

ANDRZEJ SZANIAWSKI

ROZCHODZENIE SIĘ MAŁYCH ZABURZEŃ
W MIESZANINIE CIECZY Z PĘCHERZYKAMI GAZU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXXI

SPIS TREŚCI

	Str.
I. WSTĘP	272
II. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE	
1. Przyjęcie ogólnych założeń i wyprowadzenie wynikających z nich równań	275
1.1. Przyjęte założenia	275
1.2. Ogólne równania mieszaniny	276
1.3. Zlinearyzowane równania mieszaniny dla małych zaburzeń	280
2. Założenia dodatkowe przemian barotropowych mieszaniny	283
3. Założenia dodatkowe pewnego prawa wymiany ciepła między gazem a cieczą	287
4. Założenia dodatkowe wypływające z procesów zachodzących przy drganiu pojedynczego pęcherzyka	289
4.1. Założenia	289
4.2. Wyprowadzenie równań i ustalenie warunków brzegowych dla drgań pęcherzyka w nieskończenie rozległej cieczy	290
4.3. Wyprowadzenie zależności między ciśnieniami obu składników mieszaniny	293
4.4. Wyprowadzenie zależności wypływającej z przewodzenia ciepła	294
4.5. Układ równań podstawowych dla rozchodzącej się płaskiej fali harmonicznej	297
5. Obliczenie częstości drgań własnych pęcherzyka w nieskończenie rozległej cieczy	299
III. OBLICZENIE PRĘDKOŚCI ROZCHODZENIA SIĘ MAŁYCH ZABURZEŃ I ICH TŁUMIENIA	
6. Założenie przemiany barotropowej	300
6.1. Obliczenie prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń	300
6.2. Zestawienie wyników i wnioski	302
7. Założenie wymiany ciepła podanej w p. 3	304
7.1. Wyprowadzenie równania rozchodzenia się małych zaburzeń	304
7.2. Rozchodzenie się płaskich fal harmonicznych	306
7.3. Zestawienie wyników i wniosków	309
8. Wnioski z zależności wyprowadzonych w p. 4	312
8.1. Obliczenie prędkości rozchodzenia się płaskich fal harmonicznych i ich tłumienia	312
8.2. Przypadek małych częstości ω	314
8.3. Przypadek dużych częstości ω	314
8.4. Zjawisko częstości rezonansowych	316
8.5. Zestawienie wyników i wnioski	318
9. Wnioski ogólne	321

Ważniejsze oznaczenia

t	czas,
x, y, z	współrzędne kartezjańskie,
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	wersory osi x, y, z ,
$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$	operator Hamiltona,
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	operator Laplace'a.

Parametry mieszaniny (funkcje zmiennych x, y, z, t)

ρ	gęstość mieszaniny,
ρ_c	gęstość cieczy,
ρ_g	gęstość gazu,
T_c	temperatura cieczy,
T_g	temperatura gazu,
p	ciśnienie w mieszaninie,
p_c	ciśnienie w cieczy,
p_g	ciśnienie w gazie,
r	promień pęcherzyka gazu,
\mathbf{v}	prędkość mieszaniny,
φ	potencjał prędkości mieszaniny ($\mathbf{v} = \nabla \varphi$).

Parametry niezakłóconej mieszaniny jednorodnej, pozostającej w równowadze, są oznaczone wskaźnikiem 0. Tak np. symbolami $T_0 = T_{c0} = T_{g0}$ oznaczać będziemy temperaturę niezakłóconej mieszaniny.

Małe przyrosty parametrów w czasie rozchodzenia się w mieszaninie niewielkich zaburzeń są określone za pomocą następujących bezwymiarowych funkcji zależnych od x, y, z i t :

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad s_c = \frac{\rho_c - \rho_{c0}}{\rho_{c0}}, \quad s_g = \frac{\rho_g - \rho_{g0}}{\rho_{g0}}, \quad \xi = \frac{r - r_0}{r_0},$$

$$\pi_c = \frac{p_c - p_{c0}}{p_{c0}} = \frac{p - p_0}{p_0}, \quad \pi_g = \frac{p_g - p_{g0}}{p_{g0}}, \quad \tau_c = \frac{T_c - T_0}{T_0}, \quad \tau_g = \frac{T_g - T_0}{T_0}.$$

Stałe mieszaniny

- ϑ stosunek masowy gazu do mieszaniny,
 $\Theta_0 = \vartheta \rho_0 / \rho_{g0}$ stosunek objętościowy gazu do mieszaniny,
 n liczba pęcherzyków w jednostce masy mieszaniny,
 c ciepło właściwe cieczy,
 E współczynnik sztywności objętościowej cieczy,
 c_v, c_p ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu i objętości,
 $R = c_p - c_v$ stała gazowa w równaniu stanu,
 $\kappa = c_p / c_v$ wykładnik adiabaty gazu,
 $c' = \rho c_0 c$ $c'_v = \rho_{g0} c_v$ $c'_p = \rho_{g0} c_p$,
 σ współczynnik napięcia powierzchniowego cieczy,
 ν $2\sigma / \rho_0 r_0$,
 λ_g, λ_c współczynniki przewodnictwa cieplnego dla gazu i cieczy,
 α^* stała charakteryzująca przewodzenie ciepła między gazem a cieczą.

Inne oznaczenia

- ω częstość kołowa harmoniczných zaburzeń (fal dźwiękowych),
 a prędkość rozchodzenia się fal dźwiękowych,
 β współczynnik tłumienia fal dźwiękowych,
 a_{bar} prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w mieszaninie podlegającej przemianom barotropowym.

I. W S T Ę P

Mieszanina cieczy z rozproszonymi w niej drobnymi pęcherzykami gazu posiada dosyć skomplikowane własności, trudne do ich ścisłego ujęcia ilościowego metodami matematycznymi.

Rozproszone w cieczy pęcherzyki gazu nie posiadają jednakowych wymiarów ani kształtów. W pęcherzykach tych znajduje się poza głównym składnikiem również i para otaczającej cieczy. Z drugiej strony, w cieczy jest częściowo rozpuszczony gaz z pęcherzyków. Rozproszenie gazu nie jest na ogół jednakowe we wszystkich miejscach i zmienia się ono stale wraz

z przemieszczaniem się pęcherzyków. W czasie przepływu zachodzą w mieszaninie złożone procesy, którym towarzyszy zmiana tak parametrów termodynamicznych obu składników, jak również ich wzajemnego stosunku masowego, odkształcenie i przemieszczenie oddzielnych pęcherzyków itd.

W niniejszej pracy stworzymy pewną wyidealizowaną abstrakcję mieszaniny rzeczywistej i zajmiemy się badaniem rozchodzenia się w niej małych zaburzeń.

Założenia ogólne przyjęte do określenia tej «idealnej mieszaniny» są podane w p. 1.1.

Wiemy z termodynamiki, że stan gazu jest określony za pomocą dwóch parametrów (mogą to być np. jego ciśnienie p_g i temperatura T_g). To samo możemy powiedzieć o cieczy. W mieszaninie jest tych parametrów stanu więcej. Właściwie trudno jest mówić o stanie mieszaniny w sensie normalnie używanym w termodynamice, termodynamika zajmuje się bowiem przemianami powolnymi, w czasie których rozpatrywany czynnik znajduje się w stanach bliskich równowagi. Czas osiągnięcia równowagi (czas relaksacji) jest dla większości czynników termodynamicznych tak krótki, że przy przemianach uważamy każdy stan przejściowy za równowagę.

Inaczej jest w mieszaninie. Czas osiągnięcia równowagi mieszaniny (potrzebny do wyrównania temperatur oraz ciśnień gazu i cieczy) jest porównywalny z czasem trwania przemiany i dlatego też nie możemy stanów przejściowych mieszaniny uważać za bliskie równowagi.

W termodynamice dowolny stan rozpatrywanego czynnika można osiągnąć z innego stanu za pomocą przemiany odwracalnej. Nie można tego osiągnąć dla każdego stanu mieszaniny. Np. nie można osiągnąć za pomocą przemiany odwracalnej takiego stanu mieszaniny, w którym istnieje skończona różnica temperatur między cieczą a gazem.

Przyjmując podane niżej założenia uzależnimy stan mieszaniny od czterech zmiennych parametrów: dwóch parametrów stanu gazu i dwóch—cieczy. Własności wprowadzonej przez nas «jednorodnej idealnej mieszaniny» są więc określone własnościami jej składników (cieczy i gazu) oraz dwiema wielkościami stałymi θ i n , podającymi masę gazu i liczbę pęcherzyków zawartych w jednostce masy mieszaniny.

Poza założeniami dotyczącymi własności mieszaniny będziemy jeszcze przyjmowali założenia określające zakres rozpatrywanych przez nas jej ruchów. Zajmiemy się bowiem jedynie rozchodzeniem się niewielkich zaburzeń bez doprowadzenia ciepła z zewnątrz.

Jak przekonamy się o tym w dalszym ciągu, założenia ogólne przyjęte w p. 1.1 nie wystarczają do jednoznacznego wyznaczenia ruchu rozpatrywanej mieszaniny, gdyż liczba wynikających z nich równań jest mniejsza od liczby niewiadomych funkcji. Cztery parametry mieszaniny dla konkretnych przypadków rozważanych ruchów nie mogą być od siebie nie-

zależne, lecz powinny być ze sobą powiązane pewnymi zależnościami wynikającymi z praw fizycznych rządzących mieszaniną. Poza ogólnymi prawami [prawo pędu i popędu (2.6) i prawo zachowania energii (2.7)] powinniśmy jeszcze uwzględnić prawo wymiany ciepła między obu składnikami oraz prawo określające różnicę ich ciśnień.

Ścisłe poznanie tych dodatkowych praw, o ile jest to możliwe, byłoby bardzo trudne. Dlatego też rezygnując z ich poznania zastępujemy je przybliżonymi założeniami dodatkowymi sformułowanymi w trzech wariantach w pp. 2, 3 i 4.1. W założeniach tych są w przybliżeniu uwzględnione własności mieszaniny oraz zakres rozpatrywanych ruchów.

Na początku p. 2 zakładamy, że mieszanina podlega jedynie przemianom barotropowym, natomiast nie czynimy żadnych założeń ograniczających odnośnie charakteru rozchodzących się w mieszaninie małych zaburzeń. Z wielu możliwych adiabatycznych i barotropowych przemian mieszaniny wybieramy trzy, dla których obliczamy w p. 6.1 odpowiednie prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń a_1 , a_2 i a_3 .

W p. 3 zakładamy, że wymiana ciepła między cieczą a gazem podlega podanemu przez nas prawu. Wyprowadzamy stąd w p. 7.1 ogólne równanie (3.16) dla potencjału prędkości słuszne dla różnych rodzajów zaburzeń. Następnie zajmujemy się w p. 7.2 szczególnym przypadkiem rozchodzenia się małych zaburzeń, mianowicie rozchodzeniem się płaskich fal harmonicznyc. Obliczamy prędkość rozchodzenia się tych fal (prędkość dźwięku) oraz współczynnik tłumienia jako funkcję częstości kołowej drgań ω . Zestawienie wyników i wnioski podajemy w p. 7.3.

