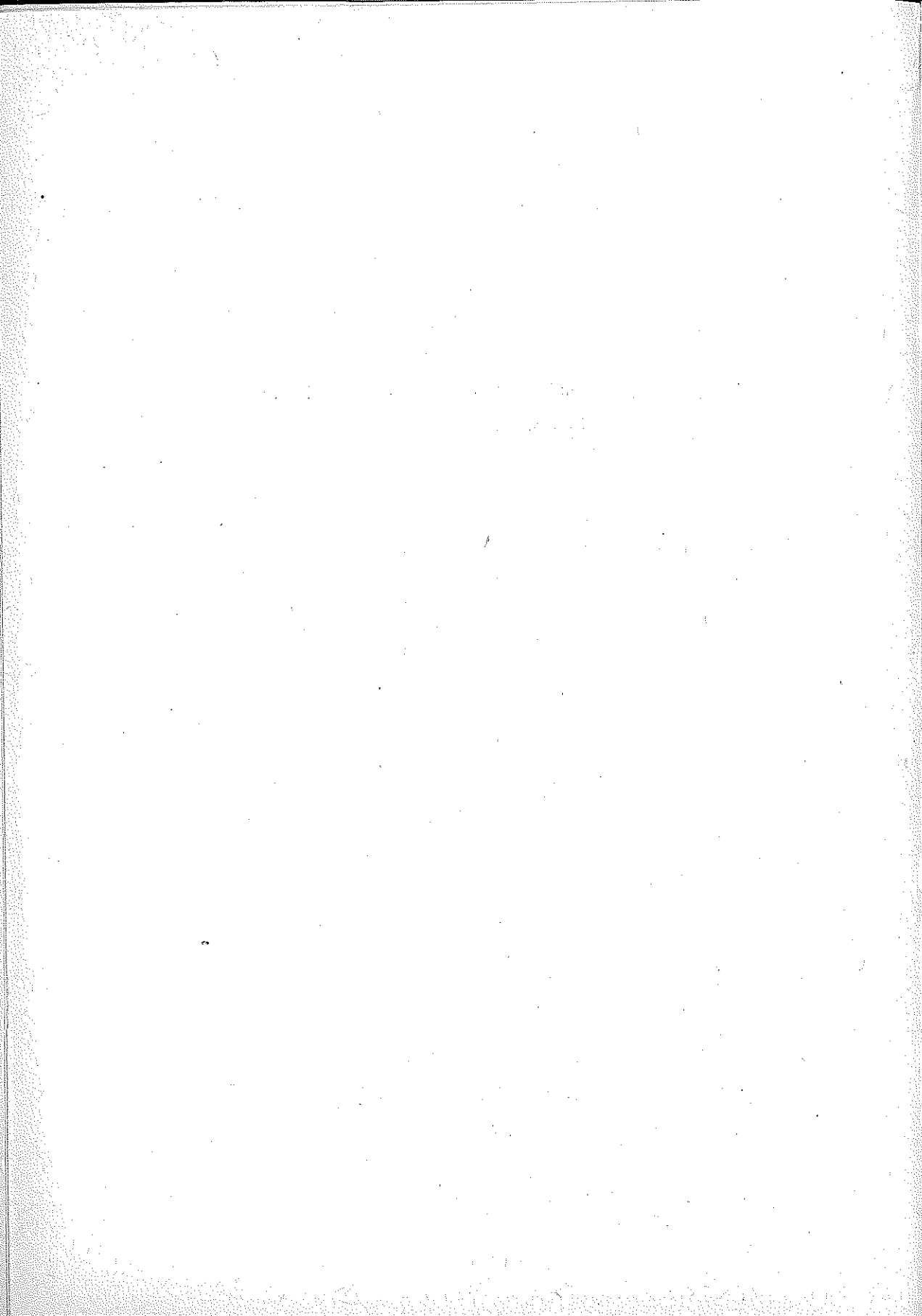


CZESŁAW EIMER

O STATECZNOŚCI ELEMENTÓW SPRĘŻONYCH
PRZEZ UZWOJENIE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LVIII



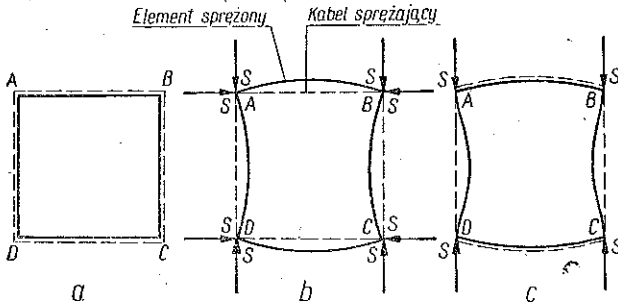
1. Jednym z szeroko rozpowszechnionych typów konstrukcji sprężonych są ustroje formy cylindrycznej, w szczególności rury i zbiorniki (również obudowy tuneli, szybów, silosy itp.). Zastosowanie betonu sprężonego do tych konstrukcji prowadzi do dużych oszczędności materiału (beton, stal) i zapewnia cenne walory eksploatacyjne (rysoodporność, szczelność). Wyraźne korzyści ekonomiczne daje również sprężenie elementów wykonanych z innych materiałów niż beton, w szczególności żeliwnych lub stalowych (zwłaszcza rury ciśnieniowe). Korzyści te wynikają z faktu, że ustroje takie pracują przede wszystkim na rozciąganie, jak również stąd, że możemy w nich dopuszczać na ogół duże wartości odkształceń przy eksploatacji. Zastosowanie zasady sprężenia umożliwia bezpośrednie wykorzystanie w konstrukcjach tego typu stali o najwyższej wytrzymałości na rozciąganie. Stal taka z uwagi na technologię produkcji (przeciąganie) dostępna jest tylko w formie cienkich drutów (strun).

Sprężenie obwodowe zostaje wprowadzone z reguły przez uzwojenie elementu w kształcie pierścienia kołowego drutem wstępnie naprężonym. W fazie bezużytkowej element pozostaje więc pod działaniem sił ściskających o dużej intensywności, wywieranych przez armaturę. W związku z tym nasuwa się pytanie, czy nie zachodzi obawa wyboczenia pierścienia ściskanego i wyłania się problem znalezienia wartości krytycznej siły sprężającej. Podstawowym zadaniem dla konstrukcji omawianego typu jest wyznaczenie tej wartości dla pierścienia kołowego. Jest to więc zagadnienie analogiczne do problemu wyboczenia pierścienia kołowego pod wpływem stałego ciśnienia zewnętrznego, rozpatrywanego w «klasycznej» teorii stateczności konstrukcji.

Aby uwypuklić podobieństwa i różnice obu przypadków, wyjaśnimy istotę zachodzących zjawisk na następującym przykładzie. Weźmy pod uwagę ramę kwadratową, której wszystkie elementy są sprężone osiowo i zbadajmy jej stateczność pod wpływem (samy) sił sprężających (rys. 1). Zachowanie się ustroju będzie zależało od sposobu realizacji sprężenia. W związku z tym możemy tu wyróżnić trzy zasadnicze przypadki.

(1) Kable sprężające biegną w kanałach wewnątrz elementu i stykają się z nim w sposób ciągły. Wyboczenie ustroju nie jest w tym przypadku możliwe (rys. 1a).

