

JAN MADEJSKI

WYBOCZENIE PRĘTA PRYZMATYCZNEGO  
JAKO ZAGADNIENIE DYNAMICZNEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XLIX

## SPIS TREŚCI

	Str.
Uwagi wstępne	353
1. Sformułowanie zagadnienia i ustalenie warunków brzegowych i początkowych	356
2. Wyznaczenie odkształceń plastycznych pochodzących od ściskania	359
3. Wyznaczenie odkształceń plastycznych pochodzących od zginania	359
4. Ustalenie kryterium powstawania pierwszych pęknięć	360
5. Ustalenie zakresu wyboczenia czysto plastycznego	363

### Uwagi wstępne

Zreferowanie niniejszej pracy na konferencji naukowej Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Karpaczu w sierpniu 1955 wywołało bardzo ożywioną dyskusję. Rozstrząsany był głównie problem, czy wpływ czasu na zjawisko wyboczenia pręta w obszarze powstawania odkształceń trwałych jest rzeczywiście istotny. Odpowiedź na to pytanie może dać tylko praktyka. W publikacjach M. Broszki, [2], który w latach 1933-1939 przeprowadzał prace eksperymentalne nad omawianym zjawiskiem, czytamy na str. 115:

Die Urheber solcher Versuche scheinen aber deren Endziel nicht erkannt zu haben, denn dieses Endziel besteht nicht in der experimentellen Bestimmung derjenigen Höchstwerte der kritischen Belastung, die beim Knickversuch erreicht werden können, wenn man die Wirkung der im Laufe des Belastungsvorganges entstehenden kleinen Fehlerhebel des Kraftangriffes jeweils nach den einzelnen auf dem Probestab aufgebrachten Belastungsstufen durch Verschieben der Stabendflächen gegen die Druckplatten aufhebt. Es besteht vielmehr in jedem Einzelfall in der Ermittlung des Minimalwertes der kritischen Belastung, d. h. derjenigen Last, die, auf einen geradachsigen Stab achsrecht aufgebracht, das Ausknicken des nach der Lastaufbringung sich selbst überlassenen Stabes erst nach Ablauf einer unbeschränkt langen Zeit herbeiführen würde...

Na str. 116 czytamy:

Die Irrtümlichkeit dieser... von T. Kármán übernommenen Theorie erscheint hinwiederum als Folge der Ausserachtlassung des Einflusses der Zeit auf die Ausbildung der Verformung...

Następnie W. Wierzbicki, [6], pisze przy okazji omawiania okoliczności towarzyszących poważniejszym katastrofom budowlanym:

Gdy chodzi o czas trwania katastrofy, to bywał on bardzo różny; można go było liczyć na sekundy, na godziny, a nawet w niektórych wypadkach dzielił się na etapy nieraz kilkudniowe.

W świetle przytoczonych wypowiedzi wpływ czasu na zjawisko wyboczenia w obszarze powstawania odkształceń plastycznych wydaje się istotny. Z problemem tym wiąże się problem ogólniejszy. Chodzi mianowicie o rozstrzygnięcie zagadnienia podstawowego: czy odkształcenia trwałe (plastyczne) można rozdzielić na stacjonarne i na lepkie (zależne

od czasu), czy też lepkość jest nieodłącznym atrybutem sposobu powstawania odkształceń trwałych.

W sprawie tej można nawiązać do pracy W. Olszaka i W. Urbanońskiego, [5]. W pracy tej rozróżnia się stan odkształcenia plastycznego wstrzymanego (stan elasto-plastyczny), kiedy strefa sprężysta niejako utrudnia ruch plastyczny materiału, oraz stan odkształcenia plastycznego niewstrzymanego, któremu odpowiada w szczególności zupełne uplastycznienie materiału. W ujęciu dynamicznej teorii plastyczności, [4], oba wypadki otrzymamy (dla plastyczności bez wzmocnienia) szukając granicy stanu naprężenia i odkształcenia przy nieograniczonym wzroście czasu. Jeśli stan ten ustala się (jak to może być np. w przypadku rury cylindrycznej), to mamy do czynienia z odkształceniem plastycznym wstrzymanym; w przeciwnym przypadku (np. w rozpatrywanym konkretnym przykładzie wyboczenia) odkształcenie plastyczne ma charakter niewstrzymany. Jeśli zatem obserwujemy te dwie grupy stanów odkształceń plastycznych, to nadawanie samemu zjawisku powstawania tych odkształceń własności «stacjonarnych» nie wydaje się uzasadnione. Inna rzecz, że w przypadku zjawiska wstrzymanego w stanie równowagi lepkość nie odgrywa roli.

