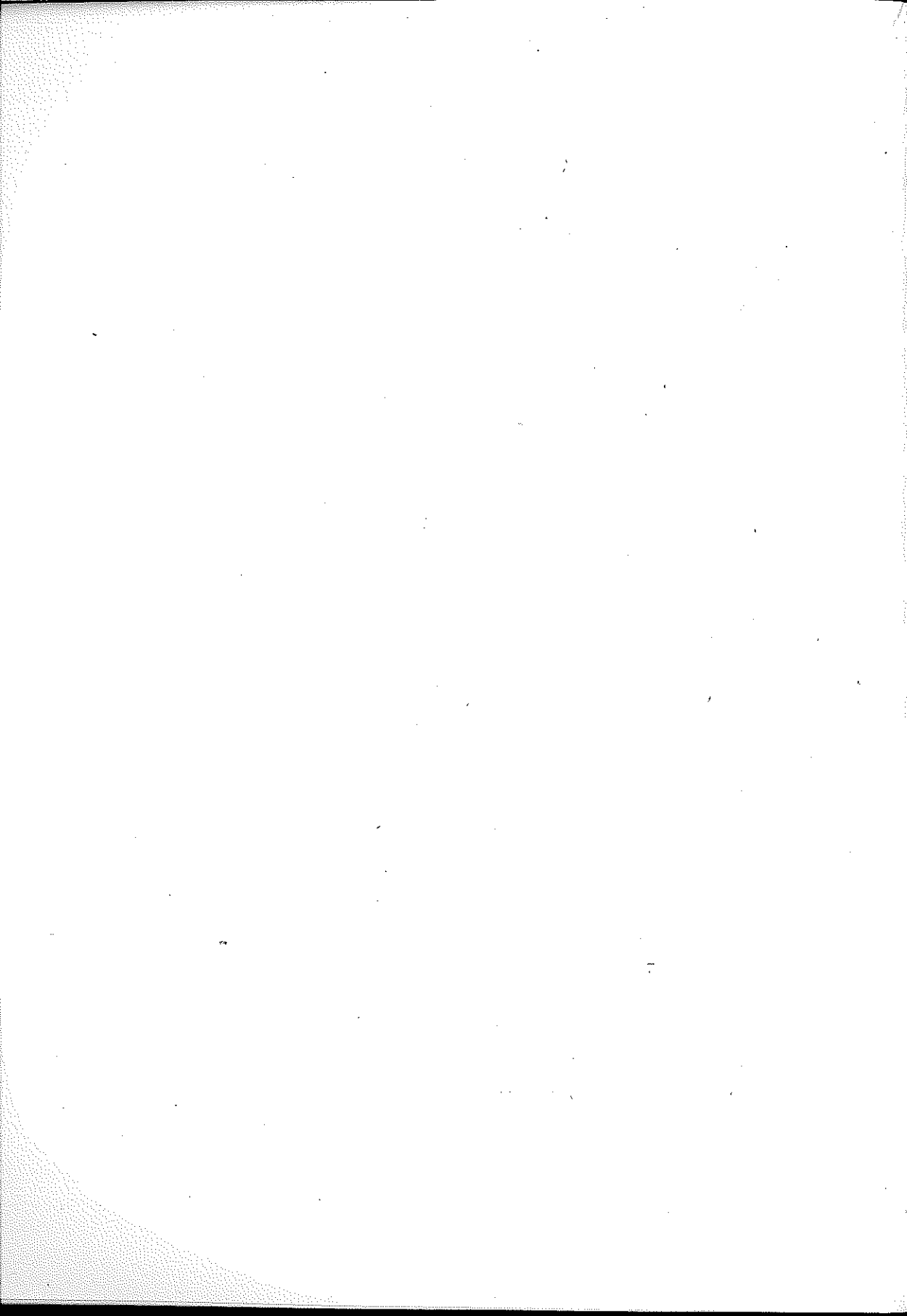


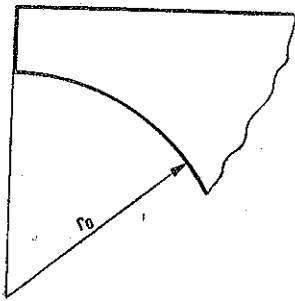
KAZIMIERZ WYSIATYCKI

ROZWIĄZANIE PEWNEGO TYPU TARCZY NIEOGRANICZONEJ

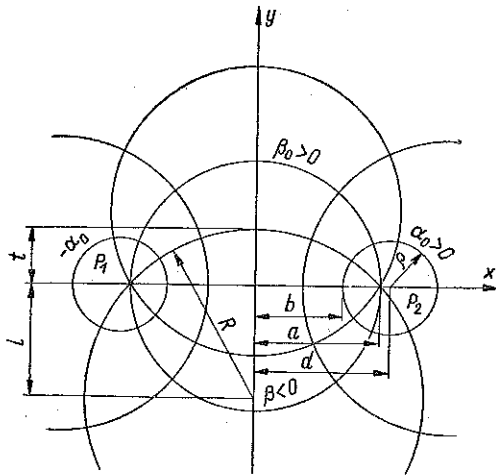
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXXIV



1. W zagadnieniach inżynierskich spotyka się konstrukcje tarczowe w kształcie wspornika, którego boki tworzy prosta i koło (rys. 1). Zagadnienia teorii sprężystości dla tego rodzaju tarcz można łatwo rozwiązać stosując współrzędne dwubiegunowe, przy czym niektóre rozwiązania udaje się przedstawić w postaci znanych funkcji.



Rys. 1



Rys. 2

Ortogonalne współrzędne dwubiegunowe (rys. 2) otrzymamy przez odwzorowanie wiernokątne, [1],

$$(1.1) \quad \xi = a + i\beta = \ln \frac{a+z}{a-z}, \quad z = x + iy.$$

Zależności geometryczne można podać wzorami

$$(1.2) \quad \begin{cases} \varrho = \frac{a}{|\sinh \alpha_0|}, & d = a |\operatorname{ctgh} \alpha_0|, & b = a \left| \operatorname{tgh} \frac{\alpha_0}{2} \right|, \\ R = \frac{a}{|\sin \beta_0|}, & l = a |\operatorname{ctg} \beta_0|, & t = a \left| \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right|, \\ \frac{x}{a} = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha + \cos \beta}, & \frac{y}{a} = \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha + \cos \beta}. \end{cases}$$

Szukać będziemy iloczynu gF , gdzie F jest funkcją Airy'ego a funkcja

$$(1.3) \quad g = \frac{\cosh \alpha + \cos \beta}{a}$$

jest miarą odwzorowania. W tym przypadku operator

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) F$$

przyjmie bardzo prostą postać we współrzędnych dwubiegunowych:

$$(1.4) \quad \Delta \Delta F = g^3 \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) g F.$$

Równanie to łatwo rozwiążemy przez rozdzielenie zmiennych. Podstawimy szereg

$$(1.5) \quad gF = \sum_0^{\infty} [f_n(\alpha) \cos n\beta + f_n(\alpha) \sin n\beta]$$

do równania (1.4), otrzymamy następujące wyrażenia na funkcje $f_n(\alpha)$:

$$(1.6) \quad \begin{cases} f_0(\alpha) = A_0 \cosh \alpha + B_0 \alpha \cosh \alpha + C_0 \sinh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha, \\ f_1(\alpha) = A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha + D_1 \alpha, \\ f_n(\alpha) = A_n \cosh(n+1)\alpha + B_n \cosh(n-1)\alpha + \\ \quad + C_n \sinh(n+1)\alpha + D_n \sinh(n-1)\alpha. \end{cases}$$

