

JAN MADEJSKI

O PEŁZANIU I PEŁZARCE

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XXXIX

Podstawę doświadczalną reologii metali stanowią wykresy pełzania, otrzymane podczas prób długotrwałego rozciągania na maszynie wytrzymałościowej zwanej pełzarką. Wykresy te przedstawiają zależność wydłużenia względnego próbki od czasu trwania doświadczenia i mają charakteryzować pełzanie, określone jako zjawisko powstawania odkształceń trwałych (plastycznych) przy stałych naprężeniach i stałej temperaturze. Utrzymanie stałej temperatury próbki, a więc zrealizowanie zjawiska izotermicznego, a przy tym także tautotermicznego, jest niezwykle trudne. Obecny stan techniki laboratoryjnej, [1], pozwala na utrzymanie z dokładnością $\pm 1/4^{\circ}\text{C}$ stałej temperatury próbki, a więc doświadczenie można uważać za izotermiczne. Nie ma jednak sposobu na otrzymanie zjawiska tautotermicznego, tj. zjawiska, podczas którego temperatura próbki w każdym miejscu jest taka sama. Pewne polepszenie sytuacji można by uzyskać ogrzewając próbkę za pośrednictwem płynu o dostatecznie wielkim współczynniku przejmowania ciepła.

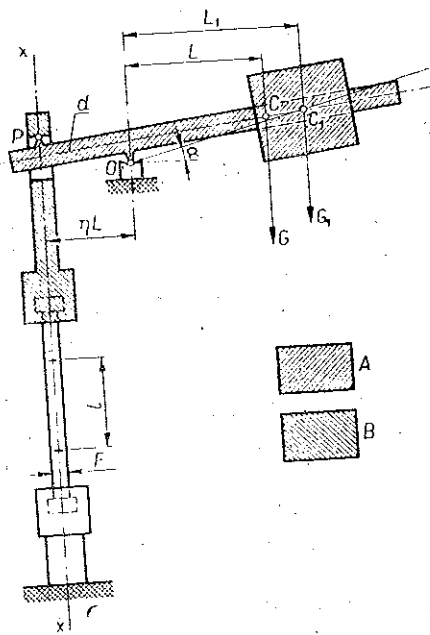
Abstrahując od tych trudności można stwierdzić, że próba długotrwałego rozciągania na pełzarce ma pełne prawa do tego, aby traktować ją jako izotermiczną w rozważaniach teoretycznych. Natomiast izobaryczność próby długotrwałego rozciągania, zależna od sposobu obciążenia próbki na pełzarce, nie jest zrealizowana w powszechnie stosowanych typach maszyn wytrzymałościowych. Z tej przyczyny wyniki prób długotrwałego rozciągania na tych maszynach, identyfikowane ze zjawiskiem pełzania izobaryczno-izotermicznego, prowadzą do fałszywego wyobrażenia o izobaryczno-izotermicznym zjawisku powstawania odkształceń trwałych. W celu uzasadnienia tego stwierdzenia przeprowadzimy poniżej analizę pracy pełzarki podczas długotrwałej próby rozciągania.

Schemat powszechnie stosowanego typu pełzarki¹⁾ przedstawiony jest na rys. 1.

¹⁾ Tego typu są maszyny radzieckie WPK-11, WP-8 i AŁ-3; maszyny CKTI-2, CKTI-3, IP-2, WP-101 i CKTI-750 różnią się nieco konstrukcją, posiadają bowiem urządzenie obciążające za pomocą dźwigni jednoramiennej, umieszczonej u dołu próbki. Zasada działania tych ostatnich maszyn jak również ich teoria pozostaje taka sama pod warunkiem zmiany znaku wyrażenia na energię potencjonalną w równaniu (6).

Podczas doświadczenia dźwignia z ciężarkiem obraca się wokół osi O w miarę wydłużania się próbki.

Zanim przystąpimy do ułożenia odpowiedniego równania różniczkowego opisującego zjawisko powstawania odkształceń w próbce, zastanówmy się nad warunkami początkowymi dla tego równania. Jeśli próbka badanego materiału ma być zamocowana przed przyłożeniem obciążenia, to przy unieruchomionej dźwigni d w łożysku P musi istnieć możliwość uzyskania stosownej wielkości luzu. Można to osiągnąć w sposób prosty przez zastosowanie łożyska pryzmowego²⁾. W takim przypadku obciążamy próbkę przez zwolnienie dźwigni d , która rozpoczyna obrót wokół punktu O (rys. 1) w kierunku wskazówki zegara. Aż do chwili zniknięcia luzu w łożysku P obrót dźwigni jest swobodny i odbywa się pod działaniem siły ciężkości ze stałym przyspieszeniem kątowym



Rys. 1

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{G_1 L_1}{J_1},$$

przy czym G_1 oznacza ciężar części zakreśwanych według wzoru A, L_1 odległość środka masy C_1 tych części od osi obrotu O , zaś J_1 moment bezwładności względem osi O (rys. 1). Ta faza obrotu dźwigni nie jest niczym związana z właściwościami badanej próbki, ale ma wpływ na wykres $\varepsilon = \varepsilon(t)$ otrzymany podczas próby długotrwałego rozciągania na pełzarce, mianowicie w tej fazie ustala się początkowa prędkość wydłużania próbki. Istotnie, jeśli przesunięcie punktu należącego do części A wzdłuż osi $x-x$ oznaczymy przez s , to

$$\alpha \approx \frac{s}{\eta L},$$

²⁾ Maszyny dużych rozmiarów nie mają łożysk pryzmowych, lecz łożyska kulkowe wahliwe. W łożyskach tych istnieje jednak także pewien luz, choć wartość jego jest niewielka. Prócz tego w każdej maszynie można wskazać miejsca luzów dodatkowych, mieszczących się w uchwytach. Zatem rozważania powyższe, aczkolwiek odnoszą się do schematu na rys. 1, są również słuszne dla innych rozwiązań konstrukcyjnych.

a zatem

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \eta L L_1 \frac{G_1}{J_1} = \text{const}$$

w pierwszej fazie ruchu dźwigni.

Oznaczmy swobodne przesunięcie dźwigni d w łożysku P w kierunku osi $x-x$ przez s_0 . Wtedy w chwili zniknięcia luzu, tj. w chwili, od której począwszy należy liczyć czas trwania doświadczenia, dźwignia uderza próbkę z prędkością

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2s_0 \eta L L_1 \frac{G_1}{J_1}}$$

Prowadzi to do pierwszego warunku początkowego:

$$(1) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{l} \sqrt{2s_0 \eta L L_1 \frac{G_1}{J_1}} \quad \text{dla} \quad t = 0.$$

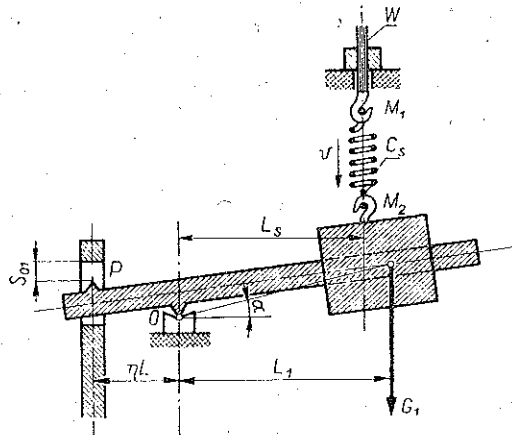
Podkreślić należy, że warunek ten nie ma nic wspólnego z właściwościami reologicznymi materiału próbki.

Co do przyspieszenia, to można stwierdzić jedynie, że

$$(1.1) \quad \ddot{\varepsilon}_0 = \frac{\eta L L_1 G_1}{l J_1} \quad \text{dla} \quad t = -0,$$

gdyż ze względu na przyłożenie dodatkowych sił do dźwigni d w chwili $t=0$ wartość przyspieszenia zmienia się wtedy w sposób nieciągły. Jak widać, początek obciążenia próbki ma w tym przypadku charakter uderzeniowy, co nie jest zjawiskiem korzystnym dla próby, której charakterystyczną cechą ma być stała wielkość naprężeń. Zjawisku temu, spostrzeżonemu dość dawno, mają zapobiegać «tłumiki» sprężynowe, stosowane w większości typów pelzarek³⁾.