(2) Armatura sprężająca styka się z ramą tylko w węzłach A, B, C i D (możemy wyobrazić sobie na przykład ramę stalową o przekroju dwudzielnym z kablami swobodnie biegnącymi). Problem sprowadza się (z dokładnością do określenia zmienności sił sprężających) do zagadnienia



Rys. 1

nia wyboczenia ramy pod wpływem układu sił pionowych i poziomych jak na rys. 1b.

(3) Sprężenie zostało wywołane przez uzwojenie (owinięcie) ustroju armaturą, która zachowuje się jak kabel swobodny tylko w tym przypadku, gdy odkształcona zwrócona

jest swoją wklęsłością w stronę armatury, gdy więc ta ostatnia może oderwać się od podłoża. Obciążenie zastępcze sprowadzi się do układu sił przedstawionego na rys. 1c.

Oczywiście w każdym z omówionych przypadków otrzymamy odmienną wartość siły krytycznej. Jeszcze inne jej wartości otrzymalibyśmy rozmieszczając w sposób dowolny wzdłuż obwodu punkty lub odcinki stałego kontaktu kabla z elementem.

Przypadek pierścienia uzwojonego będzie analogiczny do schematu (3). Odkształcona przybierze postać krzywej w rodzaju pokazanej na rys. 2a, o czym można przekonać się również w prosty sposób na drodze doświadczalnej. Pomiedzy zadaniem klasycznym a omawianym wystąpią więc istotne różnice:

(1) linia ciśnienia obciążenia zewnętrznego zachowuje w przypadku klasycznym formę kołową, natomiast w przypadku uzwojenia zmienia się wraz z odkształceniem pierścienia i przybiera na odcinku styku kabla taką samą postać jak odkształcona;

(2) wyboczenie może nastąpić dopiero z chwilą skończonego przeskoaku od formy równowagi kołowej do odkształconej; zagadnienie trzeba więc rozpatrywać na tle ogólnej teorii prętów cienkich rezygnując z założenia małych odkształceń.

Widzimy zatem, że błędem byłoby obliczenie obciążenia krytycznego na podstawie wzoru mającego zastosowanie dla stałego ciśnienia zewnętrznego.

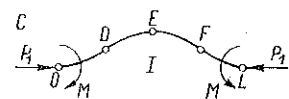
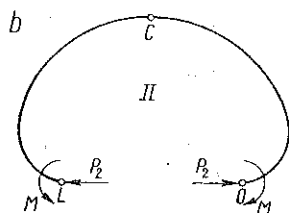
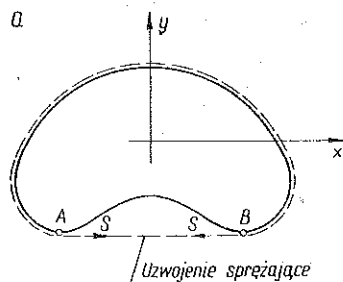
2. Zagadnienie nasze traktujemy jako dwuwymiarowe. Nadto opieramy się na założeniu sprężystości liniowej materiału (problem liniowy fizykalnie, nieliniowy geometrycznie). Rozwiązanie opieramy na założeniach nieliniowej teorii prętów cienkich przyjmując stosowane zwykle w tej teorii uproszczenia. W szczególności uwzględniamy tylko odkształcenia zginania elementu, wywołane momentami zginającymi, pomijamy zaś wpływ sił poprzecznych oraz wpływ odkształceń wywołanych ścisaniem osiowym. Przyjmujemy, że armatura biegnie stale w środku ciężkości przekroju, pomijamy więc dodatkowe momenty zginające przy wyboczeniu, wywołane niewielkim mimośrodem armatury (ułożonej w rzeczywistości na zewnętrznej powierzchni pierścienia). Armaturę uważamy za idealnie wiotką. Ponadto pomijamy wpływ występującego tarcia armatury o pierścień przy jej przemieszczaniu się podczas wyboczenia. Wymienionym założeniom poświęcimy jeszcze nieco uwagi w następnym punkcie.

Wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych (rys. 2a), obrany w ten sposób, by oś x była równoległa do prostoliniowego odcinka armatury AB , co oczywiście zawsze jest możliwe¹⁾.

W celu rozwiązania zagadnienia przeprowadzamy przekroje w punktach «oderwania się» armatury A i B i rozpatrujemy oddzielnie odcinki krzywoliniowe odkształconej I (rys. 2c) i II (rys. 2b), przy czym punkty O i L oznaczają odpowiednio punkty początkowe i końcowe odcinków. Oba odcinki możemy uważać za obciążone tylko na końcach. W istocie, na odcinku II armatura nie tworzy nigdzie mimośrodów z osią podłużną, a zatem nie wywiera wpływu na odkształcenia (jeśli pominiemy, zgodnie z założeniem, odkształcenia osiowe); wpływ sprężenia przejawia się tu tylko w odpowiedniej zmianie naprężeń. Z drugiej strony na odcinku I armatura nie styka się z odcinkiem nigdzie poza jego końcami. Ze względu na oczywistą symetrię (osiową) odkształconej obciążenie na końcach obu odcinków sprowadzi się do momentów M i sił podłużnych odpowiednio P_1 i P_2 , skierowanych jak na rys. 2b i 2c, przy czym zachodzi zależność

$$(2.1) \quad P_1 - P_2 = S,$$

¹⁾ Określenie położenia początku układu nie jest konieczne, gdyż w dalszym ciągu będziemy mieli do czynienia tylko z różnicami współrzędnych, nachyleniami i krzywiznami.



Rys. 2

gdzie S oznacza siłę wywieraną przez armaturę przy danej formie równowagi elementu. Ponadto zapiszemy od razu zależność

$$(2.2) \quad l_1 + l_2 = l,$$

w której l_1 i l_2 oznaczają odpowiednio długości odcinków I i II, l znaną długość obwodu pierścienia, $l = D\pi = 2R\pi$ (R jest promieniem nieodkształconego pierścienia). Ponadto wprowadzamy następujące oznaczenia (stosowane zazwyczaj w teorii prętów cienkich): ρ oznacza promień krzywizny odkształconej, ζ kąt nachylenia stycznej do odkształconej (względem osi x), s długość odpowiedniego odcinka od początku (punkt O) do punktu bieżącego, EI sztywność pierścienia na zginanie.

Przy zmianie siły S następuje zmiana formy równowagi, której towarzyszy zmiana długości l_1 i l_2 . Krzywizna odkształconej wyraża się wzorem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\zeta}{ds},$$

przy czym punkty początkowe odcinków I i II są tak dobrane, by znak krzywizny w tych punktach (zgodny ze znakiem wyrażenia $d\zeta/ds$) był dodatni. Momenty zginające, wywołujące wzrost krzywizny, uważamy za dodatnie.