Jeszcze inaczej przyjmujemy dodatkowe założenia w p. 4. Rozpatrujemy mianowicie najpierw drgania objętościowe pęcherzyka gazu w nieściśliwej i nieskończonej rozległej cieczy pod wpływem harmonicznie zmiennego ciśnienia w nieskończoności. Następnie zakładamy, że wyprowadzone dla pojedynczego pęcherzyka związki między parametrami gazu i cieczy są również słuszne przy rozchodzeniu się w mieszaninie płaskiej fali harmonicznyc. Zważamy więc od razu zakres rozpatrywanych zaburzeń. Przyjęte założenia podane są w p. 4.1., obliczenie prędkości dźwięku i jego tłumienia jest podane w p. 8.

Przyjmując na podstawie tych założeń, że obydwa składniki jak i sama mieszanina posiadają pewne hipotetyczne własności, musimy się liczyć z możliwością, że wyprowadzone przez nas prawa rozchodzenia się małych zaburzeń mogą odbiegać od rzeczywistego stanu rzeczy. Wyprowadzone dla rozchodzenia się płaskich fal harmonicznyc wzory (3.4), (3.22) i (3.39) możemy uważać jedynie za kolejne przybliżenia prędkości dźwięku a i współczynnika tłumienia β . Wzory te powinny dawać niewielkie błędy dla mieszanin o małej zawartości gazu ($\theta_0 \ll 1/2$). Dla większej zawartości gazu (pian i mgieł) mogą one dawać rozbieżne wyniki.

II. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

1. Przyjęcie ogólnych założeń i wyprowadzenie wynikających z nich równań

1.1. **Przyjęte założenia.** Zakładamy, że rozpatrywana mieszanina cieczy z gazem posiada następujące własności.

(1) Gaz jest rozproszony w cieczy chaotycznie i jego średnie rozproszenie jest równomierne. Stosunek masowy gazu do mieszaniny ϑ (masa gazu ϑ zawarta w jednostce masy mieszaniny) jest wielkością stałą, zaś stosunek objętościowy $\Theta = (\rho/\rho_g)\vartheta$ zmienia się wraz ze zmianą gęstości obu składników.

(2) Gaz jest rozproszony w cieczy w postaci drobnych, kulistych pęcherzyków o jednakowym promieniu r . Promień pęcherzyków może się zmieniać wraz z objętością mieszaniny, lecz liczba pęcherzyków n znajdujących się w jednostce masy mieszaniny pozostaje stała.

(3) W pęcherzykach znajduje się gaz doskonały.

(4) Ciecz otaczająca pęcherzyki jest idealna (nielepka).

(5) Ciecz jest sprężysta (spełnia prawo Hooke'a) i nie rozszerza się przy wzroście temperatury.

Niewielkie przyrosty ciśnienia Δp_c wywołują jedynie niewielkie przyrosty gęstości cieczy $\Delta \rho_c$, natomiast przyrost temperatury cieczy ΔT_c może być wywołany tylko doprowadzeniem do niej ciepła.

(6) W czasie dowolnej przemiany dla każdego stanu mieszaniny określone jest ciśnienie p_c , gęstość ρ_c i temperatura T_c cieczy oraz te same parametry p_g , ρ_g i T_g gazu.

(7) Masa gazu jest dużo mniejsza od masy cieczy, tak że stosunek objętościowy Θ oraz stosunek masowy są dużo mniejsze od 1/2 (nie dla wszystkich rozważanych przypadków przyjęcie tego założenia jest konieczne).

(8) Pęcherzyki gazu nie poruszają się względem cieczy. Wszystkie cząstki mieszaniny zawarte w niewielkim elemencie objętości posiadają jednakową prędkość v .

(9) Siły masowe działające na element mieszaniny (np. ciężar) są pominięte.

(10) Uwzględniony jest wpływ napięcia powierzchniowego w pęcherzyku na granicy między cieczą a gazem.

(11) Mimo że ciśnienie statyczne p w mieszaninie (określone jako stosunek średniego nacisku sił wewnętrznych na wydzielony w mieszaninie element powierzchni do wielkości tej powierzchni) posiada wartość pośrednią między ciśnieniem gazu p_g i ciśnieniem cieczy p_c , przyjmujemy $p = p_c$.

Poza powyższymi założeniami określającymi własności rozpatrywanej przez nas mieszaniny przyjmiemy jeszcze założenia określające interesu-

jące nas ruchy tej mieszaniny. Ponieważ zajmować się będziemy jedynie rozchodzeniem się małych zaburzeń bez doprowadzenia ciepła z zewnątrz, więc żądamy, aby przemiany zachodzące w mieszaninie spełniały następujące warunki.

(12) Przemiany w mieszaninie powinny być adiabatyczne. Rozumie my przez to, że do dowolnego elementu mieszaniny nie ma dopływu ciepła z zewnątrz, natomiast może zachodzić wymiana ciepła wewnątrz między gazem a cieczą.

(13) Jeżeli w niezakłóconym stanie mieszaniny pozostającej w równowadze określone są parametry p_{g0} , $p_{c0} = p_0$, ρ_{g0} , ρ_{c0} , ρ_0 , $T_{g0} = T_{c0} = T_0$ i r_0 jednakowe dla wszystkich punktów mieszaniny (a właściwie dla wszystkich niewielkich elementów objętościowych mieszaniny), to w czasie rozchodzenia się w mieszaninie małego zaburzenia prędkość v oraz przyrosty wszystkich parametrów uważamy za nieskończenie małe pierwszego rzędu. Można sprawdzić, że i pochodne tych parametrów względem zmiennych x, y, z, t są również wielkościami tego rzędu.

Nieskończenie małe wyższych rzędów, występujące w równaniach pomijamy.

(14) Zakładamy, że istnieje potencjał φ prędkości v , czyli że

$$v = \nabla \varphi.$$

Potencjał φ jest również nieskończenie mały pierwszego rzędu.

1.2. Ogólne równania mieszaniny. Opierając się na podanych w p. 1.1 założeniach wyprowadzimy ogólne równania mieszaniny pęcherzyków gazu w cieczy.

Założyliśmy, że gaz jest rozproszony w cieczy w postaci drobnych pęcherzyków o jednakowym promieniu r i w jednostce masy mieszaniny znajduje się n takich pęcherzyków. Ich masa wynosi

$$(2.1) \quad \vartheta = \frac{4}{3} \pi r^3 n \rho_g.$$

Założyliśmy również, że gaz jest doskonały, tzn. spełnia równanie stanu

$$(2.2) \quad p_g = R \rho_g T_g.$$

Zgodnie z założeniem ciecz jest idealna, tzn. że siły wewnętrzne w każdym jej punkcie są określone za pomocą jednej skalarowej wielkości — ciśnienia p_c (brak naprężeń stycznych). Ciecz jest również sprężysta i spełnia prawo Hooke'a, lecz nie rozszerza się pod wpływem temperatury. Jej równanie stanu można napisać w postaci

$$(2.3) \quad \frac{\Delta \left(\frac{1}{\rho_c} \right)}{\frac{1}{\rho_c}} = \frac{\Delta p_c}{E}.$$

Powstała z obu tych składników mieszanina w jednostce masy o objętości $1/\rho$ zawiera ϑ masy gazu o objętości ϑ/ρ_g oraz $(1 - \vartheta)$ masy cieczy o objętości $(1 - \vartheta)/\rho_c$. Suma objętości gazu i cieczy jest równa objętości mieszaniny, czyli

$$(2.4) \quad \frac{\vartheta}{\rho_g} + \frac{1 - \vartheta}{\rho_c} = \frac{1}{\rho}.$$

To samo równanie można zapisać jeszcze inaczej wprowadzając stosunek objętościowy Θ . W jednostce objętości mieszaniny o masie ρ znajduje się bowiem objętość Θ gazu o masie $\Theta \rho_g$ i objętość $(1 - \Theta)$ cieczy o masie $(1 - \Theta) \rho_c$. Suma mas gazu i cieczy jest równa masie mieszaniny, czyli

$$(2.4.1) \quad \Theta \rho_g + (1 - \Theta) \rho_c = \rho.$$

Gdy pęcherzyki gazu są niewielkie, bardzo rozproszone i nie poruszają się względem cieczy, mieszaninę możemy uważać za jeden ośrodek ciągły. Równanie ciągłości mieszaniny posiada przy tych założeniach postać, którą się stosuje dla wszystkich ośrodków ciągłych:

$$(2.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Przy założeniu ciągłości oraz dodatkowym uwzględnieniu, że ciecz jest idealna, możemy ułożyć równanie dynamiczne mieszaniny. Sposób wyprowadzenia tego równania jest analogiczny do przypadku cieczy idealnej. Pomijając wpływ sił masowych otrzymujemy

$$(2.6) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0.$$

Ułożymy wreszcie dla mieszaniny równanie zachowania energii. W tym celu wydzielimy pewną objętość V odgraniczoną powierzchnią Σ i poruszającą się wraz z mieszaniną. Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że doprowadzone do wydzielonej objętości ciepło jest równe przyrostowi energii mieszaniny dodanemu do pracy sił ciśnienia. Z chwilą zaś, gdy rozpatrujemy tylko przemiany adiabatyczne mieszaniny, doprowadzone z zewnątrz ciepło jest równe zeru i możemy napisać

$$\int_{\Sigma} p v_n d\Sigma + \frac{d}{dt} \int_V \rho E_m dV = 0,$$

gdzie przez v_n oznaczyliśmy rzut prędkości na normalną do elementu powierzchni $d\Sigma$ a przez E_m energię przypadającą na jednostkę masy mie-

szaniny. Pierwszą całkę powierzchniową możemy przekształcić i przedstawić w postaci całki objętościowej

$$\int_{\Sigma} p v_n d\Sigma = \int_V \nabla(p\mathbf{v}) dV,$$

zaś drugą całkę możemy sprowadzić do postaci

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E_m dV = \int_V \rho \frac{dE_m}{dt} dV.$$

Możemy teraz napisać zależność

$$\int_V \left[\nabla(p\mathbf{v}) + \rho \frac{dE_m}{dt} \right] dV = 0$$

dla dowolnej objętości V mieszaniny. Stąd wynika, że

$$(2.7) \quad \nabla(p\mathbf{v}) + \rho \frac{dE_m}{dt} = 0.$$

Jest to poszukiwane równanie różniczkowe zachowania energii.

Energia E_m jednostki masy mieszaniny jest równa sumie energii kinetycznej, energii termicznej i sprężystej cieczy, energii wewnętrznej gazu oraz energii napięcia powierzchniowego.

Całkowita energia kinetyczna jednostki masy mieszaniny składa się z energii ruchu postępowego

$$E_1 = \frac{v^2}{2},$$

(v jest prędkością środka masy rozpatrywanego małego elementu objętościowego) oraz z energii kinetycznej E_2 , wywołanej zmianą objętości poszczególnych pęcherzyków.

Energii E_2 nie będziemy dokładnie obliczali, oszacujemy tylko rząd jej wielkości, a w dalszym ciągu wykazemy, że w czasie rozchodzenia się małych zaburzeń jest ona małą drugiego rzędu i można ją pominąć.

