

FRANCISZEK SZELAŃOWSKI

ROZCIĄGANIE SIŁAMI SKUPIONYMI
TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OTWOREM KOŁOWYM

ROZCIĄGANIE SIŁAMI SKUPIONYMI
TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OŚRODKIEM SZTYWNYM
ZARYSU KOŁOWEGO

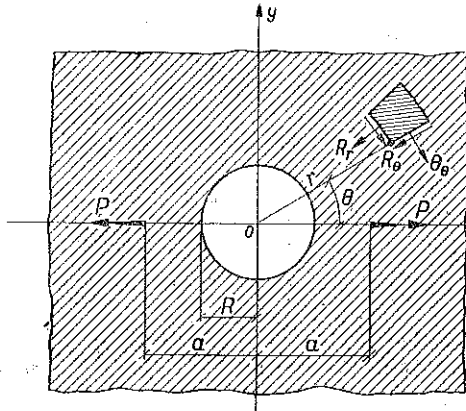
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LV — LVI

SPIS TREŚCI

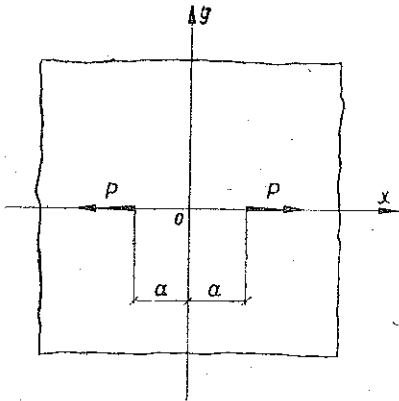
	Str.
Rozciąganie siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z otworem kołowym	507
Rozciąganie siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego	515

ROZCIĄGANIE SIŁAMI SKUPIONYMI TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OTWOREM KOŁOWYM

W zagadnieniach technicznych spotyka się dość często obciążenie części konstrukcyjnej osłabionej otworem kołowym w sposób przypominający działanie sił skupionych. Z tego też względu będzie rzeczą celową rozwiązanie zagadnienia rozciągania dwiema siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z otworem kołowym (rys. 1). Tok rozwiązania powyższego zagadnienia będzie w zasadzie podobny do tego, jaki zastosował



Rys. 1



Rys. 2

autor w poprzedniej swojej pracy, [1]. Zostały tam podane funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$, odpowiadające obciążeniu tarczy dwiema siłami skupionymi P , działającymi w punktach położonych w odległościach a od początku układu współrzędnych (rys. 2).

Funkcje te mają następującą postać:

$$(1) \quad \Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right),$$

$$(2) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a} \right),$$

$$(3) \quad F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)} \left\{ -a \left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2} \right] + k \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \right\},$$

gdzie

$$k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

zaś z i z_1 są to zmienne zespolone sprzężone: $z = x + iy$ oraz $z_1 = x - iy$.

Dla punktów tarczy nieograniczonej, położonych na okręgu koła o promieniu R , wartości naprężeń R_θ i R_r można określić ze wzoru

$$(4) \quad R_\theta + iR_r = -\frac{i}{2} z \frac{P}{\pi(1+k)} \left[-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z+a)^2} \right] + \\ + \frac{z^2}{2R^2} \frac{iP}{\pi(1+k)} \left[-\frac{a}{(z+a)^2} - \frac{a}{(z-a)^2} + \frac{k}{z-a} - \frac{k}{z+a} \right] + \\ + \frac{i}{2} \frac{P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} + \frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a} \right).$$

Wzór ten wynika z tożsamości

$$R_\theta + iR_r = \frac{1}{2} [2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)] + \frac{i}{2} (R_r + \Theta_\theta)$$

oraz ze związku

$$\frac{1}{2} [2R_\theta + i(R_r - \Theta_\theta)] + \frac{i}{2} (R_r + \Theta_\theta) = \\ = \frac{e^{2i\theta}}{2} \left[-\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z) \right] + \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)]$$

po uwzględnieniu wzorów (1), (2) i (3).

Odrzućmy obciążenie rozpatrywanej tarczy złożone z dwóch sił skupionych P , a przyłożmy do obwodu okręgu koła o promieniu R (tj. do części tarczy znajdującej się na zewnątrz tego koła) naprężenia R_θ i R_r , określone wzorem (4), lecz ze znakiem przeciwnym.

Przez dodanie naprężeń wyżej określonych dwóch stanów naprężenia tarczy można na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń otrzymać sumaryczne wartości naprężeń dla tarczy z otworem kołowym rozciąganej dwiema siłami skupionymi P .

Określenie wartości naprężeń tego drugiego stanu naprężenia tarczy będzie możliwe, jeśli określimy funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$.

W tym celu wzór (4) należy przekształcić wykorzystując równości $zz_1 = R^2$ w taki sposób, ażeby otrzymane funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ dla drugiego stanu naprężenia tarczy dawały wartości naprężeń (jak również i przemieszczeń) równe zeru dla punktów tarczy położonych w nieskończoności, zaś dla $R = 0$ wartości powyższych funkcji powinny być równe zeru. Oznacza to, że zagadnienie rozciągania siłami skupionymi

tarczy nieograniczonej z otworem kołowym powinno prowadzić do zagadnienia rozciągania tarczy jednorodnej rozciąganej siłami skupionymi.