Przy powyższych oznaczeniach równanie równowagi każdego z odcinków wyraża się ogólnie wzorem

$$(2.3) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{M - Py}{EI},$$

czyli

$$(2.3.1) \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{M - Py}{EI} + \frac{1}{R}.$$

Różniczkując powyższe równanie względem s i podstawiając $dy/ds = \sin\zeta$ otrzymujemy

$$(2.4) \quad \frac{d^3\zeta}{ds^3} = -\frac{P}{EI} \sin\zeta.$$

Równanie to znane z teorii prętów cienkich (obciążonych tylko na końcach) rozwiązuje się, jak wiadomo, w całkach eliptycznych. Mianowicie, oznaczając ogólnie

$$(2.5) \quad \beta = l \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

przedstawiamy równanie (2.4) w postaci

$$d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right) = -\frac{2\beta^3}{l^3} \sin\frac{\zeta}{2} \cos\frac{\zeta}{2} ds,$$

skąd po pomnożeniu obu stron przez $d\zeta/ds$ i scałkowaniu otrzymamy pierwszą całkę równania (2.4) w postaci

$$(2.6) \quad \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = \frac{4\beta^2}{l^2} \left(C - \sin^2 \frac{\zeta}{2}\right).$$

Wartość stałej C zależy od formy geometrycznej odkształconej. Jeżeli odkształcona posiada punkty przegięcia, to $C < 1$, jeśli zaś posiada punkty rozciągania (tj. punkty, w których siła wypadkowa w przekroju wywołuje rozciąganie i jest skierowana wzdłuż stycznej do odkształconej), to $C > 1$. Dla punktu przegięcia mamy bowiem $d\zeta/ds = 0$, a stąd ²⁾ $C = \sin^2(\zeta/2) < 1$. W punkcie rozciągania mamy (zgodnie z przyjętym układem współrzędnych, w którym oś x jest równoległa do siły P) $\zeta = (2n + 1)\pi$, a zatem

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = \frac{4\beta^2}{l^2} (C - 1).$$

Dla krzywizny różnej od zera musi więc być $C > 1$. Forma z punktami przegięcia odpowiada odcinkowi I (punkty D i F na rys. 2c), forma z punktami rozciągania — odcinkowi II (punkt C na rys. 2b). Obu zasadniczym formom równowagi odpowiadają odmienne rozwiązania równania różniczkowego.

Przyjmujemy odpowiednio ³⁾

$$(2.7) \quad \text{(I) } C = k^2, \quad \text{(II) } C = \frac{1}{k^2} \quad (0 < k < 1)$$

oraz wprowadzamy nową zmienną ψ za pomocą wzorów

$$(2.8) \quad \text{(I) } \sin \frac{\zeta}{2} = k \sin \psi, \quad \text{(II) } \sin \frac{\zeta}{2} = \sin \psi.$$

Korzystając z podstawień (2.7) i (2.8) sprowadzamy równanie (2.6) do postaci

$$(2.9) \quad \text{(I) } \frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{l} k \cos \psi, \quad \text{(II) } \frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{l} \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

albo na podstawie (2.8) do postaci

$$(2.9.1) \quad \text{(I) } \frac{d\psi}{ds} = \frac{\beta}{l} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \quad \text{(II) } \frac{d\psi}{ds} = \frac{\beta}{lk} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

Rozwiązanie tych równań różniczkowych uzyskamy całkując dla

²⁾ W punkcie przegięcia nie może być $\zeta = n\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), jak wykazuje się w teorii prętów cienkich.

³⁾ W dalszym ciągu przypadki odnoszące się do odcinków I i II będziemy oznaczać odpowiednio przez (I) i (II).

każdego z odcinków od punktu początkowego O , dla którego $s = 0$ oraz $\psi = \psi_0$ do punktu bieżącego (s, ψ) . Oznaczając występujące wielkości odpowiednimi wskaźnikami dla odcinków I i II, w szczególności na podstawie (2.5)

$$(2.5.1) \quad \text{(I)} \quad \beta_1 = l_1 \sqrt{\frac{P_1}{EI}}, \quad \text{(II)} \quad \beta_2 = l_2 \sqrt{\frac{P_2}{EI}},$$

otrzymamy

$$(2.10) \quad \begin{cases} \text{(I)} & F(\psi) - F(\psi_0) = \beta_1 \frac{s}{l_1}, \\ \text{(II)} & kF(\psi) - kF(\psi_0) = \beta_2 \frac{s}{l_2}, \end{cases}$$

gdzie $F(\psi)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, którą zapisujemy w normalnej postaci trygonometrycznej (Legendre'a)

$$F(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}};$$

k jest modulem całki eliptycznej, ψ jest amplitudą. Wartość ψ zmienia się wraz z s według zależności (2.10). Przy znanych parametrach k (odmiennych na ogół dla obu odcinków i wynoszących odpowiednio k_1 i k_2) i warunkach brzegowych możemy za pośrednictwem relacji (2.8) uzyskać równania odkształconej w postaci parametrycznej (por. np. [1]).

W punktach odseparowania się armatury od elementu A i B (tj. w punktach O i L obu odcinków) styczna do odkształconej jest oczywiście równoległa do osi x , mamy więc: (I) $\zeta_0 = 0, \zeta_L = 0$; (II) $\zeta_0 = 0, \zeta_L = 2\pi$. Przy przyjętych przez nas znakach krzywizny amplituda wzrasta na obu odcinkach i przebiega kolejno wartości

$$\text{(I)} \quad 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi,$$

dla punktów (rys. 2c) O, D, E, F i L ;

$$\text{(II)} \quad 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi,$$

dla punktów (rys. 2b) O, C i L .

Podstawiając w równaniach (2.10) $\psi = \psi_L$ i korzystając z wypisanych powyżej wartości amplitudy w punktach O i L , oraz przyjmując odpowiednio $s = l_1$ lub $s = l_2$ oraz uwzględniając zależności: $F(0) = 0, F(\pi) = 2F(\pi/2) = 2K, F(2\pi) = 4F(\pi/2) = 4K$, gdzie

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

jest pełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju, otrzymamy

$$(2.11) \quad (\text{I}) \quad \beta_1 = 4K(k_1) = 4K_1, \quad (\text{II}) \quad \beta_2 = 2k_2 K(k_2) = 2k_2 K_2.$$

Ze względu na symetrię warunki brzegowe problemu redukują się do trzech następujących:

(1) równość nachylenia stycznych w punktach skrajnych odpowiednio dla odcinków I i II,

(2) równość krzywizny odkształconej w tychże punktach,

(3) równość przemieszczeń tych punktów, tj. równość odległości «poziomej» punktów O i L dla obu odcinków.

Pierwszy warunek wykorzystaliśmy już powyżej przy obliczeniu skrajnych wartości ψ .

Drugi warunek uzyskamy z przyrównania prawych stron równań (2.9) ustawionych dla punktu A lub B (rys. 2 a); podstawiając w tych równaniach odpowiednie wartości ψ otrzymujemy

$$(2.12) \quad \frac{\beta_2 l_1}{\beta_1 l_2} = k_1 k_2.$$

Trzeci warunek wymaga wyrażenia odciętej bieżącego punktu odkształconej przez parametry eliptyczne. Korzystając z równań (2.8) i (2.9.1) oraz ze związków

$$dx = \cos \zeta ds = \left(2 \cos^2 \frac{\zeta}{2} - 1 \right) ds,$$

otrzymamy

$$(I) \quad \frac{dx}{l} = \frac{2}{\beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi - \frac{ds}{l},$$

$$(II) \quad \frac{dx}{l} = \frac{2}{k\beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi - \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{ds}{l}.$$

Stąd po scałkowaniu mamy

$$(2.13) \quad \begin{cases} (I) & \frac{x - x_0}{l} = \frac{2}{\beta} [E(\psi) - E(\psi_0)] - \frac{s}{l}, \\ (II) & \frac{x - x_0}{l} = \frac{2}{k\beta} [E(\psi) - E(\psi_0)] - \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{s}{l}, \end{cases}$$

gdzie

$$E(\psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

jest całką eliptyczną drugiego rodzaju.

