

ZYGMUNT THRUN

**O ODKSZTAŁCENIACH I NAPRĘŻENIACH TERMICZNYCH
W CIENKICH PŁYTACH PROSTOKĄTNYCH I KOŁOWYCH
O ZMIENNEJ GRUBOŚCI**

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LVII**

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	525
2. Płyty prostokątne	526
2.1. Równania różniczkowe ugięcia płyty	526
2.2. Płyta prostokątna dookoła utwierdzona o liniowo zmiennej sztywności	527
2.3. Płyta prostokątna o liniowo zmiennej sztywności wzdłuż dwóch równoległych brzegów wolno podparta	529
3. Płyty okrągłe	532
3.1. Równania różniczkowe ugięcia płyty pod wpływem zmian temperatury w układzie współrzędnych biegunowych	532
3.2. Płyty okrągłe o parabolicznie zmiennej sztywności	533
3.3. Płyty okrągłe o sztywności dowolnie kołowo symetrycznie zmiennej	538

1. Wstęp

Zagadnienie zginania płyty o zmiennej grubości pod wpływem obciążeń siłami zewnętrznymi zostało w literaturze technicznej opracowane jedynie fragmentarycznie i przy pewnych specjalnych założeniach ograniczających (dotyczących zmiany sztywności, obciążenia i podparcia płyty). Rozwiązania ogólniejsze napotykają na znaczne trudności matematyczne i nie zostały dotychczas opracowane. Z tej dziedziny znane są prace O. Pichlera, N. J. Nielsena, S. Timoszenki i Gran Olssona¹⁾. Autor nie spotkał się natomiast w literaturze z zagadnieniem odkształceń i naprężeń termicznych w płytach o zmiennej sztywności na zginanie. Artykuł niniejszy jest próbą pierwszego ujęcia tego zagadnienia przy jednoczesnym wykorzystaniu niektórych rozwiązań wymienionych autorów, dotyczących obliczeń płyt o zmiennej sztywności przy obciążeniu siłami zewnętrznymi. Rozważania przeprowadzono przy założeniu, że materiał płyty jest jednorodny i izotropowy, a płyta nie jest obciążona czynnymi siłami zewnętrznymi. Rozważamy jedynie wpływ nierównomiernej zmiany temperatury płyty T w stosunku do izotermicznego stanu początkowego $T = 0$. W dalszym ciągu zakładamy, że rozkład temperatury jest stały (tzn. niezależny od czasu), a temperatura jest wprost proporcjonalna od odległości z rozpatrywanego punktu przekroju płyty od powierzchni środkowej:

$$(1.1) \quad T(x, y, z) = z \tau(x, y).$$

Dla rozkładu temperatury niezależnego od czasu wiadomo z teorii ciepła, że w częściach ciała wolnych od źródeł ciepła funkcja T spełnia równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

czyli że w naszym przypadku

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0.$$

¹⁾ Por. [1] - [5].

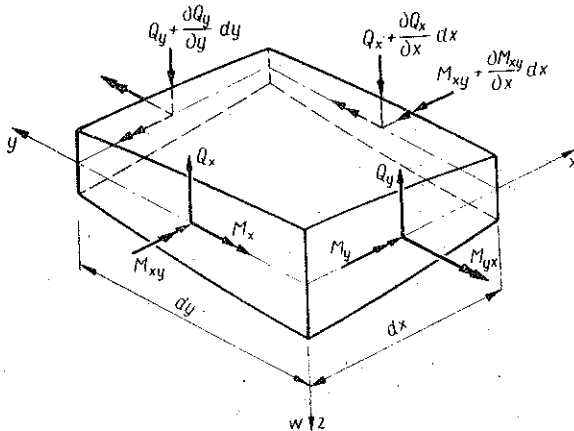
Dla współrzędnych biegunowych natomiast mamy

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \varphi^2} = 0.$$

2. Płyty prostokątne

2.1. Równania różniczkowe ugięcia płyty. Z warunku równowagi w kierunku pionowym elementarnego wycinka płyty (rys. 1) przy braku obciążeń siłami zewnętrznymi wynika, że

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0.$$



Rys. 1

Dwóch dalszych zależności dostarczają następujące równania równowagi momentów:

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \\ Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \end{cases}$$

Jeżeli momenty zginające wyrazimy za pomocą odkształceń termicznych, a następnie za pomocą przesunięć, to otrzymamy znane wzory²⁾:

$$(2.1.3) \quad \begin{cases} M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon(1+\nu)\tau \right], \\ M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon(1+\nu)\tau \right], \\ M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

W powyższych równaniach w oznacza przesunięcie pionowe punktu powierzchni środkowej płyty (rys. 1), ε współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej materiału płyty, ν liczbę Poissona, D tzw. sztywność płyty równą $Eh^3/12(1-\nu^2)$.

