

ZYGMUNT THRUN

ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA TERMICZNE  
W PŁYTACH NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

O POZIOMYM ODDZIAŁYWANIU SPRĘŻYSTEGO PODŁOŻA  
NA PŁYTY PODDANE DZIAŁANIU ZMIAN TEMPERATURY

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XL — XLI

### SPIS TREŚCI

	Str.
1. Odkształcenia i naprężenia termiczne w płytach na sprężystym podłożu	73
2. O poziomym oddziaływaniu sprężystego podłoża na płyty poddane działaniu zmian temperatury	87

## ODKSZTAŁCENIA I NAPRĘŻENIA TERMICZNE W PŁYTACH NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

1. **Równanie ogólne.** Rozpatrzmy płyty prostokątne i kołowo symetryczne na sprężystym podłożu, w których powstaje niejednakowy rozkład temperatury. Metoda różnic skończonych może być użyta z powodzeniem do obliczania narażonych na termiczne wpływy płyt kołowych, prostokątnych i innych, wzdłuż krawędzi wolno podpartych, utwierdzonych, swobodnych lub o mieszanych warunkach brzegowych.

Rozważmy płytę na sprężystym podłożu, dla której różnica temperatury pomiędzy dolną a górną powierzchnią wszędzie jest stała i wynosi  $\Delta t$ .

Oznaczmy sztywność płyty na zginanie przez  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ , gdzie  $E$  jest modułem sprężystości Younga,  $\nu$  liczbą Poissona, zaś  $h$  grubością płyty. Współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej oznaczmy przez  $\epsilon_t$ , a współczynnik pionowej podatności podłoża przez  $c$  (kG/cm<sup>3</sup>).

W myśl założeń Winklera oddziaływanie podłoża  $r$  jest proporcjonalne do ugięcia  $w$  odpowiedniego punktu płaszczyzny środkowej płyty. Mamy zatem

$$(1.1) \quad r = cw.$$

Środek i osie  $x$  i  $y$  prostokątnego układu współrzędnych obierzemy w płaszczyźnie środkowej płyty. Przy powyższych założeniach funkcja ugięcia płaszczyzny środkowej płyty  $w(x, y)$  pod wpływem różnicy temperatur  $\Delta t$  spełnia równanie różniczkowe

$$(1.2) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{c}{D} w = 0.$$

W biegunowych współrzędnych  $(r, \varphi)$  powyższe równanie przyjmuje postać <sup>1)</sup>

$$(1.3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{c}{D} w = 0.$$

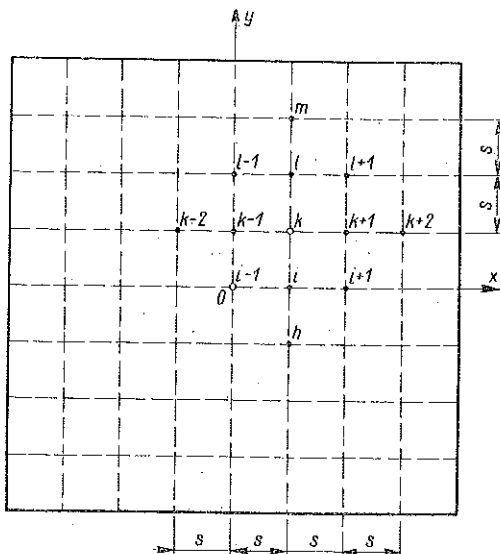
<sup>1)</sup> Por. [1], s. 646 i 647. W danym przypadku  $p = -r = -cw$ .

Liczba  $\Delta t$  określająca różnicę temperatury nie występuje w samych równaniach różniczkowych ugięcia (1.2) i (1.3), lecz kryje się w warunkach brzegowych zagadnienia.

2. Płyty prostokątne. Dla rozpatrzenia płyt prostokątnych wychodzimy z równania różniczkowego ugięcia w prostokątnych współrzędnych, tj. z równania <sup>2)</sup>

$$(2.1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{c}{D} w = 0.$$

Powyższe równanie napiszemy w postaci różnicowej dla punktu  $k$  (rys. 1) płyty w postaci



Rys. 1

$$(2.2) \quad \frac{\Delta_x^4 w_k}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta_{xy}^4 w_k}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta_y^4 w_k}{\Delta y^4} + \frac{c}{D} w_k = 0.$$

Jeżeli podzielimy płytę kwadratową siatką o boku  $\Delta x = \Delta y = s$ , to równanie różnicowe (2.2) możemy przekształcić do postaci <sup>3)</sup>

$$(2.3) \quad \left(20 + \frac{c}{D} s^4\right) w_k - 8(w_{k-1} + w_{k+1} + w_l + w_l) + 2(w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i-1} + w_{i+1}) + (w_{k-2} + w_{k+2} + w_h + w_m) = 0.$$

Powyższe równanie odnosi się do każdego wewnętrznego punktu węzłowego siatki podziału. Otrzymany układ nie jest oczywiście złożony tylko z równań jednorodnych względem niewiadomych  $w_j$ , gdyż różnica temperatury  $\Delta t$  wystąpi w wyrażeniach na fikcyjne ugięcia punktów poza płytą, które otrzymamy z warunków brzegowych podparcia płyty.

Z rozwiązania układu równań (2.3) otrzymamy wartości ugięć płyty w punktach węzłowych siatki. Wartości momentów zginających, skręcających, sił tnących i reakcji podporowych (w przypadku dodatkowego podparcia wzdłuż krawędzi) otrzymamy z następujących wzorów <sup>4)</sup>:

<sup>2)</sup> Por. [2], s. 557.

<sup>3)</sup> Por. [1], s. 681.

<sup>4)</sup> Por. [1], s. 682.

$$\begin{aligned}
 M_{x,k} &= -D \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} \right) - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} = \\
 &= \frac{-D}{s^2} \{ w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1} + \nu(w_l - 2w_k + w_l) \} - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}, \\
 M_{y,k} &= -D \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta y^2} + \nu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x^2} \right) - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} = \\
 &= \frac{-D}{s^2} \{ w_l - 2w_k + w_l + \nu(w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}) \} - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}, \\
 M_{xy,k} &= -D(1-\nu) \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta x \Delta y} = \frac{-D(1-\nu)}{4s^2} (w_{l+1} - w_{l-1} - w_{l+1} + w_{l-1}), \\
 Q_{x,k} &= -D \left( \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x^3} + \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta y^2 \Delta x} \right) = \frac{-D}{2s^3} \{ (w_{k-2} + w_{k+2}) + \\
 &\quad + (w_{l+1} + w_{l+1}) - (w_{l-1} + w_{l-1}) - 4(w_{k+1} - w_{k-1}) \}, \\
 Q_{y,k} &= -D \left( \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta y^3} + \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta y \Delta x^2} \right) = \frac{-D}{2s^3} \{ (w_m - w_m) + \\
 &\quad + (w_{l+1} + w_{l-1}) - (w_{l+1} + w_{l-1}) - 4(w_l - w_l) \}, \\
 R_{x,k} &= D \left[ \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x^3} + (2-\nu) \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x \Delta y^2} \right] = \\
 &= \frac{-D}{2s^3} \{ w_{k-2} + (6-2\nu)(w_{k+1} - w_{k-1}) + \\
 &\quad + (2-\nu)(w_{l-1} + w_{l-1} - w_{l+1} - w_{l+1}) - w_{k+2} \}, \\
 R_{y,k} &= D \left[ \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta y^3} + (2-\nu) \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta x^2 \Delta y} \right] = \frac{-D}{2s^3} [w_m + (6-2\nu) \times \\
 &\quad \times (w_l - w_l) + (2-\nu)(w_{l+1} + w_{l-1} - w_{l-1} - w_{l+1}) - w_m].
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Wzory powyższe otrzymamy ze znanych wzorów teorii płyt przez zastąpienie pochodnych ilorazami różnicowymi.