Zatem równość (4) po przekształceniu przyjmie postać następującą:

$$R\theta + iR_r = -\frac{iPR^2}{2\pi(1+k)} \left[\frac{z_1 - a}{(R^2 - az_1)^2} - \frac{z_1 + a}{(R^2 + az_1)^2} + \frac{k}{z_1} \left(\frac{1}{R^2 - az_1} - \frac{1}{R^2 + az_1} \right) \right] + \frac{iP}{2\pi(1+k)} \left[\frac{2}{a} - \frac{R^2}{a} \left(\frac{1}{R^2 - az_1} + \frac{1}{R^2 + az_1} \right) - \frac{z}{R^2 - az} + \frac{z}{R^2 + az} \right] = -\frac{i}{4} z \Phi'(z) + \frac{z^2}{2R^2} F(z) + \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)].$$

Z równości tej wynika (co łatwo sprawdzić), że funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ muszą mieć tutaj postać następującą:

$$(5) \quad \Phi(z) = \frac{2PR^2}{\pi(1+k)} \left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2} - \frac{z-a}{(R^2-az)^2} - \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{R^2-az} + \frac{1}{R^2+az} \right) \right],$$

$$(6) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2PR^2}{\pi(1+k)} \left[\frac{z_1+a}{(R^2+az_1)^2} - \frac{z_1-a}{(R^2-az_1)^2} - \frac{k}{z_1} \left(\frac{1}{R^2-az_1} - \frac{1}{R^2+az_1} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{R^2-az_1} + \frac{1}{R^2+az_1} \right) \right],$$

$$(7) \quad F(z) = \frac{iPR^2}{\pi(1+k)} \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{2}{a} - z \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) + \frac{R^2}{a} \left(\frac{1}{R^2-az} + \frac{1}{R^2+az} \right) + \frac{kR^2}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) - aR^2 \left[\frac{1}{(R^2-az)^2} + \frac{1}{(R^2+az)^2} \right] - zR^2 \left[\frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3} - \frac{R^2-az-2a^2}{(R^2+az)^3} \right] + \frac{kR^2}{z} \left[\frac{R^2-2az}{(R^2-az)^2} - \frac{R^2+2az}{(R^2+az)^2} \right] \right\}.$$

Ze wzorów tych widać, że istotnie dla punktów tarczy położonych w nieskończoności funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ są równe zeru, zaś dla $R = 0$, tj. w przypadku zniknięcia otworu, powyższe funkcje są też równe zeru.

Wartości funkcyj $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$, odpowiadające postawionemu zagadnieniu rozciągania dwiema siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z otworem kołowym, można otrzymać dodając wartości przedsta-

wione wzorami (1), (2) i (3), do odpowiednich wartości określonych wzorami (5), (6) i (7). Otrzymamy w ten sposób:

$$(8) \quad \Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} + R^2 \left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2} - \frac{z-a}{(R^2-az)^2} - \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{R^2-az} + \frac{1}{R^2+az} \right) \right] \right\},$$

$$(9) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a} + R^2 \left[\frac{z_1+a}{(R^2+az_1)^2} - \frac{z_1-a}{(R^2-az_1)^2} - \frac{k}{z_1} \left(\frac{1}{R^2-az_1} - \frac{1}{R^2+az_1} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{R^2-az_1} + \frac{1}{R^2+az_1} \right) \right] \right\},$$

$$(10) \quad F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)} \left\{ -a \left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2} \right] + k \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \right\} + \\ + \frac{iPR^2}{\pi(1+k)} \frac{1}{z^2} \left\{ 2 - z \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{a} \left(\frac{1}{R^2-az} + \frac{1}{R^2+az} \right) + \frac{kR^2}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) - \right. \\ \left. - aR^2 \left[\frac{1}{(R^2-az)^2} + \frac{1}{(R^2+az)^2} \right] - zR^2 \left[\frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3} - \frac{R^2-az-2a^2}{(R^2+az)^3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{kR^2}{z} \left[\frac{R^2-2az}{(R^2-az)^2} - \frac{R^2+2az}{(R^2+az)^2} \right] \right\}.$$

Wartości naprężeń R_θ , R_r i Θ_θ dla dowolnego punktu tarczy nieograniczonej z otworem kołowym można będzie otrzymać z dwóch równań następujących, [2]:

$$R_r + \Theta_\theta = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

$$R_\theta + iR_r = -\frac{i}{4} z \Phi'(z) + \frac{z^2}{2r^2} F(z) + \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

uwzględniając w nich wartości funkcji $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ określonych wzorami (8), (9) i (10).

Wprowadźmy oznaczenia:

$$b = (r^2 - a^2)r \sin \theta, \quad c = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta, \quad d = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta,$$

$$t = r \sin \theta, \quad s = a \sin 2\theta, \quad h = R^4 + a^2 r^2 + 2ar R^2 \cos \theta,$$