Przedstawione w pracy zagadnienie wyboczenia zawiera szereg uproszczeń, które mogą niekiedy znacznie wypaczyć wyniki rachunków. Do uproszczeń tych należy założenie izo- i tautotermiczności zjawiska, przyjęcie szczególnego przebiegu zmienności obciążenia oraz linearyzacja zagadnienia. W dyskusji sprawa ta została podniesiona. Otóż należy podkreślić, że rozwiązany szczegółowo przykład ma znaczenie raczej dydaktyczne. W istocie z sensu pracy wynika, że w konstrukcjach mogących ulec wyboczeniu nie należy dopuszczać takich naprężeń, które wywołałyby odkształcenia plastyczne niewstrzymane. Naprężenie łamiące, wyliczone ze wzorów Kármána i in., jest zawsze znacznie większe od prawdziwej granicy sprężystości. Za to współczynniki bezpieczeństwa, które stosuje się w połączeniu z tymi wzorami, są również bardzo duże, zawierają one bowiem tzw. *factor of ignorance* według terminologii S. Timoszenki, [3].

W pracy rozpatruje się zagadnienie zginania podłużnego, tymczasem tytuł zawiera termin «wyboczenie»; budziło to dalsze zastrzeżenia w czasie wspomnianej wyżej dyskusji. Zastrzeżenia te wywołane zostały przez zwykle dla zagadnień sprężystych utożsamianie zjawiska wyboczenia pręta przyrządkowego z zagadnieniem stateczności prostej postaci takiego pręta. Otóż, jak podkreślono w pracy, w obszarze powstawania odkształceń plastycznych nie mamy do czynienia ze zjawiskiem utraty stateczności pręta, lecz ze «zniszczeniem prętów ściskanych, nazywanym ogólnie

nikowo, w potocznym języku technicznym, wyboczeniem»<sup>1)</sup>. Tym potocznym językiem techniki uzasadniony jest tytuł referatu.

W poprzednich pracach na temat wyboczenia pręta pryzmatycznego w obszarze powstawania odkształceń plastycznych (por. Engesser, Jasiński, Kármán, Broszko, [1] i [2]) przyjmuje się pewien rozkład naprężeń w przekroju pręta, przy czym jako podstawa służy wykres indykatorowy próby doraźnej ściskania  $\sigma = f(\epsilon)$ . Prócz tego zwykło się posługiwać założeniem D. Bernoulliego, dotyczącym płaskości odkształconych przekrojów. O ile to ostatnie założenie nie podlega dyskusji (zostało zresztą sprawdzone doświadczalnie), o tyle przyjęcie rozkładu naprężeń zależnego tylko od odkształcenia jest uproszczeniem niezgodnym z rzeczywistością. Wynika stąd bowiem, że zjawisko powstawania odkształceń plastycznych wolne jest od wpływu czasu.

Celem teorii wyboczenia «plastycznego» było wyprowadzenie wzoru na siłę krytyczną. Zwrot «siła krytyczna» został użyty świadomie, choć jest rzeczą jasną, że w obszarze powstawania odkształceń plastycznych o sile krytycznej nie może być mowy. Podkreśla to Timoszenko, [3], wskazując na fakt, że wyboczenie «plastyczne» jest zjawiskiem z natury niestatecznym, ponieważ odkształcenia plastyczne w miarę upływu czasu stale rosną (ruch plastyczny materiału). Można zatem mówić wyłącznie o sile łamiącej lub o sile, która wywołuje pierwsze pęknięcia włókien. Natomiast dopóki rozkład naprężeń przyjmowany jest jako funkcja wyłącznie odkształceń [u podstaw takiej teorii leży wykres indykatorowy  $\sigma = f(\epsilon)$ ], dopóty można z sensem używać wyrażenia «siła krytyczna», dlatego że w istocie materiał przyjmuje się jako nieliniowo sprężysty, a zatem zagadnienie stateczności ma sens. Tak pojęte zjawisko cechuje odwracalność, podstawowa własność teorii sprężystości, będąca jednak zaprzeczeniem istoty teorii plastyczności związanej wyłącznie z procesami nieodwracalnymi.

W związku z tym rozpatrzenie zjawiska wyboczenia w obszarze powstawania odkształceń plastycznych wymaga uwzględnienia wpływu takich czynników, jak np. prędkości narastania naprężeń  $\dot{\sigma}$  oraz bezpośrednio czasu. Wiadomo bowiem, że odkształcenia plastyczne powstają w miarę upływu czasu oraz w zależności od wielkości obciążenia.

Na fakt ten dawno zwrócili uwagę eksperymetatorzy. M. Broszko, [2], wskazuje, że dla smukłości mniejszej od krytycznej identyczne próbki materiału wybaczą się po dłuższym okresie trwania obciążenia, jeśli zmniejszy się wielkość tego ostatniego. Wynika stąd wniosek, [2], że w technice nie można brać pod uwagę wartości siły wybaczącej (łamiącej) dla krótkiego okresu czasu obciążenia, ustalonej zwykle podczas prób laboratoryjnych. Natomiast bardzo istotnym zagadnieniem staje się

<sup>1)</sup> Por. [6], s. 5.

wyznaczenie siły wybaczej (naprężenia wybaczej) dla nieograniczonego długiego okresu trwania obciążenia. Tę ostatnią wartość naprężenia wybaczej nazywa B r o s z k o «efektywną», przy czym

$$\sigma_{KEF} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_K,$$

gdzie  $t$  oznacza czas.