Schemat «tłumika» sprężynowego w zastosowaniu do maszyny z dźwignią górną podany jest na rys. 2. W tym przypadku obciążenie próbki poprzedza zwolnienie dźwigni, w wyniku czego w łożysku uchwy-



Rys. 2

³⁾ «Tłumiki» kauczukowe stosowane są wyłącznie dla pelzarek stołowych małych gabarytów.

tu P ustala się luz s_{01} . Załóżmy, że w chwili początkowej dźwignia (a wraz z nią i sprężyna) są nieruchome. Jeśli oznaczymy przez C_s sztywność sprężyny (zakładamy, że charakterystyka sprężyny jest liniowa), to wydłużenie sprężyny, przy pominięciu jej ciężaru własnego, wynosi wtedy

$$z_{s0} = \frac{G_1}{C_s}.$$

Obciążenie próbki na peźzarce zaopatrzonej w tłumik polega na przesunięciu górnego punktu zaczepienia sprężyny M_1 za pomocą ręcznego pokręcania wrzecionem W . Ruch punktu M_1 uzależniony jest od czynnika subiektywnego (praca laboranta). Załóżmy dla prostoty, że ruch punktu M_1 jest jednostajny o prędkości v . Wtedy równanie ruchu dźwigni będzie miało postać

$$\frac{J_1}{L_1} \frac{d^2 a}{dt^2} = G_1 - C_s z_s,$$

gdzie z_s jest zmiennym wydłużeniem sprężyny.

Zakładając tak jak dotychczas, że kąty obrotu dźwigni są małe, otrzymujemy

$$\frac{dz_s}{dt} = L_s \frac{da}{dt} - v,$$

przy czym w chwili początkowej ruchu wrzeciona ma być $\dot{a} = 0$ oraz $\ddot{a} = 0$.

Uwzględniając te warunki początkowe otrzymujemy następujące równanie ruchu dźwigni

$$a = \frac{v}{L_s} \left(t - \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right),$$

gdzie

$$\beta = \sqrt{\frac{C_s L_1 L_s}{J_1}} = L_1 \sqrt{\frac{C_s L_s}{J_1 L_1}}.$$

W spotykanych konstrukcjach najczęściej jest $L_s = L_1$.

Podczas znikania luzu s_{01} dźwignia obraca się o kąt $a_1 \approx s_{01}/\eta L$, co pozwala na obliczenie czasu ruchu dźwigni T ze wzoru⁴⁾

$$s_{01} \approx \frac{\eta L}{L_s} v \left(T - \frac{1}{\beta} \sin \beta T \right),$$

⁴⁾ W przypadku większej liczby rozwiązań na T należy wziąć rozwiązanie o wartości najmniejszej.

a w następstwie prędkości odkształcenia

$$(1.2) \quad \ddot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{l} \frac{\eta L}{L_s} v (1 - \cos \beta T),$$

oraz przyspieszenia

$$(1.3) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{l} \frac{\eta L}{L_s} v \beta \sin \beta t.$$

Należy podkreślić, że wzory powyższe są słuszne dla dostatecznie małych wartości prędkości v , dla których aż do chwili zniknięcia luzu istnieje napięcie sprężyny. Gdyby amortyzator został zwolniony szybciej, to dalszy ruch dźwigni odbywałby się według innego prawa, a prędkość $\dot{\varepsilon}_0$ wypadłaby większa, niż to wynika ze wzoru (1.2). Dobierając odpowiednio C_s oraz v można wartość $\dot{\varepsilon}_0$ na tyle zmniejszyć, że uderzenie w łożysko P będzie bardzo łagodne. Jeśli jednak w chwili zniknięcia luzu tłumik zostanie odłączony, to przyspieszenie dźwigni ulegnie zmianie przybierając inną wartość niż (1.3), przy czym wartość przyspieszenia zmieni się w sposób nieciągły. W dalszym procesie obciążenia tłumik nie bierze żadnego udziału: gdyby przypadkiem (jak to się później okaże) nastąpił ruch powrotny dźwigni, to sprężyna z racji jej konstrukcji nie będzie temu przeciwdziałać. Rola jej ogranicza się bowiem wyłącznie do odpowiedniego zmniejszenia wartości $\dot{\varepsilon}_0$.

Przystąpimy teraz do wyznaczenia siły obciążającej próbkę podczas doświadczenia. Siłę tę, którą oznaczymy przez R , wyliczy się z równania ruchu części zakreskowanych według A i B na rys. 1. Ciężar tych części oznaczymy przez G ($G > G_1$), położenie środka masy przez C ($L < L_1$), moment bezwładności względem osi O przez J , a stosunek ramion dźwigni przez η . Otrzymujemy następujące równanie ruchu przy użyciu poprzednich oznaczeń:

$$R = \frac{G}{\eta} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2} \ddot{\varepsilon}.$$

W pierwszym rzędzie rozpatrzmy próbkę z materiału, którego odkształcenie tak postaciowe, jak i objętościowe wynika tylko z powstawania wydłużenia przy zachowaniu stałej powierzchni przekroju próbki F . W takim przypadku

$$(2) \quad \sigma = \frac{R}{F} = \frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon}.$$

Tak więc naprężenie nie jest wielkością stałą (jak to się nieraz zakłada), lecz funkcją wydłużenia względnego.

W chwili początkowej, $t = + 0$, naprężenie musi być równe zeru, gdyż wydłużenie względne próbki równa się zeru. A zatem

$$(3) \quad t = + 0, \quad \ddot{\varepsilon}_{+0} = \frac{\eta L^2 G}{Jl} = \varepsilon = 0, \quad \sigma = 0.$$

Zjawisko powstawania odkształceń trwałych zbadamy opierając się na zasadzie zachowania energii w następującej postaci:

$$(4) \quad N = \frac{d}{dt} \left(U + E_M + \frac{Q}{A} \right)$$

lub

$$(4.1) \quad \int_0^t N dt = \Delta U + \Delta E_M + \frac{Q}{A}.$$

We wzorach powyższych N oznacza moc sił przyłożonych do próbki. U energię wewnętrzną próbki, E_M energię mechaniczną próbki, Q ciepło odprowadzone od próbki do otoczenia oraz A 1/427 kcal/kgGm.

Energię wewnętrzną należy rozpatrywać jako złożoną z dwóch części: jedna z nich zależy tylko od naprężeń i stanowi energię sprężystą ciała U_E , druga zaś jest funkcją temperatury; tę ostatnią oznaczamy przez U_T . Zatem $U = U_E + U_T$.

Z racji izotermiczności (lecz nie tautotermiczności) procesu jest $U_T = \text{const}$, a przeto

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Równania (4) lub (4.1), w których symbol U oznacza energię wewnętrzną (a nie «cieplną»), słuszne są zawsze wtedy, gdy oddziaływanie otoczenia na rozpatrywane ciało ogranicza się do działania mechanicznego (wykonanie pracy) oraz do działania termicznego (doprowadzenie lub odprowadzenie ciepła). Jednak również w przypadkach innych oddziaływań niż wspomniane można stosować to równanie pod warunkiem, że wyraz Q uwzględnia dopływ energii promienistej, elektrycznej i innych z otoczenia.

W przypadku próby długotrwałej w wysokiej temperaturze wyraz Q , występujący w równaniu (4.1), oznacza ciepło otrzymane z bilansu ciepła odprowadzonego (do uchwytów maszyny) i ciepła doprowadzonego od pieca. Ciepło ostatnie jest mniejsze, gdyż dla utrzymania niezmiennej temperatury trzeba odprowadzić na zewnątrz także ciepło tarcia powstałe wskutek poślizgu wewnętrznego cząstek materiału zmniejszone ewentualnie o ciepło zmiany faz.

Jeśliby zmian fazowych nie było, to w równaniu (4.1) wyraz Q reprezentowałby właśnie ciepło tarcia, którego wyznaczenie doświadczalne nie przedstawia zasadniczych trudności na zasadzie opisanego powyżej bilansu.

Założenie, że $U = U(\sigma, T)$ słuszne jest w zasadzie wyłącznie dla materiałów jednofazowych albo takich, w których wzajemny stosunek faz nie ulega zmianie podczas doświadczenia; w ogólnym przypadku założenie to należy uważać za hipotezę roboczą.