Siły tnące (2.1.2) wyznaczamy za pomocą zależności (2.1.3) w postaci następującej:

²⁾ Wyprowadzenie tych zależności znaleźć można w pracy [4], s. 58 oraz w [5], s. 556.

$$(2.1.4) \quad \begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - \frac{\partial D}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial D}{\partial y} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\ - \varepsilon (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} (D \tau), \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) - \frac{\partial D}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial D}{\partial x} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\ - \varepsilon (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} (D \tau). \end{cases}$$

Symbol ∇^2 oznacza tutaj operator Laplace'a $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Po podstawieniu powyższych wyrażeń do równania równowagi (2.1.1) otrzymamy równanie różniczkowe ugięcia płyty

$$(2.1.5) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) + \\ + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\varepsilon (1+\nu) \nabla^2 (D \tau).$$

Równanie (2.1.5) możemy też przedstawić w postaci nieco skróconej

$$(2.1.6) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ = -\varepsilon (1+\nu) \nabla^2 (D \tau).$$

Jest to ogólne równanie różniczkowe ugięcia płyty o dowolnie zmiennej sztywności na zginanie D pod wpływem zmiany temperatury τ .

Z powyższego wynika, że w odróżnieniu od płyt o stałej grubości równanie różniczkowe płyt o zmiennej sztywności nie jest jednorodne, nawet jeżeli temperatura spełnia założoną zależność (1.2). Mianowicie

$$(2.1.7) \quad \nabla^2 (D \tau) = \tau \nabla^2 D + 2 \left(\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \right).$$

2.2. Płyta prostokątna dookoła utwierdzona o liniowo zmiennej sztywności. Dla płyty o liniowo zmiennej sztywności równanie różniczkowe (2.1.6) będzie jednorodne,

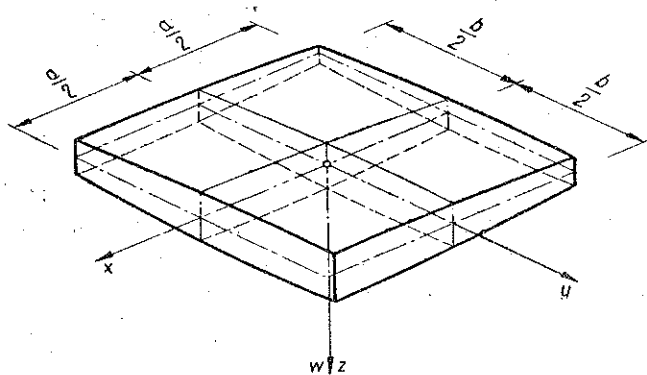
$$(2.2.1) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) = 0,$$

w dwóch przypadkach: (1) jeżeli sztywność płyty zmienia się liniowo w obu kierunkach x i y (rys. 2),

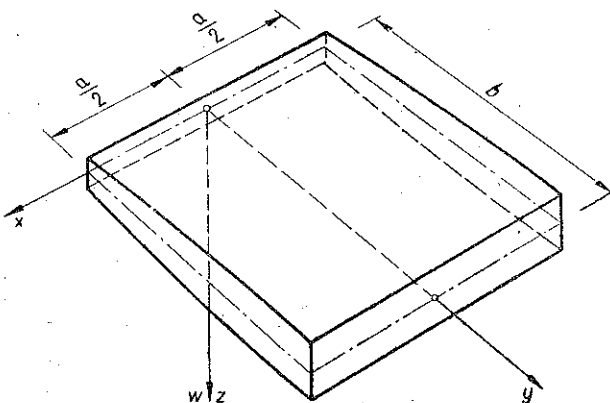
$$D = D_0 + D_1 x + D_2 y,$$

lecz zmiana temperatury jest stała, $\tau = \text{const}$, oraz (2) jeżeli sztywność płyty zmienia się liniowo tylko wzdłuż jednej osi (np. osi y) układu współrzędnych (rys. 3),

$$(2.2.2) \quad D = D_0 + D_1 y,$$



Rys. 2



Rys. 3

a zmiana temperatury τ jest funkcją tylko drugiej zmiennej (np. x),

$$(2.2.3) \quad \tau = \tau(x).$$

Łatwo sprawdzić, iż wszystkie warunki brzegowe podparcia oraz samo równanie (2.2.1) w przypadku płyty wzdłuż wszystkich krawędzi utwierdzonej spełnia założenie

$$(2.2.4) \quad w(x, y) = 0.$$

Płyta w dwóch przedstawionych przypadkach pozostaje nieodkształcona.

Momenty zginające, skręcające i siły tnące wyznaczmy tu ze wzorów (2.1.3) i (2.1.4):

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} M_x = M_y = -\varepsilon(1+\nu)D\tau, \\ M_{xy} = M_{yx} = 0, \\ Q_x = -\varepsilon(1+\nu)\frac{\partial}{\partial x}(D\tau), \\ Q_y = -\varepsilon(1+\nu)\frac{\partial}{\partial y}(D\tau). \end{cases}$$

2.5. Płyta prostokątna o liniowo zmiennej sztywności wzdłuż dwóch równoległych brzegów wolno podparta. W dalszym ciągu będziemy rozważali płytę o liniowo zmiennej sztywności [wzór (2.2.2), rys. 3], wolno podpartą wzdłuż krawędzi $x = \pm a/2$ i poddaną działaniu temperatury $\tau = \text{const}$. Dwie pozostałe krawędzie płyty mogą być utwierdzone, swobodne lub wolno podparte. Rozwiązanie równania różniczkowego zagadnienia

$$(2.3.1) \quad \nabla^2[(D_0 + D_1 y)\nabla^2 w] = 0$$

przyjmiemy w postaci sumy

$$(2.3.2) \quad w = w_1 + w_2.$$

Funkcje w_1 i w_2 mają spełnić następujące warunki brzegowe dla $x = \pm a/2$:

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} w_1 = 0, & w_2 = 0, \\ M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon(1+\nu)\tau \right] = 0. \end{cases}$$

Ostatni warunek brzegowy można przedstawić następująco:

$$(2.3.4) \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = \nabla^2 w_1 = -\varepsilon(1+\nu)\tau, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \nabla^2 w_2 = 0.$$

Poza tym rozwiązanie w powinno zawierać cztery stałe oraz spełniać 4 dowolne warunki brzegowe wzdłuż krawędzi płyty $y = 0$ i $y = b$. Przyjmujemy funkcję w_1 w postaci szeregu

$$(2.3.5) \quad w_1 = \varepsilon(1+\nu)\tau \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \cos a_n x,$$

gdzie $a_n = n\pi/a$.

