

KAZIMIERZ WOLSKI  
METODA PUNKTÓW KINETYCZNYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XXVI

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Ogólne omówienie metody	81
2. Punkty kinetyczne bryły	82
3. Punkty kinetyczne płyty	84
4. Punkty kinetyczne pręta	85
5. Przykłady typowe	85
5.1. Jednorodny pręt prosty	85
5.2. Elementarny wycinek płaski	86
5.3. Ostrosłup elementarny	87
5.4. Płyta trójkątna	88
5.5. Czworobocian	89
6. Metoda przekształcenia. Twierdzenie	90
6.1. Zastosowanie metody przekształcenia do brył przestrzennych	93
6.2. zastosowanie metody przekształcenia do płyt płaskich	95
7. Ruch płaski bryły	97
8. Wskazówki praktyczne. Przykład zastosowania metody punktów kinetycznych	99
9. Katalog punktów kinetycznych	102

## 1. Ogólne omówienie metody

Metoda punktów kinetycznych w mechanice jest mało znana i w praktyce nie jest stosowana. Zasluguje ona jednak na specjalną uwagę ze względu na korzyści praktyczne, jakie może przynieść przy rozwiązywaniu trudniejszych zagadnień dynamicznych.

Metoda ta w dzisiejszym stanie jest opracowana w sposób niekompletny. Mamy tu na myśli przede wszystkim konieczność przygotowania materiału, który stworzyłby należyte podstawy dla zastosowań praktycznych.

Praca niniejsza ma na celu podanie ogólnej metody oraz dostarczenie wzorów niezbędnych do obliczeń technicznych.

W kinetyce układów sztywnych występuje tzw. geometria mas, która ustala zależność ruchów układu od rozmieszczenia w nim mas. Geometria ta operuje zwykle momentami mas stopnia pierwszego i drugiego, czyli momentami statycznymi i momentami bezwładności oraz momentami zbieżności (lub odśrodkowymi). Do dziedziny geometrii mas należałoby również zaliczyć i punkty kinetyczne.

Punktami kinetycznymi lub kinetycznie zastępczymi będziemy nazywali punkty masowe, stanowiące zespół sztywny skończony lub nieskończony, który może zastąpić dany układ sztywny lub bryłę pod warunkiem zachowania wszystkich cech kinetycznych.

Bryła sztywna, poddana działaniu jakichkolwiek sił zewnętrznych, wprawiona jest w ruch, który zawsze może być sprowadzony do dwu ruchów:

- (1) ruchu postępowego środka masy bryły oraz
- (2) ruchu obrotowego około tego środka.

(1) Ruch środka masy punktów kinetycznych pozostaje taki sam, jak ruch środka masy bryły, jeżeli:

- (a) zespół punktów kinetycznych posiada masę równą masie bryły, tj.

$$\sum m_i = m,$$

(b) środek mas zespołu punktów kinetycznych i środek masy bryły stale pokrywają się, tj.

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

gdzie  $r_i$  oznacza wektor położenia  $i$ -tego punktu kinetycznego względem środka masy bryły.

(2) Ruch obrotowy zespołu punktów kinetycznych oraz ruch obrotowy bryły około wspólnego środka mas są identyczne, jeżeli pokrywają się ich centralne elipsoidy bezwładności. Innymi słowy: moment bezwładności punktów kinetycznych i moment bezwładności bryły względem dowolnej osi, przechodzącej przez wspólny środek mas, powinny być równe. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to na zasadzie twierdzenia Steiner'a o momentach bezwładności względem osi równoległe przesuniętej ze środka masy momenty bezwładności punktów kinetycznych i bryły względem dowolnej osi w przestrzeni będą równe.

Również pęd, kręt i energia kinetyczna bryły jako związane z ruchem środka mas i z ruchem obrotowym około tego środka (na podstawie znanych twierdzeń z kinetyki) będą takie same dla bryły, jak dla punktów kinetycznych.

Z powyższego widać, że skoro mamy określone dla bryły punkty kinetyczne, to uzyskujemy następujące korzyści metodyczne:

(1) wszelkie momenty bezwładności bryły względem dowolnych osi, punktów lub płaszczyzn możemy określić dla punktów kinetycznych zamiast dla bryły;

(2) ruch bryły możemy badać na zespole punktów kinetycznych.

Badanie ruchu bryły może być jeszcze znacznie ułatwione przez zastosowanie do punktów kinetycznych metody wykreślnej.

W dalszym ciągu wyprowadzimy ogólne warunki pozwalające określić punkty kinetyczne dla bryły przestrzennej, figury płaskiej lub płyty oraz dla odcinka prostego lub pręta jednorodnego lub niejednorodnego o znanym rozkładzie gęstości.

## 2. Punkty kinetyczne bryły

W ogólnym przypadku bryły punkty kinetyczne muszą spełniać następujące warunki:

- (a) równość mas,
- (b) tożsamość środków mas,
- (c) tożsamość centralnych elipsoid bezwładności punktów kinetycznych i bryły.

Pierwsze dwa warunki nie wymagają omówienia. Co się tyczy warunku trzeciego, to do wyznaczenia elipsoidy trzeba znać sześć momentów bezwładności względem sześciu osi przechodzących przez środek masy bryły. Wynika to z następującego równania elipsoidy bezwładności:

$$k^2 = J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx - 2J_{xy}xy,$$

w którym mamy określić sześć współczynników na podstawie znajomości współrzędnych w sześciu punktach (niesymetrycznych) elipsoidy  $M_e(x_e, y_e, z_e)$ , przedstawiających końce wektorów

$$\vec{GM}_e = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{J_e}} \quad (e = 1, 2, \dots, 6),$$

wychodzących ze środka masy bryły  $G$ , w którym obrany jest układ osi współrzędnych  $x, y, z$ .

Warunki dla określenia punktów kinetycznych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} (2.1) \quad & \Sigma m_i = m, \\ (2.2) \quad & \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0, \quad \Sigma m_i z_i = 0, \\ (2.3) \quad & \Sigma J_{i1} = J_1, \quad \dots \quad \Sigma J_{i6} = J_6, \\ & (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

gdzie

$$J_{ik} = m_i [a_k^2 (y_i^2 + z_i^2) + \beta_k^2 (z_i^2 + x_i^2) + \gamma_k^2 (x_i^2 + y_i^2) - 2\beta_k \gamma_k y_i z_i - 2\gamma_k a_k z_i x_i - 2a_k \beta_k x_i y_i]$$

jest momentem bezwładności  $i$ -tego punktu kinetycznego względem  $k$ -tej osi posiadającej cosinusy kierunkowe  $a_k, \beta_k, \gamma_k$  oraz  $J_k$  jest momentem bezwładności bryły względem  $k$ -tej osi ( $k = 1, \dots, 6$ ).

Równania (2.1), (2.2), (2.3) tworzą łącznie układ złożony z dziesięciu równań. Co do liczby punktów kinetycznych  $n$ , to rzeczą interesującą jest określić możliwie najmniejszą ich ilość dla różnych przypadków. Dla bryły dowolnej, jak łatwo stwierdzić, minimalna ilość punktów kinetycznych wynosi cztery, jeśli przyjąć, że nie leżą one w jednej płaszczyźnie. Taki układ czterech punktów masowych zawsze może czynić zadość powyższemu dziesięciu równaniom i pozostawia przy tym jeszcze dużą swobodę tworzenia zespołów kinetycznych. Mając bowiem dla określenia współrzędnych czterech punktów szesnaście niewiadomych (cztery masy i dwanaście współrzędnych) możemy sześć z nich obrać dowolnie (np. trzy masy punktów i trzy współrzędne). Mniejsza od czterech liczba punktów kinetycznych — trzy — nie może czynić zadość (w ogólnym przypadku) równaniom (2.3), ponieważ wtedy elipsoida podlega następującemu warunkowi płaskiego układu mas:

$$J_z = J_x + J_y$$

przy prostokątnym układzie współrzędnych.

Z tego samego względu cztery punkty kinetyczne nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie.

Nadmienić należy, że ogólna elipsoida bezwładności podlega jednemu warunkowi

$$J_z \leq J_x + J_y,$$

nawet wtedy, gdy  $J_z$  jest największym z głównych momentów; oznacza to, że nie każda elipsoida może być elipsoidą bezwładności.