Wyrażając energię sprężystą zgodnie z prawem Hooke'a w przypadku jednowymiarowego rozciągania otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{dU}{dt} = \frac{Fl}{E} \sigma \dot{\sigma},$$

gdzie E oznacza moduł Younga (jest to wielkość stała). Energia mechaniczna jest sumą energii kinetycznej i energii potencjalnej:

$$E_M = E_K + E_P.$$

Założmy, że w próbce rozkład prędkości jest liniowy, przy czym $v = 0$ na dolnym końcu próbki (w którym umieścimy początek osi z) oraz $v = l\dot{\epsilon}$ na górnym końcu.

Oznaczając przez ρ gęstość próbki otrzymujemy

$$E_K = \int_0^l \frac{F \rho v^2}{2} dz = \frac{Fl^3 \rho \dot{\epsilon}^2}{6},$$

ponieważ

$$v = z \dot{\epsilon}.$$

W podobny sposób obliczymy energię potencjalną

$$E_P = \frac{1}{2} Fl^2 \rho g \epsilon.$$

A zatem

$$(6) \quad \frac{dE_M}{dt} = \frac{Fl^3 \rho}{3} \ddot{\epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{Fl^2 \rho g}{2} \dot{\epsilon}.$$

Nawiasem mówiąc wpływ energii mechanicznej na zjawisko jest dostrzegalny tylko przy materiałach o dostatecznie małej długości zerwania; dla metali wyrażenie (6) można zupełnie pominąć.

Moc sił przyłożonych do próbki wyraża się prostą formułą

$$(7) \quad N = Rl\dot{\epsilon} = Fl\sigma\dot{\epsilon} = \frac{Gl}{\eta} \dot{\epsilon} - \frac{Jl^2}{\eta^2 L^2} \ddot{\epsilon} \dot{\epsilon}.$$

Najpoważniejszym zagadnieniem jest określenie ciepła Q . Wobec izotermiczności zjawiska ciepło odprowadzone od próbki do otoczenia może pochodzić tylko z pracy tarcia wewnętrznego w materiale próbki i spowodowane jest wzajemnym poślizgiem kryształów⁵⁾. Jak wiadomo, poślizg ten, powodujący nieodwracalność zjawiska i powstawanie odkształceń trwałych, następuje dopiero po przekroczeniu przez naprężenia określonej wartości, poniżej której zjawiska obciążenia ciał stałych mają charakter odwracalny tj. sprężysty. Ta graniczna wartość wyteżenia jest granicą sprężystości materiału σ_E .

Dla odróżnienia od używanej umownej granicy sprężystości σ_E nazywać będziemy prawdziwą granicą sprężystości. A więc jeśli w rozpatrywanym jednowymiarowym przypadku $\sigma \leq \sigma_E$, to $Q = 0$. Przy tym założeniu równanie (4) przybiera następującą postać:

$$(8) \quad \frac{GJl^2}{\eta^3 L^2 EF} \ddot{\varepsilon} - \frac{J^2 l^3}{\eta^4 L^4 EF} \ddot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} - \left(\frac{Jl^2}{\eta^2 L^2} - \frac{Fl^3 \rho}{3} \right) \ddot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{Gl}{\eta} - \frac{Fl^2 \rho q}{2} \right) \dot{\varepsilon} = 0.$$

Gdyby podczas omawianego okresu obciążenia istniało napięcie w sprężynie uwidocznionej na rys. 2, to przy pominięciu energii mechanicznej równanie (8) miałyby postać

$$\ddot{\varepsilon} + P_1 \varepsilon = P_2 + P_3 t,$$

gdzie

$$P_1 = \frac{L^2}{Jl} \left(C_s l \frac{L_s^2}{L^2} + \eta^2 EF \right), \quad P_2 = \frac{\eta^2 L^2 G}{Jl} \left(1 - \frac{C_s z_{sT}}{G} \frac{L_s}{L} \right),$$

$$P_3 = \frac{\eta LL_s C_s v}{Jl}, \quad z_{sT} = z_{s0} + \frac{v}{\beta} (\cos \beta T - 1).$$

Przy tym byłoby

$$\sigma = \frac{G}{\eta F} - \frac{C_s L_s}{\eta LF} \left(z_{sT} + \frac{L_s l}{\eta L} \varepsilon - vt \right) - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon}.$$

Zważywszy, że z_{sT} oznacza wydłużenie sprężyny w chwili zniknięcia luzu s_{01} , tj. w chwili, od której liczymy czas w danym okresie obciążenia, w takim przypadku wyrażenia (3) należałoby zastąpić następującymi:

$$t = +0, \quad \ddot{\varepsilon} = \frac{\eta^2 LG}{Jl} - \frac{\eta LL_s C_s}{Jl} \left[z_{s0} + \frac{v}{\beta} (\cos \beta T - 1) \right],$$

$$\varepsilon = 0, \quad \sigma = 0.$$

⁵⁾ Jest to słuszne oczywiście tylko wtedy, gdy w materiale nie zachodzą reakcje egzotermiczne; gdyby w materiale zachodziły reakcje endotermiczne, albo zmiana faz wymagająca doprowadzenia ciepła, to należałoby to uwzględnić w bilansie (por. s. 50).

Z powyższego wyniku, że można tak dobrać C_s i v , aby dla $t = +0$ było $\ddot{\varepsilon} = 0$. Nie wpływa to jednak na wnioski, które otrzymuje się z analizy wyników badania okresu obciążenia dla $\sigma > \sigma_E$.

Całkowanie jednokrotne równania (8), czyli sprowadzenie go do postaci (4.1) przy uwzględnieniu warunków (1) i (3), daje następujący wynik:

$$(9) \quad \left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\eta L^2 G}{Jl} \right)^2 + \left(\frac{\eta^2 L^2 EF}{Jl} - \frac{\eta^4 L^4 EF^2 \varrho}{3J^2} \right) \dot{\varepsilon}^2 - \left(\frac{2\eta^3 L^4 GEF}{J^2 l^2} - \frac{\eta^4 L^4 EF^2 \varrho g}{J^2 l} \right) \varepsilon - s_0 \left(\frac{2\eta^3 L^3 L_1 G_1 EF}{JJ_1 l^3} - \frac{2\eta^3 L^3 L_1 EF^2 G_1 \varrho}{3J^2 J_1 l^2} \right) = 0,$$

przy czym dla $t = 0$

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_0 = \frac{1}{l} \sqrt{2s_0 \eta L L_1 \frac{G_1}{J_1}}, \quad \ddot{\varepsilon}_0 = \frac{\eta L^2 G}{Jl}$$

Równanie (9) można rozwiązać przez wprowadzenie parametru

$$(10) \quad \tau = \sqrt{K_1 \varepsilon - K_2 (\dot{\varepsilon}^2 - \dot{\varepsilon}_0^2)},$$

w którym zostały użyte następujące oznaczenia:

$$K_1 = \frac{2\eta^3 L^4 GEF}{J^2 l^2} - \frac{\eta^4 L^4 EF^2 \varrho g}{J^2 l},$$

$$K_2 = \frac{\eta^3 L^2 EF}{Jl} - \frac{\eta^4 L^4 EF^2 \varrho}{3J^2}$$

Biorąc to pod uwagę znajdziemy

$$(11) \quad \begin{cases} \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}_0 + \tau = \frac{\eta L^2 G}{Jl} + \tau, \\ \dot{\varepsilon} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_0^2 + \frac{K_1}{K_2} \left(-\tau + \frac{1}{2K_3} \ln |1 - K_3 \tau| \right) - \frac{1}{K_2} \tau^2}, \\ \varepsilon = \frac{1}{K_2} \left(-\tau + \frac{1}{2K_3} \ln |1 - K_3 \tau| \right), \end{cases}$$

gdzie

$$K_3 = \frac{2J}{\eta^2 L^2 F \varrho g} \frac{1 - \frac{\eta^2 L F l \varrho}{3J}}{1 - \frac{2\eta L^2 G}{3Jg}}$$

oraz

$$(12) \quad t = - \int_0^{\tau} \frac{1}{2K_2} \frac{3 - 2K_3\tau}{1 - K_3\tau} \times \\ \times \frac{d\tau}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{K_1}{K_2^2} \left(-\tau + \frac{1}{2K_3} \ln |1 - K_3\tau| \right) - \frac{\tau^2}{K_2}}}$$