$$l = R^4 + a^2 r^2 - 2ar R^2 \cos \theta, \quad m = R^2 (R^4 + 4a^2 r^2) \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
n &= 2(R^4 + a^2 r^2) ar \sin 2\Theta, \quad q = a^3 R^2 r^2 \sin 3\Theta, \quad w = 2(R^4 - a^2 r^2) ar \sin 2\Theta, \\
\varphi &= [R^4 [(R^2 - 2a^2) R^2 - 3a^2 r^2] - a^2 r^2 [3R^2 (R^2 - 2a^2) - a^2 r^2]] r \sin \Theta, \\
\xi &= R^2 \sin \Theta, \quad \psi = ar^2 [R^6 + a^2 r^2 (R^2 - 2a^2)] \sin 2\Theta, \\
\varrho &= (a^2 r^2 + 2a^2 R^2 - R^4) r \sin \Theta, \quad \omega = (R^4 - a^2 r^2) r \sin \Theta, \quad p = R^2 \cos \Theta, \\
A &= (r^2 + a^2) \cos \Theta - 2ar, \quad B = (r^2 + a^2) \cos \Theta + 2ar, \quad M = r \cos \Theta, \\
N &= a \cos 2\Theta, \quad C = aR^2 (R^2 + 2r^2) + r(R^4 + a^2 r^2 + 2a^2 R^2) \cos \Theta, \\
D &= 2arR^2, \quad G = (R^4 + a^2 r^2) \cos \Theta, \quad L = arR^4, \quad H = R^2 (R^4 + 4a^2 r^2) \cos \Theta, \\
I &= 2(R^4 + a^2 r^2) ar \cos 2\Theta, \quad E = 2(R^4 - a^2 r^2) ar \cos \Theta, \\
K &= a^2 r^2 R^2 \cos 3\Theta, \quad P = 3R^2 a^3 r^3, \quad Q = 3R^4 (R^2 - 2a^2) ar, \\
S &= [(R^2 - 2a^2) R^6 - 6R^2 r^2 a^4 - a^4 r^4] \cos \Theta, \\
T &= ar [(R^2 - 2a^2) a^2 r^2 - R^6] \cos 2\Theta, \quad U = aR^2 (R^2 + 2r^2), \\
W &= (R^4 + a^2 r^2 + 2a^2 R^2) r \cos \Theta.
\end{aligned}$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
(11) \quad R_\Theta &= \frac{P}{2\pi(1+k)} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left\{ b \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} \right) + R^2 \left[\omega \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{l^2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{k}{r} \left(\frac{-m+w-q}{l^2} + \frac{m+n+q}{h^2} \right) + \frac{\varphi-\psi}{h^3} - \frac{\varphi+\psi}{l^3} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ a^2 \left(\frac{2t+s}{d^2} - \frac{2t-s}{c^2} \right) + k \left(\frac{t+s}{d} - \frac{t-s}{c} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R^4}{r^2} \left[-\frac{\varrho + a^2 r^2 s}{h^2} + \frac{\varrho - a^2 r^2 s}{l^2} + \frac{k}{r} \left(\frac{\xi - rs}{l} - \frac{\xi + rs}{h} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(12) \quad R_r &= \frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ r \left(\frac{A}{c^2} - \frac{B}{d^2} \right) - a \left(\frac{r^2 + 2aM + aN}{d^2} + \frac{r^2 - 2aM + aN}{c^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + k \left(\frac{M-N}{c} - \frac{M+N}{d} \right) + \frac{2R^2}{a} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{R^2 - aM}{l} - \frac{R^2 + aM}{h} \right) + \right. \\
&\quad \left. + R^2 \left(2 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[\frac{C + a^2 r^2 N}{h^2} - \frac{C - a^2 r^2 N}{l^2} + \frac{k}{r} \left(-\frac{p - rN}{l} + \frac{p + rN}{h} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - R^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[r \left(\frac{D+G}{h^2} - \frac{-D+G}{l^2} \right) + \frac{k}{r} \left(\frac{-2L+H-E+K}{l^2} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{2L+H+I+K}{h^2} \right) + r \left(\frac{-P+Q+S+T}{h^3} - \frac{P-Q+S-T}{l^3} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \Theta_{\theta} = & \frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ 4 \left(\frac{M-a}{c} - \frac{M+a}{d} \right) + r \left(\frac{B}{d^2} - \frac{A}{c^2} \right) + \right. \\
 & + a \left(\frac{r^2 + 2aM + aN}{d^2} + \frac{r^2 - 2aM + aN}{c^2} \right) + k \left(-\frac{M-N}{c} + \frac{M+N}{d} \right) - \\
 & - \frac{2R^2}{a} \left(\frac{R^2 - aM}{l} + \frac{R^2 + aM}{h} \right) + R^2 \left(2 + \frac{R^2}{r^2} \right) \left[\frac{U+W+a^2r^2N}{h^2} \right. \\
 & - \left. \frac{-U+W-a^2r^2N}{l^2} + \frac{k}{r} \left(-\frac{p-rN}{l} + \frac{p+rN}{h} \right) \right] - \frac{4}{a} \frac{R^2}{r^2} + \\
 & + R^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[r \left(\frac{D+G}{h^3} - \frac{-D+G}{l^3} \right) + \frac{k}{r} \left(\frac{-2L+H-E+K}{l^3} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2L+H+I+K}{h^3} \right) + r \left(\frac{-P+Q+S+T}{h^3} - \frac{P-Q+S-T}{l^3} \right) \right] \Big\} .
 \end{aligned}$$

Wyprowadzone powyżej wzory (11), (12) i (13) określające wartości naprężeń R_{θ} , R_r i Θ_{θ} są słuszne tylko dla wartości a zawartej w granicach $R < a < \infty$.

Wreszcie pożądaną rzeczą będzie określić ze wzoru (13) wartości naprężenia $\Theta_{\theta} = aP/R$ w przypadku tworzywa stalowego dla $r = R$ i $\theta = 90^\circ$ (lub wartości współczynnika α).