Warunki brzegowe dla równania typu (2.1) wykorzystujemy w następujący sposób (biorąc pod uwagę również fikcyjne ugięcia punktów leżących poza płytą):

(1) W punkcie swobodnej krawędzi płyty równoległej do osi  $y$  musi być

$$M_{x,k} = 0, \quad R_{x,k} = 0.$$

Stąd znajdujemy

$$(2.5) \quad \begin{cases} w_{k+1} = 2(1+\nu)w_k - w_{k-1} - \nu(w_i + w_l) - (1+\nu)\varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} s^2, \\ w_{k+2} = w_{k-2} - 4(3-\nu)w_{k-1} + 2(2-\nu)(w_{i-1} + w_{l-1}) + \\ + 6(2+2\nu-\nu^2)w_k - 2(2+4\nu-3\nu^2)(w_i + w_l) + \\ + (2\nu-\nu^2)(w_m + w_n) - (1+\nu)\varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} 2s^2. \end{cases}$$

W narożu swobodnym warunek brzegowy  $2M_{xy,k} = 0$  prowadzi do równania

$$(2.6) \quad w_{l+1} = w_{l-1} + w_{i+1} - w_{i-1}.$$

(2) Jeżeli płyta jest dodatkowo podparta na krawędzi równoległej do osi  $y$  (krawędź wolno podparta), to mamy

$$(2.7) \quad w_k = w_i = w_l = 0, \quad M_{x,k} = 0.$$

Warunek ostatni pozwala napisać równanie

$$w_{k+1} = -w_{k-1} - (1+\nu)\varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} s^2.$$

(3) Dla płyty utwierdzonej wzdłuż brzegu równoległego do osi  $y$  jest

$$(2.8) \quad w_k = w_i = w_l = 0, \quad w_{k+1} = w_{k-1},$$

gdzie  $\Delta w_k / \Delta x = 0$ .

Z powyższego wynika, że płyta utwierdzona wzdłuż wszystkich krawędzi nie odkształca się pod wpływem działania różnicy temperatury:

$$w_1 = w_2 = \dots = w_k = \dots = w_n = 0.$$

Otrzymany układ równań (2.3) będzie złożony tylko z równań jednorodnych.

W dowolnym punkcie płyty wzdłuż wszystkich krawędzi utwierdzonej momenty zginające wynoszą

$$M_{x,k} = M_{y,k} = -D(1+\nu)\varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}.$$

*Przykład.* Wyznaczyć ugięcie i momenty zginające żelbetowej płyty fundamentowej zasobnika na sprężystym podłożu, jeśli różnica temperatury wynosi  $\Delta t$ . Współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej  $\varepsilon_t = 0,00001$ , moduł sprężystości płyty  $E = 210\,000 \text{ kG/cm}^2$ , liczba Pois-

sona  $\nu = 1/6$ , współczynnik podatności podłoża (z uwzględnienia odporu pali)  $c = 10 \text{ kG/cm}^2$ , bok płyty kwadratowej  $a$  równa się  $9,00 \text{ m}$ , wysokość  $h = 0,80 \text{ m}$ .

Siatkę podziału przyjęto jak na rys. 3.

Obliczmy

$$\frac{cs^4}{D} = \frac{10 \cdot 112,5^4 \cdot 12 \cdot 35}{210\,000 \cdot 80^3 \cdot 36} = 0,173807.$$

Ze względu na pionowe ściany zasobnika ugięcia punktów leżących wzdłuż obwodu płyty będą jednakowe:

$$w_{11} = w_{12} = w_{13} = w_{14} = w_{15} = w_0.$$

Ugięcia punktów  $w_{16} - w_{19}$  leżących poza płytą otrzymamy z warunku

$$M_{x,11} = M_{x,12} = M_{x,13} = M_{x,14} = 0.$$

Stąd znajdziemy:

$$w_{16} = -w_4 + 2w_0 - (1 + \nu)\epsilon t \frac{\Delta t}{h} s^2,$$

$$w_{17} = -w_7 + 2w_0 - 18\,457 \cdot 10^{-7} \Delta t$$

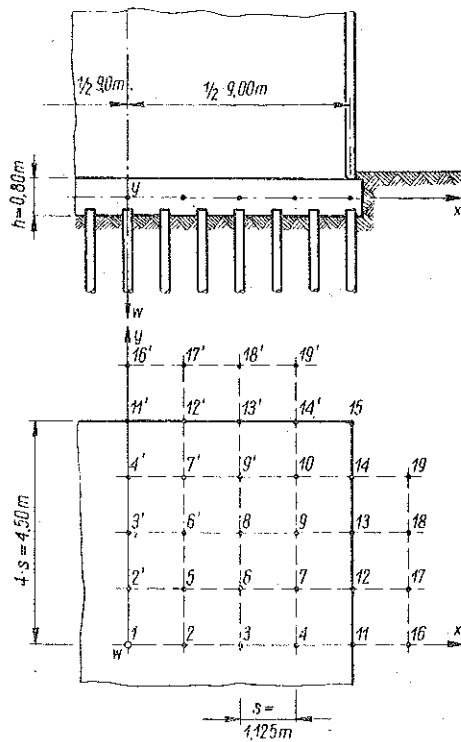
$$w_{18} = -w_9 + 2w_0 - 18\,457 \cdot 10^{-7} \Delta t$$

$$w_{19} = -w_{10} + 2w_0 - 18\,457 \cdot 10^{-7} \Delta t$$

Współczynniki przy niewiadomych układu równań (2.3) zestawiono w tabelicy 1, rozwiązania w tabelicy 2.

Ugięcia punktów leżących wzdłuż obwodu płyty  $w_0$  wyznaczymy z warunku równowagi całego zasobnika:

$$\int_F r dF = c \int_F w dF = 0.$$



Rys. 3

Objętość zawartą między powierzchnią ugięcia a płaszczyzną odniesienia  $x, y$  wyznaczymy metodą przekrojów (korzystając z reguły Simpsona):

Tablica 1

Współczynniki przy niewiadomych										Wyrazy wolne
$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	
1	5,04345	-8,00	1,0		2,0					= 0
2	-8,0	25,17381	-8,0	1,0	6,0					= 0
3	1,0	-8,0	20,17381	-8,0	-16,0	4,0	2,0	2,0		= $-w_6$
4		1,0	-8,0	19,17381	4,0	-16,0				= $2w_6 + 18457 \cdot 10^{-7} \Delta t$
5	2,0	-16,0	4,0		22,17381	2,0	2,0	6,0		= 0
6		6,0	-16,0	4,0	46,34761	-16,0	-16,0			= $-2w_6$
7			-16,0	4,0	-16,0	40,34761	4,0	-16,0	2,0	= $4w_6 + 36914 \cdot 10^{-7} \Delta t$
8			4,0	2,0	-16,0	4,0	20,17381	-16,0	2,0	= $-2w_6$
9			2,0		6,0	-16,0	-16,0	42,34761	-16,0	= $2w_6 + 36914 \cdot 10^{-7} \Delta t$
10						2,0	2,0	-16,0	18,17381	= $6w_6 + 36914 \cdot 10^{-7} \Delta t$

Tablica 2. Rozwiązania układu równań  $w_i = a_i w_0 + b_i \cdot 10^{-7} \Delta t$