Dla wyznaczenia naprężenia  $\sigma_{KEF}$  proponuje B r o s z k o drogę doświadczalną, mającą na celu wyznaczenie zależności  $\sigma_K(t)$  dla różnych smukłości i różnych materiałów.

W pracy niniejszej pragniemy wykazać, że pod względem jakościowym poprawne wykresy  $\sigma_K(t)$  można otrzymać opierając się na zasadach dynamicznej teorii plastyczności, które wyłożyliśmy w pracy [4]. Z teorii wyboczenia «plastycznego» zamieszczonej w tej pracy wynika, że

$$\sigma_{KEF} = \sigma_E,$$

tj. efektywne naprężenie wybaczej jest identyczne z prawdziwą granicą sprężystości  $\sigma_E$ , będącą funkcją materiałową, zależną w pierwszym rzędzie od temperatury. Należy przy tym rozumieć, że  $\sigma_{KEF}$  jest największą wartością naprężeń panujących w obciążonym przekroju. Jeśli rozumie się jak zwykle  $\sigma_{KEF}$  jako iloraz siły łamiącej przez przekrój, to  $\sigma_{KEF}$  wypadnie odpowiednio mniejsze od  $\sigma_E$ .

A zatem to najważniejsze zagadnienie z punktu widzenia praktyki rozstrzyga się w sposób prosty.

Dotychczas przeprowadzone doświadczenia polegały z zasady na wyboczeniu (złamaniu) próbki w skończonym okresie czasu, wskutek czego naprężenie łamiące było większe od prawdziwej granicy sprężystości. W związku z tym ciekawe byłoby wyznaczenie zależności  $\sigma_K(S)$  ( $S$  oznacza smukłość) dla stałego czasu złamania  $T'$  w oparciu o dynamiczną teorię plastyczności. Teoria ta potrafi jednak określić tylko czas  $T$ , po którym nastąpi pierwsze pęknięcie włókna. Oczywiście, wartość czasu  $T$  jest dla danego zagadnienia jak najbardziej miarodajna.

Poniżej podajemy rozwiązanie tego problemu przy założeniu płaskości odkształconych przekrojów. Dla prostoty rachunków zakłada się, że próba ma charakter izotermiczny, a zmiana obciążenia w czasie ma pewien szczególny przebieg.

#### 1. Sformułowanie zagadnienia i ustalenie warunków brzegowych i początkowych

Rozpatrzmy pręt pryzmatyczny o powierzchni przekroju  $F$  i długości swobodnej  $L$ , utwierdzony doskonale jednym końcem, a obciążony na drugim siłą  $P(t)$ , przyłożoną równoległe do stycznej do osi pręta w miejscu

utwierdzenia. Zakładamy, że pierwotna postać pręta wyrażona jest następującym wzorem:

$$(1.1) \quad x_0^- = m_0^- \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{L} \right).$$

Założmy, że obciążenie pręta wzrasta błyskawicznie (bez oporów bezwładności) do wartości  $P$  w chwili  $t = +0$ , potem zaś utrzymuje się na stałym poziomie aż do chwili powstania pierwszego pęknięcia  $t = T$ . Tak przyjęty wykres narastania obciążenia przedstawiony jest na rys. 1.

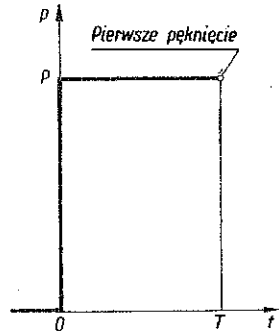
Zatem w chwili  $t = +0$  mamy już do czynienia z pełnym obciążeniem, ale odkształcenia plastyczne nie zdążyły jeszcze powstać. W chwili tej linia ugięcia pręta ma już inną postać  $x_0^+$ ; wzrósł także mimośród obciążenia.

Schemat obciążenia i kształtu pręta w kolejnych chwilach przedstawiony jest na rys. 2.

