujemy

$$[X_x]_A = p\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} + \frac{1+\sigma}{3-\sigma}\right)\right],$$

gdy zaś $m = 1$, a więc w przypadku sztywnej szczeliny, wartość naprężenia X_x jest teoretycznie równa nieskończoności.

W związku z powyższym należy zauważyć, że wartość naprężenia rozciągającego w punkcie A tarczy będzie wzrastała niepomiernie w miarę zwężania się przekroju ośrodka sztywnego.

Rozpatrzmy teraz stan napięcia w tarczy nieograniczonej z ośrodkiem zarysu eliptycznego, kurczącym się pod wpływem powracania z wyższej temperatury do temperatury otaczającej atmosfery, co może mieć miejsce np. w przypadku zapełnienia takiego otworu stopiwem.

W tym przypadku, gdy ośrodek jeszcze rozgrzany nabierze własności sprężystych, przesunięcia spowodowane kurczeniem się dowolnego punktu M obwodu elipsy będą równe (rys. 2)

$$u = -\alpha t x,$$

$$v = -\alpha t y,$$

gdzie t oznacza różnicę temperatur, a α współczynnik liniowej rozszerzalności tworzywa.

Przesunięcia te można przedstawić w postaci zespolonej

$$-v - iu = -i\alpha t K\left(\zeta_1 + \frac{m}{\zeta_1}\right) = -i\alpha t K\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\zeta_1}\right)$$

przyjąwszy uprzednio pod uwagę zależność (8). Wówczas wzór (4) przyjmie postać następującą:

---

[1]) Odpowiedni wzór, (10), w pracy mojej *Influence d'une partie centrale rigide sur la répartition des contraintes dans un élément tendu ou comprimé* (Ass. Int. des Ponts et Charpentes, 1947) został wyprowadzony za pomocą współrzędnych krzywoliniowych.

Chociaż wzór ten daje wartości bardzo zbliżone, jednakże przekształcony wzór w tej pracy, określający funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ na podstawie danych przesunięć, nie spełnia w zupełności warunków ogólnie postawionego zagadnienia dwuwymiarowego.

$$-iat\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{m}{\zeta_1}\right)=-\frac{i}{8\mu}\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta\right)\Phi(\zeta)+\frac{ik}{8\mu}\int\Phi_1(\zeta_1)\left(1-\frac{m}{\zeta_1^2}\right)d\zeta_1+$$

$$+\frac{1}{4\mu}\int F(\zeta)\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)d\zeta.$$

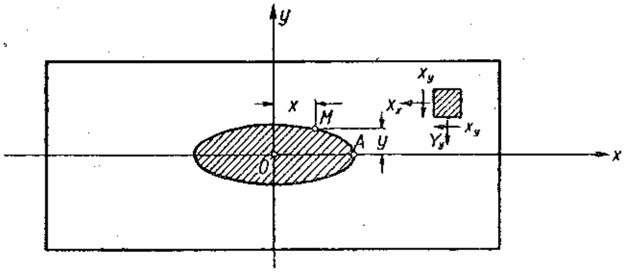
Równości tej czynią zadość funkcje

$$\Phi(\zeta)=\frac{8atm\mu}{k}\frac{1}{\zeta^2-m},$$

$$\Phi_1(\zeta_1)=\frac{8atm\mu}{k}\frac{1}{\zeta_1^2-m},$$

$$F(\zeta)=i4at\mu\frac{1}{\zeta^2-m}\left[1+\frac{m}{k}\frac{m-\zeta-(2+m^2)\zeta^2+m\zeta^3-2m\zeta^4}{(\zeta^2-m)^2}\right].$$

Przynależne wartości naprężeń w tarczy, tzn. w obszarze położonym na zewnątrz elipsy, można określić, podobnie jak to miało miejsce w poprzednim przypadku, ze wzorów (2) i (3) uwzględniając w nich wyżej podane funkcje $\Phi(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta_1)$ i $F(\zeta)$.



Rys. 2

Należy jednak zauważyć, że największe naprężenie rozciągające będzie miało miejsce w punkcie A tarczy, tzn. dla wartości $\Theta=0$, przy czym wartość tego naprężenia będzie równa

$$[X_x]_A=\frac{2at\mu}{1-m}\left[1+\frac{m}{k(1-m)}\left(4-\frac{3+m^2}{1-m}\right)\right],$$

gdzie

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Analizując powyższy wzór stwierdzimy, że w przypadku koła, tzn. dla $m=0$, wartość naprężenia $[X_x]_A$ wynosi

$$[X_x]_A=2at\mu=\frac{atE}{1+\sigma},$$

zaś w przypadku szczeliny, tzn. dla $m=1$, wartość naprężenia $[X_x]_A$ równa się nieskończoności.

Резюмэ

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ СОПРОТИВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ЯДРОМ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

Применяя конформное отображение автор решил при помощи теории упругости

(1) проблему одноосного растяжения бесконечной пластинки с жестким эллиптическим ядром,

(2) проблему охлаждения эллиптического ядра бесконечной пластинки.

Résumé

SUR CERTAINS CAS PARTICULIERS DE RÉSISTANCE D'UNE TÔLE INFINIE AVEC UNE PARTIE CENTRALE DIFFÉRENTE DE SECTION ELLIPTIQUE

En appliquant la représentation conforme l'auteur a résolu à l'aide de la théorie de l'élasticité

(1) le problème de la traction, suivant une seule direction, d'une tôle infinie avec une partie centrale rigide de section elliptique,

(2) le problème du réfroidissement d'une partie centrale de section elliptique d'une tôle infinie.

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 listopada 1952 r.