$w_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$
$a_i$	0,03785	0,09552	0,27442	0,58282	0,14941	0,31690	0,60657	0,44957	0,68128	0,81371
$b_i$	24495	24321	22772	16597	24126	23553	16429	21036	15370	11439



powierzchnia przekroju  $x = 0$ :

$$F_1 = \frac{s}{3} (w_1 + 4w_2 + 2w_3 + 4w_4 + w_0),$$

powierzchnia przekroju  $x = s$ :

$$F_2 = \frac{s}{3} (w_2 + 4w_3 + 2w_4 + 4w_5 + w_0),$$

powierzchnia przekroju  $x = 2s$ :

$$F_3 = \frac{s}{3} (w_3 + 4w_4 + 2w_5 + 4w_6 + w_0),$$

powierzchnia przekroju  $x = 3s$ :

$$F_4 = \frac{s}{3} (w_4 + 4w_5 + 2w_6 + 4w_7 + w_0),$$

powierzchnia przekroju  $x = 4s$ :

$$F_5 = 4s w_0.$$

Stąd znajdziemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_F w dF &= \frac{s}{3} (F_1 + 4F_2 + 2F_3 + 4F_4 + F_5) = \\ &= \frac{s^2}{9} [23w_0 + w_1 + 4(w_3 + w_8) + 8(w_2 + w_4) + 16(w_5 + w_6 + w_9 + w_{10}) + 32w_7] = 0, \end{aligned}$$

a następnie

$$82,15152 w_0 + 2228607 \cdot 10^{-7} \Delta t = 0,$$

$$w_0 = -27128 \cdot 10^{-7} \Delta t.$$

Ostateczne rzędne ugięcia punktów 1-10 płyty (cm) podane są w ostatnim wierszu tablicy 3.

Tablica 3

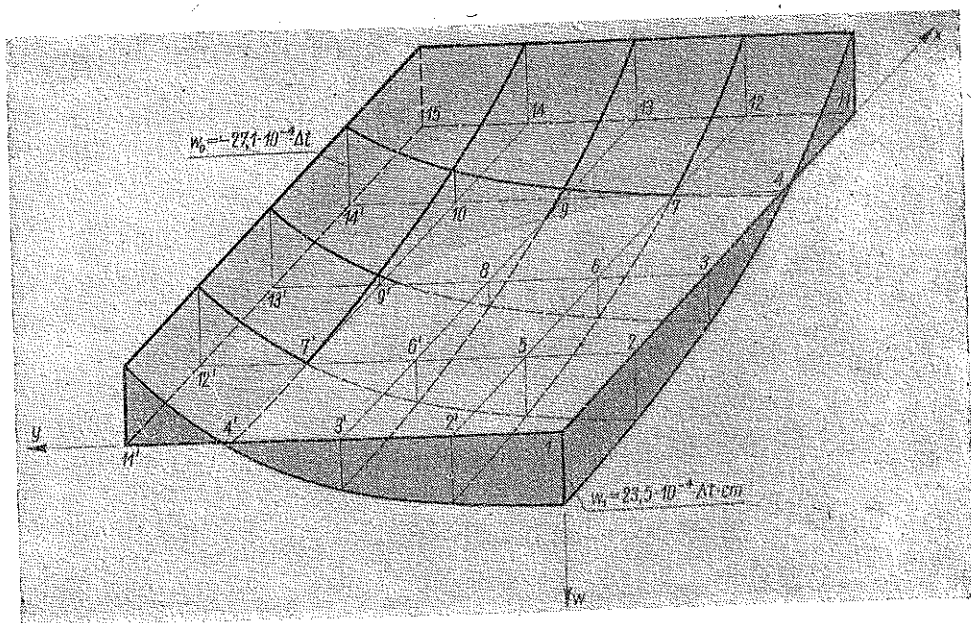
$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$
-103	-259	-744	-1581	-405	-860	-1646	-1220	-1848	$-2207 \cdot 10^{-6} \Delta t$
2450	2432	2277	1660	2412	2256	1643	2104	1537	$1144 \cdot 10^{-6} \Delta t$
2347	2173	1533	79	2007	1396	-3	884	-311	$-1063 \cdot 10^{-6} \Delta t$

Powierzchnię ugięcia ćwiartki płyty przedstawiono na rys. 4.  
 Wyznaczmy wykres momentów zginających. Zgodnie ze wzorem (2.4)  
 w punkcie węzłowym  $k$  mamy:

$$-M_{x,k} \frac{s^2}{D} = [w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1} + \nu(w_l - 2w_k + w_l)] + (1 + \nu) \varepsilon_l \frac{\Delta t}{h} s^2$$

lub

$$-M_{x,k} \frac{s^2}{D} = w_{k-1} - \frac{7}{3} w_k + w_{k+1} + \frac{1}{6} (w_l + w_l) + 1846 \cdot 10^{-6} \Delta t.$$



Rys. 4

Rzędne wykresu momentów przedstawionego na rys. 5 zestawiono  
 w tablicy zawierającej wartości

$$M_{x,k} \frac{s^2}{D \Delta t} 10^6.$$

Tablica 4

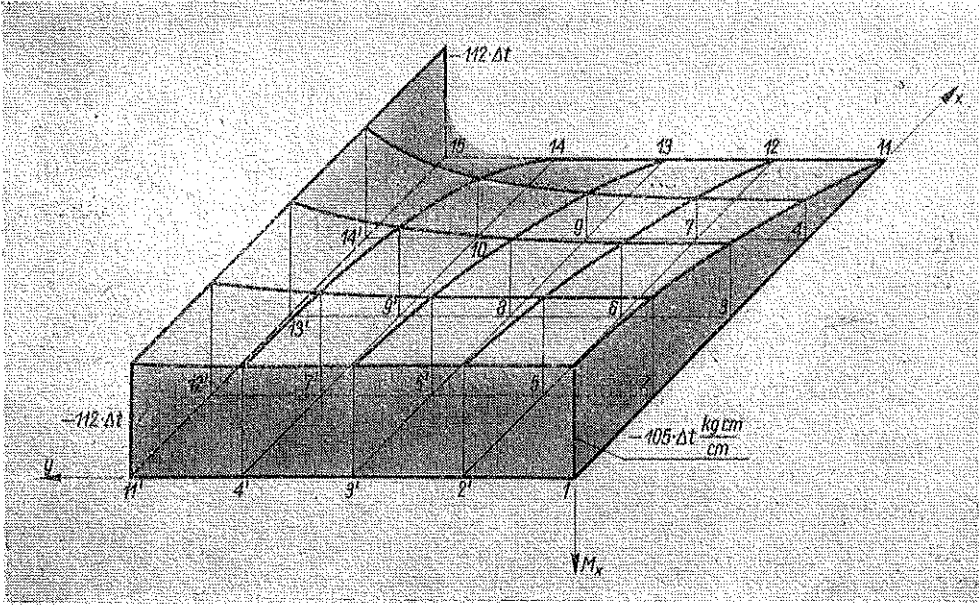
$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$M_{x,k} \frac{s^2}{D \Delta t} 10^6$	-1440	-1324	-986	-481	-1325	-997	-496	-1048	-565

Ekstremalny moment  $M_x$  otrzymamy wzdłuż krawędzi płyty  $y = 4s$ :

$$\text{extr } M_x = -1538 \frac{D}{s^2} 10^{-6} \Delta t = -112 \Delta t \text{ kG cm/cm.}$$

Stąd odpowiednie naprężenie normalne wynosi

$$\text{extr } \sigma_x = \pm 1,05 \Delta t \text{ kG/cm}^2.$$



Rys. 5

3. Płyty kołowe. Ograniczymy się do rozpatrzenia płyt kołowych o podparciu i obciążeniu kołowo symetrycznym.

Przy tych założeniach równanie różniczkowe ugięcia (1.3) uprości się do postaci (Por. [1], s. 667)

$$(3.1) \quad \frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} + \frac{c}{D} w = 0.$$

Tablica 4

10	2'	3'	4'	6'	7'	9'	13'
-799	-1437	-1436	-1460	-1340	-1400	-1201	-1538

Przy podziale średnicy płyty na  $(2n - 1)$  równych odcinków o długości  $s$  powyższe równanie różniczkowe napiszemy w następującej postaci różnicowej dla punktu  $k$ :



Rys. 6

$$(3.2) \quad w_{k-2}(1-a_k) - w_{k-1} \times \\ \times \left[ 2(2-a_k) + \frac{a_k^2}{2}(2+a_k) \right] +$$

$$+ w_k \left[ 6 + 2a_k^2 + \frac{cs^4}{D} \right] - w_{k+1} \left[ 2(2+a_k) + \frac{a_k^2}{2}(2-a_k) \right] + w_{k+2}(1+a_k) = 0,$$

gdzie  $a_k = s/r_k$ .