Gdy pęcherzyk gazu o promieniu r rozszerza się w cieczy nieściśliwej, nieskończenie rozległej i nieruchomej w nieskończoności, to energia kinetyczna otaczającej go cieczy wynosi $2\pi r^3 \dot{r}^2 \rho_c$.

Istotnie, kulista warstwa cieczy znajdującej się w odległości η od środka pęcherzyka o grubości $d\eta$ posiada energię kinetyczną $(1/2)4\pi\eta^2 d\eta \rho_c u^2$, gdzie u jest prędkością cząstki cieczy, skierowaną wzdłuż promienia. Całkowita energia kinetyczna przy rozszerzaniu się pęcherzyka jest równa

$$\int_r^{\infty} 2\pi \rho_c u^2 \eta^2 d\eta.$$

Dla cieczy nieściśliwej mamy

$$\rho_c = \text{const} \quad \text{i} \quad u = \dot{r} (r/\eta)^2.$$

Stąd znajdujemy wielkość energii kinetycznej:

$$2\pi \rho_c \dot{r}^2 r^4 \int_r^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} = 2\pi r^3 \dot{r}^2 \rho_c.$$

Tenże pęcherzyk w cieczy ściśliwej wywoła powstanie fal kulistych, które zmieniają prędkości cząstek cieczy. Poprawka dla energii kinetycznej, wywołana rozchodzeniem się tych fal, jest (jak można udowodnić) tego samego rzędu.

Dla n pęcherzyków gazu znajdujących się w jednostce objętości mieszaniny energia kinetyczna cieczy jest mniejsza niż suma energii dla oddzielnych pęcherzyków rozszerzających się w cieczy nieskończenie rozległej. Ponieważ dla pojedynczego pęcherzyka energia jest rzędu \dot{r}^2 , więc tego też co najwyżej rzędu może być energia kinetyczna cieczy, wywołana zmianami objętości pęcherzyków. Możemy więc napisać $E_2 = \dot{r}^2 f_1(r, \rho_c, E, n)$, gdzie $f_1(r, \rho_c, E, n)$ jest funkcją ograniczoną zmiennych niezależnych r i ρ_c , zawartych w dowolnym przedziale domkniętym, nie zawierającym zera.

W jednostce masy mieszaniny znajduje się $(1 - \vartheta)$ masy cieczy. Energia termiczna tej cieczy, określona z dokładnością do stałej, wynosi $E_3 = (1 - \vartheta) c T_c$, zaś jej energia sprężysta $E_4 = (1 - \vartheta) p_c^2 / 2 \rho_{c0} E$, gdzie ρ_{c0} jest gęstością cieczy w pewnych ustalonych normalnych warunkach.

W tejże ilości mieszaniny znajduje się ϑ masy gazu o energii wewnętrznej $E_5 = \vartheta c_v T_g$.

Wreszcie energia napięcia powierzchniowego n pęcherzyków jest równa iloczynowi powierzchni $4\pi r^2 n$ tych pęcherzyków przez napięcie powierzchniowe σ , czyli

$$E_6 = 4\pi r^2 n \sigma.$$

Dodając wszystkie te wyrażenia otrzymujemy poszukiwaną wielkość energii

$$(2.8) \quad E_m = \frac{v^2}{2} + \dot{r}^2 f_1 + (1 - \vartheta) \left(c T_c + \frac{p_c^2}{2 \rho_{c0} E} \right) + \vartheta c_v T_g + 4\pi r^2 n \sigma.$$

Podstawiając E_m do (2.7) przedstawimy równanie zachowania energii w postaci

$$(2.9) \quad \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) + \rho \frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} + \dot{r}^2 f_1 + (1 - \vartheta) \left(c T_c + \frac{p_c^2}{2 \rho_{c0} E} \right) + \vartheta c_v T_g + 4\pi r^2 n \sigma \right] = 0.$$

Z wyprowadzonych równań (2.1) - (2.6) oraz (2.8) nie jesteśmy oczywiście w stanie wyznaczyć poszukiwanych funkcji, gdyż liczba równań wynosi dziewięć [równanie wektorowe (2.6) jest równoważne trzem równaniom rzutów na trzy osie współrzędne], zaś liczba niewiadomych funkcji $p, p_c, p_g, \varrho, \varrho_c, \varrho_g, T_c, T_g, r, v_x, v_y$ i v_z wynosi dwanaście. Uwzględniając założenie, że ciśnienie p mieszaniny jest równe ciśnieniu w cieczy

$$(2.10) \quad p = p_c,$$

zmniejszymy liczbę niewiadomych do jedenastu, mimo to do ich określenia brak nam jeszcze dwu równań. Do ułożenia tych równań przyjmujemy w punktach 2, 3 i 4 dodatkowe założenia pomocnicze.

Poza tym, że równań jest za mało, są one nieliniowe i trudne do rozwiązania. Rozpatrując jedynie rozchodzenie się niewielkich zaburzeń w mieszaninie przeprowadzimy obecnie linearyzację wyprowadzonych równań.

1.3. Zlinearyzowane równania mieszaniny dla małych zaburzeń. Wyobraźmy sobie, że mieszanina nasza nie porusza się i pozostaje w równowadze. W dowolnie wybranym jej elemencie ustalone są wartości parametrów $p_0 = p_{c0}, p_{g0}, \varrho_0, \varrho_{c0}, \varrho_{g0}, T_{c0} = T_{g0} = T_0$ i r_0 spełniających równania mieszaniny (2.1) - (2.9). Z chwilą rozchodzenia się w mieszaninie małych zaburzeń parametry te doznają niewielkich przyrostów. Wprowadźmy nowe funkcje $\pi_c, \pi_g, s, s_c, s_g, \tau_c, \tau_g$ i ξ określone za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} p_c &= p = p_0 (1 + \pi_c), & p_g &= p_{g0} (1 + \pi_g), \\ \varrho &= \varrho_0 (1 + s), & \varrho_c &= \varrho_{c0} (1 + s_c), & \varrho_g &= \varrho_{g0} (1 + s_g), \\ T_c &= T (1 + \tau_c), & T_g &= T (1 + \tau_g), & r &= r_0 (1 + \xi), \end{aligned}$$

i podstawmy je do wyprowadzonych uprzednio równań. Uwzględniając, że nowe funkcje charakteryzujące przyrosty parametrów mieszaniny są wielkościami bardzo małymi i odrzucając małe wyższych rzędów otrzymamy przekształcone i zlinearyzowane równania stosujące się jedynie dla niewielkich zakłóceń.

Podstawiając r i ϱ_g do równania (2.1) otrzymujemy

$$\vartheta = \frac{4}{3} \pi r_0^3 n \varrho_{g0} (1 + \xi)^3 (1 + s_g),$$

a po wykorzystaniu zależności

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 n \varrho_{g0} = \vartheta$$

i wykonaniu działań sprowadzamy równanie (2.1) do postaci

$$1 = 1 + (3\xi + s_g) + (3\xi^2 + 3\xi s_g) + (\xi^3 + 3\xi^2 s_g) + \xi^3 s_g.$$

Odrzucając małe wyższych rzędów otrzymujemy stąd przybliżone równanie liniowe wiążące zmianę promienia pęcherzyka gazu ξ ze zmianą jego gęstości s_g :

$$(2.11) \quad 3\xi + s_g = 0.$$

Postępując w analogiczny sposób przeprowadzamy linearyzację równań (2.2), (2.3) i (2.4) otrzymując odpowiednio

$$(2.12) \quad \pi_g = s_g + \tau_g,$$

$$(2.13) \quad s_c = \frac{p_0}{E} \pi_c,$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} s_g + \frac{1-\vartheta}{\rho_{c0}} s_c = \frac{1}{\rho_0} s.$$

Równanie ciągłości (2.5) przekształcimy podstawiając do niego poza gęstością $\rho = \rho_0(1+s)$ potencjał prędkości według wzoru $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Odrzucając następnie małe drugiego rzędu znajdujemy zlinearyzowane równanie ciągłości

$$(2.15) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla^2 \varphi = 0.$$

W podobny sposób z równania dynamicznego (2.6) otrzymujemy równanie zlinearyzowane

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \pi_c = 0,$$

które po scałkowaniu przybierze postać

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0} \pi_c = \frac{d}{dt} c_1(t).$$

Lecz potencjał φ jest określony z dokładnością do dowolnej funkcji czasu, gdyż

$$\mathbf{v} = \nabla[\varphi - c_1(t)] = \nabla\varphi - \nabla c_1(t) = \nabla\varphi.$$

Możemy więc bez wpływu na ogólny charakter równania założyć, że $c_1(t) = 0$, a wtedy zlinearyzowane równanie dynamiczne przybierze postać

$$(2.16) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_0} \pi_c = 0.$$

Wreszcie wyprowadzimy zlinearyzowane równanie zachowania energii

$$(2.17) \quad \frac{p_0}{\rho_0} \nabla^2 \varphi + T_0(1-\vartheta) \frac{\partial \tau_c}{\partial t} + T_0 c_v \vartheta \frac{\partial \tau_g}{\partial t} + (1-\vartheta) \frac{p_0^2}{\rho_{c0} E} \frac{\partial \pi_c}{\partial t} + 8\pi r_0^2 n \sigma \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

W ten sposób dla rozchodzenia się w mieszaninie małych zaburzeń ułożyliśmy siedem równań liniowych (2.11) - (2.17) z dziewięciu niewiadomymi funkcjami od x, y, z, t (niewiadomymi tymi są: potencjał φ oraz wielkości $\pi_c, \pi_g, s, s_c, s_g, \tau_c, \tau_g, \xi$). Przekształćmy teraz wyprowadzone równania do postaci bardziej dogodnej dla obliczeń.

Z równań (2.11) i (2.13) znajdujemy

$$(2.18) \quad s_g = -3\xi, \quad s_c = \frac{p_0}{E} \pi_c.$$

Podstawmy te wielkości do pomnożonego przez ρ_{g0}/ϑ równania (2.14) i wprowadźmy stosunek objętościowy $\Theta_0 = (\rho_0/\rho_{g0})\vartheta$. Równanie to możemy sprowadzić do postaci

$$(2.19) \quad \frac{s}{\Theta_0} + 3\xi - \frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E} \pi_c = 0.$$

Podobnie podstawiając $s_g = -3\xi$ do równania (2.12) otrzymujemy

$$(2.20) \quad 3\xi + \pi_g - \tau_g = 0.$$

Równanie (2.17) scałkujemy po podstawieniu do niego obliczonego z równania (2.15) wyrażenia

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Otrzymamy

$$\begin{aligned} -\frac{p_0}{\rho_0} s + T_0(1-\vartheta)\tau_c + T_0 c_v \vartheta \tau_g + (1-\vartheta) \frac{p_0^2}{\rho_0 E} \pi_c + 8\pi r_0^2 n \sigma \xi = \\ = \frac{1}{\kappa-1} \frac{p_{g0}}{\rho_{g0}} \vartheta C_2(x, y, z), \end{aligned}$$

gdzie $C_2(x, y, z)$ jest dowolną funkcją współrzędnych przestrzeni x, y, z , określaną dla szczególnych przypadków odpowiednimi warunkami początkowymi. Rugując π_c za pomocą (2.19) możemy to równanie sprowadzić do postaci

$$(2.21) \quad 3(\kappa-1)(1+\nu) \frac{p_0}{\rho_{g0}} \xi + \frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{c'}{c_v} \tau_c + \tau_g = C_2(x, y, z).$$

Równania różniczkowe (2.15) i (2.16) pozostawiamy bez zmian.