Wartości tego współczynnika dla różnych stosunków a/R są podane w tablicy 1.

Tablica 1

$\frac{a}{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,6279	0,5849	0,4710	0,3700	0,3157	0,2686	0,2329	0,2055	0,1842	0,1659

Porównując otrzymane wyżej wartości współczynnika α z wartościami współczynnika β , który odnosi się do przypadku tarczy jednorodnej, a więc bez otworu kołowego (tablica 2), można zauważyć, że otwór

Tablica 2

$\frac{a}{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β	0,1592	0,1770	0,1452	0,1179	0,0980	0,0834	0,0724	0,0639	0,0571	0,0516

kołowy powoduje prawie że 4-krotny wzrost naprężenia Θ_{θ} dla $r = R$ i $\theta = 90^\circ$, gdy siła działa na obwodzie tego otworu. Natomiast w miarę oddalania się siły od otworu wzrost naprężenia Θ_{θ} jest znacznie mniejszy.

Literatura cytowana w tekście

[1] F. Szelągowski, *Rozciąganie siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego*, Rozpr. Inżyn. 4 (1956).

[2] G. W. К о і о s o w, *Применение комплексной перемещенной к теории упругости*, Moskwa 1935.

Резюме

РАСТЯЖЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе определены при помощи формул (11), (12) и (13), значения напряжений R_θ , R_r и Θ_θ выступающих в произвольной точке бесконечной плоскости с круговым отверстием, с радиусом R , растягиваемой двумя сосредоточенными силами P , действующими на расстоянии a от центра отверстия. Выведены формулы, справедливые лишь для значений a в пределах $R < a < \infty$.

Значение напряжения Θ_θ для $r=R$ и $\Theta=90^\circ$, оказывается, в случае положения силы P на контуре отверстия, почти четыре раза больше значения соответствующего напряжения в случае однородной плоскости (без отверстия).