Wprowadzając dla obu odcinków odpowiednie wartości ψ_0 oraz $\psi = \psi_L$, wstawiając $s = l$ i uwzględniając zależności $E(0) = 0$, $E(\pi) = 2E(\pi/2) = 2E(k)$ i $E(2\pi) = 4E(\pi/2) = 4E(k)$, gdzie

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

jest pełną całką eliptyczną drugiego rodzaju, otrzymamy

$$(2.14) \quad \begin{cases} \text{(I)} & \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{8E_1}{\beta_1} - 1, \\ \text{(II)} & \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{4E_2}{k_2 \beta_2} - \left(\frac{2}{k_2^2} - 1 \right), \end{cases}$$

przy czym oznaczyliśmy wprost $E_1 = E(k_1)$ i $E_2 = E(k_2)$.

Warunek trzeci (równości przemieszczeń) ma postać

$$(2.15) \quad (x_L - x_0)_{(I)} = -(x_L - x_0)_{(II)},$$

skąd na podstawie równań (2.14) otrzymamy

$$(2.16) \quad \frac{8E_1}{\beta_1} - 1 = \left(\frac{2}{k_2^2} - 1 \right) - \frac{4E_2}{k_2 \beta_2}.$$

W równaniach (2.12) i (2.16) występują prócz wartości k_1 i k_2 również niewiadome β_1 , β_2 , l_1 i l_2 . Aby je wyeliminować, skorzystamy ze wzorów (2.11) oraz z warunków (2.1) i (2.2).

Warunek (2.1) przepisujemy, wyrażając wartość P przez β na podstawie wzorów (2.5.1)

$$\left(\frac{\beta_1}{l_1} \right)^2 - \left(\frac{\beta_2}{l_2} \right)^2 = \frac{S}{EI}.$$

Eliminując l_2 w oparciu o wzór (2.2) i korzystając ze wzorów (2.11) doprowadzamy powyższy warunek do postaci

$$\left(\frac{4K_1}{l_1} \right)^2 - \left(\frac{2k_2 K_2}{l - l_1} \right)^2 = \frac{S}{EI}.$$

Przekształcając w sposób analogiczny warunek (2.12) otrzymamy

$$\frac{K_2 l_1}{2K_1(l - l_1)} = k_1.$$

Na podstawie drugiej z powyższych zależności obliczamy

$$(2.17) \quad l_1 = \frac{2k_1 K_1}{2k_1 K_1 + K_2} l, \quad l_2 = \frac{K_2}{2k_1 K_1 + K_2} l.$$

Wstawiając obliczone l_1 w pierwszą zależność dochodzimy po nietrudnych rachunkach do równania

$$(2.18) \quad (2k_1 K_1 + K_2)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} - k_2^2 \right) = \frac{Sl^2}{4EI}.$$

Podstawiając z kolei β ze wzorów (2.11) do równania (2.16) otrzymamy po małych przekształceniach

$$(2.19) \quad \frac{E_1}{K_1} = \frac{1}{k_2^2} \left(1 - \frac{E_2}{K_2} \right).$$

Równania (2.18) i (2.19) stanowią układ dwóch równań o dwóch niewiadomych k_1, k_2 nie dający się rozwiązać w sposób elementarny ani też dalej uprościć.

Dla pełnego rozwiązania zagadnienia musimy ponadto znać wartość skrócenia armatury uzwojającej przy wyboczeniu. Na podstawie rysunku 2a łatwo zauważyć, że zmiana długości armatury Δl jest równa różnicy długości odcinka (odkształconego) I i cięciwy AB, tzn.

$$(2.20) \quad \Delta l = l_1 - (x_L - x_O)_{(I)}.$$

Wstawiając do równania (2.14.I) β_1 ze wzoru (2.11.I) oraz wartość l_1 ze wzoru (2.17) sprowadzamy warunek (2.20) po łatwych przekształceniach do postaci

$$(2.21) \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{4 k_1 (K_1 - E_1)}{2 k_1 K_1 + K_2}.$$

Równania (2.18), (2.19) i (2.21) dają podstawę do rozwiązania naszego problemu. Dla obliczenia występujących w nich wielkości możemy wykorzystać tablice całek eliptycznych (pełnych). W tablicach tych występuje zazwyczaj zamiast modułu k wartość kąta modularnego α , określonego wzorem

$$k = \sin \alpha \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Uwzględniając powyższy zapis i wprowadzając ponadto oznaczenia

$$\varkappa = \frac{S l^2}{4 E I}, \quad \eta = \frac{\Delta l}{l},$$

sprowadzamy równania (2.18), (2.19) i (2.21) do postaci

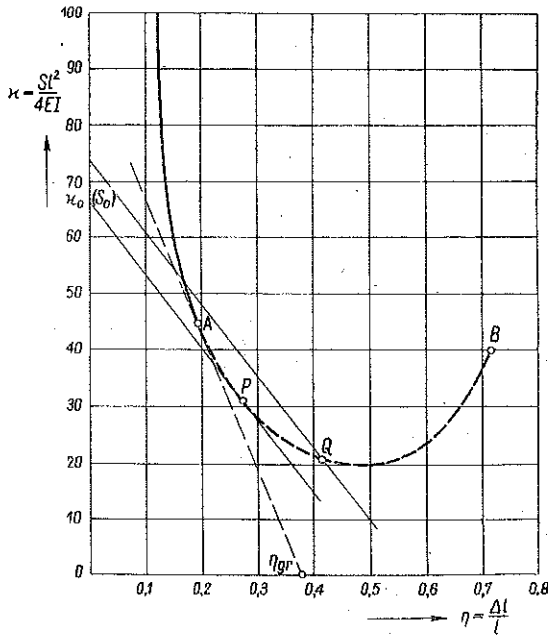
$$(2.18.1) \quad (2 K_1 \sin \alpha_1 + K_2)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha_1} - \sin^2 \alpha_2 \right) = \varkappa,$$

$$(2.21.1) \quad \frac{4 \sin \alpha_1 (K_1 - E_1)}{2 K_1 \sin \alpha_1 + K_2} = \eta,$$

$$(2.19.1) \quad \frac{E_1}{K_1} = \frac{1}{\sin^2 \alpha_2} \left(1 - \frac{E_2}{K_2} \right).$$

W powyższym układzie równań wielkości κ i η występują jako funkcje dwóch parametrów a_1 i a_2 powiązanych ze sobą równaniem (2.19.1); układ pozwala zatem na wyrażenie κ jako funkcji η . W oparciu o tę funkcję będzie możliwe już bezpośrednie rozwiązanie naszego problemu wyznaczenia krytycznej siły sprężającej, czym zajmiemy się w następnym punkcie.

