

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

W SPRAWIE DOBORU OPTYMALNEGO KSZTAŁTU PRĘTÓW
OSIOWO ŚCISKANYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LIII

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Uwagi ogólne	443
2. Dobór optymalnej zbieżności w zakresie sprężystym	445
3. Dobór optymalnej zbieżności w zakresie sprężysto-plastycznym	448

1. Uwagi ogó'ne. Publikacja niniejsza stanowi bezpośrednią kontynuację pracy [10]. Celem jej jest podanie pewnych praktycznych wskazówek co do projektowania niepryzmatycznych prętów osiowo ściskanych.

Przy projektowaniu prętów osiowo ściskanych, a więc narażonych na wyboczenie, niejednokrotnie spotykamy się z zagadnieniem oszczędności materiału, a tym samym z zagadnieniem ciężaru konstrukcji.

Zmniejszenie zużycia materiału możemy osiągnąć dwiema drogami.

(a) Przez odpowiedni dobór kształtu przekroju. Kształt ten będziemy charakteryzowali współczynnikiem (bezwymiarowym) ¹⁾

$$(1.1) \quad \varphi = \frac{F}{i^2},$$

gdzie F oznacza powierzchnię przekroju, i najmniejszy osiowy promień bezwładności przekroju pręta. Będziemy przyjmowali $\varphi = \text{const}$ wzdłuż osi pręta. Dobierając kształty przekroju o możliwie małej wartości współczynnika φ uzyskujemy zmniejszenie ciężaru pręta jednak tylko do pewnej granicy, odpowiednie profile są bowiem profilami cienkościennymi i zachodzi obawa utraty stateczności ścianki (wyboczenia lokalnego). Zagadnieniem tym nie będziemy się jednak zajmowali.

Interesujące dociekania na temat optymalnego kształtu cienkościennych, sprężystych prętów o przekroju pierścieniowym można znaleźć w pracy M. F e i g e n a, [2].

(b) Przez odpowiedni dobór zmiany wielkości przekroju wzdłuż osi pręta (zwany często, niezupełnie ściśle, doborem kształtu pręta).

Już od dawna zajmowano się zagadnieniem określenia kształtu pręta, który wykazywałby minimum ciężaru (objętości) przy danej sile krytycznej, długości pręta, przy określonym kształcie przekroju i sposobie zamocowania końców pręta. Spośród zajmujących się tym zagadnieniem — przy założeniu prawa H o o k e'a, a więc sprężystości odkształceń — należy wymienić ²⁾ L a g r a n g e'a, K l a u s e n a, N i k o ł a i, B l a s i u s a wreszcie L i e n a r d a. W ostatnich czasach podobne zagadnienie (przy uwzględnieniu ciężaru własnego pręta) rozpatrywał również

¹⁾ Współczynnik φ wprowadza np. M. T. H u b e r, [3]; por. także [10], p. 2.

²⁾ Literaturę zagadnienia podają np. S z e ł a g o w s k i, [8], oraz P o n o m a r i e w, [7].

Mosingiewicz w referacie wygłoszonym na konferencji naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1954 r.

Nikołai i Lienard wykazali, że uzyskana w ten sposób maksymalna oszczędność na ciężarze pręta wynosi 13,4%, przy czym optymalny kształt pręta jest zbliżony do elipsoidy obrotowej lub jej połówki (zależnie od sposobu zamocowania końców pręta). Warto zauważyć, że kształt pręta, którego wyboczenie nastąpi po łuku koła o promieniu zmierzającym do nieskończoności³⁾, jest również zbliżony do połówki elipsoidy, więc możemy spodziewać się tutaj stosunkowo wysokich oszczędności na ciężarze. Łatwo sprawdzić, że oszczędność ta wyniesie 12,8% (przy założeniu sprężystości wyboczenia), a więc niewiele mniej od oszczędności maksymalnej.

Wszystkie przytoczone wyżej prace i ich wyniki nie mogą jednak znaleźć bezpośredniego zastosowania praktycznego: z jednej strony autorzy przyjmują prawo Hook'e'a, a więc sprężystość odkształceń, z drugiej natomiast otrzymują w wyniku pręt, którego przekrój na końcu swobodnym (I przypadek wyboczenia) lub oba przekroje końcowe (II przypadek wyboczenia) zbiegają do zera — co z praktycznego punktu widzenia stoi w oczywistej sprzeczności z założeniem, bowiem naprężenia musiałyby tu zbiegać do nieskończoności przekraczając tym samym granicę sprężystości materiału.

Inaczej przedstawiałaby się sprawa, gdybyśmy to zagadnienie potraktowali jako zagadnienie stykowe teorii sprężystości, czego nie uczynił dotąd żaden z badaczy. Należy jednak spodziewać się, że naprężenie zastępcze w punkcie niebezpiecznym w znacznej większości przypadków przekroczyłoby granicę sprężystości materiału. Z drugiej strony możliwość takiego ujęcia zagadnienia jest uzależniona od konstrukcyjnego rozwiązania zamocowania końców pręta.