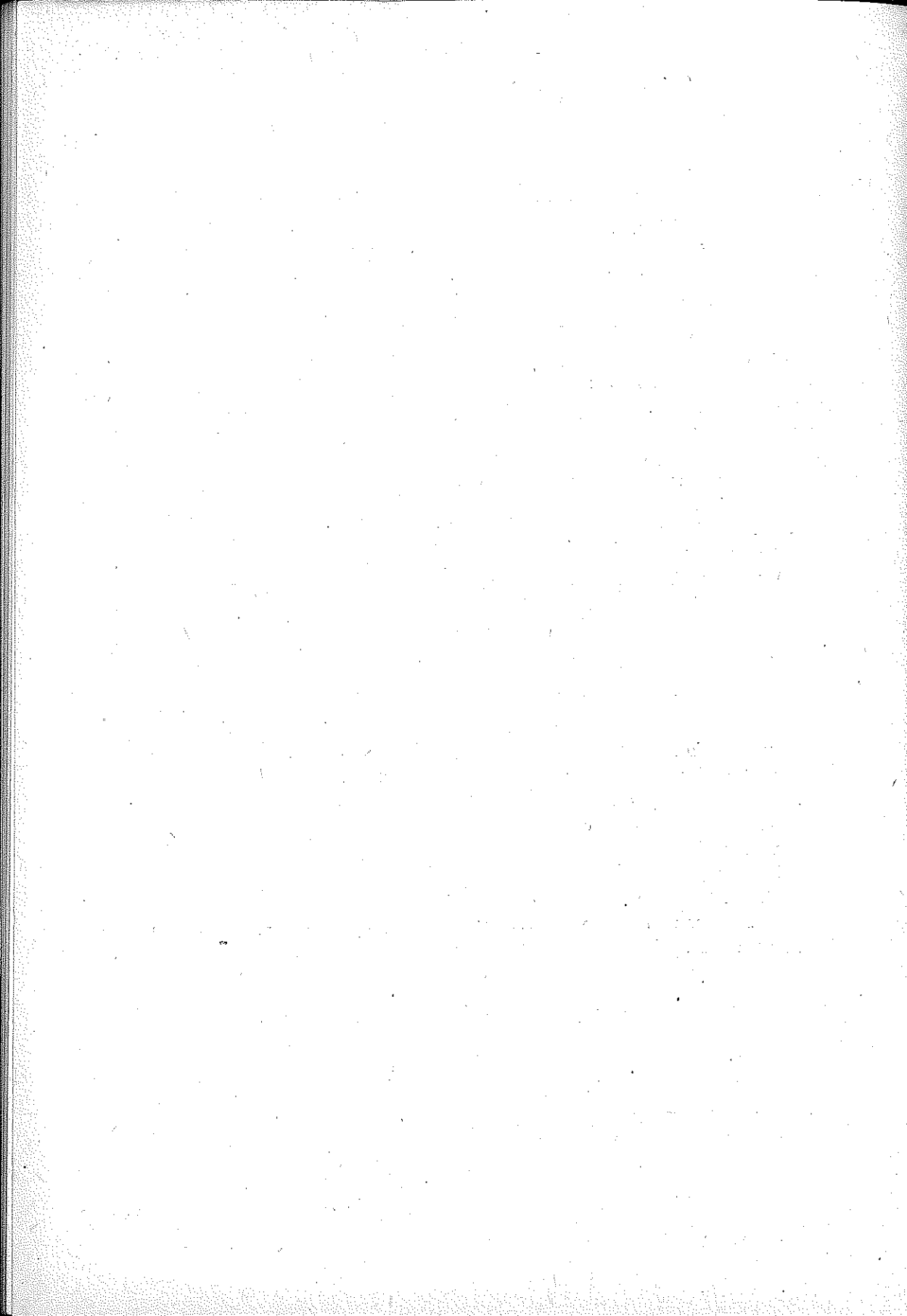
S u m m a r y

AN INFINITE PLATE HAVING A CIRCULAR HOLE AND SUBJECTED TO TENSION BY CONCENTRATED FORCES

The stresses R_θ , R_r and Θ_θ at any point of an infinite plate having a circular hole of radius R and subjected to tension by two concentrated forces P acting at the distances a from the centre of the hole are determined by Eqs. (11), (12) and (13), respectively. The equations under consideration are valid only for values of a contained in the interval $R < a < \infty$.

The value of the stress Θ_θ for $r=R$ and $\Theta=90^\circ$ in the infinite plate is, in the case of the forces P acting at the periphery of the hole, almost 4 times as high as the corresponding value in the case of a plate without a hole.

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1955 r.



ROZCIĄGANIE SIŁAMI SKUPIONYMI TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OŚRODKIEM SZTYWNYM ZARYSU KOŁOWEGO

Tematem niniejszej pracy jest zagadnienie wartości naprężeń R_θ , R_r i Θ_θ , panujących w dowolnym punkcie tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego, które powstały pod wpływem działania dwóch sił skupionych P , równoodległych od środka sztywnego (rys. 1).

Rozwiążemy to zagadnienie metodą zmiennej zespolonej wykorzystując wyniki uprzedniej pracy autora, [1].

Z pracy tej wynika, że w przypadku obciążenia tarczy tylko jedną siłą skupioną P (rys. 2) odpowiednie funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ oraz $F(z)$ mają kształt następujący:

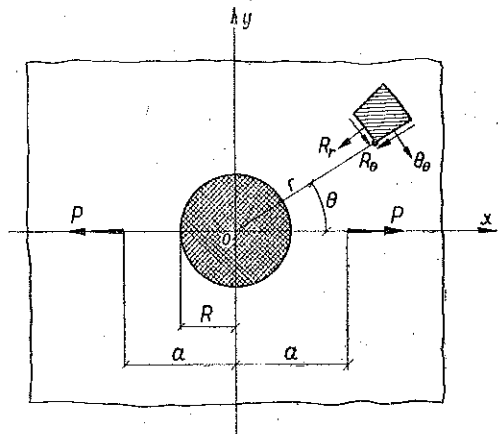
$$\Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \frac{1}{z},$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \frac{1}{z_1},$$

$$F(z) = \frac{iPk}{\pi(1+k)} \frac{1}{z},$$

gdzie

$$k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$



Rys. 1

Kierunkowi naprężeń uwidoczonych na rys. 1 odpowiadają powyższe wzory ze znakiem minus.

Zatem w przypadku obciążenia tarczy dwiema siłami skupionymi P , działającymi w punktach położonych w odległości a od początku układu współrzędnych (rys. 3), odpowiednie funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$, jak łatwo sprawdzić, będą miały postać następującą:

$$(1) \quad \Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right),$$

$$(2) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a} \right),$$

$$(3) \quad F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)} \left\{ -a \left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2} \right] + k \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \right\}.$$

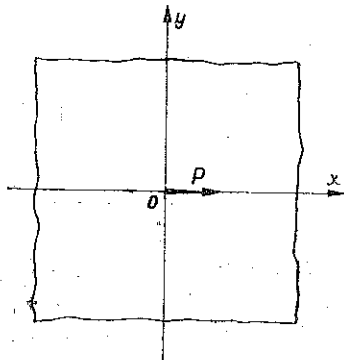
Przemieszczenia punktów tarczy, znajdujących się na obwodzie okręgu koła o promieniu R (rys. 1) mogą być wyrażone wzorem, [2]:

$$(4) \quad v + iu = -\frac{i}{8\mu} z_1 \Phi(z) + \frac{ik}{8\mu} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(z) dz$$

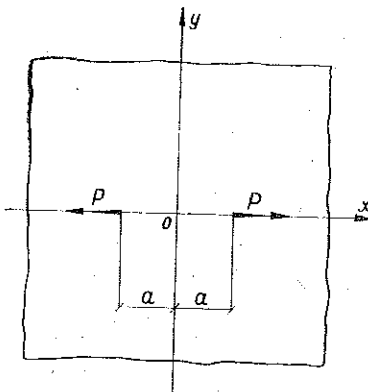
lub

$$v + iu = -\frac{i}{4\mu} \frac{P}{\pi(1+k)} z_1 \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) + \frac{ik}{4\mu} \frac{P}{\pi(1+k)} \times \\ \times [\ln(z_1 - a) - \ln(z_1 + a)] + \frac{i}{4\mu} \frac{P}{\pi(1+k)} \left\{ a \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a} \right) + \right. \\ \left. + k [\ln(z-a) - \ln(z+a)] \right\}.$$

Odrzućmy siły skupione P działające na rozpatrywaną tarczę i przyłożmy do obwodu okręgu koła o promieniu R (do części tarczy znajdującej się wewnątrz koła) takie naprężenia, jakie miały miejsce w przypadku obciążenia tarczy dwiema siłami skupionymi P , lecz odwrotnego znaku. Przyłożmy również do części tarczy znajdującej się zewnątrz koła o promieniu R takie naprężenia, jakie spowodowałyby przemieszczenia punktów tego okręgu, lecz o wartościach przeciwnych do przemieszczeń określonym wzorem (4), a więc wywołanych działaniem również dwóch sił skupionych P .