W rezultacie przekształceń rozdzieliliśmy siedem równań na dwie grupy: pierwsza zawiera pięć równań, [(2.15), (2.16), (2.19), (2.20) i (2.21)] z siedmioma niewiadomymi $\varphi, s, \pi_c, \pi_g, \tau_c, \tau_g$ i ξ , druga dwa równania (2.18) wyrażające niewiadome s_g i s_c za pomocą pozostałych. Całkując równanie zachowania energii zmniejszyliśmy liczbę równań różniczkowych do dwóch [(2.15) i (2.16)], za to musieliśmy wprowadzić funkcję dowolną

$C_2(x, y, z)$, która dla każdego szczególnego przypadku powinna być określona za pomocą odpowiednich warunków początkowych.

Jak więc widzimy, równania wynikające z przyjętych w p. 1.1 ogólnych założeń nie wystarczają do wyznaczenia niewiadomych funkcji i do znalezienia prawa rozchodzenia się niewielkich zaburzeń w naszej mieszaninie. Do rozwiązania zagadnienia powinniśmy przyjąć dodatkowe założenia, na podstawie których ułożymy dwa brakujące równania. Należy więc znaleźć dodatkowe związki między zmianami parametrów obu czynników.

Weźmy pod uwagę różnicę temperatur między pęcherzykami gazu a otaczającą cieczą. Różnica ta jest wywołana przyrostem temperatury gazu przy sprężaniu, a jej zmniejszenie się jest spowodowane wymianą ciepła między obu czynnikami. W zależności od tego co jest większe, szybkość zmian ciśnienia czy szybkość wymiany ciepła, różnica temperatur rośnie lub maleje. Widzimy więc, że decydujący wpływ na tę różnicę temperatur mają warunki przewodzenia ciepła oraz szybkość zachodzących zmian odpowiednich parametrów. Podobnie decydujący wpływ na różnicę ciśnień między obu czynnikami ma napięcie powierzchniowe oraz bezwładność cieczy otaczającej pęcherzyk.

Przyjmując dodatkowe założenia odnośnie wpływu wymiany ciepła na zmiany temperatur oraz wpływu bezwładności na zmiany ciśnień obu czynników ułożymy poszukiwane dwie zależności.

Rozpatrzmy kolejno kilka różnych założeń przybliżających rzeczywisty przebieg procesu w różny sposób, ułożymy równania z nich wynikające i wyliczymy wielkości charakteryzujące rozchodzenie się małych zaburzeń. Zajmiemy się przy tym głównie szczególnym przypadkiem rozchodzenia się fal harmonicznyc.

2. Założenia dodatkowe przemian barotropowych mieszaniny

Na początku zajmiemy się rozpatrzeniem mieszaniny przy założeniu, że w czasie rozchodzenia się małych zaburzeń zachodzą w niej przemiany barotropowe.

Przemianę w cieczy nazywamy barotropową, jeżeli w czasie jej trwania ciśnienie p i gęstość ρ cieczy są powiązane z sobą zależnością

$$(2.22) \quad F(p, \rho) = 0.$$

Dla przemian adiabatycznych wielu cieczy rzeczywistych, dla których inne parametry stanu (jak np. temperatura) dają się z równania przemiany wyrugować lub mało wpływają na zależność między p i ρ równanie (2.22) z wystarczającą dokładnością opisuje zachodzący proces termodynamiczny. Dla przemian innych cieczy oraz mieszanin zależność (2.22) nie daje się ustalić (np. wtedy, gdy gęstość niejednorodnej mieszaniny

zależy również od koncentracji jej składników) lub posiada ograniczony zakres stosowalności.

W naszym przypadku, gdy rozpatrujemy przemiany adiabatyczne w jednorodnej mieszaninie gazu z cieczą, ścisła zależność między średnim ciśnieniem w mieszaninie p a jej średnią gęstością ρ nie daje się ustalić. Gęstość jest zależna nie tylko od ciśnienia, ale i od szybkości przemiany. Gdy przemiana zachodzi szybko, między pęcherzykami gazu i otaczającą je cieczą istnieją różnice temperatur wywołane brakiem wymiany ciepła między obu czynnikami (bez dopływu ciepła z zewnątrz) oraz różnice ciśnień wywołane bezwładnością cieczy otaczającej szybko zmieniającą swoją objętość pęcherzyk gazu. Gdy przemiana zachodzi powoli, temperatury gazu i cieczy wyrównują się, a wpływ bezwładności cieczy na różnice ciśnień znika. Gęstość mieszaniny, zależna od objętości pęcherzyków gazu, zmienia się nie tylko pod wpływem zmiany ciśnienia zewnętrznego, ale i pod wpływem zmiany temperatury wchodzącego w jej skład gazu. Temperatura ta zależy z kolei od szybkości przemiany. Dlatego też założenie, że i dla mieszaniny gazu z cieczą pewne przemiany adiabatyczne są barotropowymi, może być traktowane jedynie jako pierwsze przybliżenie.

Założenie, że w czasie ruchu ciecz lub mieszanina podlega pewnej przemianie barotropowej, znacznie upraszcza matematyczną stronę zadania. Przy założeniu tym obliczymy prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w mieszaninie.

Mając daną zależność (2.22) możemy dla pewnych początkowych wartości p i ρ obliczyć pochodną

$$\frac{dp}{d\rho} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \rho}}{\frac{\partial F}{\partial p}},$$

a następnie dla małych zaburzeń $\pi_c = \Delta p/p_0$ i $s = \Delta \rho/\rho_0$ możemy przyjąć przybliżoną zależność liniową

$$(2.23) \quad \pi_c = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{dp}{d\rho} s.$$

Dołączając to równanie do równań (2.15) i (2.16) otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi funkcjami $\varphi(x, y, z, t)$, $\pi_c(x, y, z, t)$ i $s(x, y, z, t)$. Z równań tych możemy wyrugować dwie niewiadome s i π_c [np. podstawiając π_c z (2.23) do równania (2.16)], następnie różniczkując otrzymane równanie względem czasu i wreszcie odejmując je od równania (2.15) pomnożonego przez $dp/d\rho$, otrzymamy dla potencjału prędkości φ znane równanie falowe

$$(2.24) \quad a_{bar} \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie

$$(2.25) \quad a_{bar} = \sqrt{\frac{d p}{d \varrho}} = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0} \frac{\pi_c}{s}}$$

jest poszukiwaną prędkością rozchodzenia się fali (małego zaburzenia) w mieszaninie spełniającej warunek barotropowości (2.23).

W przypadku gdy mieszanina podlega przemianom barotropowym, wyznaczenie prędkości a_{bar} sprowadza się do znalezienia zależności liniowej między π_c i s . Wielkości π_c i s (jak również i π_g , τ_g , τ_c i ξ) muszą oczywiście spełniać równania ogólne (2.19), (2.20) i (2.21) oraz dodatkowe zależności wynikające z założeń, które przyjmujemy poniżej.

Po pierwsze założymy tu, że pomijamy wpływ bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy, a różnica ciśnień gazu w cieczy jest wywołana jedynie napięciem powierzchniowym. Dla pęcherzyka kulistego zachodzi związek

$$(2.26) \quad p_g = p_c + 2 \frac{\sigma}{r}.$$

Stąd dla parametrów p_{g0} , p_0 i r_0 mieszaniny pozostającej w równowadze znajdujemy

$$(2.27) \quad \frac{p_{g0}}{p_0} = 1 + \nu.$$

Podstawiając do wzoru (2.26) $p_g = p_{g0}(1 + \pi_g)$, $p_c = p_0(1 + \pi_c)$ i $r = r_0(1 + \xi)$ otrzymujemy równanie

$$p_{g0}(1 + \pi_g) = p_0(1 + \pi_c) + 2 \frac{\sigma}{r_0} (1 - \xi + \xi^2 - \dots),$$

które po uproszczeniu i odrzuceniu małych wyższych rzędów można sprowadzić do postaci

$$(2.28) \quad \nu \xi - \pi_c + (1 + \nu) \pi_g = 0.$$

Równanie (2.28) jest pierwszą poszukiwaną zależnością, wpływającą z uwzględnienia napięcia powierzchniowego.

Drugie założenie przyjmujemy jako jedno z trzech wzajemnie wykluczających się następujących założeń:

(1) Brak wymiany ciepła między gazem i cieczą. Wtedy temperatura cieczy pozostaje stała

$$T_c = T_0 = \text{const},$$

czyli

$$(2.29.1) \quad \tau_c = 0.$$

(2) Istnieje idealna (nieskończenie szybka) wymiana ciepła między cieczą i gazem. Wtedy temperatury gazu i cieczy są sobie równe

$$T_g = T_c,$$

czyli

$$(2.29.2) \quad \tau_g = \tau_c.$$

(3) Promień pęcherzyka nie ulega zmianie

$$r = r_0 = \text{const},$$

czyli

$$(2.29.3) \quad \xi = 0.$$

Ostatniemu dosyć sztuczemu założeniu, że pęcherzyki gazu w cieczy są nieściśliwe, trudno nadać interpretację fizyczną. Wykażemy w dalszym ciągu (p. 8.3), że do wyliczonej na jego podstawie prędkości a_3 dąży prędkość a obliczona przy przyjęciu założeń p. 4, gdy częstość drgań dąży do nieskończoności.

Powyzsze dwa założenia określają własności mieszaniny. Odnośnie rodzaju rozpatrywanych ruchów założymy jeszcze, że

$$(2.30) \quad C_2(x, y, z) = 0,$$

czyli że dla pewnej chwili $t = t_0$

$$T_c = T_g = T_0 \quad \text{oraz} \quad r = r_0 \quad (\tau_c = \tau_g = \xi = 0).$$

Na podstawie przyjętych przez nas trzech założeń upraszczamy siedem równań i wprowadzamy dwa równania dodatkowe (2.28) i (2.29). Spośród tych dziewięciu równań dwa równania różniczkowe (2.15) i (2.16) wykorzystaliśmy do wyprowadzenia równania fali (2.24) i wyrażenia a_{bar} za pomocą π_c/s . Aby znaleźć stosunek π_c/s , wystarczy wykorzystać pięć liniowych i jednorodnych równań o sześciu niewiadomych:

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{\Theta_0} + 3\xi - \frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E} \pi_c = 0, \\ 3\xi + \pi_g - \tau_g = 0, \\ 3(\kappa - 1)\xi + \frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{c'}{c_v} \tau_c + \tau_g = 0, \\ \nu \xi - \pi_c + (1 + \nu) \pi_g = 0, \\ \text{(a) } \tau_c = 0, \quad \text{(b) } \tau_g = \tau_c, \quad \text{(c) } \xi = 0. \end{array} \right.$$

Obliczenie prędkości a_1 , a_2 i a_3 odpowiadających założeniom (a), (b) i (c) przeprowadzone zostanie w p. 6.1, a wyniki zestawione w p. 6.2.