Praktyczny tok postępowania przy rozwiązaniu równań może być następujący. Dla kolejnych wartości np. a_2 obliczamy prawą stronę równania (2.19.1) korzystając z tablic całek eliptycznych (pełnych) i na tej podstawie dobieramy a_1 w ten sposób, by lewa strona równania dawała tę samą wartość. Jeszcze lepiej posłużyć się sposobem graficznym i sporządzić na tym samym wy-



Rys. 3

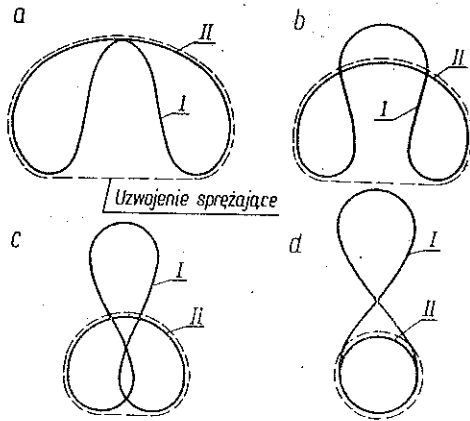
kresie krzywe przedstawiające odpowiednio lewą i prawą stronę równania (2.19.1). Tym samym wartościom rzędnych obu krzywych będą odpowiadały wartości a_1 i a_2 spełniające nasze równanie. Posługując się jedną z opisanych metod wyznaczamy szereg odpowiadających sobie wartości a_1 i a_2 (lub k_1 i k_2). Wartości te wstawiamy z kolei do równań (2.18.1) i (2.21.1) uzyskując w ten sposób szereg kolejnych odpowiadających sobie wartości κ i η .

Odpowiednie obliczenia zostały przeprowadzone, a wyniki ich uwidocznione na

wykresie (rys. 3) przedstawiającym zależność pomiędzy κ i η . Każdemu punktowi wykresu odpowiadają pewne wartości parametrów k_1 i k_2 , określających formę geometryczną odkształconej odpowiednio na odcinkach I i II. Wzrostowi η towarzyszy wzrost k_1 , i zmniejszenie się k_2 i równocześnie wzrost długości l_1 i zmniejszanie się długości l_2 . Formy równowagi, dla których odseparowanie się armatury od elementu następuje na niewielkiej długości, wymagają, jak widać z wykresu, wysokich wartości S .

Gdy $a_1 \rightarrow 0$, to, jak widać na podstawie równania (2.19.1), $a_2 \rightarrow \pi/2$; dla tych wartości $\eta \rightarrow 0$ i $\kappa \rightarrow \infty$, krzywa zdąży więc asymptotycznie do osi κ . Przy wzroście η mamy formy równowagi jak na rys. 2a, przy czym

punkty A i B coraz bardziej zbliżają się do siebie. W punkcie A na wykresie (rys. 3), dla którego $\eta = 0,19$ i $\kappa = 44$, odkształcona przybiera postać przedstawioną na rys. 4 a. Jest to granica istnienia w rzeczywistości rozpatrywanej przez nas formy równowagi. Można obliczyć, że w punkcie tym parametry eliptyczne mają wartość $\alpha_1 = 42^\circ$ oraz $\alpha_2 = 83^\circ$, ponadto $l_1 = 0,41 l$, spadek zaś stycznej, który będzie nam potrzebny w następnym punkcie, ma wartość $d\kappa/d\eta = -245$; odpowiednie obliczenia pomijamy na tym miejscu. Przy dalszym wzroście η odkształcona przyjmuje kolejno formy uwidocznione na rys. 4b i 4c. Oczywiście formy te mają znaczenie tylko teoretyczne, toteż część wykresu poza punktem A oznaczona jest linią kreskowaną. Gdy η dochodzi do punktu B, to prawa strona równania (2.19.1) dąży do wartości 1/2 i mamy $\alpha_2 \rightarrow 0$ oraz $\alpha_1 = 65^\circ$. Punkty A i B na rys. 2a «schodzą się» i odcinek II odkształconej przybiera postać koła; odpowiednią formę równowagi przedstawia rys. 4d. Można obliczyć, że dla tej postaci $l_1 = 0,73 l$.



Rys. 4

W praktyce mogą mieć miejsce tylko formy równowagi odpowiadające części krzywej (rys. 3) wykreślonej linią pełną. W punkcie A występuje nowy układ więzów i obciążeń i dalszą część rzeczywistej charakterystyki sprężystej układu uzyskalibyśmy rozpatrując ewolucję formy równowagi pokazanej na rys. 4 a. Łatwo przewidzieć, że odpowiednia gałąź krzywej miałaby charakter rosnący i odpowiadałaby formom równowagi statecznym. Wartość siły S w punkcie A mogłaby mieć w pewnych (co prawda nader rzadkich) wypadkach znaczenie praktyczne, jak o tym przekonamy się dalej. Natomiast wartość S odpowiadająca minimum krzywej (w części kreskowanej) nie ma praktycznego znaczenia ⁴⁾.

⁴⁾ Wzór na określenie siły «krytycznej» możemy napisać w postaci

$$S_{kr} = \kappa (4EI/l^2)$$

lub wprowadzając średni nacisk jednostkowy armatury na obwodzie pierścienia $q = S/R$ i podstawiając $l = 2R\pi$ w postaci

$$q_{kr} = (\kappa/\pi^2) (EI/R^3).$$

Analogiczny wzór dla przypadku stałego ciśnienia zewnętrznego na pierścieniu ma, jak wiadomo, postać

$$q_{kr} = 3EI/R^3.$$

W praktycznych zagadnieniach wartości κ będą wysokie i q_{kr} będzie wyższe przy sprężeniu niż przy takim samym stałym ciśnieniu zewnętrznym.

3. Zanim przejdziemy do zagadnienia stateczności pierścienia w przypadku uzwojenia armaturą odkształcalną, zwrócimy uwagę na pewne charakterystyczne cechy przejścia od nieodkształconej do odkształconej formy równowagi. Jak widać z rys. 3, przejście to możliwe jest tylko w formie (skończonego) przeskoku od postaci nieodkształconej (reprezentowanej przez oś rzędnych) do odkształconej, któremu odpowiada pewna (skończona) wartość η (zależna od «odległości» krzywej od osi rzędnych). Wiąże się z tym konieczność odmiennej interpretacji pojęcia siły «krytycznej», niż to ma miejsce zazwyczaj w mechanice budowli. W ujęciu klasycznym, np. w zagadnieniu wyboczenia pręta prostego pod wpływem siły podłużnej, po osiągnięciu siły krytycznej następuje faza, w której możliwe są dwie formy równowagi: prostoliniowa i odkształcona (bifurkacja form równowagi), przy czym pierwsza z nich jest postacią niestateczną, druga stateczną (odpowiadającą minimum energii potencjalnej układu). Przy dowolnie małych dodatkowych odkształceniach (wirtualnych) — tzn. praktycznie zawsze — forma niestateczna przechodzi w stateczną (trwałą), tj. następuje wyboczenie. W naszym przypadku zarówno postać nieodkształcona jak i odpowiednia forma odkształcona są formami statecznymi (aczkolwiek forma odkształcona odpowiada, jak można wykazać, niższemu poziomowi energii potencjalnej), tj. przejście od pierwszej z nich do drugiej możliwe jest dopiero przy narzuceniu elementowi odkształcenia o pewnej skończonej wielkości. Innymi słowy, należy narzucić odkształcenie «początkowe» o wielkości wystarczającej do przeprowadzenia układu przez «barierę energetyczną» oddzielającą obie (stateczne) formy równowagi. Wielkość tego niezbędnego odkształcenia maleje ze wzrostem siły S i dąży do zera, gdy siła wywierana przez uzwojenie rośnie do nieskończoności (por. rys. 3). Związki te staną się jasne, gdy uświadomimy sobie, że na to, by zapoczątkować przeskoczenie do odkształconej formy równowagi, należy wywołać na pewnej, choćby bardzo małej przestrzeni odseparowanie się armatury od elementu. Odseparowanie to może nastąpić na przykład pod wpływem odpowiedniego (zresztą dowolnego) układu sił zewnętrznych.