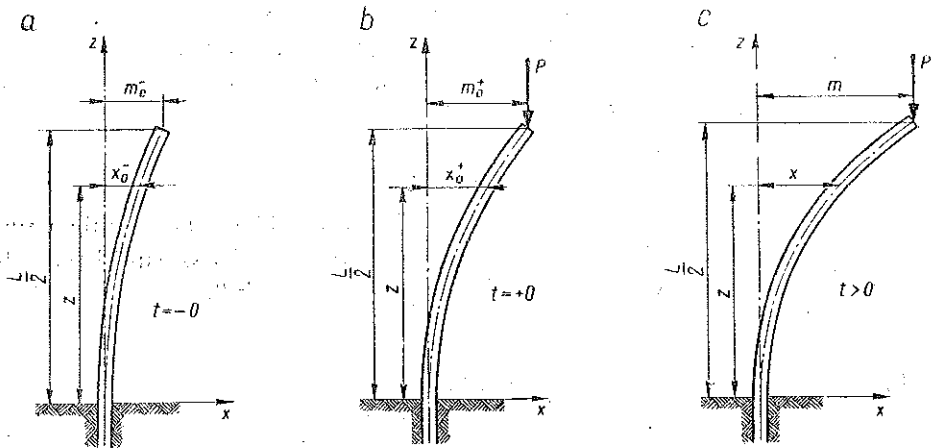
W chwili  $t = +0$  zachowanie materiału jest sprężyste, można zatem zastosować metody teorii sprężystości.

Z założenia płaskości przekrojów wynika, że

$$(1.2) \quad \varepsilon_{G0}^+ = \frac{y \left( \frac{1}{\varrho_0^+} - \frac{1}{\varrho_0^-} \right)}{1 + \frac{y}{\varrho_0^-}},$$



Rys. 1



Rys. 2

przy czym we wzorze tym  $y$  oznacza odległość włókna od osi obojętnej,  $\varrho_0^+$  i  $\varrho_0^-$  promienie krzywizny w chwilach  $t = +0$  i  $t = -0$ ,  $\varepsilon_{G0}^+$  oznacza odkształcenie pręta (pochodzące od zginania).

Zastosujemy wzór uproszczony

$$(1.2.1) \quad \varepsilon_{G0}^+ = y \left( \frac{d^2 x_0^+}{dz^2} - \frac{d^2 x_0^-}{dz^2} \right) = y \left( \frac{d^2 x_0^+}{dz^2} - m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \right)$$

Tym odkształceniom odpowiadają następujące naprężenia:

$$(1.3) \quad \sigma_{G0}^+ = Ey \left( \frac{d^2 x_0^+}{dz^2} - m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \right)$$

Z warunku równowagi momentów wynika

$$(1.4) \quad P(m_0^+ - x_0^+) = EI \left( \frac{d^2 x_0^+}{dz^2} - m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \right)$$

Warunki początkowe dla tego równania są następujące:

$$(1.5) \quad z = 0, \quad x_0^+ = 0, \quad \frac{dx_0^+}{dz} = 0.$$

Poza tym mamy

$$(1.6) \quad z = \frac{L}{2}, \quad x_0^+ = m_0^+,$$

co prowadzi do określenia  $m_0^+$ . Mianowicie otrzymujemy rezultat następujący:

$$(1.7) \quad x_0^+ = \frac{m_0^-}{1 - \psi} \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{L} \right),$$

przy czym

$$(1.8) \quad \psi = \frac{\sigma_C}{\sigma_{EU}}, \quad \sigma_C = \frac{P}{F}, \quad \sigma_{EU} = \frac{EI}{F} \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Z warunku (1.6) mamy

$$(1.9) \quad m_0^+ = \frac{m_0^-}{1 - \psi}.$$

Znając  $x_0^+$  wyznaczmy ze wzorów (1.2.1) i (1.3) odkształcenia i naprężenia pochodzące od zginania, ustalając w ten sposób warunki początkowe dla wyboczenia «plastycznego» dla chwili  $t = +0$ .

Tak więc w rezultacie znajdziemy

$$(1.10) \quad \varepsilon_{G0}^+ = y m_0^+ \psi \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L},$$

$$(1.11) \quad \sigma_{G0}^+ = Ey m_0^+ \psi \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L}.$$

Odkształcenia pochodzące od ściskania wynoszą

$$(1.12) \quad \varepsilon_{C0}^+ = \frac{\sigma_C}{E},$$



a całkowite odkształcenia

$$(1.13) \quad \varepsilon_0^+ = \frac{\sigma_C}{E} \left( 1 + \frac{y m_0^+}{i^2} \cos \frac{\pi z}{L} \right), \quad i = \sqrt{\frac{I}{F}}$$

Natomiast całkowite naprężenia wynoszą

$$(1.14) \quad \sigma_0^+ = \sigma_C \left( 1 + \frac{y m_0^+}{i^2} \cos \frac{\pi z}{L} \right),$$

przy czym zakłada się, że przewyższają one stałe prawdziwą granicę sprężystości, tj. że

$$\sigma_0^+ > \sigma_E.$$

## 2. Wyznaczenie odkształceń plastycznych pochodzących od ściskania

Dynamiczna teoria plastyczności, [4], ustala w przypadku zjawiska izotermicznego przy pominięciu wpływu energii mechanicznej następujący związek między naprężeniami i odkształceniami:

$$(2.1) \quad \dot{\sigma} + \frac{\sigma - \sigma_E}{\Theta} = E \dot{\varepsilon}, \quad \Theta = \text{const.}$$

We wzorach tych  $\Theta$  jest czasem wiotczenia izotermicznego.