3. Założenia dodatkowe pewnego prawa wymiany ciepła między gazem a cieczą

Wnikając głębiej w istotę przemian zachodzących w mieszaninie musimy zrezygnować z założenia barotropowości. Obecnie przyjmiemy dwa założenia pozwalające ułożyć dodatkowe zależności między ciśnieniami i temperaturami gazu i cieczy, z których jednak nie można wyprowadzić związku liniowego między s i π_c .

Oдноśnie różnicy ciśnień cieczy i gazu przyjmiemy tak jak poprzednio, że jest ona wywołana jedynie wpływem napięcia powierzchniowego. Stąd wynika od razu słuszność wzorów (2.27) i (2.28):

$$\frac{p_{g0}}{p_0} = 1 + \nu, \quad \nu \xi - \pi_c + (1 + \nu) \pi_g = 0.$$

Drugie założenie określające związek między temperaturami gazu i cieczy ustalimy w sposób następujący. Przyjmiemy mianowicie, że przyrost temperatury cieczy dT_c w ciągu czasu dt jest wywołany doprowadzeniem ciepła z pęcherzyków gazu i że ta ilość ciepła jest proporcjonalna do różnicy temperatur $T_g - T_c$ oraz do powierzchni wszystkich pęcherzyków. W jednostce masy mieszaniny ciepło dostarczone w ciągu czasu dt masie $(1 - \vartheta)$ cieczy wynosi

$$(1 - \vartheta) cdT_c.$$

W tej ilości mieszaniny znajduje się n pęcherzyków o łącznej powierzchni $4\pi r^2 n$. Założenie możemy więc wyrazić w postaci związku

$$(1 - \vartheta) cdT_c = \alpha^* (4\pi r^2 n) (T_g - T_c) dt,$$

gdzie α^* jest z założenia wielkością stałą. Przekształcając to wyrażenie według wzoru (2.1)

$$4\pi r^2 n = \frac{3}{r \varrho_g} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 n \varrho_g \right) = \frac{3}{r \varrho_g} \vartheta$$

i dzieląc je przez $(1 - \vartheta) c dt$ otrzymujemy

$$(2.32) \quad \frac{dT_c}{dt} = 3 \frac{\alpha^*}{c} \frac{\vartheta}{1 - \vartheta} \frac{T_g - T_c}{r \varrho_g}.$$

Dla rozchodzenia się małych zaburzeń wzór ten możemy zlinearyzować podstawiając

$$T_c = T_0(1 + \tau_c), \quad T_g = T_0(1 + \tau_g), \quad r = r_0(1 + \xi), \quad \varrho_g = \varrho_{g0}(1 + s_g)$$

i odrzucając małe wyższych rzędów. Otrzymamy wtedy równanie różniczkowe

$$(2.33) \quad \frac{\partial \tau_c}{\partial t} = \alpha(\tau_g - \tau_c),$$

gdzie

$$(2.34) \quad \alpha = 3 \frac{\alpha^*}{c r_0 \varrho_{g0}} \frac{\vartheta}{1 - \vartheta} = 3 \frac{\alpha^*}{c' r_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0}$$

jest nową wielkością stałą.

Z różniczkowej postaci związku (2.33) wynika, że niemożliwe jest ustalenie liniowej zależności typu (2.23) między π_c i s , a zatem przemiana w mieszaninie nie może być przy naszych założeniach barotropowa. Nieśluszny jest również wzór (2.25). Z siedmiu równań

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t} + v^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_0}{\varrho_0} \pi_c = 0, \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \tau_c}{\partial t} + \tau_c - \tau_g = 0, \quad \frac{s}{\Theta_0} + 3\xi - \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E} \pi_c = 0, \\ 3\xi + \pi_g - \tau_g = 0, \quad 3(\alpha - 1)\xi + \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{c'}{c_v} \tau_c + \tau_g = C_2(x, y, z), \\ v\xi - \pi_c + (1 + v)\pi_g = 0 \end{array} \right.$$

wyrugujemy w p. 7.1 wielkości s , π_c , π_g , τ_c , τ_g i ξ i ułożymy równanie różniczkowe dla potencjału prędkości $\varphi(x, y, z, t)$, przedstawiające rozchodzenie się małych zaburzeń w mieszaninie o przyjętych własnościach. Równanie to nie jest już równaniem falowym typu (2.24) i różne rodzaje zaburzeń rozchodzą się z różnymi prędkościami.

W p. 7.2 rozpatrzmy bliżej szczególny przypadek rozchodzenia się jednowymiarowych drgań harmonicznym o częstości kołowej ω . Przyjmujemy, że potencjał prędkości można przedstawić w postaci rzeczywistej części funkcji

$$(2.36) \quad \Phi e^{-\beta x + i \omega(t - x/a)},$$

gdzie Φ jest wielkością stałą niezależną od ω . Podstawiając tę funkcję do równania różniczkowego dla φ znajdziemy zależność prędkości rozchodzenia się drgań a i współczynnika tłumienia β od części kołowej ω .

Zestawienie wyników i wnioski zostaną podane w p. 7.3.

4. Założenia dodatkowe wpływające z procesów zachodzących przy drganiu pojedynczego pęcherzyka

4.1. **Założenia.** Obecnie przyjmiemy jeszcze inne niż poprzednio założenia pozwalające na ułożenie dodatkowych dwóch zależności między ciśnieniami i temperaturami obu czynników mieszaniny.

Rozpatrzmy mianowicie ruchy (zmianę objętości) kulistego pęcherzyka gazu znajdującego się w nieskończenie rozległej cieczy. W czasie ruchu zarówno gaz jak i ciecz przewodzą ciepło. Obliczymy różnicę ciśnień między gazem a nieskończenie odległymi punktami cieczy oraz ciepło odprowadzane od pęcherzyka. Następnie założymy, że w mieszaninie, w skończonym swoim otoczeniu, pęcherzyk zachowuje się podobnie jak w cieczy nieskończenie rozległej. Oznacza to, że różnica ciśnień $p_g - p_c$ między gazem i cieczą w mieszaninie jest taka sama jak między gazem i nieskończenie odległym punktem w rozpatrywanym przez nas zadaniu, oraz że ciepło odprowadzone od pęcherzyka jest doprowadzone do otaczającej go masy $(1 - \theta)/n$ cieczy. W ten sposób ułożymy dwie poszukiwane przez nas zależności.

Przy rozpatrywaniu ruchów pęcherzyka gazu przyjmujemy więc następujące założenia.

(1) Nie przemieszczający się pęcherzyk gazu o promieniu r znajduje się w nieskończenie rozległej cieczy. Promień pęcherzyka jest zmienny i zależy od czasu $r = r(t)$.

(2) Ciecz jest nielepka i nieściśliwa, lecz przewodzi ciepło. Współczynnik przewodnictwa wynosi λ_c .

(3) Gaz jest doskonały, lecz przewodzi ciepło. Współczynnik przewodnictwa dla gazu λ_g jest mały: $\lambda_g/\lambda_c \approx 0$, jak również

$$\frac{\lambda_g}{c_p} > \frac{\lambda_c}{c}$$

(4) W czasie zmiany objętości pęcherzyka pomijamy wpływ bezwładności poruszającego się ruchem przyspieszonym gazu (ciśnienie gazu wewnątrz pęcherzyka nie zależy od miejsca).

(5) Uwzględniamy wpływ napięcia powierzchniowego.

(6) Pęcherzyk wykonuje harmoniczne ruchy (zmienia objętość) symetrycznie względem jego środka. Wszystkie funkcje są harmonicznymi funkcjami czasu t , a poza tym zależą również od odległości rozpatrywanej cząstki od środka pęcherzyka η .

Przy powyższych założeniach temperatura T^* gazu i cieczy, gęstość gazu p^* i ciśnienie w cieczy p^* zależą od czasu t oraz od odległości η rozpatrywanej cząstki od środka pęcherzyka. Aby te wielkości powiązać

z występującymi w równaniach (2.1) - (2.10) wielkościami średnimi w mieszaninie T_g, T_c, ρ_g i $p_c = p$, przyjmujemy następujące dalsze założenia.

(7) Temperatura T_g i gęstość ρ_g gazu powinny spełniać równanie Clapeyrona (2.2) a energia wewnętrzna pęcherzyka powinna być przy ich pomocy wyrażona w postaci

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_g c_v T_g.$$

(8) Ciśnienie p_c jest równe ciśnieniu w miejscu nieskończenie odległym od pęcherzyka:

$$p_c = p_{\infty}^* = \lim_{\eta \rightarrow \infty} p^*.$$

(9) Przyrost temperatury cieczy w mieszaninie jest wywołany doprowadzonym do niej przez gaz ciepłem, przy czym jeden pęcherzyk dostarcza ciepła masie $(1 - \vartheta)/n$ cieczy.

(10) Również i inne parametry składników mieszaniny (ρ_c, p_g i r) w otoczeniu poruszającego się z prędkością v pęcherzyka są takie same jak w przypadku pojedynczego pęcherzyka w cieczy nieskończenie rozległej.

(11) Oprócz założeń dotyczących samej mieszaniny przyjmujemy jeszcze, że rozpatrywać będziemy jedynie rozchodzenie się w mieszaninie fal harmonicznym płaskich o małych amplitudach i częstości kołowej ω .

4.2. Wyprowadzenie równań i ustalenie warunków brzegowych dla drgań pęcherzyka w nieskończenie rozległej cieczy. Oznaczmy gwiazdkami wartości parametrów termodynamicznych dowolnej cząstki cieczy lub gazu znajdującej się w odległości η od środka pęcherzyka, a przez u oznaczmy prędkość tejsze cząsteczki. Wykorzystując podane wyżej założenia możemy napisać następujące równania.