Poważniejsze znaczenie praktyczne posiada jeden z rozdziałów pracy E. L. Nikołai, [6], w którym autor zajmuje się doбором optymalnego kształtu pręta o przekroju na końcu swobodnym, F_1 , równym nie zeru, lecz P/k_c , gdzie P oznacza siłę działającą, k_c naprężenie dopuszczalne na ściskanie (nie jest to oczywiście już pręt absolutnie optymalny, bowiem mamy tu do czynienia z pewnym warunkiem pobocznym). Nikołai zakłada jednak przy tym, że wyboczenie pręta będzie wyboczeniem sprężystym, co chyba rzadko może być spełnione w praktyce, bowiem wyrażenie jP/F_1 , równe, ze względu na przyjętą wyżej wartość F_1 , $jP/F_1 = jk_c$ (gdzie j jest stopniem pewności na wyboczenie), z reguły osiąga wartość przekraczającą granicę sprężystości.

³⁾ Kształt takiego pręta został określony w pracy [10], p. 3.4, jako poboczny przykład zastosowania metody «założenia równania ścisłego».

Zastosowanie w praktyce mogłoby znaleźć jedynie takie rozwiązanie postawionego zagadnienia, w którym zakładałoby się sprężysto-plastyczne wybożenia pręta.

Wspomniane zagadnienie należy do stosunkowo trudnych zagadnień rachunku wariacyjnego i już przy założeniu prawa Hooke'a rozwiązanie wymaga poważnego wkładu pracy. Nie będziemy więc tutaj czynić starań, zmierzających do rozwiązania go w ogólnym ujęciu przy zastąpieniu prawa Hooke'a na przykład prawem Ylлина⁴⁾; ograniczymy się natomiast do doboru optymalnej zbieżności pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego⁵⁾ (a więc zastąpimy zagadnienie rachunku wariacyjnego zagadnieniem ekstremum funkcji jednej zmiennej), uzasadniając następnie takie postępowanie. Będziemy zatem poszukiwali optymalnej wartości k_{opt} stosunku⁶⁾

$$(1.2) \quad k = \frac{i_1}{i_0}$$

charakteryzującego zbieżność pręta.

2. Dobór optymalnej zbieżności w zakresie sprężystym. Założymy na razie ważność prawa Hooke'a i zajmijmy się obliczeniem stosunku ciężaru pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego do ciężaru pręta pryzmatycznego o tej samej długości i sile krytycznej. Poszukiwanie pręta o minimalnym ciężarze wśród prętów przestrzennie równomiernie afinicznych jest uzasadnione, bowiem pręt taki powinien posiadać tę samą siłę krytyczną dla każdego możliwego kierunku wybożenia; przyjmijmy więc również, że oba główne środkowe momenty bezwładności dowolnego przekroju pręta są równe: $I_y = I_z$ (np. przekrój kołowy lub pierścieniowy).

Ciężar pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego o zbieżności k daje się określić łatwym do wyprowadzenia wzorem

$$(2.1) \quad Q = \frac{\gamma F_0 l}{3} (1 + k + k^2),$$

gdzie γ oznacza ciężar właściwy materiału pręta, l długość pręta, a F_0 powierzchnię przekroju podstawowego. Za przekrój podstawowy pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego będziemy uważali [por. [10], p. 2 oraz (4.2)] przekrój utwierdzony (I przyp. wybożenia) lub większą z pod-

⁴⁾ Por. np. M. T. Huber, [3], t. 2, oraz pracę autora [10], p. 3.3.

⁵⁾ Określenia prętów niepryzmatycznych są zgodne z przyjętymi w pracy [10], p. 2 (klasyfikacja prętów afinicznych). Prętami przestrzennie równomiernie zbieżnymi zostały nazwane pręty o stałym kształcie przekroju i stałych kierunkach głównych przy liniowej zmianie wymiarów przekroju wzdłuż osi pręta (np. ostrosłupy, stożki i stożki ścięte).

⁶⁾ Por. [10], wzór (4.1.1).

staw pręta (II przyp. wyboczenia). Do wzoru (2.1) musimy podstawić nie znaną dotychczas wartość F_0 jako funkcję siły krytycznej P_k .

Siłę krytyczną dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych określimy, jak zazwyczaj, wzorem

$$(2.2) \quad P_k = \vartheta \frac{EI_0}{L^2},$$

gdzie ϑ jest współczynnikiem stateczności, E modułem Younga, I_0 najmniejszym osiowym momentem bezwładności przekroju podstawowego (wobec uczynionego wyżej założenia $I_y = I_z$ w naszym przypadku wszystkie środkowe momenty bezwładności przekroju podstawowego są sobie równe), L długością zredukowaną pręta.