Związek ten jest słuszny również i dla osi obojętnej, stąd więc

$$(2.2) \quad \dot{\sigma}_C + \frac{\sigma_C - \sigma_E}{\Theta} = E \dot{\varepsilon}_C \quad \text{lub} \quad \frac{\sigma_C - \sigma_E}{\Theta} = E \dot{\varepsilon}_C = \text{const.}$$

A zatem

$$(2.3) \quad \varepsilon_C = (\sigma_C - \sigma_E) \frac{t}{E \Theta} + \frac{\sigma_C}{E}$$

Odkształcenie plastyczne wynosi

$$(2.4) \quad \varepsilon_{CP} = (\sigma_C - \sigma_E) \frac{t_H}{E}$$

Wielkość  $t_H = t/\Theta$ , wygodna w użyciu, jest czasem homologicznym wprowadzonym przez nas w pracy [4]. Odkształcenie plastyczne w chwili zerwania dla  $t_H = T_H$  wynosi

$$(2.5) \quad \varepsilon_{CP} = \frac{\sigma_C - \sigma_E}{E} T_H.$$

## 3. Wyznaczenie odkształceń plastycznych pochodzących od zginania

Po odjęciu od siebie stronami równań (2.1) i (2.2) otrzymujemy równanie

$$(3.1) \quad \dot{\sigma}_G + \frac{\sigma_G}{\Theta} = E \dot{\varepsilon}_G$$

lub

$$(3.1.1) \quad \frac{d\sigma_G}{dt_H} + \sigma_G = E \frac{d\varepsilon_G}{dt_H}$$

Warunek równowagi momentów przy uwzględnieniu oznaczeń użytych na rys. 2 prowadzi do związku

$$(3.2) \quad P(m-x) = \int_F \sigma_G y dF,$$

który wykorzystamy mnożąc obie strony równania (3.1.1) przez  $y$  i całkując następnie w obszarze całego przekroju  $F$ ; otrzymamy

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt_H} [P(m-x)] + P(m-x) = E \int_F y \frac{d\varepsilon_G}{dt_H} dF.$$

Całkę w tym równaniu określimy uwzględniając związki (1.2) i (1.2.1). Otrzymamy po pewnych przekształceniach

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial t_H} (m-x) + m-x = \frac{EI}{P} \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t_H}$$

Rozwiązanie tego równania powinno spełniać również warunki (1.5), przy czym dla  $z = L/2$  ma być  $m = x$ . Otrzymujemy

$$(3.5) \quad x = \frac{m_0^-}{1-\psi} \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{L} \right) \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right),$$

$$(3.6) \quad m = \frac{m_0^-}{1-\psi} \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right).$$

Stąd

$$(3.7) \quad \varepsilon_G = y m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \left[ \frac{1}{1-\psi} \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right) - 1 \right].$$

Znajomość  $\varepsilon_G$  pozwala na wyznaczenie  $\sigma_G$  z równania (3.1.1). Otrzymujemy mianowicie

$$(3.8) \quad \sigma_G = E y m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\psi}{1-\psi} \cos \frac{\pi z}{L} \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right),$$

a zatem odkształcenie plastyczne wynosi

$$(3.9) \quad \varepsilon_{GP} = \varepsilon_G - \frac{\sigma_G}{E} = y m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \left[ \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right) - 1 \right].$$

#### 4. Ustalenie kryterium powstania pierwszych pęknięć

Całkowite odkształcenie plastyczne w chwili  $t_H$  wynosi

$$(4.1) \quad \varepsilon_P = \frac{\sigma_C - \sigma_E}{E} t_H + y m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \cos \frac{\pi z}{L} \left[ \exp \left( \frac{\psi t_H}{1-\psi} \right) - 1 \right].$$

Jeśli w chwili  $t_H = T_H$  następuje pierwsze pęknięcie, to całkowite odkształcenie plastyczne równe jest granicznej drodze poślizgu:

$$\varepsilon_P = \eta_Z.$$

Pierwsze pęknięcie nastąpi oczywiście dla  $\varepsilon_{GP} = \varepsilon_{Gmax}$ , tj. dla

$$y = y_{max}, \quad z = 0.$$

Stąd mamy

$$(4.2) \quad \eta_Z = \frac{\sigma_C - \sigma_E}{E} T_H + y_{max} m_0 \frac{\pi^2}{L^2} \left[ \exp\left(\frac{\psi T_H}{1 - \psi}\right) - 1 \right].$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(4.3) \quad \frac{E \eta_Z}{\sigma_E} = M, \quad \frac{y_{max}}{i} = Y, \quad \frac{m_0}{i} = \mu, \quad \frac{\sigma_C}{\sigma_E} = \varphi.$$