Wyznaczenie ostatniej całki jest dość kłopotliwe i wymaga zastosowania metod przybliżonych, najlepiej graficznych. Za pomocą parametru τ można również wyrazić zmienne naprężenia w próbce, mianowicie

$$(13) \quad \sigma = - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \tau.$$

Jeżeli ze wzoru tego wyznaczmy τ i podstawimy otrzymaną wartość do wyrażenia na ε we wzorach (11), to otrzymamy następujący wynik:

$$(14) \quad \varepsilon = \frac{1}{K_2} \left[\frac{\eta^2 L^2 F}{Jl} \sigma + \frac{1}{2K_3} \ln \left(1 + \frac{K_3 \eta^2 L^2 F}{Jl} \sigma \right) \right].$$

Gdyby pominąć energię mechaniczną próbki w wyrażeniu na K_2 , to wynik byłby następujący:

$$(14.1) \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{l \varrho g}{4E} \frac{1 - \frac{2\eta L^2 G}{3Jg}}{1 - \frac{\eta^2 L F l \varrho}{3J}} \ln \left(1 + \frac{2}{l \varrho g} \frac{1 - \frac{\eta^2 L F l \varrho}{3J}}{1 - \frac{2\eta L^2 G}{3Jg}} \sigma \right).$$

Jak widać, w przypadku ciał stałych o dość małej długości zerwania⁹⁾, mimo zachowania prawa Hooke'a dla wyrażenia na energię sprężystą, wykres indykatorowy rozciągania poniżej granicy sprężystości nie będzie linią prostą, lecz będzie zakrzywiał się na prawo. Łatwo się o tym przekonać rozwijając logarytm w szereg potęgowy.

Rozpatrzmy teraz fazę rozciągania próbki po przekroczeniu prawdziwej granicy sprężystości. Wtedy oczywiście $Q \neq 0$.

Jak wyznaczyć ciepło Q ? Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozpatrzmy wpierw inne zjawisko powstawania odkształceń trwałych, mianowicie zjawisko izotermiczno-izochoryczne, tj. wiotczenie izotermiczne (re-

⁹⁾ Recenzent pracy zauważa, że w tym przypadku prawdopodobnie znacznie-
sze odchylenia wykresu od prostej pochodzą od wpływu skończonych odkształceń
(w pracy stosuje się teorię odkształceń «nieskończenie małych») oraz od wpływu
zmiany przekroju towarzyszącej wydłużeniu.

laksacja). Z doświadczenia wiadomo, że przy zachowaniu stałego całkowitego odkształcenia w przypadku quasi-jednowymiarowego rozciągania prawo powstawania odkształceń trwałych jest następujące:

$$(15) \quad \sigma + \Theta \dot{\sigma} = \text{const},$$

przy czym $\Theta = \Theta(T)$ (czas wiotczenia izotermicznego) jest funkcją temperatury. Należy przypuszczać, że wobec tak prostego prawa dla zjawiska wiotczenia Θ jest zapewne także funkcją zmiennych naprężeń; zbadanie tego wymaga wielu eksperymentów.

Również tylko eksperyment może dać odpowiedź na pytanie, w jakim stopniu czas wiotczenia jest miernikiem ilościowym stanu, którego miernikiem jakościowym jest jego struktura. Z tych przyczyn w pracy niniejszej, stanowiącej próbę teoretycznego ujęcia zjawiska pełzania, będziemy uważali wielkość Q za wyłączną funkcję temperatury, a więc wielkość stałą podczas danego zjawiska.

Doświadczenie wykazuje, że wbrew prawu *Maxwella* wartość naprężeń nie zmierza do zera z biegiem czasu, lecz dąży do określonej liczby; jest to oczywiście prawdziwa granica sprężystości σ_E , będąca funkcją temperatury, jak to ogólnie wiadomo.

Zatem

$$(15.1) \quad \sigma + \Theta \dot{\sigma} = \sigma_E.$$

Zastosujemy równanie (4) do zjawiska wiotczenia. Wobec izotermiczności i izochoryczności wiotczenia równanie (4) prowadzi do związku

$$\frac{dU_E}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = 0,$$

to jest do równania

$$Fl \frac{\sigma \dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Uwzględnienie związku (15.1) w powyższym równaniu pozwala wyznaczyć wartość dQ/dt mianowicie

$$(16) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{FlA}{E\Theta} \sigma(\sigma - \sigma_E) \geq 0 \quad (\sigma \geq \sigma_E).$$

Posługując się znanym związkiem ułożonym przez *Maxwella* dla cieczy można zastąpić iloczyn modułu sprężystości i czasu wiotczenia przez wielkość fizyczną, zwaną lepkością ν . A więc

$$(16.1) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{FlA}{\nu} \sigma(\sigma - \sigma_E).$$

Należy podkreślić, że związek powyższy jest słuszny dla wszystkich zjawisk izotermicznych; wtedy wielkości ν oraz σ_E są stałe oczywiście pod warunkiem, że podczas doświadczenia nie ma zmian natury fazowej. Związki (16) i (16.1) są zatem słuszne także w rozpatrywanym w niniejszej pracy doświadczeniu próby długotrwałego rozciągania.

Na podstawie powyższego równanie (4) dla naprężeń większych od prawdziwej granicy sprężystości przybiera następującą postać:

$$(17) \quad \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \left[\frac{1}{E \Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 E F} \ddot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon} \right] + \frac{l^2 \rho}{3} \ddot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{l \rho g}{2} \dot{\varepsilon} = 0.$$

Warunki początkowe dla tego nieliniowego równania różniczkowego trzeciego rzędu uzyskuje się ze związków (11) i (12), mianowicie w chwili określonej wzorem

$$(17.1) \quad t_p = - \int_0^t \frac{(3 - 2K_3 \tau) d\tau}{2K_3(1 - K_3 \tau) \sqrt{\dot{\varepsilon}_0^2 + \frac{K_1}{K_2^2} \left(-\tau + \frac{1}{2K_3} \ln |1 - K_3 \tau| \right) - \frac{\tau^2}{K_2}}}$$

gdzie

$$\tau = - \frac{\eta^2 L^2 F \sigma_E}{Jl},$$

ma być ⁷⁾

$$\ddot{\varepsilon}_p = \frac{\eta L^2}{Jl} (G - \eta F \sigma_E),$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \sqrt{\dot{\varepsilon}_0^2 + \frac{K_1}{K_2^2} \left[\frac{\eta^2 L^2 F \sigma_E}{Jl} + \frac{1}{2K_3} \ln \left(1 + \frac{K_3 \eta^2 L^2 F \sigma_E}{Jl} \right) \right] - \frac{\eta^4 L^4 F^2 \sigma_E^2}{K_2 J^2 l^2}},$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{K_2} \left[\frac{\eta^2 L^2 F \sigma_E}{Jl} + \frac{1}{2K_3} \ln \left(1 + \frac{K_3 \eta^2 L^2 F \sigma_E}{Jl} \right) \right].$$

Zauważmy, że w przypadku gdy można pominąć wpływ energii mechanicznej na zjawisko, a więc np. dla metali, równanie (17) przekształca się w równanie liniowe, bowiem wielkość

$$\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon}$$

nie różni się stale z zerem. Otrzymujemy następujące równanie:

$$(18) \quad \frac{1}{E \Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 E F} \ddot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon} = 0.$$

⁷⁾ Nadmienić należy, że $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$, gdy $\dot{\varepsilon}_0 = 0$.