Zespoły kinetyczne możemy tworzyć tym swobodniej, im większa jest ilość punktów kinetycznych. Mając zapewnioną swobodę w ustalaniu kinetycznych zespołów dążyć będziemy do tworzenia zespołów praktycznie korzystnych.

### 3. Punkty kinetyczne płyty

Na podstawie p. 2 warunki dla punktów kinetycznych płyty cienkiej jako układu płaskiego możemy napisać w sposób następujący:

$$(3.1) \quad \Sigma m_i = m,$$

$$(3.2) \quad \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0,$$

$$(3.3) \quad \Sigma J_{i1} = J_1, \quad \Sigma J_{i2} = J_2, \quad \Sigma J_{i3} = J_3$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Liczba równań w tym przypadku wynosi sześć. Z warunków (3.3) widzimy, że centralna elipsoida bezwładności dla płyty może być wyznaczona przez trzy momenty bezwładności względem trzech osi leżących w płaszczyźnie płyty i przecinających się w środku masy. Te trzy momenty przede wszystkim wyznaczają w płaszczyźnie płyty elipsę zawierającą dwie główne osie elipsoidy bezwładności płyty. Trzecia główna oś elipsoidy jest więc prostopadła do płaszczyzny płyty i wielkość jej wynika z zależności

$$J_z = J_x + J_y,$$

gdzie  $x$  i  $y$  są to dwie jakiegokolwiek osie prostopadłe do siebie w płaszczyźnie płyty.

Punkty kinetyczne muszą leżeć w płaszczyźnie płyty i najmniejsza ich liczba wynosi trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Dwa punkty nie mogą spełnić równań (3.3), bowiem nie odpowiada im elipsoida, lecz kołowy walec bezwładności. Z tego również względu trzy punkty nie mogą leżeć na jednej prostej.

Trzy punkty nie leżące na jednej prostej spełniają sześć warunków (3.1), (3.2) i (3.3); wobec dziewięciu niewiadomych (trzy masy i sześć

współrzędnych) mamy więc możność wybrać dowolnie wartości trzech niewiadomych, np. dwie masy i jedną współrzędną. Nadmienić należy, że w ogóle przy  $n$  punktach nie możemy ustalać dowolnie wielkości wszystkich mas, lecz najwyżej masy  $n-1$  punktów, gdyż  $n$ -ta masa jest określona z warunku (3.1).

#### 4. Punkty kinetyczne pręta

W pręcie prostym mamy wszystkie punkty masowe na osi pręta, więc  $z = 0$  i  $y = 0$ . Elipsoidzie bezwładności odpowiada tutaj walec kołowy współosiowy z prętem. Wszystkie punkty kinetyczne muszą leżeć na osi pręta i najmniejsza ich liczba wynosi dwa.

Warunki dla punktów kinetycznych przedstawiają się następująco:

$$\Sigma m_i = m, \quad \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i x_i^2 = J.$$

Warunki dla elipsoidy centralnej są następujące:

$$J_z = J_y = J, \quad J_x = 0.$$

Dla najmniejszej liczby dwóch punktów kinetycznych mamy do ustalenia cztery niewiadome (dwie masy i dwie współrzędne), a wobec trzech warunków pozostaje jedna tylko niewiadoma dowolna: albo jedna masa, albo jedna współrzędna.

#### 5. Przykłady typowe

Podamy teraz sposoby wyznaczenia punktów kinetycznych dla pewnych brył mając na uwadze przypadki praktyczne, jak pewne bryły elementarne (pręt, wycinek płaski, wycinek przestrzenny), oraz dla innych prostych brył, na które może być rozłożona jakakolwiek bryła spotykana w konstrukcji. Przykłady takie będziemy nazywali typowymi.

**5.1. Jednorodny pręt prosty.** Pręt prosty i jednorodny o masie  $m$ , o długości  $l$  i o stałym, nieskończenie małym przekroju sprowadzimy do trzech punktów kinetycznych: dwóch na końcach pręta i trzeciego w środku. Mamy:  $J_G = m l^2 / 12$  oraz  $x_1 = l/2$ ,  $x_2 = -l/2$  i  $x_3 = 0$ . Znajdziemy masy tych punktów.

Warunki dla punktów kinetycznych będą następujące:

$$m_1 + m_2 + m_3 = m,$$

$$m_1 \frac{l}{2} - m_2 \frac{l}{2} = 0,$$

$$m_1 \frac{l^2}{4} + m_2 \frac{l^2}{4} = m \frac{l^2}{12}.$$

Rozwiązując układ równań znajdujemy

$$m_1 = \frac{1}{6} m, \quad m_2 = \frac{1}{6} m, \quad m_3 = \frac{4}{6} m.$$

Jeżeli pręt jednorodny chcemy sprowadzić do dwóch punktów kinetycznych, symetrycznie rozmieszczonych względem środka  $G$ , to mamy:

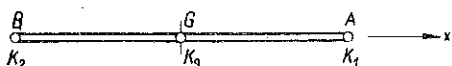
$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = m \frac{l^2}{12};$$

$$x_2 = -x_1, \quad m_1 = m_2 = \frac{m}{2}, \quad x_1 = -x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} l.$$

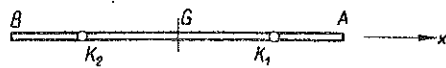
Sprowadzając wreszcie pręt do dwóch punktów, z których jeden umieszczamy na końcu pręta np. w punkcie  $A$ , otrzymamy po rozwiązaniu analogicznego układu równań warunkowych:

$$m_1 = \frac{1}{4} m, \quad m_2 = \frac{3}{4} m, \quad x_1 = \frac{1}{2} l, \quad x_2 = -\frac{1}{6} l;$$

czyli punkt  $K_2$  leży na  $1/3$  długości od końca  $B$ .



Rys. 1



Rys. 2

5.2. Elementarny wycinek płaski. Elementarny wycinek płaski (o nieskończeniu małym kącie) traktujemy jako pręt niejednorodny o zmiennej gęstości wzdłuż osi pręta.

Oznaczając wierzchołek przez  $A$  i podstawę przez  $B$  o długości nieskończenie małej  $b$  oraz oznaczając długość (wysokość) wycinka przez  $l$ , możemy napisać moment bezwładności względem środka masy  $G$ , leżącego w odległości  $2/3 l$  od wierzchołka  $A$ , w sposób następujący:

$$J_G = J_A - m \left( \frac{2}{3} l \right)^2 = \frac{1}{18} m l^2.$$

Znajdziemy dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczamy w wierzchołku  $A$ . Układ równań jest następujący:

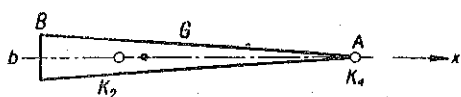
$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 \frac{2}{3} l + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 \frac{4}{9} l^2 + m_2 x_2^2 = \frac{1}{18} m l^2;$$

$$m_1 = \frac{1}{9} m, \quad m_2 = \frac{8}{9} m, \quad x_1 = \frac{2}{3} l, \quad x_2 = -\frac{1}{12} l.$$



Punkt  $K_2$  leży w odległości  $\frac{3}{4}$  długości wycinka od wierzchołka  $A$  (rys. 3).

Umieszczając jeden punkt kinetyczny na podstawie  $B$  znajdziemy po rozwiązaniu analogicznych równań



Rys. 3

$$m_1 = \frac{2}{3} m, \quad x_1 = \frac{1}{6} l,$$

$$m_2 = \frac{1}{3} m, \quad x_2 = -\frac{1}{3} l.$$

Kiedy więc jeden punkt kinetyczny znajduje się na podstawie wycinka, drugi leży w środku jego długości.

5.3. Ostrosłup elementarny. Elementarny ostrosłup, podobnie jak w przypadku wycinka płaskiego, traktujemy jako niejednorodny pręt. Oznaczmy wierzchołek przez  $A$  i podstawę przez  $B$ , nieskończenie małe pole podstawy przez  $b$  oraz długość ostrosłupa przez  $l$ .