Dla gazu ($\eta < r$):
równanie ciągłości

$$(2.37) \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (\rho^* \eta^2 u)}{\partial \eta} = 0,$$

równanie zachowania energii

$$(2.38) \quad \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (p_g \eta^2 u)}{\partial \eta} + \rho^* \frac{d}{dt} \left(c_v T^* + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\lambda_g}{\eta} \frac{\partial^2 (\eta T^*)}{\partial \eta^2},$$

równanie stanu

$$(2.39) \quad p_g = \rho^* R T^*.$$

Dla cieczy ($\eta > r$):
równanie ciągłości

$$(2.40) \quad u \eta^2 = \dot{r} r^2,$$

równanie dynamiczne (Eulera)

$$(2.41) \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = 0,$$

równanie zachowania energii

$$(2.42) \quad \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (p^* \eta^2 u)}{\partial \eta} + \rho_c \frac{d}{dt} \left(c T^* + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\lambda_c}{\eta} \frac{\partial^2 (\eta T^*)}{\partial \eta^2}.$$

Równania te dla niewielkich drgań możemy zlinearyzować podstawiając

$$\begin{aligned} T^* &= T_0(1 + \tau^*), & r &= r_0(1 + \xi), \\ \rho_c^* &= \rho_{c0}(1 + s^*), & p_g &= p_{g0}(1 + \pi_g), \\ \rho_c &= \rho_{c0}(1 + s_c), & p^* &= p_0(1 + \pi^*) \end{aligned}$$

i odrzucając małe wyższych rzędów. Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymamy

dla $\eta < r_0$ (tzn. wewnątrz pęcherzyka)

$$(2.43) \quad \begin{cases} \frac{\partial s^*}{\partial t} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (\eta^2 u)}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (\eta^2 u)}{\partial \eta} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{c'_0(\kappa - 1)} \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 (\eta \tau^*)}{\partial \eta^2}, \\ -\pi_g + s^* + \tau^* = 0, \end{cases}$$

dla $\eta > r_0$ (tzn. w cieczy)

$$(2.44) \quad \begin{cases} u \eta^2 = r_0^3 \dot{\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho_{c0}} \frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial (\eta^2 u)}{\partial \eta} + \frac{c' T_0}{p_0} \frac{\partial \tau^*}{\partial t} = \frac{\lambda_c T_0}{p_0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 (\eta \tau^*)}{\partial \eta^2}. \end{cases}$$

Z pierwszego układu równań (2.43) wyrugujemy s^* i u odejmując drugie i zróżniczkowane względem czasu trzecie równanie od pierwszego. Otrzymujemy po przekształceniu

$$(2.45) \quad \frac{\partial(\eta \tau^*)}{\partial t} - \Omega_g r_0^2 \frac{\partial^2(\eta \tau^*)}{\partial \eta^2} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta \dot{\tau}_g \quad (\eta < r_0),$$

gdzie

$$(2.46) \quad \Omega_g = \frac{\lambda_g}{c_p r_0^2}.$$

Z układu (2.44) wyrugujemy prędkość $u = (r_0^3 \dot{\xi})/\eta^2$ podstawiając jej wartość do równania drugiego i trzeciego. Otrzymujemy po uproszczeniu

$$(2.47) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\eta \tau^*)}{\partial t} - \Omega_c r_0^2 \frac{\partial^2(\eta \tau^*)}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = -\frac{r_0}{\Omega_b^2} \frac{\ddot{\xi}}{\eta^2}, \end{cases} \quad (\eta > r_0),$$

gdzie

$$(2.48) \quad \Omega_c = \frac{\lambda_c}{c' r_0^2}$$

oraz

$$(2.49) \quad \Omega_b^2 = \frac{p_0}{\rho c_0 r_0^2}.$$

(Pochodne zupełne względem czasu funkcji ξ i π_g oznaczyliśmy kropkami dla odróżnienia ich od pochodnych cząstkowych pozostałych funkcji zależnych od dwóch zmiennych t i η).

Znajdziemy teraz warunki brzegowe, jakim powinny czynić zadość funkcje τ^* i π^* .

Do ułożenia warunków brzegowych dla τ^* wykorzystamy to, że w środku pęcherzyka ($\eta = 0$) brak jest źródła ciepła, czyli że

$$\left[\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0,$$

oraz że na jego granicy ($\eta = r$) ciepło odprowadzone od gazu jest doprowadzone do cieczy, tzn. że

$$\lambda_g \lim_{\eta \rightarrow (r-0)} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} = \lambda_c \lim_{\eta \rightarrow (r+0)} \frac{\partial T^*}{\partial \eta}.$$

Jeśli zaś chodzi o temperatury obu czynników, to są one równe:

$$T^*(r-0) = T^*(r+0),$$

a w nieskończoności ($\eta \rightarrow \infty$) temperatura pozostaje stale równa temperaturze początkowej T_0 . Dla małych drgań możemy powyższe warunki sprowadzić do postaci następującej:

$$(2.50) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau^*}{\partial \eta} = 0 & \text{dla } \eta = 0, \\ \lambda_g \left(\frac{\partial \tau^*}{\partial \eta} \right)_{r_0-0} = \lambda_c \left(\frac{\partial \tau^*}{\partial \eta} \right)_{r_0+0}, \\ \tau^*(r_0-0) = \tau^*(r_0+0) & \text{dla } \eta = r_0, \\ \tau^* \rightarrow 0 & \text{dla } \eta \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami ciśnienie p^* powinno dążyć do $p_c = p$ w miarę oddalania się od środka pęcherzyka ($\eta \rightarrow \infty$), natomiast na granicy pęcherzyka powinno być (por. p. 3.5)

$$p^*(r) + 2 \frac{\sigma}{r} = p_g.$$

Wprowadzając π^* , π_c , π_g i ξ oraz uwzględniając słuszną i dla tego przypadku zależność (2.27) możemy warunki brzegowe sprowadzić dla małych drgań do postaci następującej:

$$(2.51) \quad \begin{cases} \pi^* \rightarrow \pi_c & \text{dla } \eta \rightarrow \infty, \\ \pi^* = (1 + \nu) \pi_g + \nu \xi & \text{dla } \eta = r_0. \end{cases}$$

4.3. Wyprowadzenie zależności między ciśnieniami obu składników mieszaniny
Scałkujemy drugie z równań (2.47) uwzględniając pierwszy z warunków brzegowych (2.51). Otrzymamy

$$\pi^* = \frac{r_0}{\Omega_b^2} \frac{\ddot{\xi}}{\eta} + \pi_c.$$

Uwzględniając drugi z warunków brzegowych (2.51) znajdujemy poszukiwaną zależność

$$(2.52) \quad \nu \xi - \pi_c + (1 + \nu) \pi_g - \frac{\ddot{\xi}}{\Omega_b^2} = 0.$$

Gdy $\Omega_b \rightarrow \infty$, otrzymamy ze wzoru (2.52) wyprowadzone już uprzednio równanie (2.28) dla przypadku pominięcia bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy. Składnik $\ddot{\xi}/\Omega_b^2$ występujący we wzorze (2.52) jest miarą wpływu bezwładności cieczy na różnicę ciśnień między obu czynnikami. Z chwilą gdy rozważamy jedynie drgania harmoniczne o częstości kołowej ω składnik ten wyniesie

$$\frac{\ddot{\xi}}{\Omega_b^2} = - \left(\frac{\omega}{\Omega_b} \right)^2 \xi$$

(gdyż drugie pochodne funkcji trygonometrycznych $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ są odpowiednio równe $-\omega^2 \sin \omega t$ i $-\omega^2 \cos \omega t$).

Dla drgań harmoniczných pęcherzyka otrzymujemy więc zależność

$$(2.53) \quad \left[\nu + \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right] \xi - \pi_c + (1 + \nu) \pi_g = 0.$$

Zależność tę wyprowadziliśmy przy założeniu, że pęcherzyk nie przemieszcza się, a jedynie zmienia okresowo w niewielkich granicach swoją objętość w nieskończenie rozległej cieczy. Przenosząc zależność (2.53) na warunki mieszaniny zakładamy, że funkcje ξ , π_c i π_g , które tu powinny zależeć jedynie od czasu, zależą również od położenia rozpatrywanej cząstki w przestrzeni x, y, z .

4.4. Wyprowadzenie zależności wypływającej z przewodzenia ciepła. Ponieważ rozpatrywać będziemy jedynie drgania harmoniczne pęcherzyka, więc dla równań (2.45) i (2.47) szukać będziemy rozwiązań w postaci

$$(2.54) \quad \eta \tau_g^* = \Pi_g F_g(\eta) e^{i\omega t}, \quad \eta \tau_c^* = \Pi_c F_c(\eta) e^{i\omega t}, \quad \pi_g = \Pi_g e^{i\omega t},$$

gdzie F_g i F_c są nieznanymi funkcjami zmiennej η , a Π_g jest stałą. (Oczywiście rozwiązaniami są części rzeczywiste tych funkcji; funkcje zespolone wprowadziliśmy dla uproszczenia obliczeń). Podstawiając te funkcje do wyprowadzonych równań i warunków brzegowych otrzymamy dwa zwyczajne równania różniczkowe dla $F_g(\eta)$ i $F_c(\eta)$ z czterema warunkami brzegowymi.

Dla $F_g(\eta < r_0)$ otrzymujemy równanie

$$(2.55) \quad i\omega F_g - \Omega_g r_0^2 F_g'' = \frac{\kappa - 1}{\kappa} i\omega \eta$$

i warunek brzegowy

$$(2.56) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{F_g}{\eta} \right) = 0,$$

dla $F_c(\eta > r_0)$ równanie

$$(2.57) \quad i\omega F_c - \Omega_c r_0^2 F_c'' = 0$$

i warunek brzegowy

$$(2.58) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{F_c}{\eta} = 0.$$

Przy $\eta = r_0$ otrzymujemy dwa następujące warunki brzegowe dla funkcji F_g i F_c :

$$(2.59) \quad F_g(r_0) = F_c(r_0), \quad \lambda_g [r_0 F_g'(r_0) - F_g(r_0)] = \lambda_c [r_0 F_c'(r_0) - F_c(r_0)].$$

Dla wyprowadzenia poszukiwanego związku wypływającego z uwzględnienia przewodzenia ciepła między obu składnikami mieszaniny nie trze-

ba powyższego układu równań rozwiązywać do końca. Odprowadzona w czasie dt od pęcherzyka ilość ciepła wynosi bowiem

$$dQ = -\lambda_g \left[\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right]_{\eta=r} 4\pi r^2 dt$$

i dla małych drgań możemy napisać w przybliżeniu

$$dQ = -\lambda_g T_0 \left[\frac{\partial \tau^*}{\partial \eta} \right]_{\eta=r_0} 4\pi r_0^2 dt = -4\pi T_0 \pi_g Q^* dt,$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$(2.60) \quad Q^* = \lambda_g [r_0 F'_g(r_0) - F_g(r_0)].$$

Z drugiej strony założyliśmy, że odprowadzone od gazu ciepło dQ podnosi temperaturę $(1 - \vartheta)/n$ masy otaczającej cieczy, czyli że

$$dQ = \frac{1 - \vartheta}{n} c dT_c = \frac{1 - \Theta_0}{n} c' T_0 d\tau_c.$$

Przyrównując do siebie obie wielkości otrzymujemy po uproszczeniu

$$(2.61) \quad \dot{\tau}_c = -4\pi \frac{n Q^*}{(1 - \Theta_0) c'} \pi_g.$$

Z założenia jednak τ_c jest harmoniczną funkcją czasu i z tej racji jej pochodna wynosi

$$\dot{\tau}_c = i\omega \tau_c.$$

Równanie (2.61) sprowadzimy po podstawieniu $\dot{\tau}_c$ do postaci

$$(2.62) \quad \tau_c = -4\pi \frac{n Q^*}{(1 - \Theta_0) c' i\omega} \pi_g.$$

W wyprowadzonej przez nas zależności nie znamy jeszcze wartości Q^* . Znalezieniem Q^* ze wzoru (2.60) zajmiemy się niżej.