Jeżeli dla wygody rozpoczniemy liczyć czas (dla tej fazy próby długotrwałego rozciągania) od chwili t_p , to rozwiązanie równania (18) względem prędkości wydłużenia względnego $\dot{\varepsilon}$ jest następujące:

$$(19) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E \right) + e^{-\frac{t}{2\Theta}} \left[\left(\dot{\varepsilon}_p - H \right) \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda} \left(\ddot{\varepsilon}_p + \frac{\dot{\varepsilon}_p - H}{2\Theta} \right) \sin \lambda t \right].$$

We wzorze powyższym przyjęto oznaczenia:

$$H = \frac{1}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E \right), \quad \lambda = \sqrt{\frac{\eta^2 L^2 E F}{JL} - \frac{1}{4\Theta^2}}.$$

W wyrażeniu na wielkość λ wartość czasu wiotczenia Θ odgrywa do tego stopnia małą rolę, że z dobrym przybliżeniem można przyjąć

$$(19.1) \quad \lambda = \eta L \sqrt{\frac{EF}{JL}}.$$

Jak widać z równania (19), w miarę przebiegu doświadczenia prędkość wydłużenia względnego dąży do określonej granicy, mianowicie

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E \right) = H.$$

Z równania (19) widać wyraźnie, że jedynie ta wartość prędkości wydłużenia względnego nie zależy od właściwości dynamicznych pełzarki, a więc tylko ta wartość może posłużyć do wyznaczenia stałych reologicznych, jakimi są czas wiotczenia izotermicznego Θ oraz prawdziwa granica sprężystości σ_E . Dla wyznaczenia dwóch interesujących nas stałych dysponujemy tylko jednym równaniem, mianowicie równaniem (20). Z tej przyczyny staje się rzeczą konieczną przeprowadzenie dwóch doświadczeń dla dwóch różnych wartości $G/\eta F$ przy tej samej temperaturze. Z wyników tych dwóch prób można wyznaczyć σ_E i Θ dla danej temperatury pod warunkiem, że Θ jest tylko funkcją temperatury, a nie naprężeń.

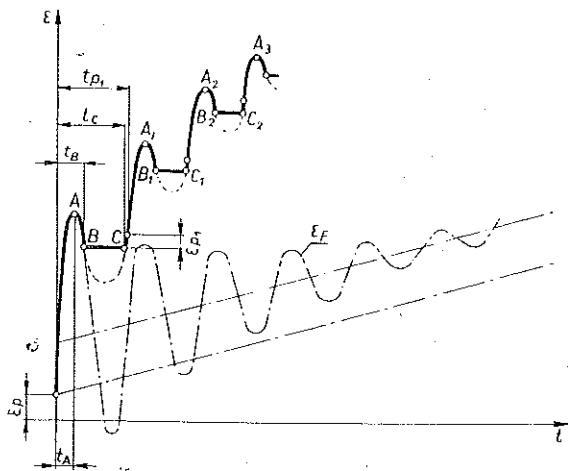
W tym miejscu należy podkreślić, że w celu wyznaczenia σ_E i Θ daleko doskonalsza pod tym względem jest metoda wykorzystania zjawiska wiotczenia izotermicznego. Obie stałe można wyznaczyć z jednego wykresu wiotczenia $\sigma = \sigma(t)$ w czasie dwukrotnie krótszym niż na pełzarce; można także wyznaczyć zależność Θ od naprężeń.

Całkowanie równania (19) prowadzi do znalezienia formalnego wyrażenia na wydłużenie względne próbki jako funkcji czasu; mianowicie jest to funkcja

$$(21) \quad \varepsilon_F = \varepsilon_p + \frac{t}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E \right) + \frac{JL}{\eta^2 L^2 E F} e^{-\frac{t}{2\Theta}} \sin \lambda t \left[\lambda (\dot{\varepsilon}_p - H) \left(1 - \frac{1}{4\Theta^2 \lambda^2} \right) - \frac{\ddot{\varepsilon}_p}{2\lambda\Theta} \right] + \frac{JL}{\eta^2 L^2 E F} (1 - e^{-\frac{t}{2\Theta}} \cos \lambda t) \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p - H}{\Theta} + \ddot{\varepsilon}_p \right).$$

Równanie powyższe przedstawia tłumione drgania⁸⁾ względem stanów równowagi, odpowiadających prostej o współczynniku kierunkowym równym H ; tłumienie drgań zależy tylko od czasu wiotczenia, tj. od tarcia wewnętrznego. Są to drgania o bardzo wysokiej częstotliwości zależnej od właściwości maszyny i od modułu sprężystości E .

Jak już wspomnieliśmy, równanie (21) ma charakter tylko formalny; przyczyną tego jest luz w łożysku P , jak to łatwo objaśnić na rys. 3.



Rys. 3

Na rysunku tym linią «kreska kropka» przedstawione jest rozwiązanie (21). Pierwsza fala tego rozwiązania będzie uwidoczniona na wykresie pełzarki aż do punktu B, jak to przedstawiono na rysunku za pomocą grubej linii. Po osiągnięciu punktu A układ złożony z próbki i mechanizmu pełzarki rozpocznie ruch powrotny, tj. z prędkościami ujemnymi. Zachodzi więc w stosunku do początkowego rozciągania próbki zjawisko odwrotne

z tym zastrzeżeniem, że wobec luzu łożyskowego w łożysku P na próbkę nie działają inne siły zewnętrzne poza jej własnym ciężarem oraz ciężarem uchwytu (na rys. 1 oznaczonym kreskami B). Siły te można pominąć, a zatem próbka doznaje tylko odprężenia takiego samego, jakie towarzyszy zjawisku Bauschingera. Spostrzeżenie to pozwala wyznaczyć odkształcenie plastyczne (trwałe) próbki w punkcie A, równe odkształceniu całkowitemu w punkcie B, przy czym w tym ostatnim stanie naprężenia w próbce równe są zero. Zatem

$$(21.1) \quad \varepsilon_{FA} - \varepsilon_{FB} = \frac{\sigma_A}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon}_{FA} \right).$$

Oczywiście, jak widać z rys. 3, $\ddot{\varepsilon}_{FA} < 0$. Ponieważ wartość $\ddot{\varepsilon}_{FA}$ jest znana, więc za pomocą linii $\varepsilon_F(t)$ można wyznaczyć punkt B oraz prędkość w tym punkcie $\dot{\varepsilon}_{FB}$. Poczawszy od punktu B próbka nie bierze udziału w ruchu

⁸⁾ Niezależnie od wartości $\dot{\varepsilon}_P$ i $\ddot{\varepsilon}_P$, które mogą być nawet równe zero.

mechanizmu, poruszający się mechanizm składa się bowiem tylko z części oznaczonych kreskami A na rys. 1.

Równanie ruchu tego mechanizmu jest opisane zależnością (1.1), tj. $\ddot{\varepsilon}_M = \eta L L_1 G_1 / l J_1$. Zatem prędkość

$$\dot{\varepsilon}_M = \frac{\eta L L_1 G_1}{l J_1} t + \text{const.}$$

Stałą wyznaczamy z warunku, że dla chwili t_B (której wartość można odczytać z rys. 3) ma być $\dot{\varepsilon}_M(t_B) = \dot{\varepsilon}_{FB}$.

Następnie wyznaczamy drogę mechanizmu względem położenia ε_{FB} :

$$(21.2) \quad \varepsilon_M = \dot{\varepsilon}_{FB}(t - t_B) + \frac{\eta L L_1 G_1}{2l J_1}(t - t_B)^2.$$

Droga ta jest parabolą zaznaczoną na rys. 3 linią kreskowaną.

Wyznamy chwilę t_C , w której mechanizm zajmie powtórnie położenie zerowe względem ε_{FB} . Wynosi ona

$$(21.3) \quad t_C = t_B - \frac{2l J_1}{\eta L L_1 G_1} \dot{\varepsilon}_{FB} = t_B + \frac{2l J_1}{\eta L L_1 G_1} |\dot{\varepsilon}_{FB}|,$$

gdyż $\varepsilon_{FB} < 0$.

Zależność powyższa pozwala na wyznaczenie na rys. 3 punktu C . W punkcie tym mechanizm pełzarki «nacier» po raz wtóry na próbkę z prędkością $\dot{\varepsilon}_C = -\dot{\varepsilon}_{FB} > 0$ oraz z przyspieszeniem $\ddot{\varepsilon}_{+0}$ określonym wzorem (3). Następuje powtórnie faza rozciągania odwracalnego, której odpowiadają naprężenia mniejsze od σ_E i opisana wzorami (11) z tą różnicą, że zamiast $\dot{\varepsilon}_0$ należy w tych wzorach wstawić $\dot{\varepsilon}_C$. Posłuży to do wyznaczenia odpowiedniego ε_p (które oznaczymy przez ε_{p1}) oraz odpowiedniego $\dot{\varepsilon}_p$, równego $\dot{\varepsilon}_{p1}$. Wartość $\ddot{\varepsilon}_p$ pozostaje bez zmiany. Następnie należy rozwiązać równanie (18) dla następujących warunków brzegowych:

$$t = t_{p1}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{FB} + \varepsilon_{p1}, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{p1}, \quad \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}_p.$$

Pozostaje wyznaczyć punkt A_1 , potem B_1 itd.