Nieznane przesunięcia  $w$  w punktów podziału wyznaczmy z rozwiązania układu  $n$  równań różnicowych typu (3.2). Siły przekroju wyznaczmy ze wzorów poniższych<sup>5)</sup>:

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{r,k} &= -D \left( \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\Delta w_k}{\Delta r} \right) - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} = \\ &= -\frac{D}{s^2} \left[ w_{k-1} \left( 1 - \nu \frac{a_k}{2} \right) - 2w_k + w_{k+1} \left( 1 + \nu \frac{a_k}{2} \right) \right] - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}, \\ M_{\varphi,k} &= -D \left( \nu \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\Delta w_k}{\Delta r} \right) - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} = \\ &= -\frac{\nu D}{s^2} \left[ w_{k-1} \left( 1 - \frac{a_k}{2\nu} \right) - 2w_k + w_{k+1} \left( 1 + \frac{a_k}{2\nu} \right) \right] - D(1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}, \\ Q_{r,k} &= -D \left( \frac{\Delta^3 w_k}{\Delta r^3} + \frac{1}{r} \frac{\Delta^2 w_k}{\Delta r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\Delta w_k}{\Delta r} \right) = \frac{D}{2s^3} [w_{k-2} - \\ &\quad - w_{k-1}(2 + 2a_k + a_k^2) + 4a_k w_k + w_{k+1}(2 - 2a_k + a_k^2) - w_{k+2}], \\ M_{r\varphi,k} &= 0, \quad Q_{\varphi,k} = 0. \end{aligned} \right.$$

Przesunięcia  $w$  w punktów leżących poza obwodem płyty, a interweniujących w równaniach różnicowych (3.2), wyznaczmy z następujących warunków brzegowych:

(1) w przypadku swobodnej krawędzi obwodowej płyty mamy

$$M_{r,n} = 0, \quad Q_{r,n} = 0,$$

<sup>5)</sup> Por. [1], s. 668.

a stąd

$$(3.4) \quad \begin{cases} w_{n+1} = \frac{1}{1 + \nu \frac{a_n}{2}} \left[ -w_{n-1} \left( 1 - \nu \frac{a_n}{2} \right) + 2w_n - (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} s^2 \right], \\ w_{n+2} = w_{n-2} - w_{n-1} (2 + 2a_n + a_n^2) + 4a_n w_n + w_{n+1} (2 - 2a_n + a_n^2); \end{cases}$$

(2) dla wolno podpartego obwodu płyty spełnione są warunki

$$w_n = 0, \quad M_{r,n} = 0,$$

z których wynika równanie

$$(3.5) \quad w_{n+1} = \frac{1}{1 + \nu \frac{a_n}{2}} \left[ -w_{n-1} \left( 1 - \nu \frac{a_n}{2} \right) - (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} s^2 \right];$$

(3) jeżeli obwód płyty jest utwierdzony, to

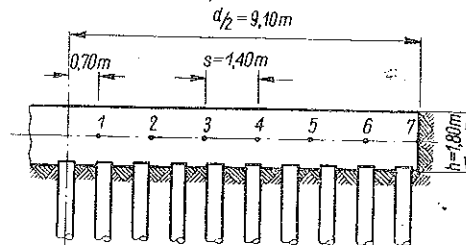
$$w_n = 0, \quad \frac{\Delta w_n}{\Delta r} = 0.$$

Wynika z tego, że w dowolnym punkcie płyty będzie

$$(3.6) \quad \begin{cases} w_k = 0, & M_{r\varphi,k} = 0, & Q_{r,k} = 0, \\ Q_{\varphi,k} = 0, \\ M_{r,k} = M_{\varphi,k} = -D(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h}. \end{cases}$$

*Przykład.* Obliczyć żelbetową płytę kołową na gęstym ruszcie pałowym, poddaną działaniu różnicy temperatury  $\Delta t$ . Moduł sprężystości płyty żelbetowej  $E = 210\,000 \text{ kG/cm}^2$ , liczba Poissona  $\nu = 1/6$ , współczynnik termicznej rozszerzalności  $\varepsilon_t = 10^5$ .

Uwzględniając odpór pionowy głowic pali otrzymano na współczynnik podatności podłoża wartość  $c = 10 \text{ kG/cm}^3$ . Wymiary i podział promienia płyty przedstawiono na rys. 7. Obliczmy



Rys. 7

$$\frac{cs^4}{D} = \frac{10 \cdot 140^4 \cdot 12 \cdot 36}{210\,000 \cdot 180^3 \cdot 36} = 0,036595.$$

Współczynniki przy niewiadomych ugięciach  $w_i$  w równaniach typu (3.2) zestawiono w tabelicy 5 ( $a_k = 140/r_k = s/r_k$ ).

Tablica 5

k	$a_k$	$a_k^2$	$(2 + a_k)$	$(2 - a_k)$	$1 - a_k$	Współczynniki przy			$[1 + a_k]_{k+2}$
						$-w_{k-1}$	$w_k$	$-w_{k+1}$	
1	2,0	4,0	4,0	0,0	-1,0	-8,0	14,03660	-8,0	3,0
2	0,66667	0,44444	2,66667	1,33333	0,33333	-3,25926	6,92548	-5,62963	1,66667
3	0,4	0,16	2,4	1,6	0,6	-3,392	6,35660	-4,928	1,4
4	0,28571	0,08163	2,28571	1,71429	0,71429	-3,52187	6,19986	-4,64140	1,28571
5	0,22222	0,04938	2,22222	1,77778	0,77778	-3,61043	6,13536	-4,48834	1,22222
6	0,18182	0,03306	2,18182	1,81818	0,81818	-3,67243	6,10271	-4,39369	1,18182
7	0,15385	0,02367	2,15385	1,84615	0,84615	-3,71780	6,08393	-4,32954	1,15385

Wypiszemy równania typu (3.2) kolejno dla każdego punktu podziału promienia płyty od 1 do 7. Ugięcia punktów 8 i 9 leżących poza płytą, wchodzące w skład równań (3.2), a wypisanych dla punktów 6 i 7, otrzymamy z warunków brzegowych (3.4):

$$w_8 = -0,97468 w_6 + 1,97468 w_7 - 1,25429 \cdot 10^{-3} \Delta t,$$

$$w_9 = w_5 - 4,00390 w_6 + 4,00390 w_7 - 2,15233 \cdot 10^{-3} \Delta t.$$

Współczynniki układu równań dla zadania są zestawione w tablicy 6.

Tablica 6

	Współczynniki przy niewiadomych							Wyrazy wolne
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	
1	6,03660	-9,0	3,0					= 0
2	-2,92593	6,92548	-5,62963	1,66667				= 0
3	0,6	-3,392	6,35660	-4,928	1,4			= 0
4		0,71429	-3,52187	6,19986	-4,64140	1,28571		= 0
5			0,77778	-3,61043	6,13536	-4,48834	1,22222	= 0
6				0,81818	-3,67243	4,95081	-2,05997	= $1,48234 \cdot 10^{-3} \Delta t$
7					2,00000	-4,11774	2,15434	= $-2,94704 \cdot 10^{-3} \Delta t$

Rozwiązania powyższego układu równań podane zostały w tablicy 7 ( $w_i = a_i \cdot 10^{-3} \Delta t$ ).