Znając funkcję Airy'ego łatwo znajdziemy naprężenia za pomocą wzorów

$$(1.7) \quad \begin{cases} a\sigma_\alpha = \left[(\cosh \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \alpha \right] g F, \\ a\sigma_\beta = \left[(\cosh \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \sinh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right] g F, \\ a\tau_{\alpha\beta} = -(\cosh \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2 g F}{\partial \alpha \partial \beta}. \end{cases}$$

Najłatwiej korzystać z warunków brzegowych, gdy dana jest funkcją F oraz jej pochodna normalna na konturze tarczy. Wartości te możemy podać znając obciążenia zewnętrzne p_x i p_y , [2]. Równoważąc element brzegowy (rys. 3) otrzymamy

$$p_x ds = \sigma_x dy - \tau_{xy} dx, \quad p_y ds = \tau_{xy} dy - \sigma_y dx$$

lub też wyrażając naprężenia przez funkcję F znajdziemy

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = p_x, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = -p_y. \end{cases}$$

Całkując obie funkcje wzdłuż konturu s , poczynając od dowolnego punktu s_0 , mamy

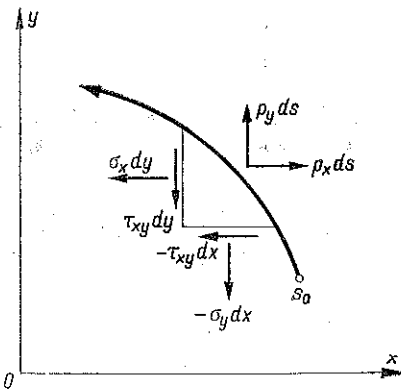
$$(1.9) \quad \begin{cases} - \int_{s_0}^s p_y ds = \frac{\partial F}{\partial x} = -Q(s), \\ \int_{s_0}^s p_x ds = \frac{\partial F}{\partial y} = P(s). \end{cases}$$

Wyrażenie na pochodną w kierunku prostopadłym do konturu przyjmie postać

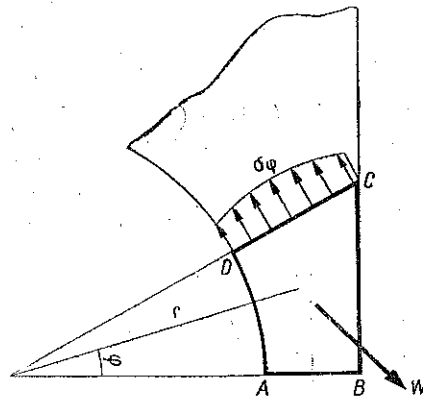
$$(1.10) \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = -[Q \sin(n, x) + P \cos(n, x)].$$

Całkując funkcję (1.9) otrzymamy

$$(1.11) \quad F = \int_{s_0}^s dF = \int_{s_0}^s \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \int_{s_0}^s -Q(s) dx + P(s) dy.$$



Rys. 3.



Rys. 4

Ze wzorów powyższych wynika, że jeżeli punkt s_0 obierzemy na nieobciążonym boku tarczy, to wzdłuż tego boku $F = \partial F / \partial n = 0$. W tym przypadku podamy prostą interpretację warunków brzegowych posługując się współrzędnymi biegunowymi (rys. 4). Założmy mianowicie, że kontur AD jest wolnym od obciążeń ($F = \partial F / \partial n = 0$ dla boku AD). Od-

cinając część tarczy wzdłuż promienia DC wypadkowa sił zewnętrznych W musi być zrównoważona przez naprężenia σ_φ oraz $\tau_{r\varphi}$ działające w przekroju DC. Łatwo zauważymy, że rzut W_r wypadkowej W na kierunek DC jest równy pochodnej funkcji F w kierunku prostopadłym do DC, a rzut W_φ wypadkowej W na kierunek prostopadły do DC jest równy pochodnej funkcji F w kierunku DC:

$$(1.12) \quad W_r = \int_{r_D}^{r_C} \tau_{r\varphi} dr = - \int_{r_D}^{r_C} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) dr = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{r_C},$$

$$(1.13) \quad W_\varphi = \int_{r_D}^{r_C} \sigma_\varphi dr = \int_{r_D}^{r_C} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)_{r_C}.$$

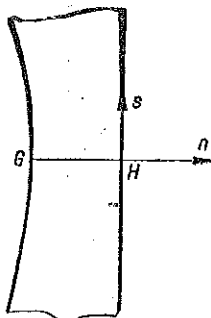
Natomiast moment wypadkowej W względem punktu C jest równy funkcji Airy'ego w tym punkcie:

$$(1.14) \quad M_C = \int_{r_D}^{r_C} \sigma_\varphi (r_C - r) dr = r_C \int_{r_D}^{r_C} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr - \int_{r_D}^{r_C} r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr = \\ = r_C \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r_D} - r \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r_D} + \int_{r_D}^{r_C} dF = F_C.$$

Znając pochodne w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach możemy łatwo znaleźć pochodną w dowolnym kierunku n :

$$(1.15) \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \sin \varphi,$$

a wielkości (1.12) - (1.15) możemy interpretować następująco: jeżeli jeden bok tarczy jest nieobciążony, to funkcja Airy'ego w dowolnym punkcie C boku przeciwległego przybiera wartość równą momentowi sił zewnętrznych względem punktu C ,



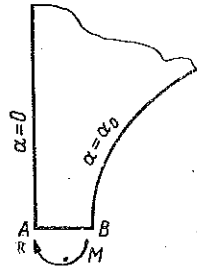
Rys. 5

pochodna normalna jest rzutem sił zewnętrznych na kierunek styczny do konturu, a pochodna styczna jest równa rzutowi sił zewnętrznych na normalną do konturu. Należy oczywiście rozważyć siły zewnętrzne działające tylko z jednej strony punktu C . Jednocześnie stwierdzamy fakt następujący (rys. 5): jeżeli funkcja Airy'ego przybiera w punkcie G wartości $F = \partial F / \partial n = 0$, a w punkcie H wartości $F_H, (\partial F / \partial n)_H, (\partial F / \partial s)_H$, to bez względu na kształt rozkładu naprężeń wzdłuż odcinka GH rzut wypadkowej tych naprężeń na kierunek s jest równy $(\partial F / \partial n)_H$, rzut wypadkowej na kierunek n jest równy $(\partial F / \partial s)_H$, a moment wypadkowej względem punktu

tu H jest równy F_H . Na rysunkach oznaczona jest tylko ta wypadkowa. W dalszym ciągu rozważymy kilka przykładów.