Moment bezwładności ostrosłupa względem środka masy  $G$ , znajdującego się na  $\frac{3}{4}$  długości od  $A$ , przedstawiony jest następującym wzorem:

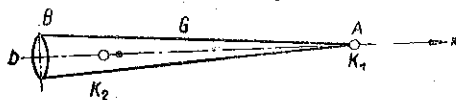
$$J_G = J_A - m \left( \frac{3}{4} l \right)^2 = \frac{3}{80} m l^2.$$

Określimy dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczamy w wierzchołku  $A$ . Wtedy

$$m_1 + m_2 = m, \quad m_1 \frac{3}{4} l + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 \frac{9}{16} l^2 + m_2 x_2^2 = \frac{3}{80} l^2;$$

$$m_1 = \frac{1}{16} m, \quad m_2 = \frac{15}{16} m, \quad x_1 = \frac{3}{4} l, \quad x_2 = -\frac{1}{20} l.$$

Widzimy więc, że kiedy punkt kinetyczny  $K_1$  o masie  $\frac{1}{16} m$  leży w wierzchołku  $A$ , to drugi  $K_2$  o masie  $\frac{15}{16} m$  leży w odległości od wierzchołka  $\frac{4}{5}$  długości ostrosłupa (rys. 4).



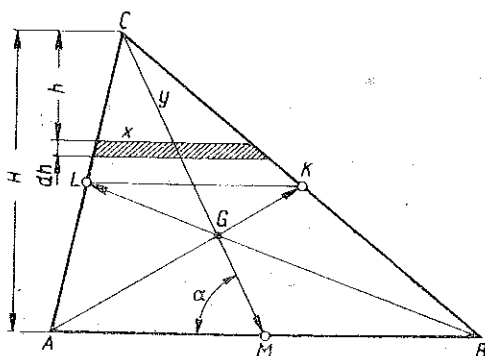
Rys. 4

Umieszczając jeden punkt na podstawie  $B$  otrzymamy

$$m_1 = \frac{5}{8} m, \quad m_2 = \frac{3}{8} m, \quad x_1 = \frac{3}{20} l, \quad x_2 = -\frac{1}{4} l.$$

Punkt  $K_2$  o masie  $\frac{3}{8}$  leży na podstawie  $B$ , a punkt  $K_1$  o masie  $\frac{5}{8} m$  leży w odległości  $\frac{3}{5} l$  od wierzchołka  $A$  ostrosłupa.

5.4. Płyta trójkątna. Do znalezienia punktów kinetycznych płyty trójkątnej jednorodnej i nieskończenie cienkiej moglibyśmy wykorzystać rozpatrzony już wycinek płaski jako element podstawowy, dzieląc trójkąt na elementy podstawowe, wychodzące z wierzchołka C. Znaleźlibyśmy



Rys. 5

masę  $1/9 m$  skupioną w wierzchołku C oraz masę  $8/9 m$  równomiernie rozłożoną na odcinku równoległym do podstawy AB i odległym od C o  $3/4 l$ . Po sprowadzeniu tego odcinka do dwóch punktów kinetycznych otrzymalibyśmy w ten sposób trzy punkty kinetyczne. Poszukamy jednak innego zespołu punktów, który będzie najprostszymi. Dojdziemy do niego drogą następującą.

Określimy moment bezwładności płyty trójkątnej względem osi z przechodzącej przez środek masy G i prostopadłej do płyty, przy czym zamiast masy będziemy rozpatrywali pole F trójkąta. Przyjmujemy oznaczenia zgodne z rys. 5.

Moment względem osi równoległej do z przechodzącej przez wierzchołek C jest:

$$dJ_c = \frac{x dh x^2}{12} + x dh y^2 = \frac{AB^3 dh h^3}{12H^3} + \frac{AB dh CM^2 h^3}{H^3},$$

gdzie podstawiono  $x = ABh/H$  i  $y = CMh/H$ .

Całkując w granicach od 0 do H otrzymamy

$$J_c = \frac{F}{3} \left( \frac{AB^2}{8} + \frac{3CM^2}{2} \right).$$

Posługując się rachunkiem wektorowym znajdziemy:

$$\vec{AB} = 2(\vec{GK} - \vec{GL}) = 2(2\vec{GM} + \vec{GM}),$$

$$\vec{CM} = 3\vec{GM}, \quad \vec{CG} = 2\vec{GM},$$

$$J_c = \frac{F}{3} \left( 2GK^2 + \frac{1}{2}GM^2 + 2\vec{GK} \cdot \vec{GM} + \frac{27}{2}GM^2 \right),$$

$$J_G = J_C - F \cdot CG^2 = \frac{F}{3} (2GK^2 + 14GM^2 + 2\vec{GK} \cdot \vec{GM}) - 4F \cdot GM^2 =$$

$$= \frac{F}{3} (2GK^2 + 2GM^2 + 2\vec{GK} \cdot \vec{GM}) = \frac{F}{3} [(\vec{GK} + \vec{GM})^2 + GK^2 + GM^2];$$

$$\vec{GK} + \vec{GM} = -\vec{GL}, \quad J_G = \frac{F}{3} (GL^2 + GK^2 + GM^2).$$

Otrzymany wzór sugeruje, że poszukiwane punkty kinetyczne o równych masach (polach) mogą znajdować się w środkach boków trójkąta. Dla upewnienia się należy sprawdzić, czy takie trzy punkty czynią zadość odpowiednim warunkom. Wzór otrzymany spełnia tylko jeden warunek dla momentów bezwładności względem osi z w punkcie G. Ponieważ jest rzeczą widoczną, że warunki (3.1) i (3.2) są również spełnione, pozostaje więc tylko sprawdzić równania dla dwóch momentów bezwładności.

Obliczmy moment bezwładności trójkąta względem środkowej CM:

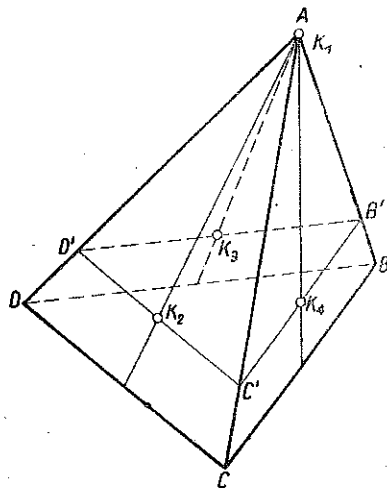
$$J_{CM} = \int_0^H \frac{x dh x^2}{12} \sin^3 a, \quad x = AB \frac{h}{H},$$

$$J_{CM} = 2 \frac{F}{3} \left( \frac{AB}{4} \sin a \right)^2 = 2 \frac{F}{3} \left( \frac{LK}{2} \sin a \right)^2.$$

Wyrażenie to przedstawia również moment bezwładności trzech punktów M, L i K o masach F/3 (przy czym punkt M leży tu na osi). To samo otrzymamy dla każdej środkowej.

Stwierdzamy więc, że trzy punkty kinetyczne płyty trójkątnej o masach równych m/3 znajdują się w środkach boków płyty.

5.5. Czworoscian. Najprostszy z wielościanów — czworoscian — posiada znaczenie specjalne ze względu na możliwość podziału każdego wielościanu na czworosciany składowe; dlatego zajmiemy się wyznaczeniem jego punktów kinetycznych. Między czworoscianem i trójkątem nie ma analogii i nie dochodzimy, jak by się mogło zdawać, do czterech punktów kinetycznych w środkach ścian (o czym można się przekonać na ostrosłupie elementarnym). Posiłkując się ostrosłupem elementarnym znajdziemy dogodnie dla celów praktycznych cztery punkty kinetyczne w sposób następujący.



Rys. 6

Niech będzie dany czworościan  $ABCD$  (rys. 6), który dzielimy na ostrosłupy elementarne o wspólnym wierzchołku w narożu  $A$ . Sprowadzając każdy z elementów do dwu punktów kinetycznych: jednego w  $A$ , drugiego w odległości równej  $\frac{4}{5}$  długości ostrosłupa od wierzchołka  $A$ , otrzymujemy następujący zespół kinetyczny: punkt kinetyczny  $K_1$  w  $A$  o masie  $\frac{1}{16}m$  oraz jednorodny trójkąt kinetyczny  $B'C'D'$  o masie  $\frac{15}{16}m$ , równoległy do podstawy  $BCD$  i odległy od  $A$  o  $\frac{4}{5}$  wysokości czworościanu. Sprowadzając następnie trójkąt do trzech punktów kinetycznych w środkach boków, otrzymamy dla czworościanu cztery punkty kinetyczne:  $K_1$  o masie  $\frac{1}{16}m$  w narożu czworościanu oraz  $K_2, K_3$  i  $K_4$  o masach  $\frac{5}{16}m$  na  $\frac{4}{5}$  długości środkowych wychodzących z tego naroża. Zespół taki możemy dowolnie wybrać z czterech zespołów analogicznych, wychodząc z różnych naroży.