Zajmiemy się najpierw pierwszym przypadkiem wyboczenia (pręt jednostronnie utwierdzony). W takim razie $L = 2l$, a współczynnik stateczności ϑ jest najmniejszym z pierwiastków równania ⁷⁾

$$(2.3) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\vartheta}}{k} \right) = - \frac{\sqrt{\vartheta}}{1-k}.$$

Pierwiastki te są oczywiście funkcją zbieżności pręta k . Niektóre wartości tej funkcji są zestawione w tablicach wartości funkcji $\vartheta = f(k^4)$;

dokładniejsze wartości zawiera tablica 1, podana również w pracy [11].

Tablica 1. Wartości współczynników stateczności ϑ dla idealnie sprężystych i jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych

Wzór (2.2) napiszemy teraz w postaci

$$(2.4) \quad P_k = \vartheta \frac{EF_0^2}{\varphi L^2},$$

gdzie współczynnik kształtu przekroju φ , określony wzorem (1.1), jest wielkością daną. Stąd

$$(2.5) \quad F_0 = L \sqrt{\frac{\varphi P_k}{\vartheta E}}$$

i ostatecznie

$$(2.6) \quad Q = \frac{2\gamma l^2}{3} \sqrt{\frac{\varphi P_k}{E} \frac{1+k+k^2}{\sqrt{\vartheta}}}$$

lub krócej

$$(2.7) \quad Q = A \frac{1+k+k^2}{\sqrt{\vartheta}},$$

przy czym A jest pewną daną wartością stałą.

⁷⁾ Równanie to podają np. T. Kármán i M. Biot [4], s. 262, przy nieco innych oznaczeniach, oraz K. Zweiling, [9], s. 55.

Ciężar pręta pryzmatycznego jest również określony wzorem (2.7), przy podstawieniu $k = 1$, $\vartheta = \pi^2$. Zatem oznaczając go przez Q_{01} (I przypadek wybożenia) mamy

$$(2.8) \quad Q_{01} = A \frac{3}{\pi},$$

a poszukiwany stosunek ciężaru pręta zbieżnego do pryzmatycznego określi funkcja

$$(2.9) \quad \frac{Q}{Q_{01}} = \frac{(1+k+k^2)\pi}{3\sqrt{\vartheta}}.$$

Jest to funkcja jednej zmiennej k (zbieżności pręta). Jej wartości uzyskamy bez trudu posługując się tablicą 1; zostały one zebrane w tablicy 2.

Minimum funkcji Q/Q_{01} jest warunkiem optymalnej zbieżności pręta. Korzystając z tablicy 2 (i ewentualnie naryskowanego za jej pomocą wykresu) łatwo stwierdzić, iż minimum to zachodzi dla $k = 0,581$ i wynosi 0,8966. Tak więc optymalna zbieżność wynosi tutaj $k_{opt} = 0,581$; a odpowiada jej oszczędność na ciężarze

$$Z = (1 - 0,8966) \cdot 100\% = 10,34\%$$

w stosunku do ciężaru pręta pryzmatycznego.

Zajmiemy się teraz drugim przypadkiem wybożenia prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (oba końce zamocowane dwuprzegubowo). Wzory ogólne (2.1) i (2.2) mają tu zastosowanie bez zmiany, należy jednak podstawić $L = l$ oraz inne wartości współczynników stateczności ϑ . Zamiast wzoru (2.6) napiszemy zatem

$$(2.10) \quad Q = B \frac{1+k+k^2}{\sqrt{\vartheta}},$$

gdzie $B = A/2$ jest daną wartością stałą. Ciężar pręta pryzmatycznego otrzymamy podstawiając $k = 1$, $\vartheta = \pi^2$; oznaczając go przez Q_{02} mamy

$$(2.11) \quad Q_{02} = B \frac{3}{\pi}.$$

Tablica 2. Wartości funkcji Q/Q_{01} dla idealnie sprężystych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych i jednostronnie utwierdzonych

k	Q/Q_{01}	k	Q/Q_{01}
0,00	∞	0,50	0,9033
0,05	3,691	0,55	0,8974
0,10	2,049	0,60	0,8969
0,15	1,517	0,65	0,9007
0,20	1,263	0,70	0,9080
0,25	1,119	0,75	0,9183
0,30	1,031	0,80	0,9309
0,35	0,9752	0,85	0,9457
0,40	0,9390	0,90	0,9622
0,45	0,9164	0,95	0,9804
0,50	0,9033	1,00	1,0000

Dzieląc stronami równania (2.10) przez (2.11) i podstawiając dla drugiego przypadku wybożenia ⁸⁾

$$(2.12) \quad \theta = k^2 \pi^2$$

wyrazimy poszukiwany stosunek ciężaru pręta zbieżnego do pryzmatycznego wzorem

$$(2.13) \quad \frac{Q}{Q_{02}} = \frac{1+k+k^2}{3k}$$

Funkcja ta posiada w punkcie $k = 1$ minimum $Q/Q_{02} = 1$. A zatem ze wszystkich prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, zamocowanych dwuprzegubowo, najlżejszy jest pręt pryzmatyczny. Stosowanie prętów niepryzmatycznych (przestrzennie równomiernie zbieżnych) przyniesie tu nie oszczędność, lecz zwiększenie ciężaru.