Szereg ten spełnia równanie różniczkowe zagadnienia (2.3.1) oraz podane warunki brzegowe (2.3.3) i (2.3.4).

Dla wyznaczenia funkcji w_2 rozdzielimy równanie (2.3.1) na dwa równania różniczkowe:

$$(2.3.6) \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad \nabla^2 w_2 = \varphi_2/D.$$

Funkcję φ_2 dobieramy tak, ażeby wzdłuż krawędzi $x = \pm a/2$ był spełniony warunek brzegowy $\varphi_2 = 0$.

Wobec tego zakładamy, że

$$\varphi_2 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \Phi_n(y) \cos a_n x \quad \left(a_n = \frac{n\pi}{a} \right).$$

Pierwsze z równań (2.3.6) jest równoważne równaniu

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dy^2} - a_n^2 \Phi_n = 0,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja $\Phi_n = A_1 e^{a_n y} + A_2 e^{-a_n y}$, gdzie A_1 i A_2 oznaczają wielkości stałe.

Wobec tego drugie równanie (2.3.6) możemy wyrazić w postaci

$$(2.3.7) \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \frac{1}{D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos a_n x (A_1 e^{a_n y} + A_2 e^{-a_n y}).$$

Dla rozwiązania powyższego przyjmujemy

$$(2.3.8) \quad w_2 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_n(y) \cos a_n x \quad (a_n = n\pi/a).$$

Takie założenie spełnia warunki brzegowe (2.3.3) i (2.3.4). Podstawiając (2.3.8) do równania (2.3.7) otrzymamy niejednorodne równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.3.9) \quad \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - a^2 Y_n = \frac{1}{D} (A_1 e^{a_n y} + A_2 e^{-a_n y}).$$

Całą ogólną jednorodnego równania jest funkcja

$$(2.3.10) \quad Y_0 = \bar{C}_1 e^{ay} + \bar{C}_2 e^{-ay}.$$

Całkę szczególną Y_1 niejednorodnego równania (2.3.9) wyznaczymy metodą wariacji stałych³⁾. Szukać będziemy rozwiązania w postaci

$$Y_1 = B_1(y) e^{a_n y} + B_2(y) e^{-a_n y}.$$

Funkcje $B_1(y)$ i $B_2(y)$ muszą spełniać układ dwóch równań różniczkowych:

$$\frac{dB_1}{dy} e^{a_n y} + \frac{dB_2}{dy} e^{-a_n y} = 0,$$

$$\frac{dB_1}{dy} a e^{a_n y} - \frac{dB_2}{dy} a e^{-a_n y} = \frac{1}{D} (A_1 e^{a_n y} + A_2 e^{-a_n y}).$$

³⁾ Por. [2], s. 197.

Stąd znajdziemy

$$\frac{dB_1}{dy} = \frac{1}{2\alpha D} (A_1 + A_2 e^{-2\alpha y}),$$

$$\frac{dB_2}{dy} = \frac{-1}{2\alpha D} (A_1 e^{2\alpha y} + A_2).$$

Całkując wyznaczmy funkcje B_1 i B_2 :

$$B_1 = \frac{1}{2\alpha} \int \frac{1}{D} (A_1 + A_2 e^{-2\alpha y}) dy = \frac{A_1}{2\alpha D_1} \ln \left(2\alpha \frac{D}{D_1} \right) + \frac{A_2}{2\alpha D_1} e^{2\alpha D_0/D_1} \int \frac{e^{-2\alpha D/D_1}}{2\alpha D} d(2\alpha D),$$

$$B_2 = \frac{-1}{2\alpha} \int \frac{1}{D} (A_1 e^{2\alpha y} + A_2) dy = \frac{-A_2}{2\alpha D_1} \ln \left(2\alpha \frac{D}{D_1} \right) - \frac{A_1}{2\alpha D_1} e^{-2\alpha D_0/D_1} \int \frac{e^{2\alpha D/D_1}}{2\alpha D} d(2\alpha D).$$

Oznaczając całkowe funkcje wykładnicze symbolami

$$E_i(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^u}{u} du, \quad E_i(-u) = \int_{\infty}^u \frac{e^{-u}}{u} du,$$

wyznamy ostatecznie całkę ogólną równania niejednorodnego (2.3.9) w postaci następującej:

$$(2.3.11) \quad Y = Y_0 + Y_1 = \bar{C}_1 e^{\alpha y} + \bar{C}_2 e^{-\alpha y} + \bar{C}_3 e^{\alpha y} \left[\ln \frac{2\alpha D}{D_1} - e^{-\frac{2\alpha D}{D_1}} E_i \left(\frac{2\alpha D}{D_1} \right) \right] + \bar{C}_4 e^{\alpha y} \left[e^{-\frac{2\alpha D}{D_1}} \ln \frac{2\alpha D}{D_1} - E_i \left(-\frac{2\alpha D}{D_1} \right) \right].$$