Po uwzględnieniu tych oznaczeń otrzymujemy zamiast (4.2) następujące kryterium pęknięcia:

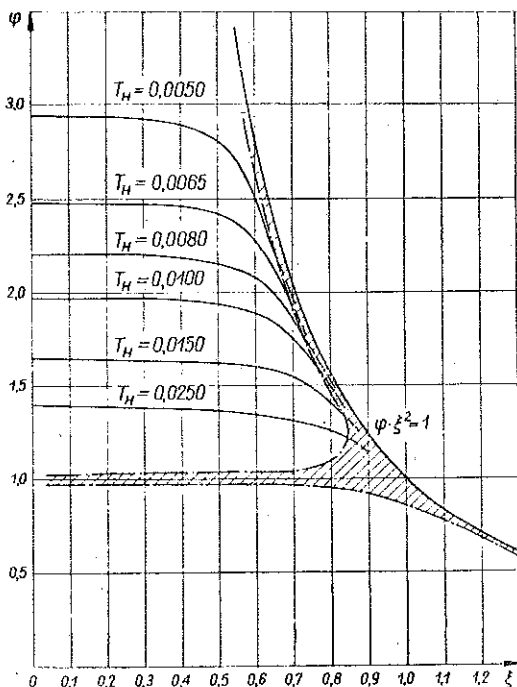
$$(4.4) \quad M = T_H(\varphi - 1) + Y \mu \frac{\varphi}{\psi} \left[ \exp\left(\frac{\psi T_H}{1 - \psi}\right) - 1 \right].$$

Dla serii próbek o identycznych wymiarach  $\sigma_{EU} = \text{const}$ , a stąd

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\sigma_{EU}}{\sigma_E} = C = \text{const}.$$

W takim przypadku równanie (4.4) przedstawia poszukiwaną zależność siły «łamiącej» od czasu, podaną we współrzędnych bezwymiarowych

$$\varphi = \frac{\sigma_C}{\sigma_E}, \quad T_H = \frac{T}{\Theta}.$$



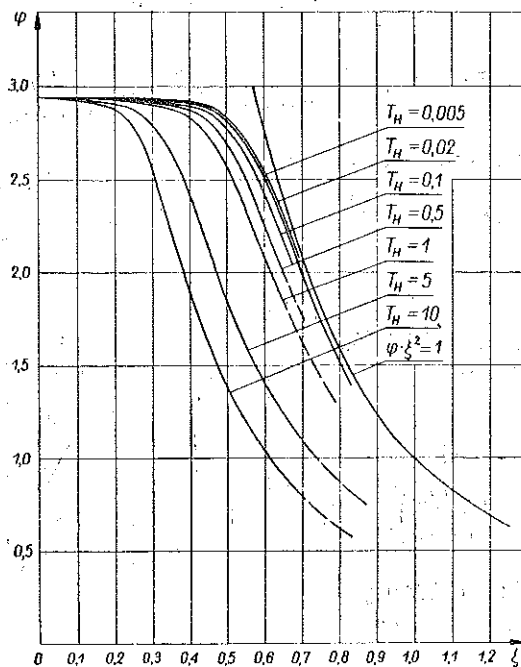
Rys. 3

Jeżeli szukamy zależności naprężenia wywołującego pierwsze pęknięcie od smukłości przy  $T_H = \text{const}$ , to wzór (4.4) należy przekształcić wprowadzając smukłość zredukowaną  $\xi$ :

$$(4.5) \quad \xi = \frac{S}{S_E}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\psi}{\varphi}}.$$

Otrzymujemy w takim przypadku funkcje  $\varphi(\xi)$  w postaci

$$(4.6) \quad M = T_H(\varphi - 1) + \frac{Y\mu}{\xi^2} \left[ \exp\left(\frac{\xi^2 \varphi T_H}{1 - \xi^2 \varphi}\right) - 1 \right].$$



Rys. 4

Na rysunku 3 podany jest wykres funkcji  $\varphi(\xi)$ , równoznaczny z zależnością  $\sigma_C(S) = \sigma_K(S)$  dla różnych czasów homologicznych  $T_H$ ; przyjęto  $M = 0,01$  oraz  $Y\mu = 0,02$ . Oczywiście, dla  $\xi = 0$ , tj. dla  $\varphi = 0$  wypada

Tablica 1

$T_H$	$M$
0,005	0,01
0,02	0,04
0,1	0,2
0,5	1,0
1,0	2,0
5,0	10,0
10,0	20,0

$$(4.7) \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{\frac{M}{T_H} + 1}{1 + Y\mu}$$

Prócz tego na rys. 4 przedstawione są linie  $\varphi(\xi)$  dla  $\varphi_0 = 2,94$ ,  $Y\mu = 0,02$  i dla różnych wartości  $T_H$  (a zatem i różnych  $M$ ).