2. Załóżmy, że tarcza o kształcie przedstawionym na rys. 6 jest obciążona wzdłuż odcinka AB siłami, których wypadkowa jest równa momentowi M . Wówczas warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{dla } \alpha = 0 & F = M, & \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 & F = 0, & \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \end{cases}$$



Rys. 6

Warunki te określimy we współrzędnych dwubiegunowych pamiętając przy tym, że szukać będziemy iloczynu gF :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{dla } \alpha = 0 & gF = \frac{1 + \cos \beta}{a} M, & \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial \alpha} F + \frac{\partial F}{\partial \alpha} g = 0, \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 & gF = 0, & \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Korzystając z rozwiązania (1.6) przyjmijmy następującą postać funkcji gF :

$$(2.3) \quad \begin{cases} gF = A_0 \cosh \alpha + B_0 \alpha \cosh \alpha + C_0 \sinh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha + \\ \quad + (A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha + D_1 \alpha) \cos \beta, \\ \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = A_0 \sinh \alpha + B_0 (\cosh \alpha + \alpha \sinh \alpha) + \\ \quad + C_0 \cosh \alpha + D_0 (\sinh \alpha + \alpha \cosh \alpha) + \\ \quad + (2A_1 \sinh 2\alpha + 2C_1 \cosh 2\alpha + D_1) \cos \beta. \end{cases}$$

Wykorzystując warunki (2.2) otrzymamy następujące stałe:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Delta_0 = \sinh^2 \alpha_0 - \alpha_0^2, & \Delta_1 = 4 \sinh \alpha_0 (\alpha_0 \cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0), \\ A_0 = \frac{M}{a}, & B_0 = -C_0 = \frac{M}{a \Delta_0} \left(\frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0 + \alpha_0 \right), \\ D_0 = -\frac{M}{a \Delta_0} \sinh^2 \alpha_0, & A_1 = -2 \frac{M}{a \Delta_1} \sinh^2 \alpha_0, \\ B_1 = 2 \frac{M}{a \Delta_1} (\alpha_0 \sinh 2\alpha_0 - \sinh^2 \alpha_0), \\ C_1 = -\frac{D_1}{2} = \frac{M}{a \Delta_1} \sinh 2\alpha_0. \end{cases}$$

W ten sposób funkcja naprężeń posiada postać

$$(2.5) \quad gF = \frac{M}{a} \left\{ \frac{1}{A_0} \left[(\sinh^2 \alpha_0 - \alpha_0^2) \cosh \alpha + \left(\frac{1}{2} \sinh \alpha_0 + \alpha_0 \right) a \cosh \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{2} \sinh \alpha_0 + \alpha_0 \right) \sinh \alpha - \sinh^2 \alpha_0 \alpha \sinh \alpha \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_1} [-2 \sinh^2 \alpha_0 \cosh 2\alpha + 2 \alpha_0 \sinh 2\alpha_0 - 2 \sinh^2 \alpha_0 + \right. \\ \left. + \sinh 2\alpha_0 \sinh 2\alpha - 2 \sinh 2\alpha_0 \alpha] \cos \beta \right\}.$$

Naprężenia możemy przedstawić za pomocą następujących wzorów:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a\sigma_\alpha = \frac{M}{a} + \left[B_0 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) - D_0 \sinh^2 \alpha \right] - \\ \quad - \left[A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + D_1 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) \right] - \\ \quad - (2 A_1 \sinh 2\alpha - 2 D_1 \sinh^2 \alpha) \sinh \alpha \cos \beta, \\ a\sigma_\beta = \frac{M}{a} + \left[B_0 \left(\alpha + \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) + D_0 (1 + \cosh^2 \alpha) - \right. \\ \quad - A_1 \cosh 2\alpha - B_1 - D_1 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) \left. \right] + [2 B_0 \sinh \alpha + \\ \quad + 2 D_0 \cosh \alpha + 4 A_1 \cosh^3 \alpha - 2 D_1 \sinh \alpha (1 + \cosh^2 \alpha)] \cos \beta + \\ \quad + (4 A_1 \cosh 2\alpha - 2 D_1 \sinh 2\alpha) \cos^2 \beta, \\ a\tau_{\alpha\beta} = (2 A_1 \sinh 2\alpha - 2 D_1 \sinh^2 \alpha) \cosh \alpha \sin \beta + \\ \quad + (2 A_1 \sinh 2\alpha - 2 D_1 \sinh^2 \alpha) \cos \beta \sin \beta. \end{array} \right.$$

Do wyrażeń (2.6) można wprowadzić wprost stałe (2.4), jednakże przy opracowaniu liczbowym wygodniej jest korzystać ze wzoru (2.6). Dla przykładu podamy wzór na σ_α :

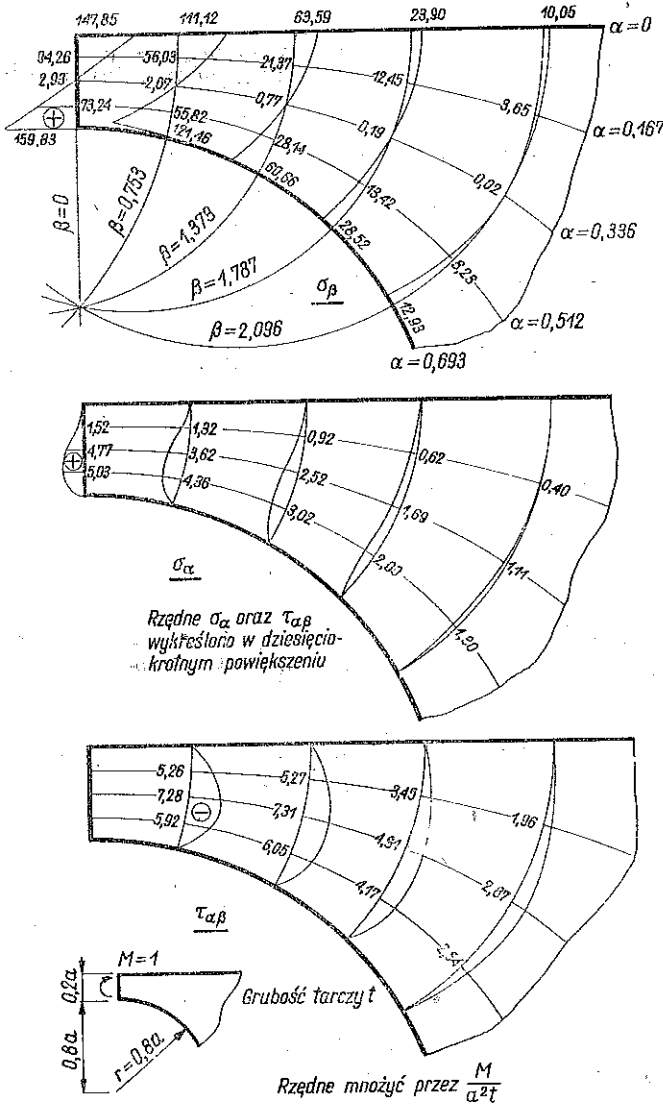
$$\frac{a^2 \sigma_\alpha}{M} = 1 + \frac{1}{A_0} \left[\left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0 \right) \left(\alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) + \sinh^2 \alpha_0 \sinh^2 \alpha \right] - \\ - \frac{1}{A_1} [-2 \sinh^2 \alpha_0 \cosh 2\alpha + 2 (\alpha_0 \sinh 2\alpha_0 - \sinh^2 \alpha_0) + \\ + \sinh 2\alpha_0 \sinh 2\alpha - 2 \alpha \sinh 2\alpha_0] \cos \beta + \\ + \frac{1}{A_1} [-4 \sinh^2 \alpha_0 \sinh 2\alpha + 2 \sinh 2\alpha_0 \cosh 2\alpha - 2 \sinh 2\alpha_0] \sinh \alpha \cos \beta.$$

Wykres naprężeń podajemy na rys. 7.