Tak więc równanie powierzchni ugięcia płyty jest następujące:

$$(2.3.12) \quad w = w_1 + w_2 = \varepsilon (1 + \nu) \tau \frac{4a^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos \alpha x \left[\frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} + C_1 e^{\alpha y} F_1(\eta) + C_2 e^{\alpha y} F_2(\eta) + C_3 e^{\alpha y} + C_4 e^{-\alpha y} \right],$$

gdzie

$$F_1(\eta) = e^{-\eta} \ln \eta - E_i(-\eta), \quad \alpha = n\pi/a,$$

$$F_2(\eta) = \ln \eta - e^{-\eta} E_i(\eta), \quad \eta = 2\alpha(D_0 + D_1 y)/D_1.$$

Cztery stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 wyznaczmy z czterech warunków brzegowych podparcia płyty wzdłuż krawędzi $y = 0$ i $y = b$. Np. dla krawędzi wolnopodpartej mamy

$$w = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -\varepsilon(1+\nu)\tau.$$

Dla krawędzi utwierdzonej zupełnie natomiast mamy

$$w = 0 \quad \text{oraz} \quad \partial w / \partial y = 0.$$

Z warunków brzegowych dla dwóch krawędzi otrzymujemy w ten sposób układ 4 równań, z których wyznaczamy stałe C_1, \dots, C_4 . Wyrażenia na momenty zginające i skręcające otrzymamy według wzorów (2.1.3).

5. Płyty okrągłe

3.1. Równania różniczkowe ugięcia płyty pod wpływem zmian temperatury w układzie współrzędnych biegunowych. Równanie różniczkowe ugięcia w układzie biegunowym dla płyt okrągłych otrzymamy bezpośrednio z równania (2.1.8) przez zastąpienie współrzędnych prostokątnych x i y przez współrzędne biegunowe r i φ :

$$(3.1.1) \quad \nabla^2(D\nabla^2 w) - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = -\varepsilon(1+\nu)\nabla^2(D\tau),$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Momenty zginające, otrzymane ze wzorów (2.1.3), wyrazimy w postaci:

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \varepsilon(1+\nu)\tau \right], \\ M_\varphi = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \varepsilon(1+\nu)\tau \right], \\ M_{r\varphi} = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

Przyjmijmy, że sztywność płyt okrągłych zmienia się kołowo symetrycznie, tj. że $D = D(r)$. Wówczas równanie różniczkowe (3.1.1) uprości się znacznie:

$$(3.1.3) \quad \nabla^2(D\nabla^2 w) - (1-\nu) \left[\frac{d^2 D}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{dD}{dr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = \\ = -\varepsilon(1+\nu)\nabla^2(D\tau).$$

Jeżeli temperatura τ oraz sztywność i podparcie płyty zmieniają się kołowo symetrycznie, tzn. $\tau = \tau(r)$ oraz $D = D(r)$, to z równania (3.1.3) otrzymamy

$$(3.1.4) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dD}{dr} \frac{dw}{dr} \right) = -\varepsilon (1+\nu) \nabla^2 (D \tau).$$

3.2. Płyty okrągłe o parabolicznie zmiennej sztywności. Z równania (3.1.3) wynika, że dodatkowe uproszczenia otrzymamy przy przyjęciu takiej zmienności sztywności płytowej, dla której spełniony jest warunek

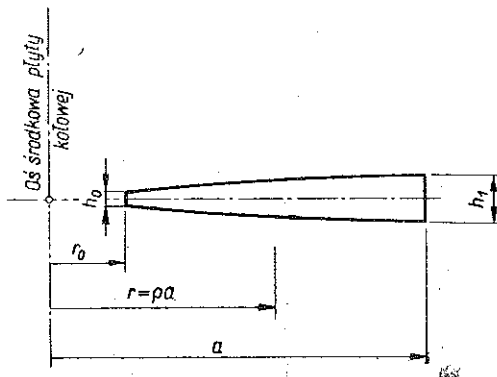
$$\frac{d^2 D}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{dD}{dr}.$$

Warunek ten spełnia paraboliczny rozkład sztywności

$$D = D_0 + D_1 r^2.$$

Równanie (3.1.3) przyjmie wtedy postać uproszczoną:

$$(3.2.1) \quad \nabla^2 (D \nabla^2 w) - 2 D_1 (1-\nu) \nabla^2 w = -\varepsilon (1+\nu) \nabla^2 (D \tau).$$



Rys. 4

Można je rozdzielić na układ dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu

$$(3.2.2) \quad \nabla^2 \Phi - \frac{2(1-\nu)}{r^2} \Phi = -\varepsilon (1+\nu) \nabla^2 (D \tau), \quad \nabla^2 w = \frac{\Phi}{D},$$

gdzie $D = D_1 r^2$.