### 6. Metoda przekształcenia. Twierdzenie

O ile wyznaczenie układów kinetycznych dla zwykłych figur geometrycznych jest na ogół rzeczą łatwą, to wyznaczenie ich dla figur ogólnych może napotkać na trudności. W celu uniknięcia tych trudności poszukamy dla pewnych przypadków nowych dróg stosując metodę przekształcenia.

Powstaje pytanie, jak się zachowują punkty kinetyczne bryły przy jej przekształceniu. Odpowiedź na nie może mieć znaczenie doniosłe dla celów praktycznych. Jeżeli daną bryłę otrzymujemy przez pewne przekształcenie innej bryły, dla której znane są punkty kinetyczne, oraz jeżeli wiemy, jak przy odkształceniu zachowują się punkty kinetyczne, to tym samym otrzymujemy te punkty dla bryły odkształconej.

Zajmiemy się przekształceniem bryły przez przesunięcie afiniczne, przy którym proste nie ulegają wygięciu, zaś odcinki proste równoległe do kierunku przesunięcia zachowują swą długość. Przy takim «zsunieciu» z prostych brył otrzymujemy bryły ukośne (i ogólniej przekształcone), zachowujące swą objętość (prostokątności przekształca się na równoległości, kula — na elipsoidę itp.).

.. Udowodnimy następujące *twierdzenie*: jeżeli dla danej bryły mamy jakikolwiek układ punktów kinetycznych  $m_1, \dots, m_n$ , to po odkształceniu bryły przez afiniczne przesunięcie, punkty kinetyczne bryły pierwotnej przesunięte razem z bryłą stanowią układ punktów kinetycznych dla bryły odkształconej.

Niech będzie bryła z pewnym określonym układem  $n$  punktów kinetycznych  $m_1, \dots, m_n$ , gdzie  $n$  może być skończone lub nieskończone. Przyjmijmy w środku masy  $G$  bryły prostokątny układ odniesienia  $x, y, z$ .

Centralną elipsoidę bezwładności bryły możemy wyznaczyć przez sześć momentów, z których trzy są płaszczyznowymi momentami bezwładności:

$$\int_m x^2 dm, \quad \int_m y^2 dm, \quad \int_m z^2 dm,$$

oraz trzy momentami dewiacyjnymi:

$$\int_m xy dm, \quad \int_m yz dm, \quad \int_m zx dm.$$

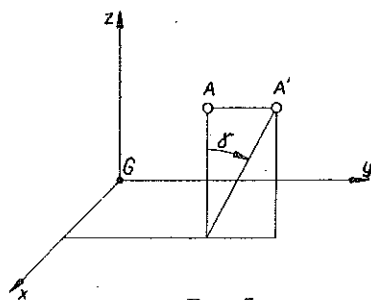
Porównując je z momentami układu punktów kinetycznych mamy:

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_m x^2 dm = \sum_1^n x_i^2 m_i, \quad \int_m xy dm = \sum_1^n x_i y_i m_i, \\ \int_m y^2 dm = \sum_1^n y_i^2 m_i, \quad \int_m yz dm = \sum_1^n y_i z_i m_i, \\ \int_m z^2 dm = \sum_1^n z_i^2 m_i, \quad \int_m zx dm = \sum_1^n z_i x_i m_i. \end{array} \right.$$

Równania te stanowią warunek wspólności centralnej elipsoidy bezwładności układu punktów kinetycznych i bryły.

Założmy, że układ współrzędnych  $x, y, z$  jest tak zorientowany, że płaszczyzna  $xy$  jest płaszczyzną kierującą przesunięcia oraz oś  $y$  jest równoległa do kierunku przesunięcia bryły.

Przesunięcie jest afiniczne, jeśli dowolny punkt  $A$  przesuwa się równoległe do osi  $y$ ; tworzy się przy tym kąt przesunięcia  $\gamma$  [nowe położenie oznaczmy przez  $A'$  (rys. 7)].



Rys. 7

Współrzędne punktu  $A$  przed i po przesunięciu są następujące:

$$\begin{array}{llll} A, & x, & y, & z, \\ A', & x, & y + z \sin \gamma, & z. \end{array}$$

Na podstawie równań (6.1) otrzymujemy następujące związki:

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_m x^2 dm = \sum_1^n x_i^2 m_i, \\ \int_m (y + z \sin \gamma)^2 dm = \sum_1^n (y_i + z_i \sin \gamma)^2 m_i, \\ \int_m z^2 dm = \sum_1^n z_i^2 m_i, \\ \int_m x (y + z \sin \gamma) dm = \sum_1^n x_i (y_i + z_i \sin \gamma) m_i, \\ \int_m (y + z \sin \gamma) z dm = \sum_1^n (y_i + z_i \sin \gamma) z_i m_i, \\ \int_m z x dm = \sum_1^n z_i x_i m_i. \end{array} \right.$$

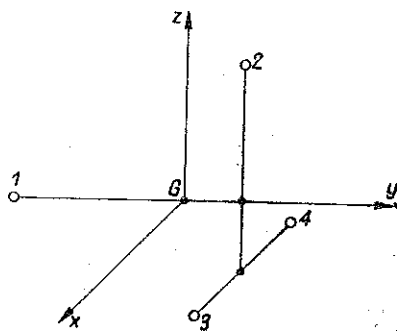
Istotnie, rozwiązując wzory (6.2) otrzymujemy na mocy wzorów (6.1) wyrazy prawej i lewej strony tożsamościowo równe. I tak np. wzór drugi na mocy (6.1) daje

$$\begin{aligned} \int_m y^2 dm + \sin^2 \gamma \int_m z^2 dm + 2 \sin \gamma \int_m y z dm = \\ = \sum_1^n y_i^2 m_i + \sin^2 \gamma \sum_1^n z_i^2 m_i + 2 \sin \gamma \sum_1^n y_i z_i m_i. \end{aligned}$$

Równania (6.2) stwierdzają wspólność elipsoidy bezwładności bryły przesuniętej oraz przesuniętych z bryłą jej pierwotnych punktów kinetycznych. Twierdzenie zostało przeto udowodnione.

Doniosłość tego twierdzenia jest widoczna, bowiem daje ono owocną metodę bezpośredniego wyznaczania punktów kinetycznych dla pewnej kategorii figur, które można otrzymać z figur prostych przez przekształcenie.

6.1. Zastosowanie metody przekształcenia do brył przestrzennych. Niech będzie bryła, której dany jest środek masy  $G$  oraz główne kierunki bezwładności, jak również i główne centralne momenty bezwładności. Chcemy wyznaczyć cztery punkty kinetyczne o równych masach. Obierzmy w  $G$  układ osi współrzędnych  $x, y, z$  (rys. 8) zgodny z głównymi kierunkami bezwładności. Wykorzystując swobodę warunków ogólnych umieścimy jeden z punktów kinetycznych (1) na osi  $y$ ; pozostałe trzy (2,3,4) w płaszczyźnie prostopadłej do  $y$ , przy czym jeden z nich w płaszczyźnie  $yz$ . Układ punktów kinetycznych będzie więc symetryczny względem płaszczyzny  $yz$ . Warunki dla punktów kinetycznych przedstawiają się w sposób następujący:



Rys. 8.

$$(6.1.1) \quad m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{4} m,$$

$$(6.1.2) \quad \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 = 0, \quad \frac{1}{4} y_1 + \frac{3}{4} y_{234} = 0, \quad \frac{1}{4} z_2 + \frac{2}{4} z_{34} = 0,$$

$$(6.1.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{4} y_1^2 + \frac{1}{4} (y_{234}^2 + z_2^2) + \frac{2}{4} (y_{234}^2 + z_{34}^2) = \frac{J_x}{m}, \\ \frac{1}{4} z_2^2 + \frac{2}{4} (z_{34}^2 + x_{34}^2) = \frac{J_y}{m}, \\ \frac{1}{4} y_1^2 + \frac{1}{4} y_{234}^2 + \frac{2}{4} (y_{234}^2 + x_{34}^2) = \frac{J_z}{m}. \end{cases}$$

Z równań (6.1.2) oraz z rys. 8 mamy:

$$(6.1.4) \quad x_3 = -x_4, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = -3 y_{234}, \quad z_1 = 0, \quad z_3 = -2 z_{34}.$$

We wzorach wprowadziliśmy oznaczenie  $y_{234} = y_2 = y_3 = y_4$  oraz  $z_{34} = z_3 = z_4$  i  $x_{34}^2 = x_3^2 = x_4^2$ .