3. Niech na tarczę działa obciążenie równomiernie rozłożone wzdłuż prostej $\alpha = 0$ (rys. 8). Warunki brzegowe są następujące:

$$\text{dla } \alpha = 0 \quad F = \frac{\rho y^2}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0,$$

$$\text{dla } \alpha = \alpha_0 \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0.$$



Rys. 7

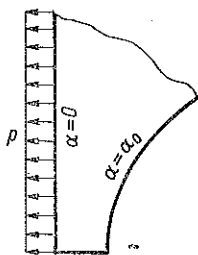
We współrzędnych dwubiegunowych przyjmują one postać:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = a \frac{\sin \beta}{\cosh a + \cos \beta}, \\ [gF]_{a=0} = \frac{1 + \cos \beta}{a} a^2 \frac{\sin^2 \beta}{(1 + \cos \beta)^2} \frac{p}{2} = \frac{pa}{2} (1 - \cos \beta); \\ \text{dla } a = 0 \quad gF = \frac{pa}{2} (1 - \cos \beta), \quad \frac{\partial gF}{\partial a} = 0; \\ \text{dla } a = a_0 \quad gF = \frac{\partial gF}{\partial a} = 0. \end{array} \right.$$

Również i w tym przypadku jako iloczyn gF przyjmiemy funkcję (2.3). Korzystając z warunków (3.1) otrzymamy stałe całkowania:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 = \sinh^2 a_0 - a_0^2, \quad \Delta_1 = 4 \sinh a_0 (a_0 \cosh a_0 - \sinh a_0), \\ A_0 = \frac{pa}{2}, \quad B_0 = -C_0 = \frac{pa}{2 \Delta_0} \left(a_0 + \frac{1}{2} \sinh 2 a_0 \right), \\ D_0 = -\frac{pa}{2 \Delta_0} \sinh^2 a_0, \quad A_1 = 2 \frac{pa}{2 \Delta_1} \sinh^2 a_0, \\ B_1 = -2 \frac{pa}{2 \Delta_1} (a_0 \sinh 2 a_0 - \sinh^2 a_0), \\ C_1 = -\frac{D_1}{2} = -\frac{pa}{2 \Delta_1} \sinh 2 a_0. \end{array} \right.$$

Analizując kształt funkcji gF oraz wzory (3.2) stwierdzamy, że stałe całkowania są identyczne ze stałymi (2.4), jedynie zamiast M/a wstawiamy $pa/2$, a zamiast Δ_1 należy wstawić $-\Delta_1$. Wzory na naprężenia (2.6) są słuszne i dla przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego. Wykresy naprężeń podajemy na rys. 9.



Rys. 8

4. Wzdłuż odcinka AB działają naprężenia, których wypadkowa tworzy siłę P działającą wzdłuż linii $a = 0$ (rys. 10). W tym przypadku warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{l} \text{dla } a = 0 \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = -P = \text{const}, \\ \text{dla } a = a_0 \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0. \end{array}$$

We współrzędnych dwubiegunowych warunki brzegowe przyjmą postać podobną, co można wykazać w prosty sposób. Obliczymy element długości ds wzdłuż koła $\beta = \text{const}$:

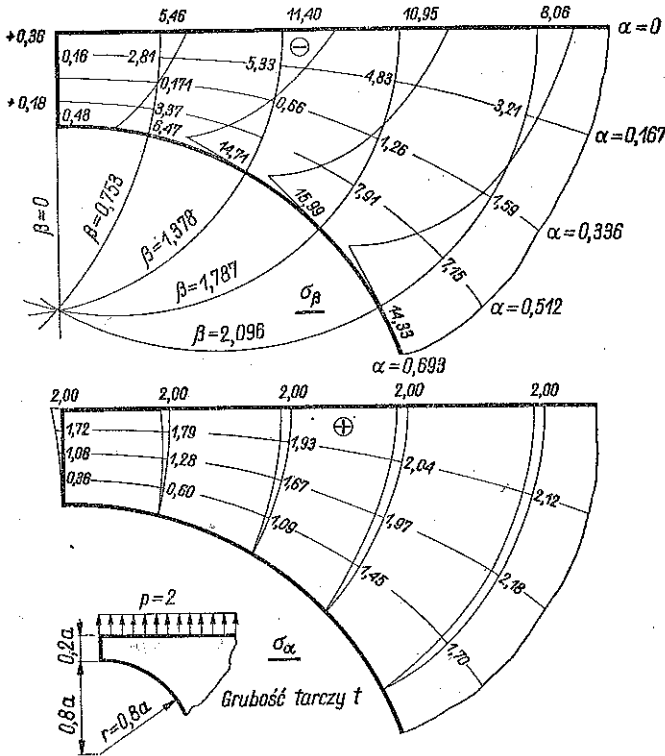
$$[ds]_{\beta=\text{const}} = \frac{1}{g} da.$$

Ponieważ w naszym przypadku

$$\partial F = \frac{1}{g} (\partial g F - F \partial g) = \frac{1}{g} \partial g F,$$

to otrzymamy zależność

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial g F}{\partial s} = -\frac{1}{g} g \frac{\partial g F}{\partial s} = -P.$$



$\tau_{\alpha\beta}$ jak w tarczy obciążonej momentem -
-tylko znak przeciwny

Rzędne mnożyć przez $\frac{p}{2t}$

Rys. 9

W ten sposób mamy

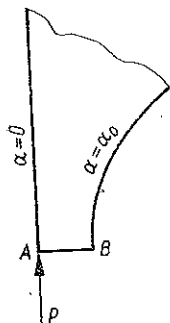
$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{dla } \alpha = 0 & F = 0, & \frac{\partial g F}{\partial \alpha} = P = \text{const}; \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 & F = \frac{\partial g F}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Korzystając z (1.6) przyjmiemy

$$(4.2) \quad \begin{cases} gF = A_0 \cosh \alpha + B_0 \alpha \cosh \alpha + C_0 \sinh \alpha + D_0 \alpha \sinh \alpha, \\ \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = A_0 \sinh \alpha + B_0 (\cosh \alpha + \alpha \sinh \alpha) + C_0 \cosh \alpha + D_0 (\sinh \alpha + \alpha \cosh \alpha). \end{cases}$$

Za pomocą (4.1) wyznaczymy stałe całkowania:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \Delta_0 = \sinh^2 \alpha_0 - \alpha_0^2, & B_0 = \frac{P}{\Delta_0} \sinh^2 \alpha_0, \\ C_0 = -\frac{P}{\Delta_0} \alpha_0^2, & D_0 = \frac{P}{\Delta_0} \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0 \right). \end{cases}$$



Rys. 10

Naprężenia określają wzory:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \alpha \sigma_\alpha = B_0 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) - D_0 \sinh^2 \alpha, \\ \alpha \sigma_\beta = B_0 \left(\alpha + \frac{1}{2} \sinh 2\alpha \right) + D_0 (2 \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha) + 2 (B_0 \sinh \alpha + D_0 \cosh \alpha) \cos \beta, \\ \tau \alpha_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Wykresy naprężeń przedstawiamy na rys. 11.