Przekrój płyty okrągłej o kwadratowym rozkładzie sztywności wzdłuż promienia przedstawia rys. 4. W literaturze⁴⁾ znane jest rozwiązanie ogólne równań (3.2.2) dotyczące płyty obciążonej siłami zewnętrznymi. Całka ogólna równania (3.2.1) jednorodnego jest następująca:

$$(3.2.3) \quad w = R_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\varrho) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{R}_n(\varrho) \sin n\varphi$$

gdzie $\varrho = r/a$,

$$R_0(\varrho) = A_0 + B_0 \ln \varrho + C_0 \varrho^{m_0} + D_0 \varrho^{-m_0}, \quad m = \sqrt{n^2 + 2(1-\nu)},$$

$$R_n(\varrho) = A_n \varrho^n + B_n \varrho^{-n} + C_n \varrho^m + D_n \varrho^{-m}, \quad m_0 = \sqrt{2(1-\nu)},$$

$$\bar{R}_n(\varrho) = \bar{A}_n \varrho^n + \bar{B}_n \varrho^{-n} + \bar{C}_n \varrho^m + \bar{D}_n \varrho^{-m}. \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

⁴⁾ Por. [2], s. 14-18.

Przez $A_0, B_0, \dots, A_n, B_n, \dots, \bar{A}_n, \dots, \bar{D}_n$ oznaczono wielkości stałe.

Dla wyznaczenia całki szczególnej równania niejednorodnego (3.2.1) możemy też skorzystać ze znanego rozwiązania równania⁵⁾ dotyczącego obciążenia płyty, w którym funkcję $p(r, \varphi)$ zastąpimy przez $-\varepsilon(1+\nu)\nabla^2(D\tau)$. Jako całkę ogólną niejednorodnego równania (3.2.1) otrzymamy funkcję (3.2.3), przy czym występujące w niej symbole $A_0, \dots, D_0, \dots, A_n, \dots, \bar{D}_n$ zastąpimy następującymi funkcjami:

$$(3.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = a_0 + \frac{1}{2(1-\nu)} \int \gamma_0(\varrho) \varrho \ln \varrho d\varrho, \\ B_0 = b_0 - \frac{1}{2(1-\nu)} \int \gamma_0(\varrho) \varrho d\varrho, \\ C_0 = c_0 + \frac{1}{4m_0(1-\nu)} \int \gamma_0(\varrho) \varrho^{1-m_0} d\varrho, \\ D_0 = d_0 - \frac{1}{4m_0(1-\nu)} \int \gamma_0(\varrho) \varrho^{1+m_0} d\varrho, \\ A_n = a_n - \frac{1}{4n(1-\nu)} \int \gamma_n(\varrho) \varrho^{1-n} d\varrho, \\ B_n = b_n + \frac{1}{4n(1-\nu)} \int \gamma_n(\varrho) \varrho^{1+n} d\varrho, \\ C_n = c_n + \frac{1}{4m(1-\nu)} \int \gamma_n(\varrho) \varrho^{1-m} d\varrho, \\ D_n = d_n - \frac{1}{4m(1-\nu)} \int \gamma_n(\varrho) \varrho^{1+m} d\varrho. \end{array} \right.$$

Analogicznie określimy symbole $\bar{A}_n, \dots, \bar{D}_n$. We wzorach (3.2.4) przyjęto oznaczenia:

$$(3.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0(\varrho) = \frac{-\varepsilon(1+\nu)a^2}{2\pi D_1} \int_0^{2\pi} \nabla^2(D\tau) d\varphi, \\ \gamma_n(\varrho) = \frac{-\varepsilon(1+\nu)a^2}{\pi D_1} \int_0^{2\pi} \nabla^2(D\tau) \cos n\varphi d\varphi, \\ \bar{\gamma}_n(\varrho) = \frac{-\varepsilon(1+\nu)a^2}{\pi D_1} \int_0^{2\pi} \nabla^2(D\tau) \sin n\varphi d\varphi. \end{array} \right.$$

⁵⁾ Por. [2], s. 14-18.

Stałe $a_0, \dots, d_0, a_n, \dots, d_n$ oraz $\bar{a}_n, \dots, \bar{d}_n$ we wzorach (3.2.4) wyznaczamy ze znanych warunków brzegowych zagadnienia. W ten sposób równanie (3.2.3) przedstawia powierzchnię ugięcia płyty okrągłej o kwadratowej zmienności sztywności pod działaniem temperatury, której rozkład określa funkcja

$$T(\varrho, \varphi, z) = z \tau(\varrho, \varphi).$$

Przykład 1. Płyta o kwadratowo zmiennej sztywności i kołowo symetrycznym rozkładzie temperatury T . Jeżeli rozkład temperatury w płycie oraz podparcia krawędzi są kołowo symetryczne,

$$(3.2.6) \quad T(\varrho, z) = z \tau(\varrho),$$

to i powierzchnia ugięcia płyty jest kołowo symetryczna.