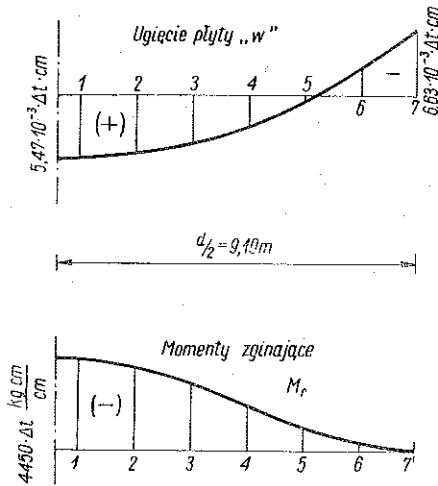
Tablica 7

$w_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	
$a_i$	5,465	5,089	4,270	2,870	0,705	-2,411	-6,631	$10^{-3} \Delta t$

Momenty zginające  $M_r$  w punktach podziału wyznaczymy ze wzoru (3.3):

$$-M_{r,k} \frac{s^2}{D} = w_{k-1} \left( 1 - \frac{a_k}{12} \right) - 2w_k + w_{k+1} \left( 1 + \frac{a_k}{12} \right) + 1,27037 \cdot 10^{-3} \Delta t.$$

Rzędne —  $M_{r,h} (s^2/D \Delta t) 10^3$  w punktach podziału zestawiono w tabelicy 8.



Rys. 8

Tablica 8

k	1	2	3	4	5	6	7
$-M_{r,h} \frac{s^2}{D \Delta t} 10^3$	0,832	0,761	0,615	0,421	0,222	0,055	0,000

Ekstremalny moment wynosi

$$\text{extr } M_r = -0,832 \cdot 10^{-3} \frac{D}{s^2} \Delta t = -4450 \Delta t \text{ kG cm/cm.}$$

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] K. Beyer, *Die Statik im Stahl-betonbau*, Berlin 1948.  
 [2] Z. Thrun, *Termiczne stany odkształcenia i naprężenia w cienkich płytach*, Arch. Mech. Stos. 4 (1954).

#### Резюме

#### ТЕРМИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В работе рассматривается применение известного метода конечных разностей к определению термических деформаций и напряжений в пластинках, а в частности в пластинках на упругом основании. Предполагается, что разница температуры в верхних и нижних во-

локнах пластинки постоянна во всей области. Выведенные разностные формулы для прогиба, изгибающих моментов и срезывающих сил касаются прямоугольных пластинок опертых произвольно и круговых пластинок опертых осесимметрично.

Для иллюстрации хода расчетов приводятся два примера.

#### S u m m a r y

#### THERMAL STRESSES AND STRAINS IN PLATES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

The application of the well-known method of finite differences to the determination of thermal stresses and strains in plates, in particular in plates resting on elastic foundations is considered. It is assumed that the temperature difference between the upper and the lower layer of the plate is constant for the whole area of the plate. The differential formulae obtained for deflections, bending moments and shearing forces refer to rectangular plates arbitrarily supported and to circular plates on circularly symmetric supports.

Two examples are given to illustrate the computation procedure.

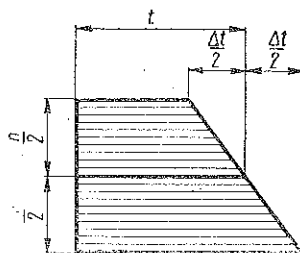
*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 grudnia 1954 r.*



## O POZIOMYM ODDZIAŁYWANIU SPRĘŻYSTEGO PODŁOŻA NA PŁYTY PODDANE DZIAŁANIU ZMIAN TEMPERATURY

Teoria płyt na sprężystym podłożu ma szerokie zastosowanie w wielu ważnych zagadnieniach technicznych. W pewnych przypadkach znaczny jest wpływ odkształceń i naprężeń termicznych na elementy konstrukcji, spoczywające na sprężystym podłożu lub na wielu gęsto rozmieszczonych podporach podatnych. Jako typowy przykład może posłużyć płyta spoczywająca na gęstym ruszcie palowym. Powstaje pytanie, czy można pominąć wpływ odporu głowic pali oraz poziomych odkształceń płyty na wielkości sił sprężystych w przekroju płyty. W pracy niniejszej rozważymy nie tylko oddziaływanie pionowe podłoża sprężystego, lecz także oddziaływanie poziome, wywołane poziomymi odkształceniami, pojawiającymi się na skutek temperatury w płycie.

Założmy, że przebieg zmian temperatury w przekroju poprzecznym płyty jest liniowy, przy czym temperaturę w płaszczyźnie środkowej oznaczmy przez  $t$ , a różnicę temperatur na dolnej i na górnej powierzchni płyty przez  $\Delta t$ .



Rys. 1

Przyjmijmy następnie układ współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , którego początek oraz osie  $x$  i  $y$  niech leżą w płaszczyźnie środkowej płyty prostokątnej. Wprowadźmy następujące oznaczenia:  $h$  jest wysokością płyty,  $E$  współczynnikiem Younga,  $G$  współczynnikiem odkształcenia postaciowego,  $\nu$  liczbą Poissona,  $\epsilon_t$  współczynnikiem termicznej rozszerzalności liniowej,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  sztywnością płyty,  $u, v$  i  $w$  przemieszczeniami płaszczyzny środkowej. Współczynniki poziomej i pionowej podatności podłoża oznaczamy odpowiednio przez  $c_x, c_y$  i  $c_z$  kG/cm<sup>3</sup>.

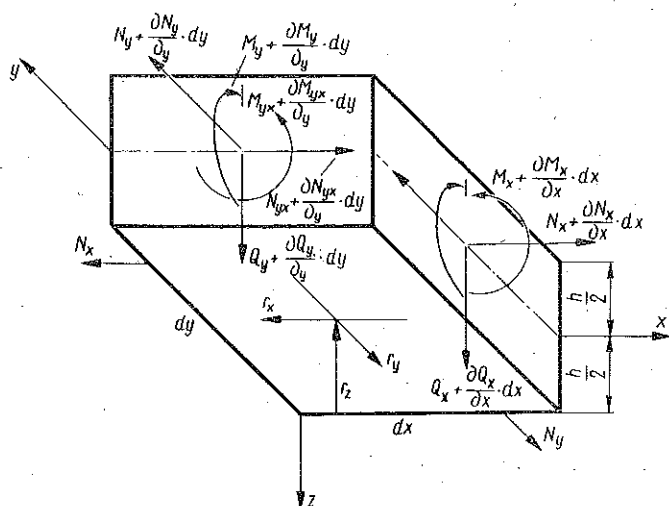
Oprzemy się na tzw. założeniu Winklera, tj. założymy proporcjonalność odporów podłoża do odpowiednich przesunięć płaszczyzny środkowej płyty:

$$(1.1) \quad \begin{cases} r_x(x, y) = c_x \left[ u(x, y) - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\ r_y(x, y) = c_y \left[ v(x, y) - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \end{cases} \quad r_z(x, y) = c_z w(x, y).$$

Z warunków równowagi elementu płyty otrzymamy następujące równania:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = r_z, \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = r_y, & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = r_x, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x + \frac{h}{2} r_x, & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y + \frac{h}{2} r_y. \end{cases}$$

Znaczenie użytych symboli jest podane na rys. 2.