Zgodnie z powyższymi rozważaniami pierścien nie ulegnie wyboczeniu w sensie «klasycznym» pod wpływem samej siły sprężającej przy żadnej skończonej jej wartości, natomiast w miarę jej wzrostu staje się coraz bardziej «wrażliwy» na przypadkowe odkształcenia. W tym sensie siłę krytyczną należy określić jako siłę, po której przekroczeniu staje się dopiero możliwe przejście elementu do formy odkształconej jako formy trwałej (bez względu na to, jak wielkie chwilowe odkształcenia należy ustrojowi narzucić, by przejście to zrealizować). W węższym znaczeniu moglibyśmy mówić o sile, przy której wyboczenie będzie możliwe przy pewnej, z góry przyjętej, maksymalnej wartości odkształcenia «począ-

kowego». W dalszym ciągu będziemy mieli na myśli tylko siłę krytyczną w znaczeniu pierwszym, ogólniejszym⁵⁾.

Gdyby siła S miała wartość stałą (nie zmieniającą się przy odkształceniu pierścienia), wówczas za jej wartość «krytyczną» w naszym ujęciu należałoby uznać wartość odpowiadającą punktowi A (rys. 3), tj. jak wynika z powyższego

$$S = 44 \frac{4EI}{l^2}.$$

W punkcie A niezbędne odkształcenie chwilowe równałoby się odkształceniu trwałemu i miałyby postać jak na rys. 4 *a*. W miarę wzrostu siły malałaby wartość odkształceń «początkowych»; ponieważ wartość ta dąży do zera, zatem wyboczenie nastąpi praktycznie zawsze przy odpowiednio wielkiej sile S . Z chwilą wyboczenia odkształcenia będą narastały, zgodnie z opadającym charakterem krzywej, najpierw do punktu A , a następnie dalej jeszcze, aż do takiej formy równowagi, której odpowiada aktualna wartość S (poza punktem A wzrostowi odkształceń towarzyszy wzrost siły). Odkształcenie przyjmie ostatecznie postać podobną do postaci na rys. 4 *a* lub jedną z «wyższych» form będących wynikiem dalszej zmiany więzów układu.

W elemencie sprężonym za pomocą armatury odkształcalnej przebieg zjawisk będzie odmienny. Siła S nie jest tutaj stała, lecz maleje w miarę skracania się armatury, tj. przy wzrastającym η . Przyjmijmy, że siła sprężająca przed nastąpieniem wyboczenia ma wartość S_0 , czemu odpowiada pewne ε_0 na osi rzędnych wykresu (rys. 3) i założmy, że między odkształceniem i naprężeniem armatury zachodzi zależność liniowa. Wówczas odkształcenia armatury będzie przedstawiała pewna prosta o spadku ujemnym, przechodząca przez punkt $(0, \varepsilon_0)$. Krytycznej wartości S będzie odpowiadała prosta styczna do krzywej⁶⁾ (rys. 3). Forma równowagi odpowiadająca punktowi styczności P (rys. 3) będzie trwała, gdyż przy dalszym odkształceniu spadek siły S (zmieniający się «wzdłuż» stycznej) byłby wyższy niż spadek siły (według krzywej), potrzebnej dla

⁵⁾ Jest rzeczą oczywistą, że współczynniki bezpieczeństwa na wyboczenie mogą być w naszym przypadku odpowiednio zredukowane. O ile w przypadku «klasycznym» współczynnik bezpieczeństwa zależy w pierwszym rzędzie od prawdopodobieństwa przekroczenia obciążenia aż do wartości «krytycznej», o tyle tutaj zależy on od dwóch czynników: prawdopodobieństwa odpowiedniego przekroczenia siły sprężającej i równoczesnego pojawienia się przyczyn wywołujących dodatkowe odkształcenia, przekraczające pewną minimalną wielkość. Mamy więc do czynienia z iloczynem prawdopodobieństw obu zdarzeń. Decydujący będzie raczej drugi z wymienionych czynników, gdyż prawdopodobieństwo przekroczenia ściśle kontrolowanej siły sprężającej jest niewielkie.

⁶⁾ Dla przejrzystości wykreślono styczną odpowiadającą części kreskowanej krzywej.

utrzymania równowagi. Gdyby wyboczenie nastąpiło przy sile większej od krytycznej (wskutek mniejszych odkształceń «początkowych»), wówczas stan równowagi trwałej odpowiadałby punktowi Q na rys. 3. Łatwo spostrzec, że spadek prostej będzie zależał od odkształcalności armatury, tj. od jej modułu sprężystości E_a . Im mniejsze E_a , tym mniej stromy będzie przebieg prostej i tym niższa będzie wartość siły krytycznej. W tym sensie armatura, dajmy na to z włókien szklanych, będzie mniej korzystna od armatury stalowej.

Opisany przebieg zjawisk będzie występował wówczas, gdy element sprężony (z zakotwioną już armaturą) poddamy odpowiednim odkształceniom chwilowym «początkowym», wywołującym wyboczenie. Gdyby jednak wyboczenie nastąpiło jeszcze w czasie sprężania, np. w czasie naciągania kabla sprężającego prasą hydrauliczną, wówczas będziemy posuwali się «w dół» po krzywej na rys. 3, przy czym w miarę wysuwu tłoka naciągarki będą malały ciśnienie na manometrze i naprężenie w armaturze, zgodnie z «opadającym» charakterem krzywej. W dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko pierwszym «zasadniczym» przypadkiem.

Rozważany przebieg zjawisk będzie występował, dopóki punkt styczności P nie pokryje się z punktem A. Odpowiednia styczna «graniczna» (prosta kreskowana na rys. 3) odetnie na osi η odcinek (zgodnie z wyżej podanymi wartościami)

$$\eta_{gr} = 0,19 + \frac{44}{245} = 0,37.$$

Punkty na osi odciętych odpowiadają powrotowi armatury do stanu wyjściowego (przed naciągnięciem), a więc zachodzi zależność $\eta = \sigma_a/E_a$, gdzie σ_a oznacza naprężenie wstępne w uzwojeniu. Siła krytyczna zostanie więc określona na podstawie przebiegu stycznej, jeżeli $\sigma_a/E_a \leq \eta_{gr} = 0,37$.

Nierówność ta oczywiście zawsze jest spełniona dla armatury stalowej. Dla armatur silnie odkształcalnych (np. włókna z tworzyw sztucznych, włókna szklane itp.) mogłoby nastąpić przekroczenie η_{gr} i wówczas należałoby określić siłę krytyczną wychodząc z punktu A jako niezmiennego. Odpowiednie obliczenie nie nastęrczy tu żadnych trudności i przypadkiem tym nie będziemy się dalej zajmowali.