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$(6.1.5) \quad \begin{cases} 6 y_{234}^2 + 3 z_{34}^2 = \frac{2J_x}{m}, \\ x_{34}^2 + 3 z_{34}^2 = \frac{2J_y}{m}, \\ x_{34}^2 + 6 y_{234}^2 = \frac{2J_z}{m}, \\ J_x + J_y + J_z = 2J_G. \end{cases}$$

Z (6.1.4) i (6.1.5) wyznaczamy cztery punkty kinetyczne dla bryły:

$$(6.1.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} m_1 = \frac{m}{4}, & x_1 = 0, \\ m_2 = \frac{m}{4}, & x_2 = 0, \\ m_3 = \frac{m}{4}, & x_3 = \sqrt{\frac{2(J_G - J_x)}{m}}, \\ m_4 = \frac{m}{4}, & x_4 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_x)}{m}}, \\ y_1 = -3\sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_1 = 0, \\ y_2 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_2 = 2\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}, \\ y_3 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_3 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}, \\ y_4 = \sqrt{\frac{J_G - J_y}{3m}}, & z_4 = -\sqrt{\frac{2(J_G - J_z)}{3m}}. \end{array} \right.$$

Jeżeli z tej bryły powstała przez przesunięcie w pewnym kierunku nowa bryła, to przesunięte punkty kinetyczne pierwszej bryły będą punktami kinetycznymi drugiej. Wyznaczamy te punkty w układzie współrzędnych ukośnych, przesuniętych razem z bryłą.

Stosując wzory do prostopadłościanu o krawędziach  $a, b, c$  równoległych do osi  $Gx, Gy, Gz$  mamy:

$$J_x = m \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad J_y = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \quad J_z = m \frac{a^2 + b^2}{12}, \quad J_G = m \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12},$$

$$m_1 = \frac{m}{4}, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{b}{2}, \quad z_1 = 0,$$

$$m_2 = \frac{m}{4}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{b}{6}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}c,$$

$$m_3 = \frac{m}{4}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}a, \quad y_3 = \frac{b}{6}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6}c,$$

$$m_4 = \frac{m}{4}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{6}}{6}a, \quad y_4 = \frac{b}{6}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{6}c.$$



Punkt kinetyczny  $m_1$  znajduje się na ścianie prostopadłościanu prostopadłej do  $y$ .

Dla równoległościanu współrzędne punktów kinetycznych w układzie ukośnym nie zmieniają się, jeżeli  $a$ ,  $b$  i  $c$  oznaczają krawędzie.

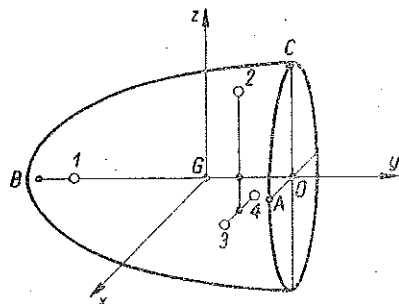
Stosując następnie wzory (6.1.6) do prostego odcinka paraboloidy eliptycznej mamy (rys. 9).

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

$$OG = \frac{1}{3} b, \quad v = \frac{\pi}{2} a b c,$$

$$J_x = m \frac{b^2 + 3c^2}{18}, \quad J_y = m \frac{a^2 + c^2}{6},$$

$$J_z = m \frac{b^2 + 3a^2}{18}, \quad J_G = m \frac{b^2 + 3a^2 + 3c}{18},$$



Rys. 9

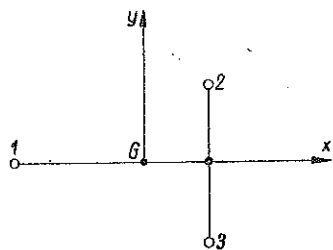
$$m_1 = \frac{m}{4}, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6} b, \quad z_1 = 0,$$

$$m_2 = \frac{m}{4}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{\sqrt{6}}{18} b, \quad z_2 = \frac{2}{3} c,$$

$$m_3 = \frac{m}{4}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} a, \quad y_3 = \frac{\sqrt{6}}{18} b, \quad z_3 = -\frac{1}{3} c,$$

$$m_4 = \frac{m}{4}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} a, \quad y_4 = \frac{\sqrt{6}}{18} b, \quad z_4 = -\frac{1}{3} c.$$

Współrzędne punktów kinetycznych przekształconego odcinka paraboloidy eliptycznej mają taką samą postać (w układzie współrzędnych ukośnych), jak współrzędne punktów kinetycznych odcinka paraboloidy nieprzekształconej.



Rys. 10

**6.2. Zastosowanie metody przekształcenia do płyt płaskich.** Niech będzie dana figura płaska lub cienka płyta płaska, której wiadome są: środek masy  $G$  i główne kierunki oraz główne momenty bezwładności. Określimy trzy punkty kinetyczne o równych masach.

Obieramy w  $G$  układ osi  $x$ ,  $y$  zgodny z głównymi kierunkami bezwładności. Mając możliwość wyboru pewnych parametrów, umieszczamy jeden z punktów  $m_1$  na osi  $x$ , pozostałe dwa  $m_2$  i  $m_3$  — symetrycznie względem  $x$  (rys. 10).

Warunki dla punktów kinetycznych są:

$$(6.2.1) \quad m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3},$$

$$(6.2.2) \quad \frac{1}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_3 = 0, \quad \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_{23} = 0,$$

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} \frac{2}{3} y_{23}^2 = \frac{J_x}{m}, & \frac{1}{3} x_1^2 + \frac{2}{3} x_{23}^2 = \frac{J_y}{m}, \\ x_1 = -2x_{23}, & y_2 = -y_3, & y_1 = 0, \\ x_{23}^2 = \frac{J_y}{2m}, & y_{23}^2 = \frac{3J_x}{2m}. \end{cases}$$

Wyznaczamy stąd trzy punkty kinetyczne płyty:

$$(6.2.4) \quad \begin{cases} m_1 = \frac{m}{3}, & x_1 = -2\sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_1 = 0, \\ m_2 = \frac{m}{3}, & x_2 = \sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_2 = \sqrt{\frac{3J_x}{2m}}, \\ m_3 = \frac{m}{3}, & x_3 = \sqrt{\frac{J_y}{2m}}, & y_3 = -\sqrt{\frac{3J_x}{2m}}. \end{cases}$$

Punkty kinetyczne przesunięte będą punktami kinetycznymi dla płyty przesuniętej; wyznaczamy je w układzie współrzędnych ukośnokątnych wyznaczonych przez przesunięcie obranych na początku współrzędnych dla figury nieprzekształconej. Przez zastosowanie wzorów (6.2.4) do prostokąta oraz równoległoboku o bokach  $a$  i  $b$  otrzymujemy następujące punkty kinetyczne:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{m}{3}, & x_1 &= -\frac{\sqrt{6}}{6} a, & y_1 &= 0, \\ m_2 &= \frac{m}{3}, & x_2 &= \frac{\sqrt{6}}{12} a, & y_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} b, \\ m_3 &= \frac{m}{3}, & x_3 &= \frac{\sqrt{6}}{12} a, & y_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} b. \end{aligned}$$

Przez zastosowanie do prostego lub ukośnego odcinka paraboli o sprzężonych: strzale  $a$  i ciężwie  $b$  otrzymamy punkty kinetyczne w poniższy sposób.

Biorąc pod uwagę prosty odcinek paraboli obierzemy układ osi  $x, y$ , kierując oś  $x$  zgodnie z kierunkiem osi paraboli. Wiemy tutaj, że środek  $G$  leży na odległości  $\frac{2}{5} a$  od cięciwy, pole odcinka wynosi  $\frac{2}{3} ab$  oraz

$$J_x = \frac{1}{20} m b^2, \quad J_y = \frac{12}{175} m a^2,$$

$$m_1 = \frac{m}{3}, \quad x_1 = -\frac{2\sqrt{42}}{35} a, \quad y_1 = 0,$$

$$m_2 = \frac{m}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{42}}{35} a, \quad y_2 = \frac{\sqrt{30}}{20} b,$$

$$m_3 = \frac{m}{3}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{42}}{35} a, \quad y_3 = -\frac{\sqrt{30}}{20} b.$$

Wzory te nie ulegają zmianie dla odcinka ukośnego paraboli;  $a$  i  $b$  oznaczają wtedy wielkości sprzężone ukośnie — strzałkę i cięciwę.