5. Wzdłuż odcinka AB działają naprężenia, których wypadkowa tworzy siłę P , działającą w kierunku AB (rys. 12). Warunki brzegowe we współrzędnych prostokątnych

$$\text{dla } \alpha = 0 \quad F = Py, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0,$$

$$\text{dla } \alpha = \alpha_0 \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

we współrzędnych dwubiegunowych przybierają następującą postać:

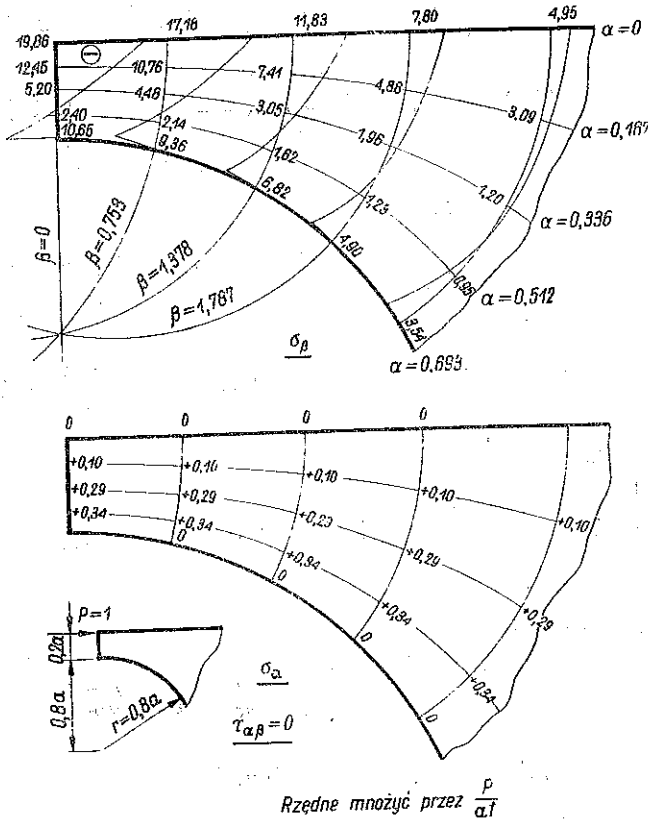
$$(5.1) \quad \begin{cases} y = a \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha + \cos \beta} & F = Pa \frac{\sin \beta}{\cosh \alpha + \cos \beta}, \\ \text{dla } \alpha = 0 & gF = P \sin \beta, \quad \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = 0, \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 & gF = \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Korzystając z (1.6) przyjmiemy następującą funkcję naprężeń:

$$(5.2) \quad \begin{cases} gF = (A_1 \cosh 2\alpha + B_1 + C_1 \sinh 2\alpha + D_1 \alpha) \sin \beta, \\ \frac{\partial gF}{\partial \alpha} = (2A_1 \sinh 2\alpha + 2C_1 \cosh 2\alpha + D_1) \sin \beta. \end{cases}$$

Za pomocą wzorów (5.1) wyznaczymy stałe całkowania:

$$(5.3) \quad \begin{cases} A_1 = 4 \sinh \alpha_0 (\alpha_0 \cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0), & A_1 = -2 \frac{P}{\Delta_1} \sinh^2 \alpha_0, \\ B_1 = 2 \frac{P}{\Delta_1} (\alpha_0 \sinh 2 \alpha_0 - \sinh^2 \alpha_0), & C_1 = -\frac{D_1}{2} = \frac{P}{\Delta_1} \sinh 2 \alpha_0. \end{cases}$$



Rys. 11

Wzory na naprężenia są następujące

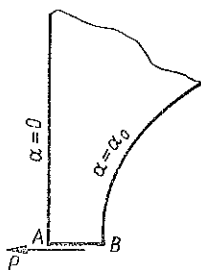
$$(5.4) \quad \begin{cases} a \sigma_\alpha = -(2 A_1 \sinh 2 \alpha - 2 D_1 \sinh^2 \alpha) \sinh \alpha \sin \beta, \\ a \sigma_\beta = (4 A_1 \cosh 2 \alpha + 4 C_1 \sinh 2 \alpha) \cosh \alpha \sin \beta - \\ \quad - (2 A_1 \sinh 2 \alpha - 2 D_1 \sinh^2 \alpha) \sinh \alpha \sin \beta + \\ \quad + (2 A_1 \cosh 2 \alpha + 2 C_1 \sinh 2 \alpha) \sin 2 \beta, \\ a \tau_{\alpha\beta} = -2 (A_1 \sinh 2 \alpha - D_1 \sinh^2 \alpha) (\cosh \alpha + \cos \beta) \cos \beta. \end{cases}$$

Wykresy naprężeń podajemy na rys. 13.

6. Rozważmy tarczę obciążoną naprężeniami normalnymi równomiernie rozłożonymi wzdłuż boku $a = a_0$ (rys. 14). Po przyjęciu funkcji Airy'ego w postaci

$$(6.1) \quad gF = A_0 \cosh a + B_0 a \cosh a + C_0 \sinh a + D_0 a \sinh a,$$

obliczymy naprężenia:



Rys. 12

$$(6.2) \quad \begin{cases} a\sigma_\alpha = B_0 \left(a - \frac{1}{2} \sinh 2a \right) - D_0 \sinh^2 a, \\ a\sigma_\beta = B_0 \left(a + \frac{1}{2} \sinh 2a \right) + D_0 (1 + \cosh^2 a) + \\ \quad + 2(B_0 \sinh a + D_0 \cosh a) \cos \beta, \\ a\tau_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Dla $\alpha = 0$ naprężenia σ_α są równe zero niezależnie od wyboru stałych B_0 i D_0 i dlatego jedną z nich możemy przyjąć dowolnie.

(a) Przyjmijmy, że $B_0 = 0$. Wówczas $D_0 = -\frac{pa}{\sinh^2 a_0}$ i naprężenia mają postać

$$(6.3) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{p}{\sinh^2 a_0} \sinh^2 a, \\ \sigma_\beta = -\frac{p}{\sinh^2 a_0} (1 + \cosh^2 a + 2 \cosh a \cos \beta), \\ \tau_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Jak widać z (6.1) i (6.2) naprężenia nie zależą od stałych A_0 i C_0 ; wielkości te wpływają tylko na kształt funkcji Airy'ego. Przyjawszy $A_0 = C_0 = 0$ otrzymamy

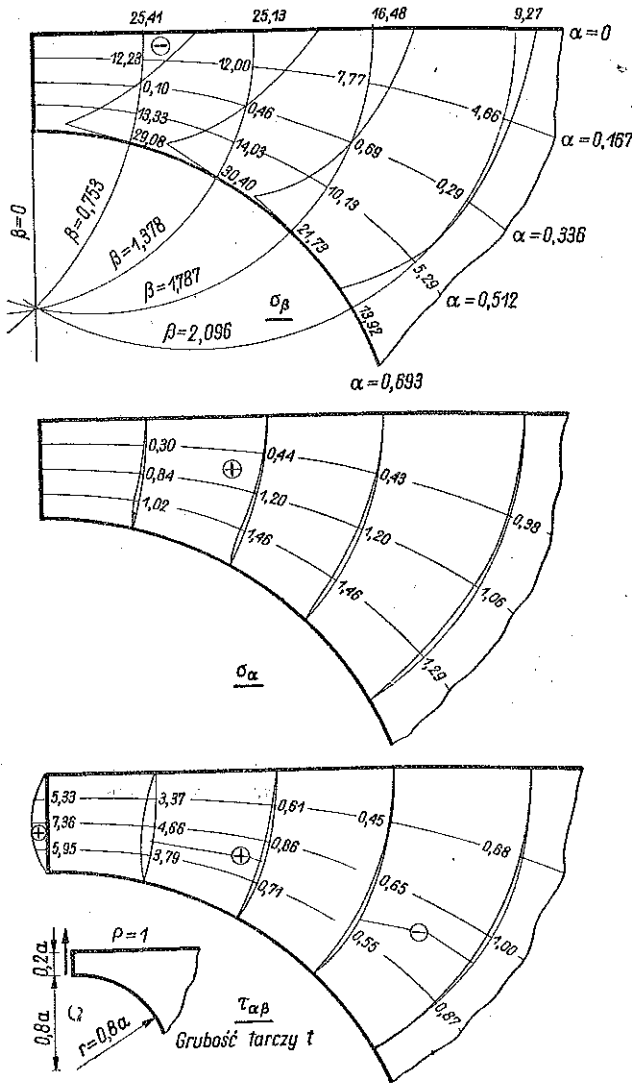
$$(6.4) \quad \begin{cases} gF = -\frac{pa}{\sinh^2 a_0} a \sinh a, \\ \frac{\partial gF}{\partial a} = -\frac{pa}{\sinh^2 a_0} (\sinh a + a \cosh a), \\ gF = \frac{\partial gF}{\partial a} = 0 \quad \text{dla } a = 0. \end{cases}$$