Ogólnym rozwiązaniem równania (2.55) jest funkcja

$$F_g = C_g \sinh \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \frac{\eta}{r_0} \right) + C_{g1} \cosh \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \frac{\eta}{r_0} \right) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta,$$

gdzie C_g i C_{g1} są stałymi dowolnymi. Warunek brzegowy (2.56) możemy przedstawić w postaci

$$F''_g(0) = 0.$$

Stąd wynika $C_{g1} = 0$, czyli

$$(2.63) \quad F_g = C_g \sinh \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \frac{\eta}{r_0} \right) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta.$$

Ogólnym rozwiązaniem równania (2.57) jest funkcja

$$F_c(\eta) = C_c e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} \frac{\eta}{r_0}} + C_{c1} e^{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} \frac{\eta}{r_0}},$$

gdzie C_c i C_{c1} są stałymi dowolnymi oraz gdzie

$$\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\Omega_c}} + \sqrt{\frac{\omega}{2\Omega_c}} i$$

posiada dodatnią część rzeczywistą.

Gdy $\eta \rightarrow \infty$, to

$$\frac{F_c}{\eta} = C_c \frac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} \frac{\eta}{r_0}}}{\eta} + C_{c1} \frac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} \frac{\eta}{r_0}}}{\eta}$$

będzie dążyć do zera jedynie dla $C_{c1} = 0$.

Stąd znajdujemy

$$(2.64) \quad F_c = C_c e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} \frac{\eta}{r_0}}.$$

Wykorzystamy teraz warunki brzegowe (2.59). Podstawiając F_g ze wzoru (2.63) i F_c ze wzoru (2.64) do (2.59) oraz uwzględniając oznaczenie (2.60) otrzymujemy układ równań

$$C_g \sinh \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} r_0 = C_c e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}}},$$

$$\begin{aligned} Q^* &= C_g \lambda_g \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \cosh \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} - \sinh \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \right) = \\ &= C_c \lambda_c e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}}} \left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} - 1 \right), \end{aligned}$$

z którego znajdujemy

$$(2.65) \quad Q^* = - \frac{\frac{\kappa - 1}{\kappa} r_0 \lambda_g}{1} + \frac{\lambda_g / \lambda_c}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} \operatorname{ctgh} \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} - 1} + \frac{\lambda_g / \lambda_c}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c}} + 1}.$$

Podstawmy otrzymane wyrażenie do (2.62). Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 n = \Theta_0$$

oraz

$$(2.66) \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{3} \frac{\Omega_g}{i\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g} \operatorname{ctgh} \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g} - 1}} + \frac{\frac{\lambda_g}{\lambda_c}}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c} + 1}}} \right),$$

możemy to równanie napisać w postaci

$$(2.67) \quad \tau_c = (\kappa - 1) \frac{c'_v}{c'} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} A \pi_g.$$

Jest to poszukiwana przez nas zależność. Zakładamy, że choć została ona wyprowadzona dla pojedynczego pęcherzyka, pozostaje również słuszna dla mieszaniny, przez którą przechodzi fala harmoniczna o niewielkiej amplitudzie.

4.5. Układ równań podstawowych dla rozchodzącej się płaskiej fali harmonicznej. Rozpatrując drganie pojedynczego pęcherzyka w cieczy nieskończenie rozległej przyjęliśmy kilka założeń, które są sprzeczne z ogólnymi założeniami przyjętymi dla mieszaniny na początku w p. 1.1. A więc np. założenia nieściśliwości cieczy, braku innych pęcherzyków, symetrii ruchów względem środka rozpatrywanego pęcherzyka mogą być uważane jedynie za przybliżenia mniej lub więcej zgodne z założeniami przyjętymi uprzednio. Zamiast wprowadzania tych wszystkich dodatkowych założeń moglibyśmy po prostu przyjąć, że w przypadku rozchodzenia się fali harmonicznej spełnione są zależności (2.53) i (2.67) nie podając dokładniejszego ich uzasadnienia. Mimo niemożliwości jednoczesnego ścisłego spełnienia wszystkich założeń dla dużego rozproszenia pęcherzyków ($\Theta_0 \ll 1/2$) błędy stąd wynikające mogą być niewielkie.

Przy rozchodzeniu się w mieszaninie płaskich fal harmonicznnych obierając odpowiednio 'układ' współrzędnych x, y, z możemy każdą z funkcji $\varphi, s, \tau_g, \tau_c, \dots$ przedstawić w postaci iloczynu stałej przez funkcję wykładniczą

$$e^{-\beta x + i\omega \left(t - \frac{x}{a}\right)}$$

(a właściwie w postaci części rzeczywistej tego iloczynu). Wtedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i\omega \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(\beta + i\frac{\omega}{a}\right)^2 \varphi, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = i\omega s.$$

Podstawiając te pochodne do równań (2.15) i (2.16) otrzymamy

$$(2.68) \quad \begin{cases} i\omega s + \left(\beta + i\frac{\omega}{a}\right)^2 \varphi = 0, \\ i\omega \varphi + \frac{p_0}{\rho_0} \tau_c = 0. \end{cases}$$

Wielkości s , ξ , π_g , π_c , τ_g i τ_c są jeszcze powiązane między sobą zależnościami (2.19), (2.20), (2.21), (2.53) i (2.67). Liczbę tych zależności możemy zmniejszyć rugując τ_g i τ_c . Osiągniemy to dodając stronami (2.20) i (2.21) i podstawiając τ_c ze wzoru (2.67). Uwzględniając wreszcie związek (2.27) otrzymamy zamiast trzech równań (2.20), (2.21) i (2.67) jedno równanie

$$3\kappa\xi + [(\kappa - 1)A + 1]\pi_g = C_2(x, y, z).$$

Nie znamy jeszcze wartości funkcji dowolnej $C_2(x, y, z)$. Ponieważ każda z funkcji ξ , τ_c i π_g występujących po lewej stronie równania jest harmoniczną funkcją czasu o tej samej częstotliwości kołowej ω , więc dzieląc równanie obustronnie przez wspólny czynnik $e^{i\omega t}$ otrzymamy z lewej strony funkcję tylko zmiennej x , czyli funkcję

$$\frac{C_2(x, y, z)}{e^{i\omega t}} = F_1(x).$$

Równanie to może być spełnione tożsamościowo jedynie przez funkcję

$$C_2(x, y, z) = 0,$$

a stąd

$$(2.69) \quad 3\kappa\xi + [1 + (\kappa - 1)A]\pi_g = 0.$$

Ułożyliśmy więc dla pięciu niewiadomych φ , s , π_g , π_c i ξ pięć równań jednorodnych

$$(2.70) \quad \begin{cases} \left(\beta + i\frac{\omega}{a}\right)^2 \varphi + i\omega s = 0, & i\omega\varphi + \frac{p_0}{\varrho_0}\pi_c = 0, \\ \frac{s}{\Theta_0} - \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E}\pi_c + 3\xi = 0, & \pi_g + 3K_2\xi = 0, \\ (1 + \nu)\pi_g - \pi_c + \left(\nu + \frac{\omega^2}{\Omega_b^2}\right)\xi = 0. \end{cases}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenie

$$(2.71) \quad K_2 = \frac{\kappa}{1 + (\kappa - 1)A}.$$

Jak wiemy, układ równań jednorodnych tylko wtedy posiada niezerowe rozwiązanie, gdy wyznacznik układu jest równy zero. Zadaniem naszym jest obliczyć prędkość a i współczynnik tłumienia β . W p. 8.1 obliczymy je przyrównując do zera wyznacznik tego układu równań. Analizę wyników przeprowadzimy w p. 8.5.

5. Obliczenie częstości drgań własnych pęcherzyka w nieskończenie rozległej cieczy

Rozpatrzmy jeszcze jedno zadanie: drgania własne pęcherzyka gazu doskonałego, znajdującego się w nieskończenie rozległej i nieściśliwej cieczy. Wyobraźmy sobie, że pęcherzyk gazu wraz z otaczającą go cieczą pozostaje w spoczynku. W pewnym momencie równowaga zostaje chwilowo zakłócona i pęcherzyk zaczyna drgać. Obliczymy częstość tych drgań przy założeniu, że między cieczą a gazem jest brak wymiany ciepła, czyli że gaz podlega przemianie adiabatycznej.

Dla pęcherzyka gazu o stałej masie zachodzi związek, z którego po linearyzacji otrzymujemy [por. (2.11)].

$$(2.72) \quad 3\xi + s_g = 0,$$

Linearyzując równanie przemiany

$$\frac{p_g}{\rho_g} = \text{const}$$

otrzymujemy

$$(2.73) \quad \pi_g - \kappa s_g = 0.$$

Dla nieściśliwej cieczy otaczającej gaz możemy wyprowadzić równania ciągłości (2.40) oraz dynamiczne (2.41), z których wynika równanie [por. (2.47)]

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = -\frac{r_0}{\Omega_b^2} \frac{\ddot{\xi}}{\eta^2} \quad (\eta > r_0).$$

Całką ogólną tego równania jest funkcja

$$\pi^* = \frac{r_0}{\Omega_b^2} \frac{\ddot{\xi}}{\eta} + C_B(t).$$

W nieskończenie wielkiej odległości od pęcherzyka ciśnienie się nie zmienia, czyli

$$C_B(t) = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\pi^* = \frac{r_0}{\Omega_b^2} \frac{\ddot{\xi}}{\eta}.$$

Na powierzchni pęcherzyka spełnione jest równanie

$$\pi^* = (1 + \nu)\pi_g + \nu\xi \quad (\eta = r_0)$$

[por. (2.51)], czyli

$$(2.74) \quad \frac{\ddot{\xi}}{\Omega_b^2} = (1 + \nu)\pi_g + \nu\xi.$$

Wyrugujemy teraz z równań (2.72), (2.73) i (2.74) wielkości π_g i s_g a otrzymamy równanie różniczkowe jednorodne drugiego rzędu:

$$(2.75) \quad \frac{\ddot{\xi}}{\Omega_b^2} + [-\nu + 3\kappa(1 + \nu)] \xi = 0.$$

Chcemy znaleźć częstość drgań własnych Ω_r pęcherzyka, a więc dla ξ szukać będziemy rozwiązań typu

$$\xi = \Xi e^{i\Omega_r t}.$$

Po podstawieniu tej funkcji do równania (2.75) otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_b}\right)^2 \xi + [-\nu + 3\kappa(1 + \nu)] \xi = 0,$$

z którego znajdujemy

$$(2.76) \quad \Omega_r^2 = \Omega_b^2 [3\kappa(1 + \nu) - \nu].$$

III. OBLICZENIE PRĘDKOŚCI ROZCHODZENIA SIĘ MAŁYCH ZABURZEŃ I ICH TŁUMIENIA

6. Założenie przemiany barotropowej

6.1. Obliczenie prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń. Prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń obliczamy dla naszej mieszaniny ze wzoru (2.25), podstawiając do niego π_c/s wyznaczone z równań (2.3.1). Obliczymy przy tym trzy prędkości a_1 , a_2 i a_3 odpowiadające różnym przemianom barotropowym:

$$(a) \quad \tau_c = 0, \quad (b) \quad \tau_g = \tau_c, \quad (c) \quad \xi = 0.$$