## 7. Ruch płaski bryły

Metoda punktów kinetycznych, specjalnie nadająca się do ogólnych zagadnień przestrzennych, może być również z korzyścią zastosowana do zagadnień związanych z ruchem płaskim. Ruch płaski bryły zasługuje na głębszą analizę<sup>1)</sup>.

Przy ruchu płaskim bryły siły bezwładności stanowią układ koplarny (siły równoległe do płaszczyzny). Układ taki może być sprowadzony do układu płaskiego (siły w płaszczyźnie) tylko przy pewnych warunkach. W ogólnym przypadku ruchu płaskiego bryły siły bezwładności sprowadzają się do siły leżącej w płaszczyźnie ruchu, przechodzącej przez środek masy, oraz do momentu o pewnym kierunku wektora.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ koplarny sił bezwładności bryły sprowadzał się do układu płaskiego jest prostopadłość wektora momentu sił względem środka masy  $G$  do płaszczyzny ruchu tego środka.

Wyniką stąd następujący inny równoważny wniosek: oś  $z$  w środku masy  $G$ , prostopadła do płaszczyzny ruchu tego środka, powinna być jedną z głównych osi bezwładności.

Istotnie, jeżeli moment sił bezwładności względem środka  $G$  jest prostopadły do płaszczyzny ruchu środka  $G$ , to obierając w tej płaszczyźnie prostokątny układ osi  $x, y$  otrzymujemy, co następuje.

Pomijając siły równoległe powodujące ruch postępowy według ruchu środka  $G$ , a więc proporcjonalne do mas i dające względem  $G$  moment równy zeru, bierzemy pod uwagę tylko siły elementarne obrotu około  $G$ :

$$\omega^2 \mathbf{r} dm + \mathbf{e} \times \mathbf{r} dm,$$

<sup>1)</sup> Por. [1], str. 517.

gdzie

$$\mathbf{e} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & e \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Momenty sumaryczne tych sił bezwładności względem osi  $x$  i  $y$  są:

$$\int (y dZ - z dY) = 0, \quad \int (z dX - x dZ) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} dZ &= 0, \\ dX &= \omega^2 x dm - e y dm, \\ dY &= \omega^2 y dm + e x dm. \end{aligned}$$

Podstawiając te znaczenia mamy

$$\omega^2 \int_m z x dm - e \int_m z y dm = 0,$$

$$\omega^2 \int_m y z dm - e \int_m z x dm = 0.$$

Ponieważ wyznacznik tego układu  $\omega^4 + e^2$  nie równa się zeru, przeto jedynym rozwiązaniem jest

$$\int_m z x dm = 0, \quad \int_m y z dm = 0,$$

co stwierdza, że oś  $z$  jest osią główną w  $G$ .

W dalszym ciągu możemy sformułować następujący wniosek: jeżeli bryła znajdująca się w ruchu płaskim czyni zadość wyprowadzonemu warunkowi, to jej masę łącznie z siłami bezwładności możemy przenieść prostopadle do płaszczyzny ruchu środka masy bryły i uważać bryłę za figurę płaską, poruszającą się w jej płaszczyźnie. Układ punktów kinetycznych w tym przypadku znajduje się w płaszczyźnie ruchu środka masy i redukuje się do *dwóch punktów kinetycznych*.

Istotnie, równania punktów kinetycznych dla płaskiego układu i płaskiego ruchu będą następujące:

$$(7.1) \quad \Sigma m_i = m,$$

$$(7.2) \quad \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

$$(7.3) \quad \Sigma m_i (x^2 + y^2)_i = J_0,$$

Ilość stopni swobody  $s$  dla  $n$  punktów kinetycznych wynosi tutaj  $s = 3n - 4$ .

Dla  $n = 1$  oraz  $s = -1$  układ jest niemożliwy, zaś dla  $n = 2$  oraz  $s = 2$  układ jest możliwy, przy czym możemy jeszcze przyjąć dowolnie dwie niewiadome. Przyjmijmy  $m_1 = m_2 = 1/2 m$ . Jedną ze współrzędnych ustalimy na końcu. Możemy napisać

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 0, & x_1 &= -x_2, \\y_1 + y_2 &= 0, & y_1 &= -y_2,\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 &= \frac{2J_G}{m} = 2i_G^2, \\x_{12}^2 + y_{12}^2 &= i_G^2.\end{aligned}$$

Ostatnie równanie przedstawia koło o środku w  $G$ , o promieniu  $i_G$ , na którym leżą przeciwległe dwa punkty kinetyczne. Dysponując jedną ze współrzędnych możemy w dowolnym położeniu średnicy ustalić na kole miejsca obu punktów.

Nadmienić należy, że bryły sprowadzające się do układów płaskich są to najczęściej elementy konstrukcyjne symetryczne względem płaszczyzny ruchu środka masy; jest to przypadek szczególnie ogólnego przypadku rozważonego wyżej.

Dwa punkty zastępcze, do jakich daje się sprowadzić bryłę tylko w warunkach wyjątkowych, należałoby nazwać raczej punktami pseudo-kinetycznymi, gdyż nie są to punkty kinetyczne w całym tego słowa znaczeniu.

## 8. Wskazówki praktyczne. Przykład zastosowania metody punktów kinetycznych

Metoda punktów kinetycznych w połączeniu z metodą wykreślną może mieć szersze zastosowanie dla dynamicznych obliczeń części mechanizmów, jeżeli rozporządza się opracowanym katalogiem punktów kinetycznych dla elementów typowych, na jakie mogą być podzielone części mechanizmów. W tym celu dodajemy na końcu niniejszej pracy katalog punktów kinetycznych dla prostych elementów. W przypadku elementów ukośnych korzystać należy z twierdzenia o odkształceniu.

Sposób użycia metody przedstawiony jest na przykładzie obliczenia korbowa, a więc bryły znajdującej się w ruchu płaskim i sprowadzającej się do układu płaskiego. Na rys. 11 mamy przedstawiony korbówód w rzucie na płaszczyznę sprowadzenia mas. W tej płaszczyźnie leżą też punkty kinetyczne poszczególnych części otrzymanych z podziału kor-

bowodu. Muszą to być elementy typowe, dla których mamy po dwa punkty kinetyczne, objęte katalogiem. Korbowód (rys. 11) został podzielony na

części zbliżone do trójkątów i do ukośnych odcinków paraboli, które też traktujemy jako trójkąty i parabole. Jeżeli głowa korbowodu posiada z każdej strony po dwie śruby, to mamy podwójne punkty kinetyczne pokrywające się w rzucie. Wnęki i otwory uważamy za masy ujemne. Jeżeli ciężar właściwy wszystkich części korbowodu jest jednakowy, to możemy masy elementów składowych zastąpić przez ich objętości.

Dzieląc korbowód na 21 elementów, wyznaczamy ich punkty kinetyczne w następujący sposób.

Obieramy układ odniesienia  $x, y$  w środku  $O$  górnej głowicy korbowodu, kierując oś  $x$  wzdłuż korbowodu. Dla elementu  $k$  zakreślamy z jego środka masy  $G_k$  koło promieniem  $i_{G_k}$  oraz umieszczamy na tym kole dwa przeciwległe punkty kinetyczne na średnicy prostopadłej do  $G_k O$ , tj. symetrycznie względem  $G_k O$ ; usprawni to w dużym stopniu obliczenie.