Przez przyjęcie $B_0 = 0$ otrzymaliśmy wprawdzie $\sigma_\alpha = p = \text{const}$ wzdłuż $a = a_0$, jednak na brzegu tarczy $\beta = 0$ pozostały naprężenia normalne. Wypadkowa W tych naprężeń jest równa pochodnej normalnej w punkcie $a = a_0, \beta = 0$:

$$(6.5) \quad W_{\alpha,0} = \frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{pa}{\sinh^2 a_0} (a_0 + \sinh a_0).$$

Moment wypadkowej W względem punktu $(\alpha_0, 0)$ jest równy wartości funkcji Airy'ego w tym punkcie:

$$(6.6) \quad M_{\alpha_0, 0} = F_{\alpha_0, 0} = -pa^2 \frac{\alpha_0}{\sinh \alpha_0 (1 + \cosh \alpha_0)}$$



Rzędne mnożyć przez $\frac{p}{a^2}$

Rys. 13

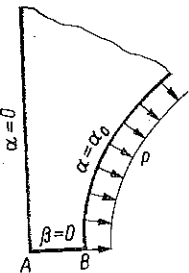
natomiast ramię momentu wynosi

$$(6.7) \quad r = \frac{F}{\frac{\partial F}{\partial n}} = a \frac{\alpha_0 \sinh \alpha_0}{(1 + \cosh \alpha_0)(\alpha_0 + \sinh \alpha_0)}$$

Nie trudno uogólnić wzory (1.13) i (1.14) na przypadek, gdy w obu punktach A i B (rys. 14) mamy dane $F_A, F_B, (\partial F/\partial n)_A$ i $(\partial F/\partial n)_B$. Wtedy rzut W wypadkowej naprężeń wzdłuż odcinka $AB = r_{AB}$ na kierunku prostopadły do r_{AB} jest równy

$$(6.8) \quad W = \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_A + \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_B,$$

a momenty wypadkowej względem punktów A i B przyjmą wartość



$$(6.9) \quad \begin{cases} M_A = r_{AB} \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_B + F_A - F_B, \\ M_B = r_{AB} \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_A + F_B - F_A. \end{cases}$$

Za pomocą tych zależności możemy napisać wyrażenie na moment względem punktu $\alpha = 0; \beta = 0$:

$$(6.10) \quad M_{0,0} = - \frac{pa^2}{1 + \cosh a_0}.$$

Rys. 14

Aby usunąć zbędne naprężenia, wystarczy do rozwiązania powyższego dodać odpowiednie rozwiązanie przedstawione w punkcie 2 lub 4. Wykresy naprężeń są przedstawione na rys. 15.

(b) W razie przyjęcia $D = 0$ otrzymamy następujące zależności:

$$(6.11) \quad \begin{cases} B_0 = \frac{pa}{a_0 - \frac{1}{2} \sinh 2 a_0}, \\ \sigma_\alpha = \frac{p}{a_0 - \frac{1}{2} \sinh 2 a_0} \left(a - \frac{1}{2} \sinh 2 a \right), \\ \sigma_\beta = \frac{p}{a_0 - \frac{1}{2} \sinh 2 a_0} \left(a + \frac{1}{2} \sinh 2 a + 2 \sinh a \cos \beta \right), \\ \tau_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

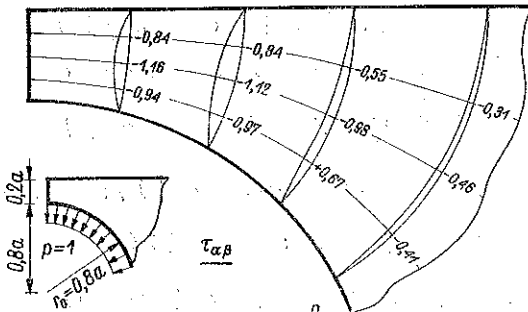
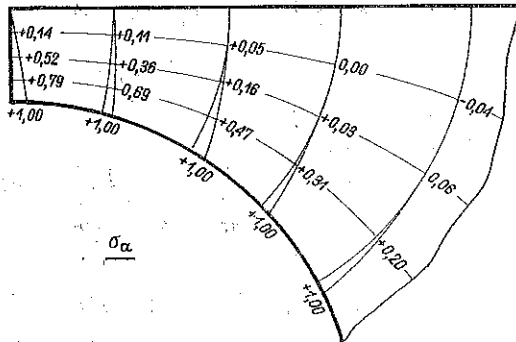
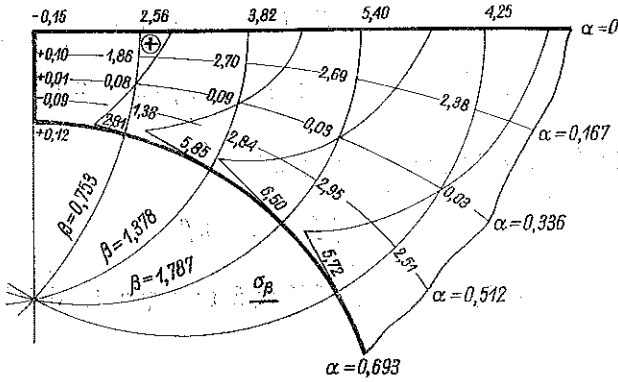
W tym przypadku naprężenia normalne wzdłuż boku $\beta = 0$ tworzą wypadkową o wielkości

$$W = pa \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha_0}{2}}{a_0 - \frac{1}{2} \sinh 2 a_0} (\alpha_0 + \sinh a_0)$$

oraz momenty względem punktów A i B

$$M_{0,0} = pa^2 \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha_0}{2}}{\alpha_0 - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0} \left(\cosh \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right),$$

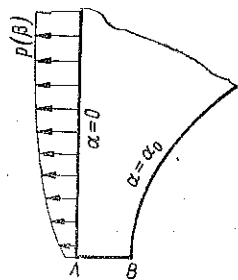
$$M_{\alpha_0,0} = pa^2 \frac{\operatorname{tgh} \frac{\alpha_0}{2}}{\alpha_0 - \frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0} (\alpha_0 \operatorname{ctgh} \alpha_0 - 1).$$



Rzędne mnożyć przez $\frac{p}{r}$

Rys. 15

7. Wzdłuż boku $\alpha = 0$ działają dowolne naprężenia normalne, określone za pomocą funkcji dającej się rozłożyć na szereg Fouriera (rys. 16). Zagadnienie to można rozwiązać wychodząc z naprężeń lub też z danej funkcji Airy'ego na konturze tarczy. Ponieważ oś y odwzorowuje się na płaszczyźnie $\alpha\beta$ jako odcinek $\alpha = 0$ o długości 2π , naprężenia działające na górną półprostą można rozłożyć albo na symetryczny, albo też na antysymetryczny szereg Fouriera.