Wartości  $M$  i  $T_H$  podaje tablica 1.

## 5. Ustalenie zakresu wyboczenia czysto plastycznego

Powyższe rozważania odnoszą się do przypadku, kiedy w całym przekroju naprężenia przekraczają prawdziwą granicę sprężystości. W miarę trwania obciążenia naprężenia po stronie «obciążonej» przekroju rosną, a towarzyszy im odpowiednio duży spadek naprężeń po stronie «odciążonej». Pierwszemu pęknięciu, które będzie miało miejsce oczywiście po stronie obciążonej, odpowiada zatem największe odciążenie po stronie odciążonej. W skrajnym przypadku będzie ono równe prawdziwej granicy sprężystości, bowiem dla niższych naprężeń nie stosują się wyprowadzone powyżej wzory.

Założmy, że przekrój jest symetryczny. W takim razie najniższe naprężenia w chwili  $T_H$  wyniosą

$$(5.1) \quad \sigma_{Gmin} = \sigma_C - E y_{max} m_0 \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\psi}{1-\psi} \exp\left(\frac{\psi T_H}{1-\psi}\right).$$

Przyjmując  $\sigma_{Gmin} = \sigma_E$  otrzymujemy kryterium stosowalności poprzednio wyprowadzonych zależności, które po uwzględnieniu oznaczeń (4.3) ma postać następującą:

$$(5.2) \quad \frac{1}{\varphi} = 1 - \frac{Y\mu}{1-\psi} \exp\left(\frac{\psi T_H}{1-\psi}\right).$$

Rugując z równań (5.2) i (4.4) wielkość  $\varphi$  otrzymamy zależność

$$(5.3) \quad \frac{M}{T_H} + \frac{Y\mu}{\psi T_H} = \frac{Y\mu}{T_H} \left( \frac{M+T_H}{1-\psi} + \frac{1}{\psi} \right) \exp\left(\frac{\psi T_H}{1-\psi}\right),$$

określającą najmniejszą wartość  $\psi$  dla danego czasu  $T_H$ , dla której w całym obszarze przekroju powstają odkształcenia plastyczne przez cały okres trwania obciążenia.

Jeśli z równań (4.4) i (5.2) wyrugujemy czas  $T_H$ , to otrzymamy

$$(5.4) \quad M = \frac{1-\psi}{\varphi} (\varphi - 1) \left[ 1 + \ln \frac{(\varphi - 1)(1-\psi)}{\varphi Y\mu} \right] - \frac{Y\mu\varphi}{\psi}.$$

Przyjmując dalej

$$\xi = \sqrt{\frac{\psi}{\varphi}}, \quad \psi = \varphi \xi^2$$

otrzymamy zamiast (5.4) równanie  $\varphi = f(\xi)$  przedstawione górną linią złożoną z kresek i kropek na rys. 3. Na rysunku tym na lewo od tej linii leży obszar odkształceń plastycznych w całym przekroju próbki. Na prawo od tej linii [dla której przy  $\xi = 0$  wypada  $\varphi = 1/(1 - Y\mu)$ ] i na lewo od hiperboli Eulera leży mieszany obszar liczb  $\varphi$  i  $\xi$ . Odkształcenia plastyczne dla tego zakresu  $\varphi$  i  $\xi$  nie powstają w całym przekroju, bądź też w całym okresie trwania obciążenia. Wyznaczenie zależności  $f(T_H, \varphi, \xi)$  dla tego

obszaru (zakreskowanego na wykresie rys. 3) jest bardzo kłopotliwe i w tej pracy rozpatrywane nie będzie.

Obszar «mieszany» kończy się dla takich wartości  $\varphi$ , którym w chwili  $t = +0$  odpowiada największe naprężenie równe prawdziwej granicy sprężystości. Sprowadza się to do warunku wynikającego ze wzoru (1.11):

$$(5.5) \quad (\sigma_0^+)_{max} = \sigma_C + E y_{max} m_0^- \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\psi}{1-\psi} = \sigma_E.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$(5.6) \quad \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{Y\mu}{1-\psi}.$$

Dla  $\xi = 0$ , tj. dla  $\psi = 0$  otrzymujemy

$$(5.7) \quad \varphi = \frac{1}{1+Y\mu}$$

zgodnie ze wzorem (4.7) dla  $T_H \rightarrow \infty$ . W układzie  $\varphi, \xi$  równanie tej ostatniej linii jest następujące:

$$(5.8) \quad \varphi = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1+Y\mu}{\xi^2} - \sqrt{\left( 1 + \frac{1+Y\mu}{\xi^2} \right)^2 - \frac{4}{\xi^2}} \right].$$