Oszczędność na materiale w przypadku prętów dwuprzegubowych możemy natomiast uzyskać stosując pręty przestrzennie równomiernie dwuzbieżne ⁹⁾. Łatwo bowiem sprawdzić, iż przeprowadzona powyżej analiza ciężaru jednostronnie utwierdzonych prętów zbieżnych nie ulegnie zmianie w przypadku dwuprzegubowo zamocowanych prętów dwuzbieżnych. Maksymalna oszczędność na ciężarze wyniesie i tutaj 10,34% przy zbieżności $k_{opt} = 0,581$.

3. Dobór optymalnej zbieżności w zakresie sprężysto-plastycznym. Przeprowadzone wyżej rozważania wykazały, że spośród idealnie sprężystych jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych (lub dwuprzegubowych dwuzbieżnych) można dobrać taki, który przynosi oszczędność na ciężarze zaledwie o około 3% niższą od największej teoretycznie możliwej do osiągnięcia. Jeżeli zważymy teraz, że w przypadku materiałów rzeczywistych — o sprężystości ograniczonej — różnica ta ulegnie jeszcze zmniejszeniu ¹⁰⁾ oraz że koszt wykonania pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego (najczęściej stożka ściętego lub drażonego) jest zazwyczaj niższy od kosztu wykonania pręta optymalnego, stwierdzimy, że ograniczenie się do poszukiwania optymalnej zbieżności jest w pełni uzasadnione, a olbrzymi nakład pracy, konieczny do rozwiązania postawionego na początku ogólnego zagadnienia wariacyjnego przy przyjęciu zmiennego modułu wybożenia — nie potrzebny z praktycznego punktu widzenia.

Zajmiemy się zatem ustaleniem optymalnej zbieżności jednostronnie

⁸⁾ Por. np. K. Z weiling, [9], s. 55.

⁹⁾ Por. [10], p. 2 oraz p. 4.1.

¹⁰⁾ Naprężenie krytyczne w najmniejszym przekroju pręta nie może przekroczyć granicy plastyczności rozpatrywanego materiału, co musi spowodować zwiększenie wymiarów przekroju pręta w pobliżu swobodnego końca (w pierwszym przypadku wybożenia) i kształt optymalnego zbliży się do kształtu pręta przestrzennie równomiernie zbieżnego.

utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych lub dwuprzegubowo zamocowanych dwuzbieżnych przy założeniu wyboczenia sprężysto-plastycznego. W tym celu wykorzystamy wyniki pracy [10] podającej wartości współczynników stateczności i naprężeń krytycznych dla prętów zbieżnych, obliczone w oparciu o teorię wyboczenia sprężysto-plastycznego K á r m á n a - Y l i n e n a. Ponieważ zawarte w tej pracy dane liczbowe odnoszą się jedynie do stali 015 (St. 37), ograniczymy się i tutaj do doboru optymalnej zbieżności prętów wykonanych z tego materiału. Rozszerzenie rozważań na przypadek innych materiałów nie przedstawiłby żadnej trudności po opracowaniu odpowiednich tablic pomocniczych (analogicznych do tablic 2, 3, 7 i 8 w pracy [10]).

Formalnie biorąc wzory (2.6) i (2.7) zachowują i tu swą ważność; mamy tu jednak $\vartheta = \vartheta(k, \lambda_0)$, a ponieważ smukłość λ_0 nie jest dana¹¹⁾, wzory te nie mogą posłużyć do przeprowadzenia odpowiedniej analizy. Obierzemy przeto nieco inną drogę.

Zamiast (2.5) podstawimy

$$(3.1) \quad F_0 = \frac{\varphi L^2}{\lambda_0^2},$$

otrzymując

$$(3.2) \quad Q = \frac{\gamma \varphi l L^2}{3} \frac{1+k+k^2}{\lambda_0^2} = A_1 \frac{1+k+k^2}{\lambda_0^2},$$

gdzie A_1 oznacza pewną daną wielkość stałą.

Smukłość λ_0 wyrazimy teraz za pomocą wielkości danych i zbieżności pręta k . W tym celu wprowadzimy pewną wielkość η określoną wzorem¹²⁾

$$(3.3) \quad \eta = \frac{P_k}{\varphi L^2},$$

a więc o wymiarze kG/cm^2 , i nazwiemy ją cechą plastyczności pręta (bo-
wiem gdy $\eta \rightarrow 0$, wyboczenie staje się idealnie sprężyste). Skorzystamy następnie z łatwej do wykazania tożsamości