Rys. 2



Rys. 3

Dodając naprężenia omówionych dwóch stanów naprężenia tarczy możemy na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń otrzymać sumaryczne wartości naprężeń, odpowiadających tarczy z ośrodkim sztywnym zarysu kołowego rozciąganej dwiema siłami skupionymi P .

Określenie wartości naprężeń odpowiadających temu drugiemu stanowi napięcia tarczy będzie możliwe z chwilą określenia odnośnych funkcji $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ oraz $F(z)$.

W tym celu równość (4) należy przekształcić za pomocą zależności $zz_1 = R^2$ w ten sposób, ażeby wartości poszukiwanych funkcji $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ określały naprężenia równe zeru dla punktów tarczy położonych w nieskończoności. Dla $R = 0$ wartości powyższych funkcji powinny być równe zeru. Oznacza to, że zagadnienie rozciągania siłami skupionymi tarczy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego powinno prowadzić do zagadnienia rozciągania tarczy jednorodnej, rozciąganej siłami skupionymi.

Zatem równość (4) po przekształceniu przyjmie postać następującą:

$$-\frac{i}{8\mu} \frac{R^2}{z} \Phi(z) + \frac{ik}{8\mu} \int \Phi_1(z_1) dz_1 + \frac{1}{4\mu} \int F(z) dz = \frac{iPR^2}{4\mu\pi(1+k)a} \left[-\frac{2}{z} + z_1 \left(\frac{1}{R^2+az_1} + \frac{1}{R^2-az_1} \right) \right] - \frac{iPk}{4\mu\pi(1+k)} \left[\ln \left(\frac{R^2}{z} - a \right) - \ln \left(\frac{R^2}{z} + a \right) \right] - \frac{iP}{4\mu\pi(1+k)} \left\{ az_1 \left(\frac{1}{R^2+az_1} + \frac{1}{R^2-az_1} \right) + k \left[\ln \left(\frac{R^2}{z_1} - a \right) - \ln \left(\frac{R^2}{z_1} + a \right) \right] \right\}.$$

Wynika stąd, jak łatwo sprawdzić, że odpowiednie funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ muszą mieć tutaj następującą postać:

$$(5) \quad \Phi(z) = \frac{2PR^2}{\pi k(1+k)} \left\{ \left(\frac{R^2}{a} - a \right) \left[\frac{1}{(R^2+az)^2} + \frac{1}{(R^2-az)^2} \right] + \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) \right\},$$

$$(6) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2PR^2}{\pi k(1+k)} \left\{ \left(\frac{R^2}{a} - a \right) \left[\frac{1}{(R^2+az_1)^2} + \frac{1}{(R^2-az_1)^2} \right] + \frac{k}{z_1} \left(\frac{1}{R^2-az_1} - \frac{1}{R^2+az_1} \right) \right\},$$

$$(7) \quad F(z) = \frac{iPR^2}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{2}{az^3} - \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az} \right) + \frac{R^2}{k} \left[\left(a - \frac{R^2}{a} \right) \frac{R^4 + 4azR^2 + 3a^2z^2}{z^2(R^2+az)^4} + \left(a - \frac{R^2}{a} \right) \frac{R^4 - 4azR^2 + 3a^2z^2}{z^2(R^2-az)^4} - k \frac{2R^2 - 3az}{z^3(R^2-az)^2} + k \frac{2R^2 + 3az}{z^3(R^2+az)^2} \right] \right\}.$$

Rzeczywiście, ze wzorów tych widać, że dla punktów tarczy położonych w nieskończoności funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ są równe zeru, zaś dla $R = 0$, tj. w przypadku zniknięcia ośrodka sztywnego, powyższe funkcje są też równe zeru.

Ostatecznie znajdziemy funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$, odpowiadające postawionemu zagadnieniu rozciągania dwiema siłami skupionymi tar-

czy nieograniczonej z ośrodkiem sztywnym zarysu kołowego dodając stronami wzory (1), (2) i (3) do odpowiednich wzorów (5), (6) i (7). Mianowicie znajdziemy:

$$(8) \quad \Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) + \\ + \frac{2PR^2}{\pi k(1+k)} \left\{ \left(\frac{R^2}{a} - a \right) \left[\frac{1}{(R^2+az)^2} + \frac{1}{(R^2-az)^2} \right] + \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2-az} - \frac{1}{R^2+az} \right) \right\},$$

$$(9) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)} \left(\frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a} \right) + \\ + \frac{2PR^2}{\pi k(1+k)} \left\{ \left(\frac{R^2}{a} - a \right) \left[\frac{1}{(R^2+az_1)^2} + \frac{1}{(R^2-az_1)^2} \right] + \frac{k}{z_1} \left(\frac{1}{R^2-az_1} - \frac{1}{R^2+az_1} \right) \right\},$$

$$(10) \quad F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)} \left\{ -a \left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2} \right] + k \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \right\} + \\ + \frac{iPR^2}{\pi(1+k)} \left\{ \frac{2}{az^2} - \frac{k}{z} \left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az} \right) + \right. \\ + \frac{R^2}{k} \left[\left(a - \frac{R^2}{a} \right) \frac{R^4 + 4azR^2 + 3a^2z^2}{z^2(R^2+az)^4} + \left(a - \frac{R^2}{a} \right) \frac{R^4 - 4azR^2 + 3a^2z^2}{z^2(R^2-az)^4} - \right. \\ \left. \left. - k \frac{2R^2 - 3az}{z^3(R^2-az)^3} + k \frac{2R^2 + 3az}{z^3(R^2+az)^3} \right] \right\}.$$