Jak widać, z racji przyjętego zakrzywionego pierwotnie kształtu pręta, linia ta biegnie stale poniżej hiperboli Eulera i narysowana jest na rys. 3 linią złożoną z kresek i kropek (dolną). Linia ta wyznacza zarazem efektywne naprężenie wyboczenia (tj. graniczne naprężenie powodujące wyboczenia) dla określonej wartości smukłości.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M. Broszko, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. IV, t. 1, 3 (1953), s. 71.
- [2] M. Broszko, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. IV, t. 2, 3 (1954), s. 115.
- [3] S. Timoszenko, *Wytrzymałość materiałów*, tłum. polskie.
- [4] J. Madejski, *Dynamiczna teoria plastyczności*, praca nieopubl.
- [5] W. Olszak i W. Urbanowski, *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej*, Arch. Mech. Stos. 3 (1955).
- [6] W. Wierzbicki, *O powstawaniu wyboczenia prętów prostych*, Rozpr. Inżyn. XII (1954).

#### Резюме

#### ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ КАК ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Продольный изгиб призматического стержня в области возникновения пластических деформаций (точнее, его разрушение под действием продольных сил) исследован экспериментально между прочим

и М. Брошкой, представившим результаты своих исследований в работе [2]. Эти результаты приводят к заключению, что при гибкости меньшей критической, идентичные образцы материала подвергаются разрушению тем скорее, чем больше нагрузка. Следовательно на рассматриваемое явление влияет продолжительность приложения нагрузки. Это согласуется с мнением С. Тимошенко, [3], что «пластический продольный изгиб» в действительности — неустойчивое явление. Минимальное значение напряжения, вызывающего изгиб, ниже которого получается неограниченная во времени прочность образца (обладающего гибкостью меньше критической), Брошко называл эффективным выпучивающим напряжением. Из основ динамической теории пластичности, изложенных автором в работе [4], следует, что эффективное выпучивающее напряжение совпадает с действительным пределом упругости (т.е. с тем напряжением, по превышении которого температура образца начинает увеличиваться). Если образец подвергался достаточной обработке, то эффективное выпучивающее напряжение (действительный предел упругости) равнозначно неограниченному пределу усталости.

Если значение напряжения превышает действительный предел упругости, то разрушение образца произойдет по истечении конечного периода времени.

При помощи принципов динамической теории пластичности, [4], установлена зависимость напряжения, вызывающего первые разрывы волокон, от гибкости, при постоянных значениях продолжительности нагрузки. При этом были использованы следующие упрощения: (1) образец до нагрузки имеет особую закрученную форму; (2) кривая нагрузки во времени имеет форму подобную функции Хевисайда; (3) явление имеет характер изотермический и таптермический; (4) применяется линеаризация проблемы при использовании упрощенной формулы для радиуса кривизны.

Работа ограничивается исследованием явления для такого случая, при котором напряжения во всем сечении и во время всего периода нагрузки выше действительного предела упругости.

Упруго-пластическую задачу можно также решить при помощи методов, аналогичных приведенным.

#### S u m m a r y

#### THE BUCKLING OF A PRISMATIC BAR AS A PROBLEM OF DYNAMICAL THEORY OF PLASTICITY

The buckling of a prismatic bar in the plastic region (strictly speaking its breakdown under axial forces) was investigated experimentally among others by M. Broszko who presented his results in Ref. [2].

These results led Broszko to the conclusion that if the slenderness of the bar is below its critical value the destruction of identical test pieces is more rapid for greater loads. The problem is therefore influenced by time, in other words, the period during which the load acts. This is in agreement with S. Timoshenko's opinion, [3], that the plastic buckling is a phenomenon of unstable nature. The minimum value of buckling load below which the strength of the test piece (with slenderness below its critical value) is unlimited in time is called by M. Broszko the effective buckling stress. From the foundations of the dynamical theory of plasticity, treated by the author in Ref. [4], it follows that the effective buckling stress coincides with the true yield point (i.e. the stress above which the temperature of the test piece starts increasing). If the test piece has been given a sufficient treatment the effective buckling stress (the true yield point) is equivalent to an illimited fatigue strength.

If the stress exceeds the true yield point, the test piece will be broken after a finite period.

The foundations of the dynamical theory of plasticity, [4], have been used to establish the relation between the stress for which the first fibres break and the slenderness, the period during which the loads acts being constant. The following simplifications are introduced in these considerations: (1) the test piece has a particular curved form before the load is applied; (2) the time variability of the load corresponds to the Heaviside function; (3) the phenomenon is isothermal and tautothermal; (4) the problem is linearized due to a simplified formula for the radius of curvature.

The considerations are confined to the case in which the stresses in the whole cross-section and during the whole period of action of the load are higher than the true yield point.

The elastic-plastic problem can also be solved using analogous methods.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 sierpnia 1955 r.*