Rys. 2

Zależności między przesunięciami dowolnego punktu powierzchni środkowej a naprężeniami można przedstawić następująco:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( u - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \varepsilon_t \left( t + \frac{\Delta t}{h} z \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( v - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \varepsilon_t \left( t + \frac{\Delta t}{h} z \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( u - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases}$$

Z powyższych związków otrzymamy wzory na naprężenia normalne i styczne

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right] + \\ &\quad + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu) \varepsilon_t t \right], \\ \sigma_y &= \frac{-Ez}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right] + \\ &\quad + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1+\nu) \varepsilon_t t \right], \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

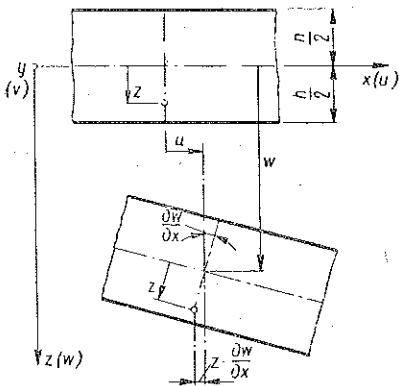
Składowe stanu naprężeń tj. momenty zginające i skręcające oraz siły normalne i tnące wyrażają się wzorami następującymi:

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right], \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right], \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{12D}{h^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1+\nu) \varepsilon_t t \right], \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{12D}{h^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - (1+\nu) \varepsilon_t t \right], \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = Gh \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right.$$

Podstawiając powyższe wielkości do równań równowagi (1.2) oraz wykorzystując równania (1.1) otrzymamy układ trzech równań różniczkowych dla trzech funkcji  $u$ ,  $v$  i  $w$  określających przesunięcia dowolnego punktu powierzchni środkowej płyty

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{c_z}{D} w - \frac{h^2}{4D} \left( c_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ \quad + \frac{h}{2D} \left( c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{G}{E} (1 - \nu^2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \\ \quad - c_x \frac{h^2}{12D} \left( u - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{G}{E} (1 - \nu^2) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \\ \quad - c_y \frac{h^2}{12D} \left( v - \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \end{cases}$$

Z powyższego układu równań różniczkowych możemy wyznaczyć przesunięcia  $u$ ,  $v$  i  $w$  dowolnego punktu dla danych warunków brzegowych. Tak sformułowane zadanie może być rozwiązane za pomocą metod numerycznych (np. metodą różnic skończonych), co jednak wymaga dużego nakładu pracy.



Rys. 3

Jeżeli nie uwzględnimy odporu poziomego podłoża i pominiemy przesunięcia poziome ( $u$ ,  $v$ ), to otrzymamy jako przypadek szczególny układu równań różniczkowych (1.6) — znane równanie różniczkowe ugięcia płyty na sprężystym podłożu

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{c_z}{D} w = 0.$$

Rozważmy pasmo płytowe, którego dwie krawędzie równoległe do osi  $y$  są swobodne (rys. 4).

W tym przypadku składowa przesunięcia  $v$  oraz pochodna  $\partial w / \partial y$  będą równe zero, a układ równań (1.6) sprowadza się do dwóch równań różniczkowych

$$(1.7) \quad \begin{cases} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{c_z}{D} w - \frac{h^2}{4D} c_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{h}{2D} c_x \frac{dw}{dx} = 0, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{h^2}{12D} c_x u + \frac{h^3}{24D} c_x \frac{dw}{dx} = 0. \end{cases}$$

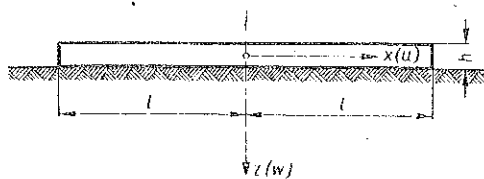
Szczególnym przypadkiem powyższego układu równań jest znane równanie różniczkowe ugięcia pasma płytowego <sup>1)</sup>

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{c_z}{D} w = 0,$$

które otrzymamy nie uwzględniając poziomej reakcji podłoża i pomijając przesunięcie poziome  $u$ .

Układ dwóch równań różniczkowych (1.7) po prostych przekształceniach można sprowadzić do jednego równania różniczkowego liniowego szóstego rzędu:

$$(1.8) \quad \frac{d^6 w}{dx^6} - c_x \frac{h^2}{3D} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{c_z}{D} \frac{d^3 w}{dx^3} - c_x c_z \frac{h^2}{12D^2} w = 0.$$



Rys. 4

Po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej  $\xi$  równanie (1.8) napiszemy w postaci ostatecznej

$$(1.9) \quad \frac{d^6 w}{d\xi^6} + a \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4 \frac{d^3 w}{d\xi^3} + a w = 0,$$

gdzie

$$(1.10) \quad \begin{cases} \xi = \frac{x}{L}, & L = \sqrt[4]{\frac{4D}{c_z}}, \\ a = -\frac{2}{3} c_x \frac{h^2}{\sqrt{c_z D}} = -\frac{4}{3} \frac{c_x}{c_z} \left(\frac{h \lambda}{l}\right)^2 = -\frac{h^2}{3D} c_x L^3, \\ \lambda = \frac{l}{L}. \end{cases}$$

Szukajmy rozwiązania równania (1.9) w postaci

$$w = e^{r\xi}.$$

Równaniem charakterystycznym będzie równanie

$$(r^2)^3 + a(r^2)^2 + 4(r^2) + a = 0.$$

Wprowadźmy oznaczenia następujące:

$$(1.11) \quad \begin{cases} b = \left\{ \frac{a}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{a^3}{9} \right) + \frac{1}{3} \left[ \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} (a^2 - 8)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}, \\ d = \left\{ \frac{a}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{a^3}{9} \right) - \frac{1}{3} \left[ \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} (a^2 - 8)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Por. [1], s. 30, wzór 29.

Przy powyższych oznaczeniach otrzymamy sześć rozwiązań równania charakterystycznego

$$(1.12) \quad \begin{cases} r_1 = -r_2 = \left(-\frac{a}{3} + b + d\right)^{\frac{1}{2}} = a, \\ r_3 = -r_4 = \left[\left(-\frac{a}{3} - \frac{b+d}{2}\right) + \left(\frac{b-d}{2}\sqrt{3}\right)i\right]^{\frac{1}{2}} = (\beta + \gamma i), \\ r_5 = -r_6 = \left[\left(-\frac{a}{3} - \frac{b+d}{2}\right) - \left(\frac{b-d}{2}\sqrt{3}\right)i\right]^{\frac{1}{2}} = (\beta + \gamma i), \end{cases}$$

gdzie  $i$  oznacza jak zwykle jedność urojona.

Stąd rozwiązanie równania różniczkowego (1.9) przedstawimy jako sumę sześciu całek szczególnych:

$$w = C_1 \cosh a\xi + C_2 \cosh \beta\xi \cos \gamma\xi + C_3 \sinh \beta\xi \sin \gamma\xi + \\ + C_4 \cosh \beta\xi \sin \gamma\xi + C_5 \sinh \beta\xi \cos \gamma\xi + C_6 \sinh a\xi.$$

Jeśli początek układu współrzędnych obierzemy na osi symetrii płyty (rys. 4), to biorąc pod uwagę symetryczną postać wygięcia płyty znajdziemy, że stałe  $C_4$ ,  $C_5$  i  $C_6$  muszą być równe zeru.

Rozwiązaniem równania (1.9) będzie więc równanie

$$(1.13) \quad w(\xi) = C_1 \cosh a\xi + C_2 \cosh \beta\xi \cos \gamma\xi + C_3 \sinh \beta\xi \sin \gamma\xi.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku nieuwzględnienia poziomego oporu podłoża z powyższych ogólnych wzorów otrzymamy

$$a = 0, \quad b = -d = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad r_1 = r_2 = 0, \\ r_3 = -r_4 = (2i)^{\frac{1}{2}} = (1+i), \quad r_5 = -r_6 = (-2i)^{\frac{1}{2}} = (1-i).$$

Stąd szczególnym przypadkiem rozwiązania (1.13) będzie<sup>2)</sup>

$$(1.13.1) \quad w(\xi) = C_2 \cosh \xi \cos \xi + C_3 \sinh \xi \sin \xi.$$

Stałe  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  występujące w ogólnym rozwiązaniu (1.13) wyznaczymy z trzech następujących warunków brzegowych zagadnienia: wzdłuż dwóch równoległych krawędzi płyty swobodnej dla  $x=l$  lub dla  $\xi=l/L=\lambda$  musi być

$$(1.14) \quad \begin{cases} \bar{M}_x = -D \left[ \frac{d^2 w}{L^2 d\xi^2} + (1+\nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right] = 0, \\ Q_x = \frac{dM_x}{L d\xi} - \frac{h}{2} r_x = -D \frac{d^3 w}{L^3 d\xi^3} - \frac{h}{2} c_x \left( u - \frac{h}{2} \frac{dw}{L d\xi} \right) = 0, \\ N_x = \frac{12D}{h^2} \left[ \frac{du}{L d\xi} - (1+\nu) \varepsilon_t t \right] = 0. \end{cases}$$

<sup>2)</sup> Por. [1], s. 31, wzór 30a.