$$(3.4) \quad \eta = \frac{\sigma_{k0}}{\lambda_0^2},$$

gdzie

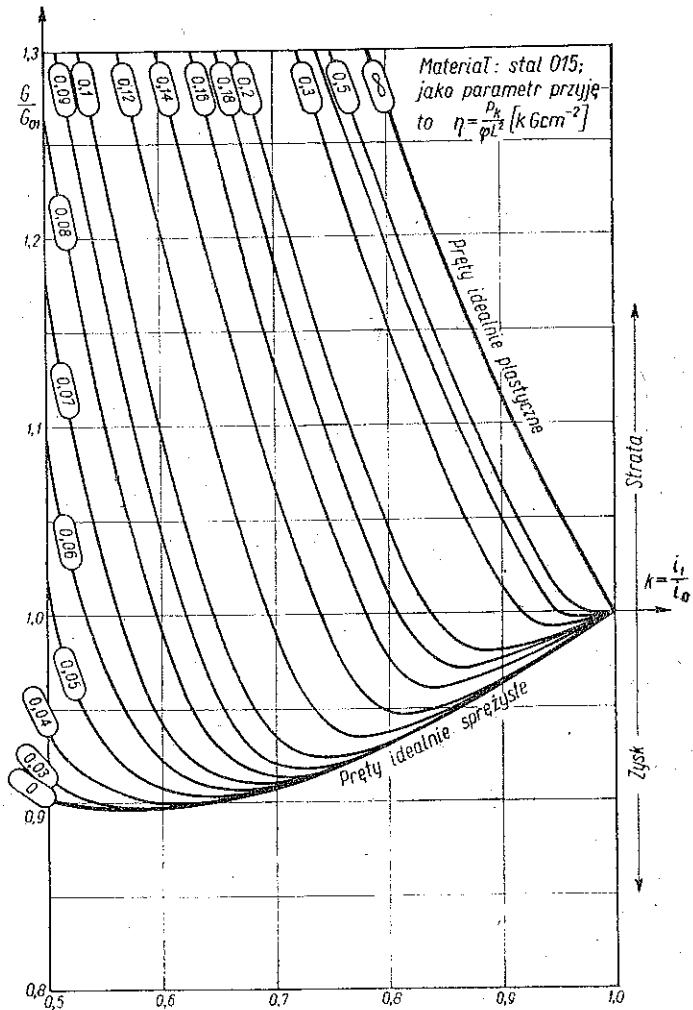
$$(3.5) \quad \sigma_{k0} = \frac{P_k}{F_0}$$

oznacza naprężenie krytyczne w przekroju podstawowym. Ponieważ

¹¹⁾ Smukłością dolną λ_0 pręta niepryzmatycznego został w pracy [10] nazwany stosunek L/λ_0 , gdzie L jest długością zredukowaną pręta, λ_0 odpowiednim promieniem bezwładności przekroju podstawowego (w naszym przypadku wszystkie promienie bezwładności przekroju podstawowego są sobie równe).

¹²⁾ Y l i n e n a posługiwał się odwrotnością tej wielkości (por. [3]).

$\sigma_{k0} = \sigma_{k0}(k, \lambda_0)$ (tablica 8 w pracy [10]), to także $\eta = \eta(k, \lambda_0)$. Przy ustalonym k funkcja σ_{k0} jest nierosnącą funkcją zmiennej λ_0 , zatem η jest monotonicznie malejącą funkcją tej zmiennej [wzór (3.4)] i posiada funkcję odwrotną; w ten sposób uzyskamy wartości funkcji $\lambda_0 = \lambda_0(k, \eta)$, a po podstawieniu do (3.2) funkcji $Q = Q(k, \eta)$. Iloraz $Q(k, \eta) : Q(1, \eta)$



Rys. 1

będzie poszukiwanym stosunkiem ciężaru pręta zbieżnego do pryzmatycznego, którego minimum przy ustalonej wartości cechy plastyczności η określi optymalną zbieżność pręta.

Przeprowadzenie wspomnianych rachunków jest o tyle utrudnione, że nie znamy wzoru określającego funkcję $\sigma_{k0} = \sigma_{k0}(k, \lambda_0)$, znamy jedy-

nie wartości tej funkcji zebrane w tablicy 8 w pracy [10] (stal 015) lub w analogicznych tablicach dla innych materiałów. Toteż odwrócenia funkcji musimy dokonać za pomocą interpolacji, a wynik — wartości funkcji Q/Q_{01} — otrzymamy w postaci tablicy. W przypadku stali 015 będzie to tablica 3; lepiej jeszcze przebieg funkcji $Q/Q_{01} = f(k, \eta)$ unacznia wykres na rysunku 1.