Wartości naprężeń R_θ , R_r i R_θ dla dowolnego punktu tarczy nieograniczonej (rys. 1) można będzie otrzymać z dwóch równań następujących, [3]:

$$R_r + \Theta_\theta = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

$$R_\theta + iR_r = -\frac{i}{4} z \Phi'(z) + \frac{z^2}{2r^2} F(z) + \frac{i}{4} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)],$$

uwzględniając w nich wartości funkcji $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$, określonych wzorami (8), (9) i (10).

Wprowadźmy oznaczenia:

$$b = (r^2 - a^2) r \sin \Theta, \quad c = r^2 + a^2 - 2ar \cos \Theta, \quad d = r^2 + a^2 + 2ar \cos \Theta,$$

$$e = \frac{R^2}{a} - a, \quad f = (3a^2r^2 - R^4) R^2 \sin \Theta, \quad g = a^3r^3 \sin 2\Theta,$$

$$h = R^4 + a^2r^2 + 2arR^2 \cos \Theta, \quad l = R^4 + a^2r^2 - 2arR^2 \cos \Theta,$$

$$m = (R^4 + 4a^2r^2) R^2 \sin \Theta, \quad n = 2(R^4 + a^2r^2) ar \sin 2\Theta, \quad q = a^3R^2r^2 \sin 3\Theta,$$

$$t = r \sin \Theta, \quad s = a \sin 2\Theta, \quad u = 12arR^2(R^4 + a^2r^2) \sin \Theta,$$

$$w = (3R^8 + 16a^2r^2R^4 + 3a^4r^4) \sin 2\Theta,$$

$$\begin{aligned}
p &= 4arR^2(R^4 + a^2r^2)\sin 3\theta, & \beta &= a^2r^2R^4\sin 4\theta, \\
\gamma &= 2R^2(R^4 + 3a^2r^2)\sin \theta, & \delta &= ar(4R^4 + 3a^2r^2)\sin 2\theta, \\
A &= (r^2 + a^2)\cos \theta - 2ar, & B &= (r^2 + a^2)\cos \theta + 2ar, \\
C &= R^2(R^4 + 3a^2r^2)\cos \theta, & D &= ar\cos 2\theta, G = R^4ar, \\
H &= R^2(R^4 + 4a^2r^2)\cos \theta, & J &= 2ar(R^4 + a^2r^2)\cos 2\theta, \\
K &= a^2r^2R^2\cos 3\theta, & M &= r\cos \theta, N = a\cos 2\theta, L = R^2\cos \theta, \\
P &= ar(4R^4 + 3a^2r^2)\cos 2\theta, & Q &= arR^2(8R^8 + 36a^2r^2R^4 + 12a^4r^4)\cos \theta, \\
W &= a^2r^2(9R^8 + 16a^2r^2R^4 + 3a^4r^4)\cos 2\theta, & S &= 4a^3r^3R^2(R^4 + a^2r^2)\cos 3\theta, \\
T &= a^4r^4R^4\cos 4\theta, & U &= R^4(R^8 + 16a^2r^2R^4 + 18a^4r^4).
\end{aligned}$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
(11) \quad R_\theta &= \frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ b \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{d^2} \right) + R^2 \left[\frac{2aer}{k} \left(\frac{f+g}{h^3} - \frac{f-g}{l^3} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \left(\frac{m-n+q}{l^2} - \frac{m+n+q}{h^2} \right) \right] + a^2 \left(\frac{2t+s}{d^2} - \frac{2t-s}{c^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + k \left(\frac{s-t}{c} + \frac{s+t}{d} \right) + \frac{R^4kt}{r^2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{l} \right) - \right. \\
&\quad \left. - R^4 \left[\frac{ea^2}{k} \left(\frac{u+w+p+\beta}{h^4} + \frac{-u+w-p+\beta}{l^4} \right) + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\gamma-\delta+2q}{l^2} - \frac{\gamma+\delta+2q}{h^2} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(12) \quad R_r &= -\frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ r \left(\frac{B}{d^2} - \frac{A}{c^2} \right) + \frac{R^2}{k} \left[2aer \left(\frac{C-a^2r^2D-3G}{l^3} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{C+a^2r^2D+3G}{h^3} \right) + \frac{k}{r} \left(\frac{H+J+K+2G}{h^2} - \frac{H-J+K-2G}{l^2} \right) \right] + \\
&\quad + a \left(\frac{r^2+2aM+aN}{d^2} + \frac{r^2-2aM+aN}{c^2} \right) + k \left(\frac{M+N}{d} - \frac{M-N}{c} \right) - \\
&\quad - \frac{2R^2}{ar^2} + \frac{R^2k}{r} \left(\frac{L+ar}{h} - \frac{L-ar}{l} \right) - \frac{R^4}{r^2k} \left[\frac{k}{r} \left(\frac{2C+P+2K+3G}{h^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2C-P+2K-3G}{l^2} \right) - e \left(\frac{Q+W+S+T+U}{h^4} + \frac{-Q+W-S+T+U}{l^4} \right) \right] - \\
&\quad - 2 \left(\frac{M-a}{c} - \frac{M+a}{d} \right) - \frac{2R^2}{k} \left[e \left(\frac{R^4+2aR^2M+arD}{h^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{R^4-2aR^2M+arD}{l^2} \right) + \frac{k}{r} \left(\frac{L-D}{l} - \frac{L+D}{h} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$(13) \quad \Theta_{\theta} = \frac{P}{2\pi(1+k)} \left\{ 4 \left(\frac{M-a}{c} - \frac{M+a}{d} \right) + r \left(\frac{B}{d^2} - \frac{A}{c^2} \right) + \right. \\
+ \frac{R^2}{k} \left[2e \left(\frac{R^4 + 2aR^2M + arD}{h^2} + \frac{R^4 - 2aR^2M + arD}{l^2} \right) + \right. \\
+ \frac{2k}{r} \left(\frac{L-D}{l} - \frac{L+D}{h} \right) + 2aer \left(\frac{C - a^2r^2D - 3G}{l^3} - \frac{C + a^2r^2D + 3G}{h^3} \right) + \\
+ \left. \left. \frac{k}{r} \left(\frac{H+J+K+2G}{h^2} - \frac{H-J+K-2G}{l^2} \right) \right] + a \left(\frac{r^2 + 2aM + aN}{d^2} + \right. \right. \\
+ \left. \left. \frac{r^2 - 2aM + aN}{c^2} \right) + k \left(\frac{M+N}{d} - \frac{M-N}{c} \right) - \frac{2R^2}{ar^2} + \frac{R^2k}{r} \left(\frac{L+ar}{h} - \frac{L-ar}{l} \right) - \right. \\
- \frac{R^4}{r^2k} \left[\frac{k}{r} \left(\frac{2C+P+2K+3G}{h^2} - \frac{2C-P+2K-3G}{l^2} \right) - e \left(\frac{Q+W+S+T+U}{h^4} + \right. \right. \\
+ \left. \left. \frac{-Q+W-S+T+U}{l^4} \right) \right] - 2 \left(\frac{M-a}{c} - \frac{M+a}{d} \right) \left. \right\}.$$