Rys. 16

$$(7.1) \quad p(\beta) = \sum_1^{\infty} a_n \sin n\beta.$$

Naprężenia normalne przedstawmy w postaci antysymetrycznego szeregu w przedziale $(-\pi, +\pi)$:

Przyjawszy funkcję Airy'ego w postaci

$$(7.2) \quad gF = \sum_1^{\infty} f_n(\alpha) \sin n\beta$$

za pomocą wzorów (1.7) możemy obliczyć naprężenia działające wzdłuż boków $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_0$:

$$(7.3) \quad \left\{ \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \sum_2^{\infty} \{[(1-n^2) - n^2 \cos \beta] (A_n + B_n)\} \sin n\beta + \\ &\quad + \sum_2^{\infty} n (A_n + B_n) \sin \beta \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(1 + \cos \beta) \{(2C_1 + D_1) \cos \beta + \\ &\quad + \sum_2^{\infty} n [(n+1)C_n + (n-1)D_n] \cos n\beta\} \quad (\alpha = 0); \\ a\sigma_\alpha &= -(2A_1 \sinh 2\alpha_0 + 2C_1 \cosh 2\alpha_0 + D_1) \sinh \alpha_0 \sin \beta + \\ &\quad + \sum_2^{\infty} \{[(1-n^2) \cosh \alpha_0 - n^2 \cos \beta] [A_n \cosh (n+1)\alpha_0 + B_n \cosh (n-1)\alpha_0 + \\ &\quad + C_n \sinh (n+1)\alpha_0 + D_n \sinh (n-1)\alpha_0] - \\ &\quad - [(n+1)A_n \sinh (n+1)\alpha_0 + (n-1)B_n \sinh (n-1)\alpha_0 + \\ &\quad + (n+1)C_n \cosh (n+1)\alpha_0 + (n-1)D_n \cosh (n-1)\alpha_0] \sinh \alpha_0\} \sin n\beta + \\ &\quad + \sin \beta \sum_2^{\infty} n [A_n \cosh (n+1)\alpha_0 + B_n \cosh (n-1)\alpha_0 + \\ &\quad + C_n \sinh (n+1)\alpha_0 + D_n \sinh (n-1)\alpha_0] \cos n\beta, \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\cosh \alpha_0 + \cos \beta) \{(2A_1 \sinh 2\alpha_0 + 2C_1 \cosh 2\alpha_0 + D_1) \cos \beta + \\ &\quad + \sum_2^{\infty} n [(n+1)A_n \sinh (n+1)\alpha_0 + (n-1)B_n \sinh (n-1)\alpha_0 + \\ &\quad + (n+1)C_n \cosh (n+1)\alpha_0 + (n-1)D_n \cosh (n-1)\alpha_0] \cos n\beta\} \quad (\alpha = \alpha_0). \end{aligned} \right.$$

Z warunków brzegowych

$$\begin{aligned} \text{dla } \alpha = 0 \quad \sigma_\alpha &= p(\beta), \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 \quad \sigma_\alpha &= \tau_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

otrzymamy z trzech ostatnich równań (7.3) następujące zależności:

$$(7.4) \quad \begin{cases} (n+1)C_n + (n-1)D_n = 0 & (n \geq 2), \\ (n+1)A_n \sinh(n+1)\alpha_0 + (n-1)B_n \sinh(n-1)\alpha_0 + \\ \quad + (n+1)C_n \cosh(n+1)\alpha_0 + (n-1)D_n \cosh(n-1)\alpha_0 = 0, \\ A_n \cosh(n+1)\alpha_0 + B_n \cosh(n-1)\alpha_0 + C_n \sinh(n+1)\alpha_0 + \\ \quad + D_n \sinh(n-1)\alpha_0 = 0; \end{cases}$$

natomiast równanie pierwsze (7.3) po prostych przekształceniach przyjmie postać

$$(7.5) \quad a\sigma_\alpha = - \sum_2^\infty \frac{n(n+1)}{2} (A_n + B_n) \sin(n-1)\beta + \\ + \sum_2^\infty (1-n^2) (A_n + B_n) \sin n\beta + \\ + \sum_2^\infty \frac{n(n-1)}{2} (A_n + B_n) \sin(n+1)\beta = \sum_2^\infty a_n \sin n\beta \quad (n \geq 2).$$

Z tego warunku otrzymamy wzór rekurencyjny na sumę $A_n + B_n$:

$$(7.6) \quad a_n = - \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} (A_{n-1} + B_{n-1}) + (n^2-1) (A_n + B_n) + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)}{2} (A_{n+1} + B_{n+1}) \right] \quad n \geq 2.$$

Biorąc pod uwagę nieregularności występujące przy $n=1$ otrzymamy zależności pozwalające wyliczyć kolejno $A_n + B_n$; suma $A_1 + B_1$ przyjmuje wartość dowolną:

$$(7.7) \quad \begin{cases} A_2 + B_2 = -\frac{a_1}{3}, \\ A_3 + B_3 = \frac{1}{6} (a_1 - a_2), \\ \dots \\ A_{n+1} + B_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} [2a_n + (n-1)(n-2)(A_{n-1} + B_{n-1}) + \\ \quad + 2(n^2-1)(A_n + B_n)], \end{cases}$$

Po wyliczeniu sum $A_n + B_n$ możemy określić poszukiwane stałe ze związków (7.4):

$$(7.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = 4 \sinh \alpha_0 (\sinh \alpha_0 - \alpha_0 \cosh \alpha_0), \\ \Delta_n = \frac{4}{n+1} (\sinh^2 n \alpha_0 - n^2 \sinh^2 \alpha_0), \\ A_1 = \frac{2}{\Delta_1} (A_1 + B_1) \sinh^3 \alpha_0, \\ B_1 = \frac{2}{\Delta_1} (A_1 + B_1) (\sinh \alpha_0 - 2 \alpha_0 \cosh \alpha_0), \\ C_1 = -\frac{D_1}{2} = -\frac{1}{\Delta_1} (A_1 + B_1) \sinh 2 \alpha_0, \\ A_n = -\frac{2(A_n + B_n)}{\Delta_n} \frac{n-1}{n+1} (n \sinh^3 \alpha_0 + \sinh^2 n \alpha_0), \\ B_n = -\frac{2(A_n + B_n)}{\Delta_n} (n \sinh^2 \alpha_0 - \sinh^2 n \alpha_0), \\ C_n = \frac{A_n + B_n}{\Delta_n} \frac{n-1}{n+1} (\sinh 2 n \alpha_0 + n \sinh 2 \alpha_0), \\ D_n = -\frac{A_n + B_n}{\Delta_n} (\sinh 2 n \alpha_0 + n \sinh 2 \alpha_0). \end{array} \right.$$

Zamiast stosować warunki brzegowe, gdy dane są naprężenia wzdłuż boku $\alpha = 0$, możemy określić funkcję Airy'ego wzdłuż tego boku sposobem podanym w p. 1. Wówczas otrzymamy następujące warunki brzegowe:

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dla } \alpha = 0 \quad F(\beta) = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\beta, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \\ \text{dla } \alpha = \alpha_0 \quad F = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \end{array} \right.$$

i po przyjęciu funkcji Airy'ego w postaci (7.2) otrzymamy trzy zależności identyczne ze wzorami (7.4) wyprowadzonymi wyżej. Natomiast zamiast wzoru rekurencyjnego (7.6) otrzymamy czwarty warunek w prostej postaci

$$(7.10) \quad A_n + B_n = b_n.$$

Wzory (7.8) stosuje się i w tym przypadku.