Skrócenie armatury (przyjęte za odkształcenie dodatnie) wyrazi się wzorem $\varepsilon = \Delta l/l_p$, w którym l_p oznacza pierwotną długość armatury (przed jej naciągnięciem). Dla niewielkich zmian długości możemy przyjąć w przybliżeniu $l_p = l$, gdzie l jest długością obwodu pierścienia, tj. długością armatury po jej naciągnięciu i na tej podstawie podać wzór

$$\varepsilon \approx \eta = \frac{\Delta l}{l} = \frac{S_0 - S}{A_a E_a}.$$

Korzystając nadto z zależności

$$\alpha = \frac{Sl^2}{4EI}$$

wyrażamy spadek q prostej na rys. 3 w postaci

$$(3.1) \quad q = \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{l^2 E_a A_a}{4EI}$$

W przypadku armatury stalowej, z reguły w praktyce stosowanej, mamy do czynienia z dużymi wartościami bezwzględными q i z małymi odkształceniami η , a więc z częścią wykresu zbliżoną do osi rzędnych. Dla tej części krzywej możemy przyjąć w przybliżeniu w równaniach (2.18), (2.19) i (2.21) $\alpha_1 = 0$, $k_1 = \sin \alpha_1 = 0$, $K_1 = E_1 = \pi/2$ oraz $\alpha_2 = \pi/2$, $k_2 = \sin \alpha_2 = 1$, $K_2 = \infty$ i $E_2 = 1$. Na tej podstawie układ równań zasadniczych sprowadzamy do postaci przybliżonej

$$(3.2) \quad \left(\frac{K_2}{k_1}\right)^2 = \frac{K_2^2}{\sin^2 \alpha_1} = \alpha,$$

$$(3.3) \quad \frac{4k_1(K_1 - E_1)}{K_2} = \frac{4\sin \alpha_1(K_1 - E_1)}{K_2} = \eta,$$

$$(3.4) \quad K_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K_1 - E_1}$$

Aby uzyskać wyrażenie przybliżone dla różnicy $K_1 - E_1$ rozwiniemy pełne całki eliptyczne w szeregi potęgowe, które mają, jak wiadomo, postać

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right],$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \frac{k^6}{5} - \dots \right].$$

Zatrzymując tylko wyrazy drugiego stopnia otrzymamy w przybliżeniu

$$K_1 - E_1 = \frac{\pi}{4} k_1^2.$$

Stąd na podstawie równania (3.4)

$$K_2 = \frac{2}{k_1^2}.$$

Podstawiając otrzymane wartości do równań (3.2) i (3.3) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{4}{k_1^6}, \quad \eta = \frac{\pi}{2} k_1^5,$$

a stąd

$$(3.5) \quad \alpha = 4 \left(\frac{\pi}{2\eta}\right)^{6/5} = 6,88 \eta^{-6/5}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób przybliżone równanie części krzywej na rys. 3 położonej w pobliżu osi rzędnych. Ze wzoru obliczamy bezpośrednio

$$(3.6) \quad \frac{d\kappa}{d\eta} = -8,26 \eta^{-11/5}.$$

Jest to spadek stycznej do krzywej w punkcie (η, κ) . Styczna ta odetnie na osi rzędnych wielkość

$$\kappa_0 = \kappa - \left(\frac{d\kappa}{d\eta} \right) \eta.$$

Podstawiając $q = d\kappa/d\eta$ i wyrażając przez q wielkości η i κ na podstawie zależności (3.6) i (3.5) otrzymamy

$$(3.7) \quad \kappa_0 = 6,88 \left(-\frac{q}{8,26} \right)^{6/11} - q \left(-\frac{8,26}{q} \right)^{5/11}.$$

W celu dalszego jeszcze uproszczenia wzorów przyjmujemy w przybliżeniu dla wykładników potęgowych w (3.7): $6/11 \approx 5/11 \approx 1/2$; stąd otrzymamy

$$\kappa_0 = \left(\frac{6,88}{\sqrt{8,26}} + \sqrt{8,26} \right) \sqrt{-q}.$$

Po wyliczeniu i podstawieniu znanej wartości q ze wzoru (3.1) otrzymamy ostatecznie

$$(3.8) \quad \kappa_0 = 5,27 \frac{l}{2} \sqrt{\frac{E_a A_a}{EI}}.$$

Podstawiając

$$\kappa = \frac{S_0 l}{4EI}$$

otrzymamy przybliżoną wartość siły sprężającej krytycznej

$$(3.9) \quad S_{0kr} = 10,5 \frac{\sqrt{(EI)(E_a A_a)}}{l}.$$

Wzór ten ważny jest w założeniu małych odkształceń armatury, a więc również dla przypadku armatury stalowej. Ujmuje on w sposób wyraźny wpływ zarówno odkształcalności pierścienia (zginanego), jak i armatury (rozciąganej).

Na podstawie wzoru (3.9) możemy uzyskać wyrażenie dla maksymalnej (granicznej) smukłości elementu. Biorąc poszczególne wartości na jednostkę szerokości elementu (np. na jednostkę długości rury) i podstawiając

$$I = \frac{h^3}{12}, \quad S_0 = A_a \sigma_a = h \sigma,$$

gdzie σ_a i σ oznaczają odpowiednio naprężenia wstępne w armaturze i w pierścieniu, h wysokość przekroju, tj. grubość ścianki pierścienia, otrzymamy w przybliżeniu

$$(3.10) \quad \left(\frac{l}{h}\right)_{gr} = 3 \sqrt{\frac{E E_a}{\sigma \sigma_a}}$$

Stosunek $l/h = D\pi/h$ możemy uważać za miarę smukłości elementu; wzór (3.10) podaje graniczną wartość stosunku. W praktyce dla armatury stalowej będziemy mieli często $E_a = 2\,000\,000 \text{ kG/cm}^2$, $\sigma_a = 8500 \text{ kG/cm}^2$; doprowadzi to do wartości

$$(3.11) \quad \left(\frac{l}{h}\right)_{gr} = 46 \sqrt{\frac{E}{\sigma}}$$

Korzystając ze wzoru (3.11) rozważmy, jak będą kształtowały się smukłości graniczne pierścieni wykonanych z różnych materiałów. Przyjmując odpowiednie wartości E i σ dostaniemy:

(1) dla elementu stalowego

$$E = 2\,000\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma = 1400 \text{ kG/cm}^2, \quad \left(\frac{l}{h}\right)_{gr} = 1740;$$

(2) dla elementu żeliwnego

$$E = 700\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma = 1000 \text{ kG/cm}^2, \quad \left(\frac{l}{h}\right)_{gr} = 1210;$$

(3) dla elementu betonowego

$$E = 300\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma = 120 \text{ kG/cm}^2, \quad \left(\frac{l}{h}\right)_{gr} = 2300.$$

W przypadku rur ciśnieniowych, zaprojektowanych z pełnym wykorzystaniem wytrzymałości materiału, grubość ścianki h wyznacza się ze wzoru

$$h = \frac{D p}{2 \sigma_{dop}},$$

gdzie p oznacza nadciśnienie wewnętrzne, a σ_{dop} dopuszczalne naprężenie materiału pracującego na rozciąganie. Stanem niebezpiecznym z punktu widzenia wyboczenia jest stan bezużytkowy. Podstawiając $D = l/\pi$, otrzymamy minimalną wartość ciśnienia, dla której można zaprojektować element sprężony z pełnym wykorzystaniem naprężeń dopuszczalnych, zarówno w stanie bezużytkowym jak użytkowym:

$$\min p = 2 \pi \frac{\sigma_{dop}}{\left(\frac{l}{h}\right)_{gr}} \nu,$$

(ν oznacza przyjęty współczynnik bezpieczeństwa). Znajdźmy to ciśnienie dla rozpatrywanych wyżej przykładów.