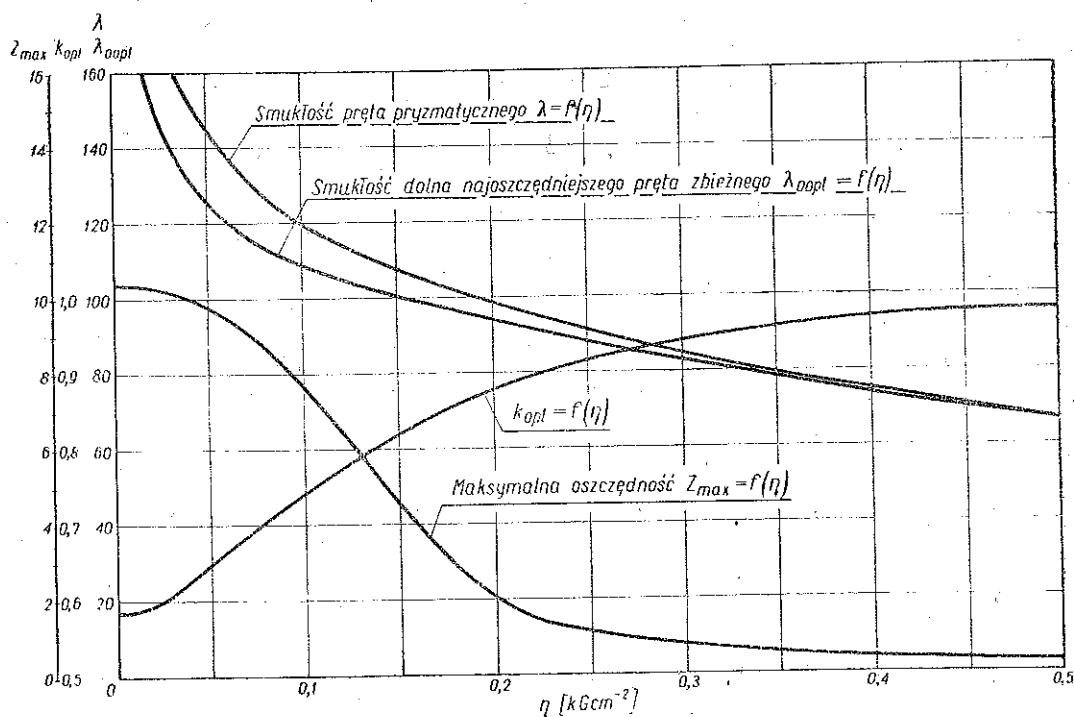
Tablica 3. Wartości funkcji $Q/Q_{01} = Q/Q_{01}(k, \eta)$ dla prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych, jednostronnie utwierdzonych, wykonanych ze stali 015

$k \backslash \eta$ [kG/cm ²]	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
0,00	0,903	0,897	0,897	0,901	0,908	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,03	0,913	0,900	0,898	0,901	0,908	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,04	0,940	0,910	0,902	0,902	0,908	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,05	1,02	0,931	0,908	0,903	0,908	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,06	1,10	0,974	0,922	0,908	0,909	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,07	1,18	1,03	0,943	0,915	0,910	0,918	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,08	1,27	1,11	0,990	0,930	0,914	0,919	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,09	1,34	1,18	1,05	0,953	0,919	0,921	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000
0,10	1,42	1,24	1,11	0,995	0,934	0,925	0,933	0,946	0,962	0,980	1,000
0,12	1,56	1,36	1,21	1,09	0,992	0,943	0,937	0,948	0,963	0,980	1,000
0,14	1,68	1,47	1,30	1,17	1,06	0,988	0,950	0,953	0,966	0,982	1,000
0,16	1,77	1,55	1,38	1,24	1,13	1,05	0,978	0,961	0,971	0,984	1,000
0,18	1,85	1,63	1,45	1,31	1,19	1,09	1,01	0,972	0,976	0,986	1,000
0,20	1,93	1,69	1,50	1,36	1,23	1,13	1,05	0,990	0,982	0,988	1,000
0,25	2,03	1,78	1,59	1,43	1,30	1,20	1,10	1,04	0,989	0,990	1,000
0,30	2,10	1,85	1,65	1,49	1,35	1,24	1,14	1,08	1,01	0,993	1,000
0,35	2,15	1,89	1,68	1,52	1,38	1,27	1,17	1,10	1,03	0,996	1,000
0,40	2,19	1,92	1,71	1,54	1,40	1,29	1,19	1,12	1,05	0,999	1,000
0,45	2,21	1,94	1,73	1,56	1,41	1,30	1,20	1,13	1,06	1,00	1,000
0,50	2,23	1,95	1,74	1,57	1,42	1,31	1,21	1,14	1,07	1,01	1,000
∞	2,33	2,04	1,82	1,63	1,49	1,37	1,27	1,19	1,12	1,05	1,000

Dla każdej wartości η istnieje taka wartość k_{opt} , której odpowiada minimalny ciężar pręta. W przypadku granicznym $\eta \rightarrow 0$, a więc dla prętów nieskończenie smukłych, $k_{opt} = 0,581$ zgodnie z wynikiem otrzymanym w p. 2. W drugim przypadku granicznym $\eta \rightarrow \infty$, a więc przy wyboczeniu plastycznym, $k_{opt} = 1$, jak łatwo przewidzieć. Dla pośrednich wartości η przyjmuje k_{opt} wartości zawarte w przedziale $0,581 < k_{opt} < 1$, przy czym, jak widać z wykresu 1, minima krzywych $Q/Q_{01} = Q/Q_{01}(k)$ rosną ze wzrostem η , stąd zmniejsza się możliwość dokonania oszczędności na ciężarze. Oszczędność tę oznaczymy przez Z i określimy jako

$$(3.6) \quad Z = \frac{Q_{01} - Q}{Q_{01}} 100\%.$$

Dla ułatwienia wymiarowania prętów i optymalnej zbieżności tablica 4 i wykres na rys. 2 podają wartości funkcji $k_{opt} = k_{opt}(\eta)$, $\lambda_{0opt} = \lambda_{0opt}(\eta)$ (dolna smukłość pręta o optymalnej zbieżności), $Z = Z(\eta)$ i dla porównania $\lambda = \lambda(\eta)$, gdzie λ oznacza smukłość pręta przyrządczego o tej samej sile krytycznej. Jeżeli bowiem oszczędność na ciężarze