Mamy więc ogółem 42 punkty kinetyczne, wśród nich 24 punkty symetryczne względem osi  $x$ . Prócz tego wszystkie pary punktów są symetryczne względem  $G_k O$ . Otrzymane dane dla piętnastu środków mas i piętnastu punktów kinetycznych porządkujemy w następującej tabeli:

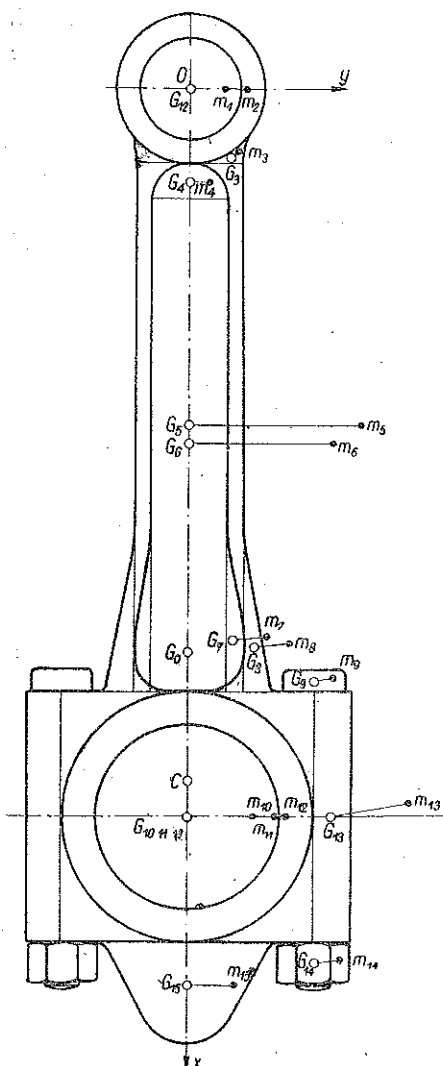
$k$	$m_k$	$x_k$	$m_k x_k$	$r_k^2$	$m_k r_k^2$
-----	-------	-------	-----------	---------	-------------

W tabeli tej przyjęto oznaczenia następujące:  $k$  jest numerem elementu,  $m_k$  masą elementu,  $x_k$  odcięta położenia,  $G_k$  środkiem masy elementu oraz  $r_k$  odległością od  $O$  jednego z punktów kinetycznych w  $k$ -tym elemencie.

Z tabeli tej znajdujemy:

(a) położenie środka masy korbowodu  $G$

$$x_G = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},$$



Rys. 11

(b) moment bezwładności korbowodu względem  $O$

$$J_0 = \sum m_k r_k^2,$$

oraz moment bezwładności korbowodu względem środka masy  $G$

$$J_G = J_0 - x_G^2 \sum m_k = i_G^2 m.$$

Ostatecznie określamy albo (a) dwa punkty kinetyczne korbowodu, leżące przeciwległe na kole zakreślonym promieniem  $i$  ze środka  $G$  o masach równych  $m/2$  każdy (gdzie  $m = \sum m_k$  określa masę korbowodu), albo (b) dwa punkty kinetyczne, z których jeden umieszczony jest w środku górnej głowicy  $O$ , drugi w  $C$  na osi  $x$  w odległości  $x_c$  od środka masy  $G$  po przeciwnej stronie.

Znajdziemy  $x_c$  oraz  $m_0$  i  $m_c$  z równań warunkowych (umieszczając środek układu odniesienia w punkcie  $G$ ):

$$m_0 + m_c = m, \quad m_0 x_0 + m_c x_c = 0, \quad m_0 x_0^2 + m_c x_c^2 = J_G.$$

Po rozwiązaniu znajdziemy

$$x_0 = GO = a, \quad x_c = -\frac{J_G}{m a} = -\frac{i_G^2}{a},$$
$$m_0 = \frac{J_G m}{J_G + m a^2} = \frac{i_G^2}{i_G^2 + a^2} m, \quad m_c = \frac{a^2}{i_G^2 + a^2} m.$$

Punkty kinetyczne  $O$  i  $C$  są zwykle wprowadzane w obliczeniach układów korbowych przy wyrównowywaniu mas. Punkt  $C$  jest środkiem wahań sprzężonym z punktem  $O$ , co widoczne jest ze wzoru na  $x_c$ .

Podany przykład układu płaskiego, często występujący w technice, nie wykazuje właściwych zalet metody punktów kinetycznych. Przeprowadzone wyżej postępowanie, w porównaniu ze zwykłą metodą opartą na twierdzeniu *Steinera*, nie wiele tylko jest korzystniejsze. Natomiast przy obliczeniach mechanizmów przestrzennych metoda punktów kinetycznych góruje nad innymi metodami.

To, że teoria i metody punktów kinetycznych pozostawały dotychczas nierozwinięte należyście, można tłumaczyć niezbyt częstym stosowaniem mechanizmów przestrzennych.

Katalog punktów kinetycznych

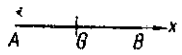
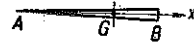

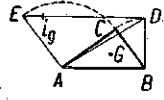
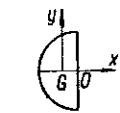
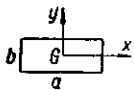
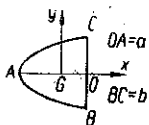
Figura	Układ punktów kinetycznych
<p>1. Pręt prosty elementarny</p>  <p><math>AB = l \quad GA = GB</math></p>	<p>(a) <math>m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad x_1 = -x_2 = 0,2887 l,</math></p> <p>(b) <math>m_{12} = \frac{1}{6} m, \quad m_3 = \frac{4}{6} m,</math></p> <p><math>x_1 = -x_2 = \frac{1}{2} l, \quad x_3 = 0; \quad i_G = 0,2887 l.</math></p>
<p>2. Wycinek płaski elementarny</p>  <p><math>AB = l \quad GB = \frac{1}{3} l</math></p>	<p>(a) <math>m_1 = \frac{8}{9} m, \quad m_2 = \frac{1}{9} m,</math></p> <p><math>x_1 = \frac{1}{12} l, \quad x_2 = -\frac{2}{3} l. \quad i_G = 0,2357 l,</math></p> <p>(b) jak w trójkącie (por. 4).</p>
<p>3. Ostrosłup elementarny</p>  <p><math>AB = l \quad GB = \frac{1}{4} l</math></p>	<p><math>m_1 = \frac{15}{16} m, \quad m_2 = \frac{1}{16} m,</math></p> <p><math>x_1 = \frac{1}{20} l, \quad x_2 = -\frac{3}{4} l, \quad i_G = 0,1936 l.</math></p>
<p>4. Trójkąt o bokach a, b, c</p>  <p><math>ABD = 90^\circ \quad DAE = 90^\circ</math></p>	<p><math>m_{123} = \frac{1}{3} m</math> w środkach boków.</p> <p><math>i_G^2 = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2),</math></p> <p><math>i_G^2 = \frac{1}{36} DE^2, \quad i_G = \frac{1}{6} DE.</math></p>
<p>5. Czworóścian (por. rys. 6 w tekście)</p>	<p><math>m_1 = \frac{1}{16} m</math> w narożniku A,</p> <p><math>m_{234} = \frac{5}{16} m</math> na <math>\frac{4}{5}</math> od A długościach środkowych zbieżnych w A.</p>
<p>6. Koło płyta</p>	<p><math>m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,707 r \text{ co } 120^\circ.</math></p>
<p>7. Koło obwód</p>	<p><math>m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = r \text{ co } 120^\circ.</math></p>



Figura	Układ punktów kinetycznych
8. Trójkąt foremny plyta	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = \frac{1}{2} r \text{ co } 120^\circ,$ <p style="text-align: center;"><math>r</math> promień koła opisanego.</p>
9. Trójkąt foremny obwód	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,707 r \text{ co } 120^\circ.$
10. Kwadrat plyta	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,578 r \text{ co } 120^\circ.$
11. Kwadrat obwód	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,908 r \text{ co } 120^\circ.$
12. Pięciokąt foremny	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,634 r \text{ co } 120^\circ.$
13. Sześciokąt foremny	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad r_{123} = i_G = 0,645 r \text{ co } 120^\circ.$
14. Czworobok i tra- pez	<p style="text-align: center;">z podziału na dwa trójkąty otrzymujemy 5 punktów kinetycznych.</p>
15. Prostokąt o bokach $a, b$	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,408 a, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,204 a, \quad y_2 = 0,353 b,$ $x_3 = 0,204 a, \quad y_3 = -0,353 b,$ $i_G^2 = 0,2887^2 (a^2 + b^2).$
16. Półkole	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,374 r, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,187 r, \quad y_2 = 0,667 r,$ $x_3 = 0,187 r, \quad y_3 = -0,667 r,$ $i_G = 0,5656 r.$
17. Parabola	$m_{123} = \frac{1}{3} m, \quad x_1 = -0,370 a, \quad y_1 = 0,$ $x_2 = 0,185 a, \quad y_2 = 0,273 b,$ $x_3 = 0,185 a, \quad y_3 = -0,273 b,$ $i_G^2 = (0,261 a)^2 + (0,224 b)^2.$