(1) Element stalowy

$$\sigma = 1400 + 1400 = 2800 \text{ kG/cm}^2$$

(pierwszy składnik oznacza naprężenie wstępne ściskające, drugi naprężenie dopuszczalne rozciągające),

$$\min p = \nu 10 \text{ at.}$$

(2) Element żeliwny

$$\sigma = 1000 + 400 = 1400 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\min p = \nu 7,3 \text{ at.}$$

(3) Element betonowy

$$\sigma = 120 + 0 = 120 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\min p = \nu 1/3 \text{ at.}$$

Z powyższego widzimy, że o ile w przypadku elementów betonowych problem stateczności na ogół nie gra roli, o tyle w elementach żeliwnych, a zwłaszcza stalowych, sytuacja przedstawia się raczej niekorzystnie.

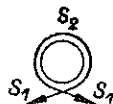
Należy jednak pamiętać, że wzory nasze zostały wyprowadzone dla pierścienia kołowego nie wzmocnionego żadnymi dodatkowymi elementami. Przy współpracy tego rodzaju elementów, jak np. kołnierze rur, dno zbiornika itp., siły krytyczne mogą być znacznie wyższe. Podobną rolę zabezpieczającą mogą grać wszelkie połączenia armatury z elementem, nie pozwalające na jej odseparowanie się od pierścienia, jak np. celowo założone na obwodzie punkty zaczepienia armatury z elementem, również warstwa torkretu, o ile jest ona dostatecznie związana z betonem. Niebezpieczeństwo wyboczenia zachodzi w zasadzie dopiero po zakończeniu uzwojenia elementu (w chwili, gdy uzwojenie obejmuje dopiero część elementu, pozostała jego część współpracuje statycznie w sensie odciążającym).

Na koniec chcielibyśmy poświęcić kilka słów dokładności wyłożonej teorii. Pominięcie przez nas wpływu odkształceń osiowych pierścienia może grać pewną rolę, zwłaszcza dla elementów stalowych, w których odkształcenia pierścienia są mniejsze od odkształceń armatury tylko w stosunku odpowiednich naprężeń (tj. 6 do 7-krotnie). Uwzględnienie tych odkształceń zmniejszyłoby wartość siły krytycznej, gdyż przy wyboczeniu dodatkowa porcja energii potencjalnej, zużytej na ściskanie pierścienia, przeszłaby w formę energii zginania.

Przeciwny wpływ wywarłoby uwzględnienie tarcia uzwojenia sprężającego, przesuwającego się po pierścieniu podczas wyboczenia. Tarcie wywołuje straty energii i układ nasz przestałby być układem zachowawczym. Zdaniem naszym wpływ ten może grać rolę dominującą i być przyczyną nawet znacznych niezgodności teorii z doświadczeniem⁷⁾.

⁷⁾ Aby zilustrować wpływ tarcia, podajemy dla przykładu, że dla pierścienia sprężonego według schematu obok, przy współczynniku tarcia $\mu = 0,3$ i przy zastosowaniu znanego wzoru wykładniczego

$$S_2 = S_1 e^{-\mu\varphi} = S_1 e^{-0,3\pi} = 0,39 S_1.$$



W rzeczywistości siły krytyczne mogą więc być znacznie wyższe od teoretycznych. Teoretyczne ujęcie wpływu tarcia nie byłoby, jak się wydaje, łatwe, zwłaszcza gdy uwzględnimy, że procesowi przeskoku z jednej formy równowagi do drugiej towarzyszą drgania, które mogą wywierać wpływ na współczynnik tarcia.

Natomiast drugim istotnym czynnikiem wpływającym na przebieg zjawisk w kierunku przeciwnym niż tarcie mogą być odstępstwa od założonej sprężystości liniowej materiału. Nie trudno obliczyć, co tutaj pomijamy, że przy znalezionych powyżej smukłościach granicznych naprężenia maksymalne w silnie odkształconej części pierścienia mogą przekraczać (nawet kilkakrotnie) granicę plastyczności względnie proporcjonalności. Na to, ażeby pozostawać w obszarze sprężystości liniowej, a zatem w granicach ścisłości teorii, należałoby, jak to wynika ze wzoru (3.10), obniżyć naprężenia wstępne w armaturze lub w pierścieniu. Przy pełnym wykorzystaniu armatury naprężenia wstępne w pierścieniu mogłyby być zaledwie rzędu około 200 do 600 kG/cm² dla elementu stalowego (o granicy plastyczności 2500 kG/cm²), 20 do 60 kG/cm² dla elementu betonowego. Przy naprężeniach równych dopuszczalnym pozostanie w obszarze sprężystości byłoby możliwe jedynie przy obniżeniu naprężeń wstępnych w armaturze. W przypadku materiału o wyraźnej granicy plastyczności wystarczyłoby, być może, w pewnych wypadkach przyjęcie modelu pierścienia sprężystego z «przegubem plastycznym» w punkcie *E* (rys. 2). Dla elementów z materiałów kruchych, np. betonowych, bardziej celowe byłoby zapewne oparcie rozważań na teorii nośności granicznej.

Z powyższego widzimy, że obraz zjawisk rzeczywistych jest skomplikowany i podana teoria może być uważana tylko za pierwsze przybliżenie, ilustrujące zwłaszcza jakościową stronę problemu. W tej sytuacji uzasadnione wydaje się podjęcie badań, które wyświetliłyby zagadnienie na drodze doświadczalnej.

Literatura cytowana w tekście

[1] E. P. Попов, *Nelinejnyje zadaczi statiki tonkich stierżniej*, Gostechizdat, 1948.

Резюме

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ, НАПРЯЖЕННЫХ АРМАТУРОЙ В ВИДЕ ОБМОТКИ

В работе рассматривается вопрос выпучивания элементов в форме кругового кольца (основная форма для труб, резервуаров и т.п.) под влиянием силы, производимой натягающей арматурой, наложенной по контуру, в виде обмотки. Проблема решается в области линейной

упругости материала, на основании нелинейной теории тонких стержней. Решение получается в виде эллиптических интегралов. Доказано, что недеформированная форма кольца является, в основном, устойчивой формой равновесия при любых конечных значениях напрягающей силы, а кольцо может перейти в деформированную форму под влиянием временных деформаций конечной величины. Величина этих деформаций уменьшается до нуля при неограниченном возрастании напрягающей силы. Вычислено критическое значение напрягающей силы, при которой возможен рассматриваемый скачок. На основании общей теории приводятся приближенные формулы для критической силы и предельная гибкость элементов для различных материалов, применяемых на практике, как бетон, чугун, сталь [формулы (3.9), (3.10) и след.]. Доказано, что проблема может иметь практическое значение, особенно для напряженных металлических элементов.

Summary

THE STABILITY OF PRESTRESSED ELEMENTS BY MEANS OF BINDING

The buckling problem of annular elements (which is the basic problem for tubes, tanks, etc.) is treated in this paper, the buckling force being due to a hooping around the element (by means of prestressed reinforcement). The problem is solved in the range of linear elasticity on the basis of the non-linear theory of thin bars; the solution is obtained in the form of elliptic integrals. It is shown that the form of the equilibrium in the undeformed state is stable, in principle, for any finite value of the stressing force. The (durably) deformed shape can be reached under the influence of an instantaneous forced deformation of finite value. This value tends to zero if the stressing force tends to infinity. The critical value of the prestressing force for which this "jump" is possible, is calculated. On the basis of the general theory approximate equations for the critical force are obtained, as well as the limit value of slenderness of the elements for different materials, such as concrete, cast iron, steel [Eqs. (3.9), (3.10) and the following]. It is also shown that the problem can be of considerable practical importance, especially for prestressed metal elements.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lutego 1956 r.