Rys. 2

pręta będzie zbyt mała, a widzimy, że w przypadku stali 015 już przy $\eta = 0,14$ kG/cm² wynosi ona tylko około 5% malejąc szybko ze wzrostem η , nie opłaca się w ogóle stosować pręta zbieżnego; dobierzemy wtedy pręt przyrządczy, a więc o zbieżności $k = 1$. Znając smukłość dolną pręta możemy już bez trudu obliczyć wielkość przekroju podstawowego, np. korzystając ze wzoru (3.1).

Wszystkie nasze rozważania odnosiły się do jednostronnie utwierdzonych prętów zbieżnych; w przypadku dwuprzegubowo zamocowanych prętów dwuzbieżnych nie ulegają one jednak żadnym zmianom.

Dla przykładu dobierzemy wymiary dwuprzegubowego pręta o długości $l = 94$ cm, który ma przenieść siłę osiową $P = 2000$ kG przy stopniu pewności $j = 5$, przy czym przekrój pręta ma mieć kształt dwuteownika o współczynniku $\varphi = 10$. Materiałem pręta ma być stal 015.

Przed wszystkim obliczamy cechę plastyczności pręta:

$$\eta = \frac{Pj}{\varphi L^2} = \frac{2000 \cdot 5}{10 \cdot 94^2} = 0,113 \text{ kG/cm}^2.$$

Z wykresu 2 lub tablicy 4 wynika, że przy tej wartości η możemy osiągnąć oszczędność na ciężarze $Z = 7\%$ przez zastosowanie pręta dwuzbieżnego (wobec dwuprzegubowego zamocowania końców) zamiast pręta pryzmatycznego. Załóżmy najpierw, że wykorzystamy możliwość dokonania tej oszczędności: z wykresu lub tablicy odczytamy wtedy

$$k_{opt} = 0,76, \quad \lambda_{0opt} = 107,$$

$$F_0 = \frac{\varphi L^2}{\lambda_0^2} = \frac{10 \cdot 94^2}{107^2} = 7,70 \text{ cm}^2,$$

$$F_1 = k_{opt}^2 F_0 = 0,76^2 \cdot 7,70 = 4,45 \text{ cm}^2,$$

gdzie przez F_1 została oznaczona powierzchnia przekroju na obu końcach pręta dwuzbieżnego (zgodnie z oznaczeniami pracy [10]).

Mamy więc pręt już zwymiarowany. Obliczmy jeszcze jego ciężar:

$$Q = \frac{\gamma F_0 l}{3} (1 + k + k^2) = \frac{7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 7,70 \cdot 94 \cdot 2,338}{3} = 4,42 \text{ kG},$$

bowiem wzór (2.1) jest słuszny zarówno dla prętów zbieżnych, jak i dwuzbieżnych.

Założmy teraz, że oszczędność $Z = 7\%$ uważamy za zbyt małą i decydujemy się wykonać pręt pryzmatyczny; w takim razie z wykresu 2 lub tablicy 4 odczytujemy

$$\lambda = 117, \quad F = \frac{\varphi L^2}{\lambda^2} = \frac{10 \cdot 94^2}{117^2} = 6,46 \text{ cm}^2,$$

a ciężar pręta

$$Q_{02} = \gamma Fl = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 6,46 \cdot 94 = 4,76 \text{ kG}.$$

Tablica 4. Wymiarowanie jednostronnie utwierdzonych prętów przestrzennie równomiernie zbieżnych o zbieżności optymalnej. Materiał: stal 015

η [kG/cm ²]	k_{opt}	λ_{0opt}	λ	z
0,00	0,58	∞	∞	10,3%
0,03	0,61	139	162	10,2%
0,04	0,63	131	151	10,0%
0,05	0,65	125	143	0,7%
0,06	0,67	120	137	9,4%
0,07	0,69	117	131	9,0%
0,08	0,71	114	127	8,6%
0,09	0,73	112	123	8,1%
0,10	0,74	109	120	7,6%
0,12	0,77	105	115	6,5%
0,14	0,80	102	110	5,3%
0,16	0,83	99	106	4,0%
0,18	0,86	96	102	2,9%
0,20	0,88	94	99	2,0%
0,30	0,94	83	85	0,8%
∞	1	0	0	0%

Łatwo sprawdzić, że oszczędność 0,34 kG wynosi w istocie około 7% ciężaru pręta pryzmatycznego Q_{02} .