Pozostaje do wyjaśnienia kwestia doboru stałych $A_1 + B_1$ w (7.7). Otóż sumę tych stałych można obrać dowolnie tylko ze względu na naprężenia wzdłuż boków $\alpha = 0$, $\alpha = \alpha_0$, natomiast wpływa ona na naprężenia

styczne na odcinku AB (rys. 16, por. także rozwiązanie w punkcie 5). Ponieważ wyrazy szeregu (7.2) przy $n \geq 2$ tworzą wzdłuż AB naprężenia styczne o pewnej wypadkowej, to sumę $A_1 + B_1$ należy tak dobrać, aby tę wypadkową sprowadzić do zera. Jeżeli będziemy posługiwali się rozłożeniem (7.9), to suma $A_1 + B_1$ zostanie określona niejako automatycznie i w tym sensie przyjęcie to jest ogólniejsze od poprzedniego.

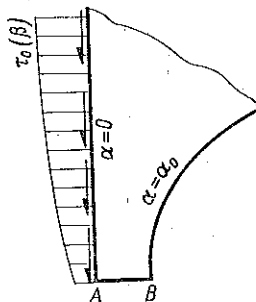
8. Wzdłuż boku $\alpha = 0$ działają dowolne naprężenia styczne (rys. 17). Podobnie jak w przypadku poprzednim przyjmijmy funkcję Airy'ego w postaci (7.2), lecz naprężenia rozłożymy na szereg symetryczny

$$(8.1) \quad \tau_{\alpha\beta}(\beta) = \sum_0^{\infty} e_n \cos n\beta.$$

Korzystając z warunków brzegowych

$$\text{dla } \alpha = 0 \quad \sigma_{\alpha} = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = \tau_0(\beta),$$

$$\text{dla } \alpha = \alpha_0 \quad \sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha\beta} = 0$$



Rys. 17

otrzymamy podobnie jak poprzednio następujące zależności pozwalające na wyznaczenie stałych:

$$(8.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n + B_n = 0, \\ A_n \cosh(n+1)a_0 + B_n \cosh(n-1)a_0 + C_n \sinh(n+1)a_0 + \\ + D_n \sinh(n-1)a_0 = 0, \\ (n+1)A_n \sinh(n+1)a_0 + (n-1)B_n \sinh(n-1)a_0 + \\ + (n+1)C_n \cosh(n+1)a_0 + (n-1)D_n \cosh(n-1)a_0 = 0 \\ (n \geq 2) \end{array} \right.$$

oraz wzory rekurencyjne

$$(8.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2C_1 + D_1 = -2e_0, \\ 3C_2 + D_2 = 2e_0 - e_1, \\ 4C_3 + 2D_3 = -\frac{2}{3} \left[e_2 + \frac{1}{2} (2C_1 + D_1) + 2(3C_2 + D_2) \right], \\ \dots \dots \dots \\ (n+2)C_{n+1} + nD_{n+1} = -\frac{2}{n+1} \left\{ e_n + \frac{n-1}{2} [nC_{n-1} + (n-2)D_{n-1}] + \right. \\ \left. + n[(n+1)C_n + (n-1)D_n] \right\}. \end{array} \right.$$

Po kolejnym wyznaczeniu sumy C_n i D_n według (8.3) pozostałe współczynniki wyliczymy ze wzorów następujących:

$$(8.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = 4 \sinh \alpha_0 (\sinh \alpha_0 - \alpha_0 \cosh \alpha_0), \\ \Delta_n = \frac{4}{n+1} (\sinh^2 n \alpha_0 - n^2 \sinh \alpha_0), \\ A_1 = -B_1 = -\frac{2C_1 + D_1}{\Delta_1} \left(\frac{1}{2} \sinh 2\alpha_0 - \alpha_0 \cosh 2\alpha_0 \right), \\ C_1 = -\frac{2C_1 + D_1}{\Delta_1} \sinh \alpha_0 (2\alpha_0 \cosh \alpha_0 - \sinh \alpha_0), \\ D_1 = 2 \frac{2C_1 + D_1}{\Delta_1} \sinh^2 \alpha_0, \\ A_n = -B_n = -\frac{(n+1)C_n + (n-1)D_n}{(n+1)\Delta_n} (\sinh 2n\alpha_0 - n \sinh 2\alpha_0), \\ C_n = 2 \frac{(n+1)C_n + (n-1)D_n}{(n+1)\Delta_n} [\sinh^2 n\alpha_0 - n^2 \sinh^2 \alpha_0 + \\ + n \sinh (n+1)\alpha_0 \sinh (n-1)\alpha_0], \\ D_n = -\frac{(n+1)C_n + (n-1)D_n}{(n+1)\Delta_n} [\cosh 2n\alpha_0 - n \cosh 2\alpha_0 - (n+1)]. \end{array} \right.$$

Naprężenia obliczymy posługując się wzorami (7.3). Podobnie jak poprzednio i tutaj możemy wyjść z danej funkcji Airy'ego oraz jej pochodnej normalnej. Pochodną tę rozłożymy na antysymetryczny szereg Fouriera

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{\partial gF}{\partial a} = \sum_1^{\infty} d_n \sin n\beta$$

i korzystając z warunków brzegowych otrzymamy trzy równania identyczne z równaniami (8.2). Natomiast czwarte równanie daje nam wprost

$$(n+1)C_n + (n-1)D_n = -d_n,$$

a wzory (8.4) pozostają nadal słuszne.

Literatura cytowana w tekście

[1] J. S. Ufliand, *Bipoljarnyje koordinaty w teorji uprugosti*, Moskwa-Leningrad 1950.

[2] H. Hengst, *Beitrag zur Berechnung von Stegblechen mit Späriöchern*, Stahlbau, 17/18 (1942).

Резюме

О НЕКОТОРОМ ТИПЕ БЕСКОНЕЧНОГО ДИСКА

В работе рассматривается упругий диск в форме консоли, бока которого создают прямые и круг. Применяя биполярные координаты, были сделаны попытки определения функцией Эри, путем разделения переменных, при использовании краевых условий в виде заданной функции F и ее нормальной производной на краю диска.

Дается решение в замкнутом виде для нескольких типов, часто встречаемых на практике, нагрузок. Приводится решение для произвольных нагрузок в виде разложения функции Эри в ряд бигармонических полиномов. Распределение напряжений иллюстрируется числовым примером.

Summary

A PROBLEM OF INFINITE SLICE

A thin elastic cantilever slice is considered. The edges are straight lines and a circle. Using bipolar coordinates, the Airy function is found by separating variables and using the boundary conditions for a given function and its normal derivative at the edge. Solutions in closed forms are obtained for a few types of load often encountered in practice. For an arbitrary load, the solution is obtained by expanding the Airy function in a series of biharmonic polynomials. The stress distribution is illustrated by a numerical example.

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1957 r.