$$OG = 0,424 r$$



$$OG = \frac{2}{5} a$$

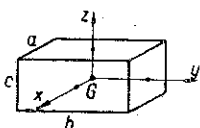
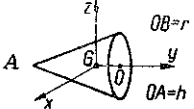
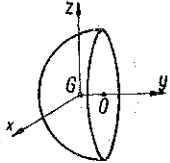
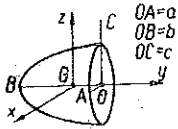
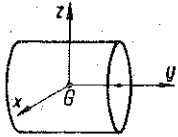
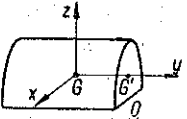
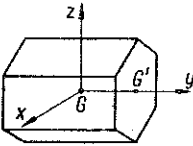
Figura	Układ punktów kinetycznych
18. Kula pełna	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,683 r \text{ (foremnie)},$ $i_x = 0,6325 r.$
19. Kula powierzchnia	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,894 r,$ $i_x = 0,8165 r.$
20. Czworoscian foremny	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,447 r,$ <p style="text-align: center;"><math>r = \text{promień kuli opisanej.}</math></p>
21. Sześcian o krawędzi $a$	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{1234} = 0,577 r = 0,5 a,$ $i_x = 0,4082 r = 0,3535 a.$
22. Prostopadłościan 	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $x_1 = 0, \quad y_1 = -\frac{1}{2} b, \quad z_1 = 0,$ $x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{6} b, \quad z_2 = 0,471 c,$ $x_3 = 0,408 a, \quad y_3 = \frac{1}{6} b, \quad z_3 = -0,471 c,$ $x_4 = -0,408 a, \quad y_4 = \frac{1}{6} b, \quad z_4 = -0,471 c$ $i_x^2 = 0,2887^2 (b^2 + c^2).$
23. Stożek kołowy  <p style="text-align: center;"><math>OG = \frac{1}{4} h</math></p>	$m_1 = \frac{5}{16} m \text{ w wierzchołku } A,$ $m_{234} = \frac{1}{16} m \text{ w przekroju prostopadłym do osi i odległym o } \frac{4}{5} \text{ wysokości od } A \text{ na promieniach } r_{234} = 0,566 r,$ $i_{x,z}^2 = (0,251 r)^2 + (0,111 h)^2.$
24. Półkula  <p style="text-align: center;"><math>OG = \frac{3}{8} b</math></p>	$m_{1234} = \frac{1}{4} m, \quad r_{324} = 0,744 r,$ $x_1 = 0, \quad y_1 = -0,564 r, \quad z_1 = 0,$ $x_2 = 0, \quad y_2 = 0,141 r, \quad z_2 = 0,730 r,$ $x_3 = 0,632 r, \quad y_3 = 0,141 r, \quad z_3 = -0,365 r,$ $x_4 = -0,632 r, \quad y_4 = 0,141 r, \quad z_4 = -0,365 r,$ $i_{x,z} = 0,509 r, \quad i_y = \frac{1}{2} r,$ <p style="text-align: center;">centralna elipsoida bezwładności jest niemal kulą.</p>

Figura	Układ punktów kinetycznych
<p>25. Paraboloïda elip- tyczna</p>  <p><math>OG = \frac{1}{3} b</math></p>	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 = 0, & & y_1 = -0,408 b, & & z_1 = 0, \\ x_2 = 0, & & y_2 = 0,136 b, & & z_2 = \frac{2}{3} c, \\ x_3 = 0,577 a, & & y_3 = 0,136 b, & & z_3 = \frac{1}{3} c, \\ x_4 = -0,577 a, & & y_4 = 0,136 b, & & z_4 = -\frac{1}{3} c. \end{aligned}$ <p>dla paraboloïdy kołowej</p> $i_{x,z}^2 = (0,236 b)^2 + (0,408 r)^2, \quad i_y = 0,577 r.$
<p>26. Walec kołowy</p>  <p><math>h = \text{wysokość}</math></p>	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 = 0, & & y_1 = -0,5 h, & & z_1 = 0, \\ x_2 = 0, & & y_2 = 0,167 h, & & z_2 = 0,817 r, \\ x_3 = 0,707 r, & & y_3 = 0,167 h, & & z_3 = -0,408 r, \\ x_4 = -0,707 r, & & y_4 = 0,167 h, & & z_4 = -0,408 r, \end{aligned}$ <p>dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny <math>yz</math></p> $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,5 r)^2 + (0,289 h)^2.$
<p>27. Półwalec kołowy</p>  <p><math>OG' = 0,424 r</math> <math>h = 2 GG'</math></p>	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 = 0, & & y_1 = -0,5 h, & & z_1 = 0, \\ x_2 = 0, & & y_2 = 0,167 h, & & z_2 = 0,215 r, \\ x_3 = 0,707 r, & & y_3 = 0,167 h, & & z_3 = -0,107 r, \\ x_4 = -0,707 r, & & y_4 = 0,167 h, & & z_4 = -0,107 r, \end{aligned}$ <p>dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny <math>yz</math></p> $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,5 r)^2 + (0,289 h)^2,$ <p>dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny <math>xy</math></p> $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_z^2 = (0,264 r)^2 + (0,289)^2.$
<p>28. Graniastosłup sześciokątny</p>  <p><math>h = 2 GG'</math> <math>r = \text{promień koła opisanego}</math></p>	$m_{1234} = \frac{1}{4} m,$ $\begin{aligned} x_1 = 0, & & y_1 = -\frac{1}{2} h, & & z_1 = 0, \\ x_2 = 0, & & y_2 = \frac{1}{6} h, & & z_2 = 0,745 r, \\ x_3 = 0,645 r, & & y_3 = \frac{1}{6} h, & & z_3 = -0,372 r, \\ x_4 = -0,645 r, & & y_4 = \frac{1}{6} h, & & z_4 = -0,372 r, \end{aligned}$ <p>dla ruchu płaskiego równoległego do płaszczyzny <math>yz</math></p> $m_{12} = \frac{1}{2} m, \quad i_x^2 = (0,456 r)^2 + (0,289 h)^2.$

## Literatura cytowana w tekście

[1] I. I. Artobolewski, *Teoria mechanizmów i maszyn*, 1951, str. 517.

### Резюме

#### МЕТОД КИНЕТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Метод «кинетических точек» (т. е. массовых точек, кинетически эквивалентных данной жесткой системе масс) был до сих пор разработан только для частных случаев.

В настоящей работе автор пытается развить новый раздел динамики, устанавливающий некоторые общие принципы метода решения более трудных практических вопросов как, например, проблемы пространственного движения тела с произвольным размещением массы.

Определение кинетических точек обосновано на общих необходимых и достаточных условиях: условия общности центра масс и условия центрального эллипсоида инерции тела и его кинетических точек.

Ввиду того, что форма технических тел состоит из большого числа отдельных геометрических фигур, для определения кинетических точек таких тел, автор приводит таблицы кинетических точек для встречаемых на практике простых фигур. Для обобщения рассуждений, приводится теорема для косых фигур, согласно которой, все кинетические точки тела, при его аффинном преобразовании, перемещаются как точки, принадлежащие телу; это значит, что в системе координат, преобразованной вместе с телом, координаты кинетических точек ведут себя, как инварианты.

Метод «кинетических точек» особенно пригоден для применения совместно с графическим методом и, поэтому, должен найти широкое применение в технике.

### S u m m a r y

#### METHOD OF KINETIC POINTS

The «method of kinetic points» (or mass points kinetically equivalent to the given rigid system of masses) has been applied so far to particular cases only. It is the author's aim to expand in this paper, a new branch of dynamics comprising certain general principles of a method for solving more difficult problems of a practical nature, for instance the spatial motion of a solid of arbitrary mass distribution.

The determination of kinetic points is based on necessary and sufficient conditions of common centre of mass and common central ellipsoid of inertia of the solid and its kinetic points.

In order to determine the kinetic points for solids encountered in engineering problems, usually composed of simple geometric figures, a table of kinetic points for such figures is given. In order to generalize this to oblique figures a theorem is demonstrated, according to which all kinetic points of a solid are displaced under affine transformation, as points pertaining to the solid. In other words, the co-ordinates of kinetic points in the system of co-ordinates transformed jointly with the solid behave as invariants.

The method of kinetic points is particularly suitable when used together with the graphical method. It is likely, therefore, to find a wider application in engineering practice.

---

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 grudnia 1953 r.*