Z powyższych warunków brzegowych otrzymamy układ trzech równań dla wyznaczenia stałych  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ :

$$(1.15) \quad \begin{cases} C_1 a^2 \cosh a \lambda + C_2 (\varphi_2 \cosh \beta \lambda \cos \gamma \lambda - 2 \beta \gamma \sinh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) + \\ \quad + C_3 (2 \beta \gamma \cosh \beta \lambda \cos \gamma \lambda + \varphi_2 \sinh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) = -(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} L^2, \\ C_1 \varphi_0 \cosh a \lambda + C_2 (\varphi_4 \cosh \beta \lambda \cos \gamma \lambda - \varphi_3 \sinh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) + \\ \quad + C_3 (\varphi_3 \cosh \beta \lambda \cos \gamma \lambda + \varphi_4 \sinh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) = -2(1 + \nu) \varepsilon_t t h \frac{C_x}{C_z}, \\ C_1 \varphi_1 a \sinh a \lambda + C_2 (\varphi_5 \sinh \beta \lambda \cos \gamma \lambda - \varphi_6 \cosh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) + \\ \quad + C_3 (\varphi_6 \sinh \beta \lambda \cos \gamma \lambda + \varphi_5 \cosh \beta \lambda \sin \gamma \lambda) = 0. \end{cases}$$

Do równań (1.15) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(1.16) \quad \begin{cases} \varphi_0 = \left[ 4 + a^2 \left( a^2 + \frac{3}{4} a \right) \right], & \varphi_1 = \left( \frac{1}{4} a a^2 + \varphi_0 \right), \\ \varphi_2 = (\beta^2 - \gamma^2), & \varphi_3 = \left( \frac{3}{2} a + 4 \varphi_2 \right) \beta \gamma, \\ \varphi_4 = 4(1 - \beta^2 \gamma^2) + \frac{3}{4} a \varphi_2 + \varphi_2^2, \\ \varphi_5 = \beta [4 - \gamma^2 (3a - 5\gamma^2) + \beta^2 (a - 10\gamma^2 + \beta^2)], \\ \varphi_6 = \gamma [4 + \beta^2 (3a + 5\beta^2) - \gamma^2 (a + 10\beta^2 - \gamma^2)]. \end{cases}$$

Po wyznaczeniu stałych  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  otrzymamy następujące wyrażenia na ugięcie pionowe rozpatrywanej płyty oraz na przesunięcia poziome  $u$  dowolnego punktu powierzchni środkowej płyty:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} u = & -\frac{8}{L} \frac{h}{3 a^2} \left[ \frac{d^5 w}{d \xi^5} + \frac{3}{4} a \frac{d^3 w}{d \xi^3} + \left( 4 - \frac{3}{16} a^2 \right) \frac{dw}{d \xi} \right] = \\ = & \frac{-8 h \lambda}{3 l a^2} \left\{ C_1 a \left( \varphi_0 - \frac{3}{16} a^2 \right) \sin h a \xi + \left[ C_2 \left( \varphi_5 - \frac{3}{16} a^2 \beta - \frac{a}{4} \beta^3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} a \beta \gamma^2 \right) + C_3 \left( \varphi_6 - \frac{3}{16} a^2 \gamma + \frac{a}{4} \gamma^3 - \frac{3}{4} a \beta^2 \gamma \right) \right] \sinh \beta \xi \cos \gamma \xi + \\ & \left. + \left[ C_2 \left( -\varphi_6 + \frac{3}{16} a^2 \gamma - \frac{a}{4} \gamma^3 + \frac{3}{4} a \beta^2 \gamma \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_3 \left( \varphi_5 - \frac{3}{16} a^2 \beta - \frac{a}{4} \beta^3 + \frac{3}{4} a \beta \gamma^2 \right) \right] \cosh \beta \xi \sin \gamma \xi \right\}. \end{aligned}$$

Momenty zginające i siły normalne wyznaczmy ze wzorów

$$(1.18) \quad \begin{cases} M_x = -D \left[ \frac{d^2 w}{L^2 d\xi^2} + (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right] = -D(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} - \\ \quad - \frac{D}{L^2} [C_1 a^2 \cosh a\xi + \cosh \beta\xi \cos \gamma\xi (C_2 \varphi_2 + 2C_3 \beta\gamma) + \\ \quad + \sinh \beta\xi \sin \gamma\xi (-2C_2 \beta\gamma + C_3 \varphi_2)], \\ M_y = -D \left[ \nu \frac{d^2 w}{L^2 d\xi^2} + (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} \right], \\ M_{xy} = 0, \\ N_x = \frac{12D}{h^2} \left[ \frac{du}{L d\xi} - (1 + \nu) \varepsilon_t t \right] = \\ = -6 \frac{c_x}{c_x} \frac{D}{h^3} [C_1 \varphi_0 \cosh a\xi + (C_2 \varphi_4 + C_3 \varphi_3) \cosh \beta\xi \cos \gamma\xi + \\ + (C_3 \varphi_4 - C_2 \varphi_3) \sinh \beta\xi \sin \gamma\xi] - \frac{12D}{h^2} (1 + \nu) \varepsilon_t t. \end{cases}$$

Jeśli nie uwzględnimy poziomego oddziaływania podłoża ( $c_x = 0$ ) oraz jeśli przyjmiemy, że w płaszczyźnie środkowej płyty  $t = 0$  i  $u = 0$ , to otrzymamy jako szczególny przypadek równań (1.15) układ następujący<sup>3)</sup>:

$$(1.15.1) \quad \begin{cases} C_2 \sinh \lambda \sin \lambda - C_3 \cosh \lambda \cos \lambda = (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t L^2}{h^2}, \\ C_2 (\sinh \lambda \cos \lambda + \cosh \lambda \sin \lambda) + C_3 (\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda) = 0. \end{cases}$$

Stąd wyznaczmy stałe

$$C_2 = (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} L^2 \psi_1, \quad C_3 = -(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} L^2 \psi_2,$$

gdzie

$$\psi_1 = \frac{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda}{\sinh 2\lambda + \sin 2\lambda}, \quad \psi_2 = \frac{\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda}{\sinh 2\lambda + \sin 2\lambda}.$$

Powierzchnia ugięcia pasma płytowego wyrazi się wzorem<sup>4)</sup>

$$(1.13.2) \quad \tilde{w}(\xi) = (1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} L^2 (\psi_1 \cosh \xi \cos \xi - \psi_2 \sinh \xi \sin \xi).$$

Łatwo sprawdzić, iż warunek równowagi pasma jest zachowany:

$$\int_0^l r_z dx = c_2 L \int_0^\lambda w(\xi) d\xi = 0.$$

<sup>3)</sup> Por. [1], s. 31, równania (c).

<sup>4)</sup> Por. [1], s. 31, wzór (d).