Jak widać, wykres pełzarki $\varepsilon(t)$ nie jest linią ciągłą aż do chwili, w której w odpowiednim punkcie B_n będzie $\dot{\varepsilon}_{FBn} = 0$. Nieciągłości wykresu pełzarki są jednak pod względem pomiarowym trudno dostrzegalne, gdyż częstość drgań λ jest bardzo wysoka. Obserwacje tych nieciągłości są tym trudniejsze, że pomiary wydłużenia względnego próbki podczas próby długotrwałego rozciągania odbywają się w sposób nieciągły, tj. co pewien okres czasu (znacznie dłuższy od okresu drgań $2\pi/\lambda$). Niemniej jednak usiłowanie przedstawienia wykresu pełzarki w postaci funkcji ciągłej (jak się to czyni) jest możliwe tylko w przypadku całkowitego wyeliminowania wpływu dynamiki pełzarki.

Można natomiast uważać wykres pełzarki za linię przechodzącą przez punkty A, A_1, A_2, \dots, A_n . Wydłużenie względne próbki w tych punktach można obliczyć na podstawie znajomości właściwości dynamicznych maszyny oraz czasu wiotczenia izotermicznego i prawdziwej granicy sprężystości dla danej temperatury. Wykazaliśmy jednak, że z przebiegu punktów A, A_1, \dots, A_n nie można wnioskować o wartości stałych reologicznych σ_E i Θ .

Należy podkreślić, że próba długotrwałego rozciągania nie ma charakteru izobarycznego; istotnie, gdybyśmy nie bacząc na wpływ dynamiki pełzarki uwzględnili wymagany warunek izobaryczności w równaniu (4), to musiałoby być

$$\frac{dU}{dt} = 0, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{FlA}{E\Theta} (\sigma - \sigma_E) = \text{const},$$

a zatem [na podstawie równania (4)]

$$Fl\sigma\dot{\epsilon} = \frac{Fl^3\varrho}{3} \ddot{\epsilon}\dot{\epsilon} + \frac{Fl^2\varrho g}{2} \dot{\epsilon} + \frac{Fl}{E\Theta} \sigma(\sigma - \sigma_E).$$

Prowadzi to do równania

$$\left(\sigma - \frac{l\varrho g}{2}\right) \dot{\epsilon} - \frac{l^2\varrho}{3} \ddot{\epsilon}\dot{\epsilon} = \frac{1}{E\Theta} \sigma(\sigma - \sigma_E),$$

a po pominięciu energii mechanicznej do równania

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E\Theta} (\sigma - \sigma_E) = \frac{1}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \sigma_E \right).$$

Oczywiście, równanie to nie odzwierciedla wykresów pełzania otrzymanych z pełzarek z przyczyn opisanych poprzednio. Gdybyśmy jednak skonstruowali pełzarkę, której dynamika nie miałaby żadnego wpływu na zjawisko pełzania, tj. byłoby naprawdę $\sigma = \text{const}$, to posługując się powyższą zależnością moglibyśmy wyciągnąć wnioski co do zmienności Θ i σ_E , zwłaszcza w tzw. drugim okresie pełzania (według H a n s o n a, [6], mającym charakter tzw. «pełzania nieustalonego»). Na podstawie przytoczonych powyżej wywodów należy jednak sądzić, że na etap ten ma wpływ dynamika maszyny. Natomiast etap ustalonego pełzania (okres trzeci według H a n s o n a) opisany jest bardzo dobrze zależnością (20), przedstawiającą prostą o współczynniku kierunkowym równym H . Świadczyłoby to o tym, że wartości Θ i σ_E ustala się na tym najdłuższym zresztą etapie pełzania. Fakt ten świadczyłby także o tym, że zmiany strukturalne, zachodzące w tym czasie w materiale, nie wpływają na Θ i σ_E , co prowadziłoby do dwóch alternatywnych wniosków: (1) albo zmiany strukturalne podczas trzeciego okresu pełzania nie są zmianami

fazowymi, (2) albo zmiany strukturalne (choćby były zmianami fazowymi) nie wpływają na stałe reologiczne Θ i σ_E .

Należałoby przy tym podkreślić, że tego rodzaju zmiany strukturalne jak przemieszczenia mechaniczne cząstek bez zmian fazowych nie mogą wpływać na skokową zmianę wielkości fizycznych materiału, który w takim przypadku należy uważać za jednofazowy (a więc quasi-jednorodny). Bądź co bądź wynik (20) jest na ogół zgodny z doświadczeniem dla próbek nie tworzących tzw. szyjki (przewężenia), a własności materiału pod względem pełzania podaje się w przypadkach technicznych (konstrukcja maszyn) zawsze za pomocą wielkości H .

Również w obliczeniach wytrzymałościowych (przy tzw. uproszczonym sposobie uwzględniania pełzania części maszyn) zwykle się posługujemy wielkością H .

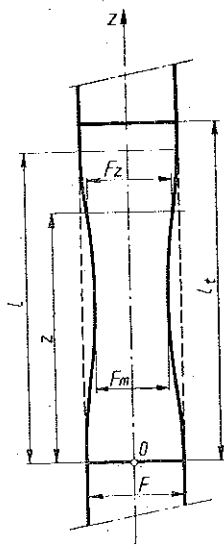
Rozpatrywaliśmy dotąd próbkę materiału, w którym odkształcenie tak objętościowe, jak i postaciowe powstaje tylko na skutek wydłużenia przy zachowaniu stałej powierzchni przekroju. Rzecz jasna, że zachowuje się w podobny sposób (w przybliżeniu) niewielka liczba materiałów; przy rozciąganiu większości materiałów powstaje w próbce przewężenie, czyli tzw. szyjka. Powstanie tej szyjki powoduje w końcowej fazie długotrwałej próby na pełzarce wzrost prędkości wydłużenia względnego $d\varepsilon/dt$. Faza ta odpowiada, stosownie do określenia H a n s o n a, [6], «czwartemu okresowi pełzania». Opisane zjawisko, tj. wzrost $d\varepsilon/dt$, nazywa S t a n f o r d, [1], «zagadkowym» stwierdzając, że nie jest ono wytłumaczalne na gruncie istniejących (fenomenologicznych) teorii pełzania⁹⁾. Nie trudno jednak zauważyć, że «czwarty okres pełzania» występuje nie zawsze, a tylko wtedy, gdy w próbce powstaje wyraźne przewężenie, tj. szyjka¹⁰⁾.

W pracy niniejszej nie mamy zamiaru badać przyczyn powstawania szyjki ani jej kształtu wywołanego obciążeniem i właściwościami badanego materiału. Aby uwzględnić wpływ szyjki, założymy po prostu cha-

⁹⁾ Zdaniem niektórych autorów (O r o w a n) na okres ten mają mieć jakoby decydujący wpływ zmiany strukturalne.

¹⁰⁾ Zjawisko powstawania szyjki jest charakterystyczne dla wszelkich prób wytrzymałościowych opartych na jednokierunkowym rozciąganiu próbki. Obserwuje się to więc także i podczas próby doraźnej (w przypadku niektórych materiałów). W tej sprawie zacytowany wyjątek z dzieła N á d a i a, [2]: «... the maximum ordinate of the ordinary stress-strain diagram, commonly known in the technical literature as the «ultimate strength» has merely, as L u d w i k emphasised a long time ago, the meaning, that at this point uniform extension of test piece ceases». Oczywiście, związane to jest z powstawaniem szyjki w próbce. Zbadaniem przyczyny powstawania szyjki zajmował się także O d i n g, [3].

akter zmienności kształtu próbki w czasie. Przyjmujemy, że przekrój próbki jest następującą funkcją miejsca i czasu (por. rys. 4):



Rys. 4

$$(22) \quad F_z(z, t) = \frac{1}{2} [F + F_m(t)] + \frac{1}{2} [F - F_m(t)] \cos \frac{2\pi z}{l_t}, \quad l_t = l(1 + \varepsilon).$$

Założymy (tak jak się to przyjmuje ogólnie w teorii plastyczności), że próbka doznaje wyłącznie odkształcenia postaciowego. A zatem

$$\int_0^{l_t} F_z(z, t) dz = \text{const} = Fl.$$

Z zależności powyższej można łatwo wyznaczyć funkcję $F_m(t)$, tj. zmienność w czasie najmniejszego przekroju szyjki, mianowicie

$$(23) \quad F_m(t) = F \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Jak widać, czas odpowiadający $\varepsilon = 1$ jest teoretycznym czasem trwania doświadczenia, gdyż wtedy $F_m = 0$. W istocie pęknięcie próbki zajdzie wcześniej przy $F_m(t) = F_m(t_k) > 0$. Naprężenia w przekroju próbki (przy założeniu równomiernego ich rozkładu, tj. przy pominięciu wpływu koncentracji naprężeń) wynoszą

$$\sigma_z(z, t) = \frac{R}{F_z} = \frac{\sigma(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi z}{l_t}},$$

przy czym wartość σ określona jest przez zależność (2).