Powierzchnię ugięcia $w(\varrho)$ otrzymamy jako szczególny przypadek ogólnego rozwiązania (3.2.3)

$$(3.2.7) \quad w(\varrho) = R_0(\varrho) = A_0 + B_0 \ln \varrho + C_0 \varrho^{m_0} + D_0 \varrho^{-m_0},$$

gdzie wielkości A_0, B_0, C_0 i D_0 wyznaczmy ze wzorów (3.2.4) i (3.2.5). Łatwo dowieść, że to samo wyrażenie otrzymamy z bezpośredniego rozwiązania równania różniczkowego (3.2.1), które dla przypadku «obciążenia» kołowo symetrycznego staje się zwyczajnym równaniem liniowym o następujących współczynnikach funkcyjnych:

$$(3.2.8) \quad \varrho^4 \frac{d^4 w}{d \varrho^4} + 6 \varrho^3 \frac{d^3 w}{d \varrho^3} + (5 + 2\nu) \varrho^2 \frac{d^2 w}{d \varrho^2} - (1 - 2\nu) \varrho \frac{dw}{d \varrho} = \\ = -4(1 + \nu) \varepsilon a^2 \varrho^2 \left(\tau + \varrho \frac{d \tau}{d \varrho} \right),$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

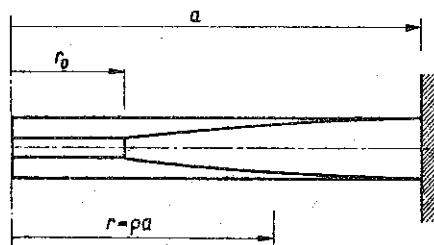
$$(3.2.9) \quad w(\varrho) = \bar{A}_0 + \bar{B}_0 \ln \varrho + \\ + \bar{C}_0 \varrho^{m_0} + \bar{D}_0 \varrho^{-m_0} + \bar{w}(\tau),$$

gdzie $m_0 = \sqrt{2(1 - \nu)}$, a $\bar{w}(\tau)$ jest całką szczególną równania niejednorodnego (3.2.8).

Rozważmy przykład płyty pierścieniowej utwierdzonej zupełnie wzdłuż zewnętrznego obwodu (rys. 5) oraz swobodnej na krawędzi obwodu wewnętrznego. Niech przebieg zmian temperatury w płycie przedstawia funkcja

$$(3.2.10) \quad T(z) = z \tau_0,$$

przy czym $\tau_0 = \text{const.}$



Rys. 5

Ogólne rozwiązanie (3.2.9) równania różniczkowego (3.2.8) otrzymamy także ze wzorów (3.2.4) i (3.2.5). Całkę szczególną \bar{w} ogólnego rozwiązania (3.2.9) łatwo wyznaczymy po zastąpieniu prawej strony równania różniczkowego (3.2.8) przez wyrażenie

$$-4\varepsilon(1+\nu)a^2\tau_0\varrho^2.$$

Całką szczególną będzie następująca funkcja:

$$(3.2.11) \quad \bar{w}(\tau) = -\frac{1}{2}\varepsilon a^2\tau_0\varrho^2.$$

Stałe A_0, \dots, D_0 wyznaczamy z układu równań określających warunki brzegowe podparcia płyty:

dla $\varrho = \varrho_0$

$$M_\varrho = 0, \quad -\bar{B}_0 + C_0(2 - m_0)\varrho_0^{m_0} + D_0(2 + m_0)\varrho_0^{-m_0} = 0,$$

$$Q_\varrho = 0, \quad -\bar{B}_0 = 0;$$

dla $\varrho = 1$

$$w = 0, \quad \bar{A}_0 + \bar{C}_0 + D_0 = \frac{1}{2}\varepsilon\tau_0a^2,$$

$$\frac{dw}{d\varrho} = 0, \quad \bar{B}_0 + C_0m_0 - \bar{D}_0m_0 = \varepsilon\tau_0a^2.$$

Stąd otrzymamy

$$\bar{B}_0 = 0, \quad \bar{C}_0 = \frac{\varepsilon\tau_0a^2}{m_0 \left[1 + \frac{(2 - m_0)\varrho_0^{2m_0}}{(2 + m_0)} \right]},$$

$$\bar{D}_0 = \bar{C}_0 - \frac{1}{m_0}\varepsilon\tau_0a^2, \quad \bar{A}_0 = -2\bar{C}_0 + \frac{(2 + m_0)}{2m_0}\varepsilon\tau_0a^2.$$

Po wyznaczeniu stałych równanie powierzchni ugięcia otrzymamy ze wzoru (3.2.9).

Momenty zginające otrzymamy ze wzorów (3.1.2):

$$(3.2.12) \quad \begin{cases} M_\varrho = -D_1(1-\nu) [\bar{C}_0(2 - m_0)\varrho^{m_0} + \bar{D}_0(2 + m_0)\varrho^{-m_0}], \\ M_\varphi = -D_1(1-\nu) [\bar{C}_0(m_0 + 2\nu)\varrho^{m_0} - \bar{D}_0(m_0 - 2\nu)\varrho^{-m_0}]. \end{cases}$$

Wykresy ugięć i momentów przedstawiono na rys. 6 dla danych⁶⁾

$$\varrho_0 = 1/4, \quad \nu = 1/2.$$

⁶⁾ Ze względu na prostotę obliczeń przyjęto $\nu = 1/2$, wtedy $m_0 = 1$.

Wyznamy jeszcze momenty zginające dla płyty o stałej wysokości oraz o sztywności takiej samej jak w płycie wyżej rozpatrzonej w przekroju $\varrho = 5/8$. Sztywność płyty $D = D_1 (5a/8)^2 = 0,3906 D_1 a^2 = \text{const}$, temperatura $\tau = \text{const}$.