Na zakończenie stwierdzimy, że w przypadku stosowania stali o wyższych własnościach wytrzymałościowych wzrośnie możliwość uzyskania oszczędności na ciężarze, wzrośnie mianowicie wartość η_{max} , przy której stosowanie prętów niepryzmatycznych jeszcze jest opłacalne zgodnie z przyjętym kryterium (np. 5% oszczędności). Innym zagadnieniem jest zagadnienie zastępowania materiałów o dużym ciężarze właściwym, np. stali, przez materiały lekkie o niższych własnościach wytrzymałościowych (stopy glinu, drewno), czym jednak nie będziemy się tutaj zajmowali.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. N. Dinnik, *Ustojcziwost' uprugich sistiem*, AN ZSRR, Moskwa-Leningrad 1950.
- [2] M. Feigen, *Minimum Weight of Tapered Round Thin-Walled Columns*, Journ. Appl. Mech. 19 (1952), 3.
- [3] M. T. Huber, *Stereomechanika techniczna*, t. 2 i 4, PZWS, Warszawa 1951.
- [4] T. Kármán i M. Biot, *Matematyczne metody w inżynierom diele*, Gostechizdat, Moskwa-Leningrad 1948 (tłum. z ang.).
- [5] J. Naleszkiewicz, *Zagadnienia stateczności sprężystej*, Wyd. Kom., Warszawa 1953.
- [6] E. L. Nikołai, *Zadacza Łagranża o najwygodniejszym oczertanji kołonn*, *Trudy po mechanikie*, Gostechizdat, Moskwa 1955.
- [7] S. D. Ponomariew i inni, *Osnovy sowremiennych metodow rasczota na procznost' w maszynostrojenji*, Maszgiz, Moskwa 1952.
- [8] F. Szelaǳowski, *W sprawie stateczności prętów o zmiennym momencie bezwładności*, Przegl. Techn., Warszawa 1927.
- [9] K. Zweiling, *Gleichgewicht und Stabilität*, Berlin 1953.
- [10] M. Życzkowski, *Wyboczenie sprężysto-plastyczne niektórych prętów niepryzmatycznych*, Rozpr. Inżyn. 2 (1954).
- [11] M. Życzkowski, *Obliczanie sił krytycznych dla sprężystych prętów niepryzmatycznych metodą interpolacji częściowej*, Rozpr. Inżyn. 3 (1956).

Резюме

О ПОДБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Проблема оптимальной формы центрально сжатых стержней при предположении закона Гука, а следовательно упругих деформаций, решалась многими исследователями. Полученные результаты, однако, не могут найти непосредственного применения в конструкционной

практике, так как площадь сечения свободного конца стержня, зашпеленного односторонне, или обоих концов стержня, шарнирно закрепленного, должна стремиться к нулю, что вызвало бы неограниченный рост напряжений и отклонение от закона Гук а. Таким образом, при решении проблемы оптимальной формы следует предположить, что продольный изгиб стержня будет упруго-пластический.

Описанная проблема решается в работе с практической точки зрения, ограничиваясь подбором оптимальной сходимости пространственно равномерно сходящегося стержня (пирамиды или усеченного конуса) и заменяя, таким образом, проблему вариационного исчисления проблемой экстремума функции одной переменной. При этом использовано результаты работы автора [10], приводящей значения критических сил при упруго-пластическом выпучивании таких стержней, вычисленные на основании теории И л и н е н а.

Результаты работы представлены на графике 2 и в таблице 4. Они дают возможность подобрать оптимальную сходимость стержня и его размеры, а также ставить в зависимость экономику материала и веса конструкции от «признака пластичности» стержня, определенного формулой (3.3). На основании графика 2 и таблицы 4 решен численный пример.

Summary

THE PROBLEM OF THE MOST SUITABLE FORM FOR AXIALLY COMPRESSED BARS

The problem of the most suitable form for axially compressed bars subjected to Hooke's law (i. e. undergoing elastic deformation) has been tackled by many investigators. The results obtained have not found direct application in engineering practice because the cross-sectional area of the free end for a bar built-in at one end, or the cross-sectional area of each of the ends of a bar resting on two hinged supports should tend to zero. This would cause an indefinite increase of stress and a deviation from Hooke's law. In solving the problem of the most suitable form for a compressed bar it should therefore be assumed that the buckling will be elastic-plastic.

This problem is solved in the present paper from the point of view of practical requirements, limiting oneself to the choice of the best taper for a uniformly tapered bar (pyramid or cone), the variational problem being thus replaced by the problem of the extremum of a function of one variable. The results of the author's paper [10] giving the values of

critical forces for elastic-plastic buckling of such bars, calculated by means of Y l i n e n ' s theory, are used.

The results of the paper are represented in Diagr. 2 and Table 4 enabling the determination of the best taper and dimensions of the bar and showing that the possibilities of material economy and weight reduction depend on the «plastic characteristic» of the bar determined by Eq. (3.3). Using Diagr. 2 and Table 4 a numerical example is solved.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1955 r.