Co do wielkości naprężeń dla $r=R$, tj. panujących na obwodzie ośrodka sztywnego tarczy nieograniczonej, należy zaznaczyć, że naprężenie R_R osiąga swą największą wartość dla kąta $\Theta = 0$, a dla poszczególnych wartości a/R oraz dla tworzywa stalowego naprężenie to równa się aP/R .

Odpowiednie wartości a są podane w poniższej tabelicy 1.

Tablica 1

a/R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	∞	0,5524	0,3027	0,2133	0,1651	0,1306	0,1148	0,1005	0,0891	0,0799

Porównując powyższe wartości a z wartościami podanymi w tabelicy 2 dla tarczy jednorodnej, tj. bez ośrodka sztywnego, można zauważyć, że wzrost naprężenia R_R w przypadku istnienia ośrodka sztywnego przy względnie małych wartościach a/R jest prawie 1,6 razy większy.

Tablica 2

a/R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	∞	0,3502	0,1970	0,1401	0,1094	0,0900	0,0766	0,0667	0,0591	0,0531

Literatura cytowana w tekście

- [1] F. Szelański, *Działanie siły skupionej na tarczę nieograniczoną za pośrednictwem pręta sztywnego o przekroju kołowym*, Arch. Mech. Stos. 1951.
- [2] F. Szelański, *Zagadnienie płaskie teorii sprężystości w funkcjach zmiennych zespolonych*, Arch. Mech. Stos. 1951.
- [3] G. W. Kołosow, *Primienienie kompleksnoy pieriemiennoy k teorii uprugosti*, Moskwa 1935.

Резюме

РАСТЯЖЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С ЖЕСТКИМ ЯДРОМ КРУГОВОГО КОНТУРА

В работе определены, при помощи формул (11), (12) и (13), значения напряжений R_θ , R_r и Θ_θ , выступающих в произвольной точке бесконечной плоскости с жестким ядром кругового контура с радиусом R . Плоскость растягивается двумя сосредоточенными силами P , действующими на расстоянии a от ядра.

Значение напряжения R_r для $r = R$ и $\Theta = 0$ оказывается, при сравнительно небольших значениях a/R , почти в 1,6 раз больше соответствующего значения напряжения, существующего в случае однородной плоскости (без жесткого ядра).

Summary

AN INFINITE PLATE HAVING A RIGID CIRCULAR INCLUSION AND SUBJECTED TO TENSION BY CONCENTRATED FORCES

The stresses R_θ , R_r and Θ_θ at any point of an infinite plate having a rigid circular inclusion of radius R and subjected to tension by two concentrated forces P acting at the distances a from the centre of the inclusion are expressed by Eqs. (11), (12) and (13), respectively.

The value of the stress R_r for $r = R$ and $\Theta = 0$ of the infinite plate is, for relatively small values of a/R , almost 1,6 times as high as the corresponding value in the case of a homogeneous plate (i. e. without inclusion).

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1955 r.