Zatem

$$(24) \quad \sigma_z(z, t) = \frac{\left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) (1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi z}{l(1 + \varepsilon)}}.$$

Na podstawie (24) można wyznaczyć energię sprężystą próbki, a następnie pochodną względem czasu energii wewnętrznej. Mianowicie

$$U_E = \int_0^{l_t} F_z \frac{\sigma_z^2}{2E} dz = \frac{F}{2E} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right)^2 (1 + \varepsilon) \int_0^{l_t} \frac{dz}{1 + \varepsilon \cos \frac{2\pi z}{l_t}} = \frac{Fl}{2E} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right)^2 (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}.$$

Wynika stąd

$$(25) \quad \frac{dU}{dt} = \frac{Fl}{2E} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[-\frac{2Jl}{\eta^2 L^2 F} (1+\varepsilon) \ddot{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} \right]$$

Już uprzednio zauważyliśmy, że wpływ energii mechanicznej na zachowanie się próbki obciążonej jest dostrzegalny dopiero przy badaniu próbek materiałów o małej długości zerwania a także o małym stosunku E/ρ (np. gumy). Ponieważ rozważania niniejsze dotyczą przede wszystkim metali, więc i w tym przypadku pominiemy także energię mechaniczną.

Ponieważ moc sił przyłożonych do próbki wyraża się w tym przypadku tą samą formułą (7), więc rozpatrzeniu podlega jeszcze wartość dQ/dt . Dla $\sigma_z \leq \sigma_E$ jest oczywiście $Q = 0$, jednak nowa trudność tkwi w tym, że wartość σ_E nie jest osiągnięta jednocześnie we wszystkich przekrojach próbki. Najwcześniej, rzecz jasna, zostanie przekroczona prawdziwa granica sprężystości w najwęższym przekroju, tj. w szyjce¹¹⁾. Chwila ta, odpowiadająca wydłużeniu względnemu

$$\varepsilon = \frac{\sigma_E - \sigma}{\sigma_E + \sigma} \quad (\sigma_E > \sigma),$$

jest początkiem powstawania odkształceń trwałych początkowo tylko w szyjce od najwęższego miejsca, dla którego $z = l/2$, w obie strony aż do

$$z_E = \frac{l}{2\pi} \arccos \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\sigma}{\sigma_E} (1 + \varepsilon) - 1 \right] \right\}$$

w górę od środka szyjki i do symetrycznie położonego miejsca w dół od środka szyjki.

Dla tego okresu pochodna ciepła względem czasu wynosi

$$(26) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2A}{E\theta} \int_{l/2}^{z_E} F_z \sigma_z (\sigma_z - \sigma_F) dz.$$

Temu okresowi towarzyszy zatem wydzielanie się ciepła w okolicy szyjki, którą w związku z tym należy intensywniej chłodzić, jeśli zjawisko ma być izotermiczne.

¹¹⁾ Ten wniosek jak również i następne opiera się na założeniu równomiernego rozkładu naprężeń w każdym prostokątnym do osi przekroju próbki. Założenie to jest sprzeczne z rzeczywistością, toteż rozwiązania powyższe mogą dać tylko rezultat natury jakościowej, o co zresztą chodzi.

Okres ten kończy się w chwili, gdy $\sigma = \sigma_E$. Podczas dalszego okresu ($\sigma > \sigma_E$) pochodna ciepła dQ/dt wyraża się wzorem

$$(27) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{A}{E\Theta} \int_0^l F_z \sigma_z (\sigma_z - \sigma_E) dz.$$

Proste formuły (26) i (27) są wynikiem pominięcia koncentracji naprężeń na powierzchni próbki.

Charakterystycznym dla rozpatrywanego przypadku jest przede wszystkim okres ostatni. Rozpatrzmy ten okres niżej, wyznaczając wpierw całkę (27), mianowicie

$$(28) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{AFl(1+\varepsilon)}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \left[\left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \sigma_E \right].$$

Po podstawieniu wyrażen (7), (25) i (28) do równania (4) (przy pominięciu energii mechanicznej) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe pełzania izotermicznego (lecz nie izobarycznego) dla materiału skłonnego do tworzenia szybki:

$$\begin{aligned} Fl \dot{\varepsilon} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) &= \frac{Fl}{2E} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \times \\ &\times \left[-\frac{2Jl}{\eta^2 L^2 F} (1+\varepsilon) \ddot{\varepsilon} + \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] + \\ &+ \frac{Fl(1+\varepsilon)}{E\Theta} \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \left[\left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \sigma_E \right]. \end{aligned}$$

Po dokonaniu przekształceń równanie to ma postać następującą:

$$(29) \quad \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2E} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left[\frac{2Jl(1+\varepsilon)}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} - \left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] - \frac{1+\varepsilon}{E\Theta} \left[\left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \sigma_E \right] = 0.$$

Warunki początkowe dla tego równania wynikają z analizy dwóch pierwszych okresów tego przypadku.

Równanie to wypada rozwiązać (w sposób przybliżony, gdyż ściśle rozwiązanie ogólne nie jest znane) w przedziale do pierwszego maksimum ε względem t , które odpowiada punktowi A na rys. 3, a następnie do punktu B, po czym tok rozwiązywania zagadnienia pozostaje taki sam, jak w poprzednio omówionym prostszym przypadku. Należy podkreślić, że dla otrzymanego rozwiązania równania (29) linia stanów równowagi, względem której mogą się odbywać drgania, nie jest linią prostą, jak to

zaraz wykażemy. Zastąpimy równanie (29) równaniem przybliżonym, dla którego otrzymania założymy

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \approx 1-\varepsilon, \quad \varepsilon^2 \approx 0, \quad \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{1-\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultat przybliżenia jest następujący:

$$(30) \quad \ddot{\varepsilon} + \frac{\eta^2 L^2 E F}{J l} (1-2\varepsilon) \dot{\varepsilon} - \frac{\eta L^2 G}{J l} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \dot{\varepsilon} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{\Theta} \ddot{\varepsilon} - \frac{\eta L^2 G}{\Theta J l} (1+\varepsilon) + \frac{\eta^2 L^2 F \sigma_E}{\Theta J l} = 0.$$

Równanie to zastąpimy układem dynamicznym przyjmując

$$\ddot{\varepsilon} = x_1, \quad \dot{\varepsilon} = x_2, \quad \varepsilon = x_3.$$

Układ ten można przedstawić następująco:

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\Theta} - \frac{\eta^2 L^2 E F}{J l} \left(1 - \frac{G}{\eta E F}\right) x_2 + \frac{\eta L^2 G}{\Theta J l} x_3 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = x_1 + 0 x_2 + 0 x_3, \\ \dot{x}_3 = 0 x_1 + x_2 + 0 x_3, \end{cases}$$

przy czym $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(\ddot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}, \varepsilon)$ stanowi nieliniową część równania (30).

Jak wiadomo, [4], układ dynamiczny (31) jest stateczny w sensie L a p u n o w a, jeśli

$$\sum_i |\varphi_i| = |\varphi_1| \leq K \sum_i |x_i|,$$

gdzie K jest wielkością stałą, oraz jeśli pierwiastki charakterystycznego równania wiekowego mają części rzeczywiste ujemne.