Momenty zginające otrzymamy z ogólnych wzorów (1.18), jeśli podstawimy:

$$C_1 = 0, \quad \beta = \gamma = 1, \quad r_x = u(x) = c_x = t = 0.$$

Stąd

$$(1.19) \quad \begin{cases} M_x = D(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} 2 \left( \psi_1 \sinh \xi \sin \xi + \psi_2 \operatorname{cosh} \xi \operatorname{ces} \xi - \frac{1}{2} \right), \\ M_y = D(1 + \nu) \varepsilon_t \frac{\Delta t}{h} 2 \left( \nu \psi_1 \sinh \xi \sin \xi + \nu \psi_2 \operatorname{cosh} \xi \cos \xi - \frac{1}{2} \right), \\ M_{xy} = N_x = N_y = 0. \end{cases}$$

*Przykład.* Wyznaczyć powierzchnie ugięcia oraz wykresy momentów zginających i sił normalnych pasma płytowego na gęstym ruszcie pałowym.

Przyjmujemy następujące dane dotyczące płyty żelbetowej:  
rozpiętość  $2l = 20$  m,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>,

wysokość  $h = 2$  m,  $\varepsilon_t = 10^{-5}$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2) = 14,4 \cdot 10^{10}$  kGcm,  
 $\nu = 1/6$ , stosunek współczynników podatności podłoża  $c_x/c_z = 1/10$ .

Ze wzoru (1.10) obliczamy

$$a = -\frac{2}{3} \frac{c_x h^2}{\sqrt{c_z D}} = -0,0222.$$

Po wyznaczeniu  $b$  i  $d$  ze wzorów (1.11) otrzymamy pierwiastki równania charakterystycznego na podstawie wzorów (1.12)

$$r_1 = -r_2 = 0,0745,$$

$$r_3 = -r_4 = 1,002 + 0,998 i,$$

$$r_5 = -r_6 = 1,002 - 0,998 i.$$

Po przeprowadzeniu dalszych obliczeń według podanych wzorów (1.15) i (1.16) wyznaczymy stałe ogólnego równania powierzchni

$$C_1 = (0,604 \Delta t - 115,3 t) 10^{-6},$$

$$C_2 = (2501,5 \Delta t - 14,3 t) 10^{-6},$$

$$C_3 = (-864,2 \Delta t + 27,6 t) 10^{-6}.$$

Równania powierzchni ugięcia, momentów zginających i sił normalnych otrzymamy ze wzorów (1.13) i (1.18):

$$w(\xi) = C_1 \operatorname{cosh}(0,0745 \xi) + C_2 \operatorname{cosh}(1,002 \xi) \cos(0,998 \xi) + \\ + C_3 \sinh(1,002 \xi) \sin(0,998 \xi),$$

$$M_x \frac{L^2}{D} 10^6 = -14\,000 \Delta t - (0,00335 \Delta t - 0,641 t) \cosh 0,0745 \xi +$$

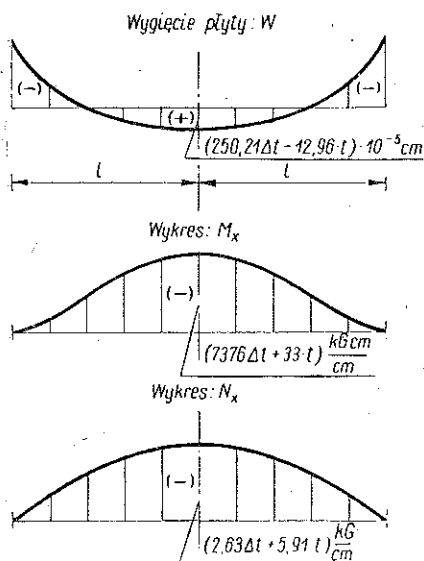
$$+ (1707,4 \Delta t - 55,1 t) \cosh (1,002 \xi) \cos (0,998 \xi) +$$

$$+ (5010,2 \Delta t - 28,8 t) \sinh (1,002 \xi) \sin (0,998 \xi),$$

$$N_x \frac{h^2}{D} 10^7 = -1400 t - (7,25 \Delta t - 1383,6 t) \cosh (0,0745 \xi) -$$

$$- (0,065 \Delta t + 0,017 t) \cosh (1,002 \xi) \cos (0,998 \xi) +$$

$$+ (2,122 \Delta t - 0,019 t) \sinh (1,002 \xi) \sin (0,998 \xi).$$



Rys. 5

Wykresy ugięcia, momentów zginających i sił normalnych przedstawiono na rys. 5.

Z kolei wyznaczamy wpływ poziomego odporu sprężystego podłoża na naprężenia ekstremalne.

Niech obniżenie temperatury (łącznie z wpływem kurczenia betonu) wyniesie  $t = -35^\circ$ ,  $\Delta t = -10^\circ$ .

Wówczas dla  $\xi = 0$  maksymalny moment i siła normalna wyniosą:

$$\max M_x = -(512,2 \Delta t + 2,27 t) 10^{-10} D =$$

$$= -7376 \Delta t - 33 t = 73\,760 +$$

$$+ 1155 = 74\,915 \text{ kG cm/cm},$$

$$\max N_x = -(1,83 \Delta t + 4,11 t) 10^{-11} D =$$

$$= -5,91 t - 2,63 \Delta t = 233 \text{ kG/cm}.$$

Stąd

$$\max \sigma_x = \frac{74\,915 \cdot 6}{200^2} + \frac{233}{200} = 12,4 \text{ kG/cm}^2.$$

Bez uwzględnienia poziomego odporu sprężystego podłoża ze wzoru (1.19) otrzymamy dla  $\xi = 0$

$$\max M_x = -5,1 \cdot 10^{-8} D \Delta t = -7367 \Delta t = 73\,670 \text{ kG cm/cm}, \quad N_x = 0.$$

A więc

$$\max \sigma_x = \frac{73\,670 \cdot 6}{200^2} = 11,05 \text{ kG/cm}^2.$$

Z powyższego wynika, że przez uwzględnienie poziomego odporu podłoża otrzymaliśmy naprężenia większe o 12,2%.

W ogólnym przypadku wpływ poziomego odporu podłoża na naprężenia będzie zależał od wzajemnego stosunku  $t$  do  $\Delta t$ , czyli od stosunku

wzrostu temperatury w warstwie obojętnej płyty do wielkości różnicy temperatur w dolnej i górnej powierzchni płyty oraz od stosunku współczynników  $c_x/c_z$ .

#### Literatura cytowana w tekście

[1] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, New York-London 1940.

#### Резюме

#### ОБ УЧЕТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ РЕАКЦИИ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ В ПЛАСТИНКАХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

В начале работы составлены дифференциальные уравнения прогиба, изгибающих и крутящих моментов, срезающих и нормальных сил для пластинки на упругом основании, в зависимости от изменений температуры, причем учитывается горизонтальная реакция упругого основания. Как частный случай этого общего уравнения получается известное дифференциальное уравнение прогиба пластинки с горизонтальной реакцией основания.

Далее, автор занимается получением точного общего решения дифференциального уравнения прогиба для пластинчатой полосы и выводом формул для изгибающих моментов и нормальных сил.

В заключение показано на числовом примере горизонтальной реакции основания на экстремальные нормальные напряжения в пластинке.

#### S u m m a r y

#### PLATES SUBJECTED TO THE ACTION OF TEMPERATURE WITH HORIZONTAL REACTION OF THE ELASTIC FOUNDATION

The paper begins with the derivation of differential equations of deflection, bending and twisting moments, shear and normal forces for a plate resting on an elastic foundation, provoked by temperature changes, the horizontal reaction of the elastic foundation being taken into account. As a particular case of this general equation the familiar differential equation of plate deflection is obtained; the vertical reaction of the foundation being the only reaction considered.

Next the author obtains the exact solution of the general differential equation of deflection for a strip and derives formulae for bending moments and normal forces.

Finally, the influence of horizontal reaction of the elastic foundation on extremal normal stresses is illustrated by a numerical example.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 grudnia 1954 r.*