Dla $D = \text{const}$ równanie różniczkowe (3.1.4) przyjmie postać biharmoniczną:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \times \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

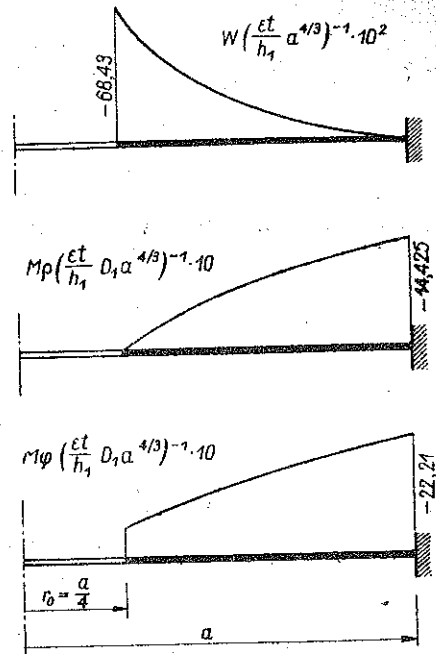
$$w = A_0 + B_0 \varrho^2 + C_0 \varrho^2 \ln \varrho + D_0 \ln \varrho.$$

Z danych warunków brzegowych wyznaczamy stałe:

$$C_0 = 0,$$

$$A_0 = -B_0 = \frac{1}{2} D_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \tau a^2 \left[1 + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \varrho_0^{-2} \right]^{-1}.$$



Rys. 6

Stąd mamy równanie powierzchni ugięcia i momenty zginające:

$$w = \frac{\varepsilon \tau a^2 (1 - \varrho^2 + 2 \ln \varrho)}{2 \left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \varrho_0^{-2} \right)},$$

$$M_r = D(1+\nu) \varepsilon \tau \left(\frac{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \varrho^{-2}}{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \varrho_0^{-2}} - 1 \right),$$

$$M_\varphi = D(1+\nu) \varepsilon \tau \left(\frac{1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \varrho^{-2}}{1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \varrho_0^{-2}} - 1 \right).$$

Maksymalne wartości momentów zginających na krawędzi utwierdzenia wyniosą dla $\varrho_0 = 1/4$, $\nu = 1/2$ i $\varrho = 1$:

$$\max M_r = -0,525 D_1 \varepsilon \tau a^2, \quad \max M_\varphi = -0,463 D_1 \varepsilon \tau a^2.$$

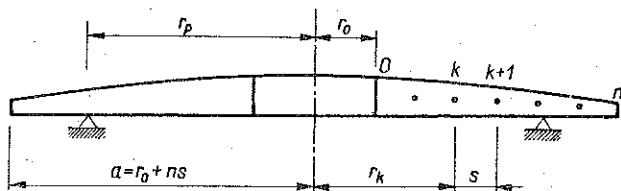
3.5. Płyty okrągłe o sztywności dowolnie kołowo symetrycznie zmiennej. Równanie różniczkowe (3.1.4) ugięcia płyty o kołowo symetrycznej sztywności i rozkładzie temperatur po prostych przekształceniach można przedstawić w postaci

$$(3.3.1) \quad \frac{d}{dr} \left[D r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{dD}{dr} r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \varepsilon (1 + \nu) r \frac{d}{dr} (D \tau) \right] = 0.$$

Po scałkowaniu i wprowadzeniu oznaczenia $dw/dr = \psi$ otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu o współczynnikach funkcyjnych

$$(3.3.2) \quad \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) \frac{d\psi}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) \psi = \frac{1}{Dr} \left[C - \varepsilon (1 + \nu) r \frac{d}{dr} (D \tau) \right].$$

Stała całkowania C przy kołowo symetrycznym podparciu płyty jest zawsze równa zero. Wynika to z równania równowagi (3.3.1). Wyrażenie zawarte w nawiasie, jak łatwo udowodnić, jest bowiem iloczynem siły tnącej Q_r i promienia r , czyli



Rys. 7

$$\frac{d}{dr} (r Q_r) = 0$$

oraz

$$r Q_r = C = 0.$$

Prawa strona równania (3.3.2) przyjmie wobec tego postać

$$(3.3.3) \quad N = -\varepsilon (1 + \nu) \left(\frac{\tau}{D} \frac{dD}{dr} + \frac{d\tau}{dr} \right).$$

Dla dowolnie zmiennej sztywności płyty $D = D(r)$ równanie (3.3.2) można rozwiązać metodą różnic skończonych.

Przy oznaczeniach

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) = b, \quad \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} \right) = d$$

i przy podziale szerokości promieniowej płyty ($a - r_0$) na n podprzedziałów o równych długościach s i o punktach podziału $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$ rów-

nianie różniczkowe (3.3.2) przejdzie w równanie różnicowe, które dla punktu podziału k napiszemy w postaci :

$$\frac{\Delta^2 \psi_k}{s^2} + b_k \frac{\Delta \psi_k}{s} - d_k \psi_k = N_k.$$

Ponieważ

$$\Delta^2 \psi_k = (\psi_{k-1} - 2\psi_k + \psi_{k+1}), \quad \Delta \psi_k = \frac{1}{2}(\psi_{k+1} - \psi_{k-1}),$$

więc ostatecznie:

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} \psi_{k-1} \left(1 - \frac{s b_k}{2}\right) - \psi_k (2 + s^2 d_k) + \psi_{k+1} \left(1 + \frac{s b_k}{2}\right) = N_k s^2, \\ b_k = \frac{1}{r_0 + ks} + \frac{h_{k+1}^3 - h_{k-1}^3}{2s h_k^3}, \quad d_k = \frac{1}{(r_0 + ks)^2} \frac{\nu (h_{k+1}^3 - h_{k-1}^3)}{(r_0 + ks) 2s h_k^3}, \\ N_k = \frac{\varepsilon (1 + \nu)}{2s} \left[\Delta t_{k-1} - \frac{(h_{k+1}^3 - h_{k-1}^3)}{h_k^4} \Delta t_k - \Delta t_{k+1} \right]. \end{cases}$$

Tutaj przez Δt_k oznaczono różnicę temperatury w dolnej i górnej powierzchni płyty w przekroju k , a przez h_k wysokość płyty w tym miejscu.

Dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$ otrzymamy układ $(n + 1)$ równań trójczłonowych typu (3.3.4) i o $(n + 3)$ niewiadomych ψ . Jak wiadomo z teorii zastosowania metody różnic skończonych do zagadnień statycznych dwie dodatkowe wartości niewiadomych ψ_{-1} i ψ_{n+1} można wyrazić zawsze przez wielkości $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$ stosując dane warunki brzegowe podparcia płyty. Po obliczeniu niewiadomych ψ_k z układu równań (3.3.4) momenty zginające i ugięcia możemy wyznaczyć z następujących wzorów:

$$M_{rk} = -D_k \left[\frac{1}{2s} (\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) + \frac{\nu}{(r_0 + ks)} \psi_k + \varepsilon (1 + \nu) \frac{\Delta t_k}{h_k} \right],$$

$$M_{\varphi k} = -D_k \left[\frac{\nu}{2s} (\psi_{k+1} - \psi_{k-1}) + \frac{\nu}{(r_0 + ks)} \psi_k + \varepsilon (1 + \nu) \frac{\Delta t_k}{h_k} \right],$$

$$w_{k+1} = w_{k-1} + 2s \psi_k$$

[przy czym ugięcie płyty na podporze jest znane (np. $w_p = 0$)].

3.4. W praktyce dosyć często występują płyty o zmiennej sztywności, których zmienną wysokość można określić za pomocą funkcji

$$y = \frac{h(\rho)}{h_0} = e^{-\frac{\beta}{6} \rho^2}, \quad \rho = \frac{r}{a},$$

gdzie h_0 oznacza wysokość w środku płyty (dla $r = \rho a = 0$), zaś β jest współczynnikiem, który dobieramy w zależności od potrzebnej wysokości płyty w przekroju $r = a$.

Рównanie (3.3.2) przy powyższych oznaczeniach przyjmie następującą postać:

$$\frac{d^2 \psi}{d \varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho} - \beta \varrho \right) \frac{d \psi}{d \varrho} - \left(\frac{1}{\varrho^2} + \nu \beta \right) \psi = \varepsilon (1 + \nu) \alpha \left(\beta \tau \varrho - \frac{d \tau}{d \varrho} \right).$$

Rozwiązanie powyższego równania jednorodnego jest znane w postaci szeregu potęgowego ⁷⁾. Całkę szczególną dla pewnych rozkładów temperatury τ można wyznaczyć drogą prób.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. Gran Olsson, *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit*, Ing.-Archiv 5 (1934).
- [2] R. Gran Olsson, *Unsymmetrische Biegung der Kreisringplatte von quadratischveränderlicher Steifigkeit*, Ing.-Archiv 10 (1939).
- [3] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York 1940.
- [4] N. J. Nielsen, *Wyznaczanie odkształceń w płytach za pomocą równań różnicowych* (w jęz. duńskim), Kopenhaga 1920.
- [5] O. Pichler, *Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke*, Berlin 1928.
- [6] E. Melan i H. Parkus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1935.
- [7] Z. Thrun, *Odkształcenia i naprężenia termiczne w cienkich płytach*, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).

Резюме

О ДЕФОРМАЦИЯХ И ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И КРУГОВЫХ ПЛАСТИНКАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В прямоугольных и полярных системах координат выведено дифференциальное уравнение прогиба пластинок произвольной переменной жесткости, подвергаемых действию температуры, распределенной произвольно по обеим поверхностям, а линейно переменной в поперечном направлении.

Рассматриваются защемленные прямоугольные пластинки и пластинки с двумя свободно подпертыми краями, линейно переменной жесткости. Для круговых пластинок получено решение для случая квадратно переменной жесткости, причем на числовом примере сравниваются результаты с соответствующими данными для пластинки постоянной средней жесткости, находящейся под влиянием постоянной разницы температур.

В заключение дается решение методом конечных разностей для случая круговой пластинки с осесимметричным (в общем, произвольным) распределением жесткости и температуры.

⁷⁾ Por [3], s. 283-285.

Summary

THERMAL DEFORMATIONS AND STRESSES IN THIN RECTANGULAR AND CIRCULAR PLATES OF VARIABLE THICKNESS

Differential equations of deflection are derived in Cartesian and polar coordinates for plates of arbitrarily variable thickness, subjected to temperature arbitrarily distributed over both faces of the plates and linearly variable over the thickness.

Rectangular plates of linearly variable thickness clamped or simply supported on two edges are also investigated. Solution in the case of thickness constituting a quadratic function is obtained for circular plates. The results obtained for a numerical example are compared with the corresponding results for a plate of constant mean thickness, subjected to a constant temperature difference. Finally, a solution for a circular plate of axially symmetrical rigidity and temperature distribution is obtained by means of the method of finite differences.

Praca została złożona w Redukcji dnia 5 stycznia 1956 r.