Drugi warunek nie jest spełniony, co wykażemy wyznaczając pierwiastki λ równania charakterystycznego

$$(32) \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{\Theta} - \lambda & -\frac{\eta^2 L^2 E F}{J l} \left(1 - \frac{G}{\eta E F}\right) & \frac{\eta L^2 G}{\Theta J l} \\ 1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

będącego równaniem stopnia trzeciego

$$\lambda^3 + \frac{1}{\Theta} \lambda^2 + \frac{\eta^2 L^2 E F}{J l} \left(1 - \frac{G}{\eta E F}\right) \lambda - \frac{\eta L^2 G}{\Theta J l} = 0.$$

Równanie to sprowadzamy do postaci $y^3 + 2 = 3py$ przez podstawienie $\lambda = ky - 1/3\Theta$, przy czym

$$k^3 = \left(\frac{1}{3\Theta}\right)^3 - \frac{\eta^2 L^2 EF}{6Jl\Theta} \left(1 - \frac{G}{\eta EF}\right) - \frac{\eta L^2 G}{2\Theta Jl}.$$

W przybliżeniu (dostatecznie dokładnym dla metali)

$$k \approx -\sqrt[3]{\frac{\eta^2 L^2 EF}{6Jl\Theta}}.$$

Następnie mamy

$$3p = \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{3\Theta^2} - \frac{\eta^2 L^2 EF}{Jl} \left(1 - \frac{G}{\eta EF}\right) \right].$$

Dla metali można z dobrym przybliżeniem przyjąć

$$3p \approx -\frac{\eta^2 L^2 EF}{k^2 Jl} = -\sqrt[3]{\frac{36\Theta^2 \eta^2 L^2 EF}{Jl}} = -N.$$

Jak łatwo można się zorientować, jest

$$N \gg 1,$$

a zatem można napisać¹²⁾

$$y_1 = y' + iy'',$$

$$y_2 = y' - iy'',$$

$$y_3 = -2y',$$

gdzie

$$y' = \frac{1}{N} - \frac{4}{N^4} + \frac{48}{N^7} + \dots \approx \sqrt[3]{\frac{Jl}{36\Theta^2 \eta^2 L^2 EF}},$$

$$y'' = \sqrt{N} + \frac{3}{2N^2 \sqrt{N}} + \frac{105}{8N^5 \sqrt{N}} + \dots \approx \sqrt[6]{\frac{36\Theta^2 \eta^2 L^2 EF}{Jl}}.$$

Stąd

$$(33) \quad \begin{cases} \lambda_1 \approx -\frac{1}{2\Theta} - i\eta L \sqrt{\frac{EF}{Jl}}, \\ \lambda_2 \approx -\frac{1}{2\Theta} + i\eta L \sqrt{\frac{EF}{Jl}}, \\ \lambda_3 \approx 0. \end{cases}$$

¹²⁾ Por. twierdzenie podane na s. 43 w książce [5].

Jak widać, $\lambda_3 = 0$ powoduje niespełnienie drugiego warunku. Otrzyma-
 liśmy pierwiastki równania charakterystycznego takie same, jak w po-
 przednio omówionym prostszym przypadku, co świadczy o tym, że i tu
 będą odbywać się gasnące drgania układu względem pewnej linii stanów
 równowagi. Po pewnym więc dostatecznie długim czasie wartość przy-
 spieszenia $\ddot{\epsilon}$ będzie wielkością znacznie mniejszą od prędkości $\dot{\epsilon}$. Zau-
 ważmy, że w przypadku pręta bez szyjki wynik (11) można przedstawić
 następująco:

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon} = \frac{1}{FLA} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\epsilon}}$$

Jeśli rezultat ten zastosujemy dla próbki z materiału tworzącego szyjkę,
 to wynik należy uważać za pierwsze przybliżenie; wynik ten jest na-
 stępujący:

$$(34.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon} = \frac{1}{E\Theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ (1 + \epsilon) \left[\left(\frac{G}{\eta F} - \frac{Jl}{\eta^2 L^2 F} \ddot{\epsilon} \right) \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} - \sigma_E \right] \right\}$$

Ponieważ $\ddot{\epsilon}$ powinno być dostatecznie małe, więc w przybliżeniu

$$(34.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon} = \frac{1}{E\Theta} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[(1 + \epsilon) \left(\frac{G}{\eta F} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} - \sigma_E \right) \right]$$

Ze wzoru tego widać, iż ze wzrostem t oraz ϵ prędkość $\dot{\epsilon}$ nie dąży do
 wartości stałej, lecz rośnie razem z wydłużeniem ϵ . Dla teoretycznego
 końca próby ($\epsilon = 1$) oczywiście $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$. A zatem linia przechodząca
 przez odpowiednie punkty A, A_1, \dots, A_n na wykresie pełzarki musi zaginać
 się do góry.

Otrzymane wyniki prowadzą do poniższych wniosków.

(1) Dla powstawania odkształceń trwałych materiałów charaktery-
 styczną częścią wykresu pełzarki jest jej część prostoliniowa. Znajac
 współczynnik kierunkowy tej prostej można, po przeprowadzeniu dwóch
 doświadczeń przy tej samej temperaturze i przy różnych nominalnych
 obciążeniach, otrzymać wartości czasu wiotczenia izotermicznego i praw-
 dziwej granicy sprężystości dla danej temperatury. Sposób ten nie daje
 możliwości wyznaczenia zależności czasu wiotczenia izotermicznego od
 naprężeń. Natomiast obie poszukiwane wielkości, tj. $\sigma_E(T)$ i $\Theta(\sigma, T)$, można
 bezpośrednio wyznaczyć dla danej temperatury z próby wiotczenia izoter-
 micznego. Próba ta winna trwać tak długo, jak jedna próba długotrwałego
 rozciągania, a zatem wyniki można otrzymać w czasie dwukrotnie krót-
 szym niż na pełzarce.

(2) Części nieprostoliniowe wykresu pełzarki nie mogą służyć do wyznaczania charakterystyk reologicznych materiałów. Obliczanie z tych krzywych «lepkości», na podstawie której (stosując wzór Maxwella $\nu = E\theta$) wylicza się czas wiotczenia izotermicznego, prowadzi do wyników z gruntu fałszywych.

Literatura cytowana w tekście

- [1] E. G. Stanford, *The Creep of Metals and Alloys*, 1949, Temple Press Ltd., Londyn.
- [2] A. Náda i, *Plasticity*.
- [3] I. A. Odín g, *Dopuskajemyje napriáženja w maszynostrojenii i cikliczeskaja procznost' mietallów*, GNTIME, Moskwa 1947.
- [4] W. W. Niem yck i i W. W. Stie p a n o w, *Kaczezwieniwnaja teorja diffierencjalnych urawnienij*, OGIZ, Moskwa 1947.
- [5] E. Jahnke i F. Emde, *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, tłum. ros. 1949.
- [6] D. Hanson, *The Creep of Metals*, Trans. AIMME, t. 133, 1939, s. 15.

Резюме

О ПОЛЗУЧЕСТИ И МАШИНАХ ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

В работе излагается теория испытания на длительную прочность материалов. Рассматриваются два случая:

- (1) когда образец сохраняет постоянное сечение,
- (2) когда в образце образуется шейка.

Предложена теория ползучести основанная на релаксации, так как на это явление мало влияет динамика испытательной машины.

Доказывается, что на истинную кривую ползучести налагаются затухающие колебания механизма машины. Вследствие зазоров в подшипниках машины эти колебания сводятся к ряду последовательных ударов большой частоты. Вследствие этого криволинейная часть ползучести ни в коем случае не может быть основой реологических расчетов. Реологические характеристики зависят только лишь от прямолинейной части диаграммы. Некоторые кривые ползучести проявляют рост скорости деформации во время испытания, что объясняется образованием шейки в образце.

S u m m a r y

ON CREEP AND LONG-TIME TENSILE TEST MACHINE

This paper contains a theory of long-time tensile test of materials on a vertical machine. The following two cases of materials were investigated:

- (1) a test piece preserving more or less constant area of cross-section,

(2) a very ductile material with a considerable reduction in cross-sectional area before fracture.

The presented theory of creep is based on relaxation, as this effect is much less influenced by the dynamics of the testing machine.

It has been shown that the true creep curve is distorted by the vibrations of testing machinery; because of the clearances in machine bearings these vibrations cause a series of blows having a very large frequency. This is the reason why the nonlinear part of the creep curve cannot be used in the computation of rheological characteristics of materials. For this purpose, only the linear stage of creep may be applied.

Some materials show the effect of growth of creep rate before fracture of the test piece occurs, the reason for this being in the reduction of cross-sectional area of the test piece.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1954 r.