Równania odpowiadające przemianom (a) i (b) możemy przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{s}{\Theta_0} + 3\xi - \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E} \pi_c = 0, \\ 3\xi + \pi_g - \tau_g = 0, \\ 3\xi + \frac{1}{K-1} \tau_g = 0, \\ \nu\xi - \pi_c + (1 + \nu)\pi_g = 0, \end{cases}$$

gdzie podstawiliśmy wielkość K równą dla poszczególnych przypadków odpowiednio

$$(3.2) \quad \begin{cases} (I) \quad K_a = \kappa, \\ (II) \quad K_b = 1 + \frac{\kappa - 1}{\frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{c'}{c'_v} + 1} = \frac{(1 - \Theta_0)c' + \Theta_0 c'_p}{(1 - \Theta_0)c' + \Theta_0 c'_v}. \end{cases}$$

Rugując z układu czterech równań (3.1) niewiadome π_g , τ_g i ξ znajdujemy

$$(3.3) \quad \frac{s}{\pi_c} = (1 - \Theta_0) \frac{p_0}{E} + \frac{\Theta_0}{K(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}}$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (2.25) otrzymujemy

$$(3.4) \quad \frac{1}{a_{1,2}^2} = (1 - \Theta_0) \frac{\varrho_0}{E} + \frac{\Theta_0}{K(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} \frac{\varrho_0}{p_0}$$

Dla przemiany (c) podstawiając $\xi = 0$ do pierwszego równania układu (2.31) otrzymujemy

$$(3.5) \quad \frac{s}{\pi_c} = (1 - \Theta_0) \frac{p_0}{E},$$

a stąd

$$(3.6) \quad \frac{1}{a_3^2} = (1 - \Theta_0) \frac{\varrho_0}{E}.$$

Prędkości a_1 , a_2 i a_3 są funkcjami Θ_0 , tj. stosunku objętościowego gazu do mieszaniny.

We wzorach (3.4) i (3.6) funkcje te posiadają postać złożoną, gdyż zależą one nie tylko bezpośrednio od Θ_0 , ale również za pośrednictwem ϱ_0 i K , gdyż

$$\varrho_0 = \Theta_0 \varrho_{g0} + (1 - \Theta_0) \varrho_{c0}$$

[por. wzory (2.4) i (3.2)].

Podstawiając ϱ_0 (2.4.1) do wzorów (3.4) i (3.6) i wprowadzając prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń w cieczy i w gazie

$$(3.7) \quad a_c = \sqrt{\frac{E}{\varrho_{c0}}}, \quad a_g = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\varrho_{g0}}},$$

możemy wzory (3.4) i (3.6) napisać w postaci

$$(3.8) \quad \frac{1}{a_{1,2}^2} = \left(\frac{1 - \Theta_0}{a_c} \right)^2 \left(1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{\varrho_{g0}}{\varrho_{c0}} \right) + \left(\frac{\Theta_0}{a_g} \right)^2 \left(1 + \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \right) \frac{\kappa}{K + \frac{3K - 1}{3} \nu}$$

oraz

$$(3.9) \quad \frac{1}{a_3^2} = \left(\frac{1 - \Theta_0}{a_c} \right)^2 \left(1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{\varrho_{g0}}{\varrho_{c0}} \right).$$

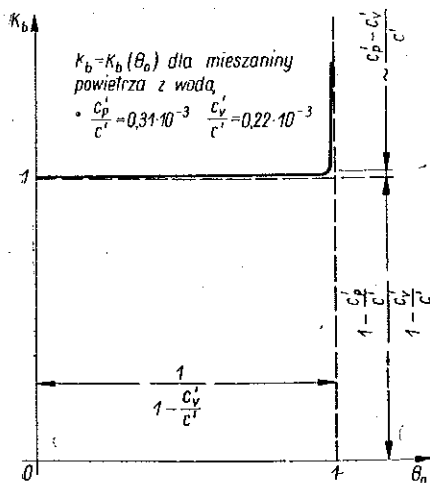
Pamiętamy przy tym, że K w przypadku braku wymiany ciepła między cieczą i gazem (I) jest równe κ , zaś w przypadku idealnej wymiany ciepła (II) zależy od Θ_0 .

6.2. Zestawienie wyników i wnioski. Przede wszystkim zauważymy, że wprowadzona przez nas funkcja K_b (3.2.II) jest prawie stała i równa jedności w interesującym nas zakresie zmienności Θ_0 . Wzór (3.2.II) możemy bowiem przekształcić i sprowadzić do postaci

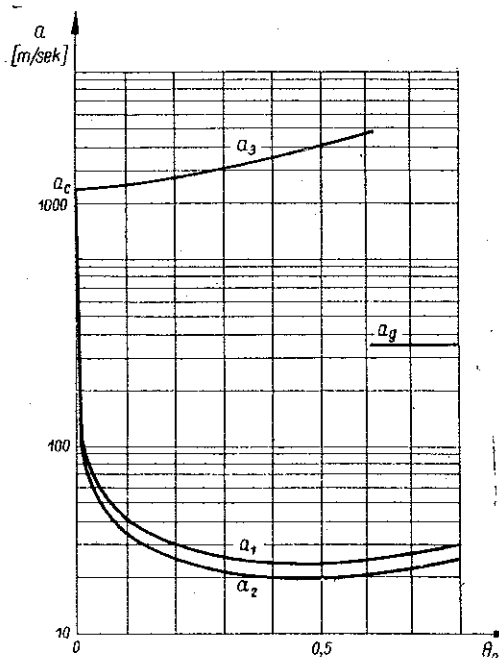
$$(3.10) \quad K_b = \frac{c' - c'_p}{c' - c'_v} = \frac{c' \left(1 - \frac{c' - c'_p}{c' - c'_v} \right)}{\Theta_0 - \frac{c'}{c' - c'_v}}$$

Stąd wynika, że wykres $K_b = K_b(\Theta_0)$ jest hyperbolą o asymptotach równoległych do osi Θ_0 i K_b , które zostały odpowiednio przesunięte o $(c' - c'_p)/(c' - c'_v)$ i $c'/(c' - c'_v)$ (rys. 1). Ponieważ $c' \gg c'_p > c'_v$ (np. dla mieszaniny wody z powietrzem w normalnych warunkach mamy $c'_v/c' < < c'_p/c' < 10^{-3}$), więc dla

$$\Theta_0 < 1 - \sqrt{\frac{c'_p - c'_v}{c'}}$$



Rys. 1



Rys. 2

K_b różni się bardzo mało od 1. Dla mieszaniny wody z powietrzem, gdy

$$\Theta_0 < 1 - \sqrt{10^{-3}} = 0,97,$$

to

$$1 < K_b < 1 + \sqrt{10^{-3}} = 1,03.$$

Dlatego też zamiast stosować wzór (3.2.II) możemy przyjmować

$$(3.11) \quad K_b \approx 1 \quad \text{dla} \quad \Theta_0 < 1 - \sqrt{\frac{c'_p - c'_v}{c'}}$$

Uwzględniając tę własność funkcji $K_b(\Theta_0)$ widzimy, że obliczone przez nas kwadraty odwrotności prędkości a_1 , a_2 i a_3 są wielomianami drugiego rzędu względem Θ_0 . Wykresy $a_1 = a_1(\Theta_0)$, $a_2 = a_2(\Theta_0)$ i $a_3 = a_3(\Theta_0)$ dla $\nu = 0$ są zestawione na rys. 2 dla mieszaniny wody z powietrzem ($a_c = 1460$ m/sek, $a_g = 344$ m/sek, $\rho_{g0}/\rho_{c0} = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\kappa = 1,4$).

Jest rzeczą ciekawą, że prędkości a_1 i a_2 posiadają minimum dla stosunku objętościowego Θ_0 bliskiego 1/2. Stosunek Θ'_0 , przy którym to minimum zachodzi, możemy obliczyć przyrównując do zera pochodną $1/a_{1,2}^2$ względem Θ_0 . Następnie, podstawiając Θ'_0 do wzoru (3.8), otrzymamy wielkości $a_{1\ min}$ i $a_{2\ min}$.

Wykonując te działania znajdujemy

$$(3.12) \quad \Theta'_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{a_c^2} - \frac{1}{a_g^2} \frac{\kappa}{K(1+\nu)} - \frac{\nu}{3}}{\frac{1}{a_c^2} \left(1 - \frac{\rho_{g0}}{\rho_{c0}}\right) + \frac{1}{a_g^2} \left(1 - \frac{\rho_{c0}}{\rho_{g0}}\right) \frac{\kappa}{K(1+\nu)} - \frac{\nu}{3}}$$

oraz

$$(3.13) \quad a_{1,2\ min} = \frac{2 \sqrt{\frac{1}{a_c^2} \left(\frac{\rho_{g0}}{\rho_{c0}} - 1\right) + \frac{1}{a_g^2} \left(\frac{\rho_{c0}}{\rho_{g0}} - 1\right) \frac{\kappa}{K(1+\nu)} - \frac{\nu}{3}}}{\left| \frac{1}{a_c^2} \frac{\rho_{g0}}{\rho_{c0}} - \frac{1}{a_g^2} \frac{\rho_{c0}}{\rho_{g0}} \frac{\kappa}{K(1+\nu)} - \frac{\nu}{3} \right|}$$

Dla mieszaniny wody z powietrzem przy założeniu $\nu = 0$, najmniejsze prędkości wynoszą

$$a_{1\ min} = 23,8 \text{ m/sek}, \quad a_{2\ min} = 20,1 \text{ m/sek},$$

dla $\Theta'_0 = 0,5006$. Widzimy więc, że prędkości te są znacznie mniejsze od prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń a_c i a_g w każdym z ośrodków oddzielnie wziętym.

Wpływ napięcia powierzchniowego na prędkość a_1 i a_2 występuje w wielkości $\nu = 2\sigma/p_0 r_0$, która jest na ogół znacznie mniejsza od jedności. Dla mieszaniny wody z powietrzem o temperaturze 20°C ($\sigma = 73$ dyn/cm) i ciśnieniu 1 kg/cm^2 podajemy jej wartości dla różnych wielkości pęcherzyków w następującej tabelcy:

r_0 [cm]	0,1	0,01	0,001	0,0001
ν	0,00074	0,0074	0,074	0,74

Dla porównania podamy jeszcze wielkości napięcia powierzchniowego σ (w dyn/cm) dla mieszanin powietrza z różnymi cieczami:

z wodą	73,
z rtęcią	460,
ze spirytusem etylowym	22.

Ze wzoru (3.8) wynika, że wraz ze wzrostem napięcia powierzchniowego (czyli ν) wzrastają prędkości a_1 i a_2 , lecz z powodu małości ν wpływ ten jest znikomy i można go pominąć biorąc pod uwagę jedynie przypadek $\nu = 0$.

Na zakończenie zwrócimy jeszcze uwagę, że nie wykorzystywaliśmy założenia (7), według którego stosunek objętościowy gazu do mieszaniny jest bardzo mały ($\Theta_0 \ll 1$). Wynik (3.8) przy $\nu = 0$ może być uważany jako pierwsze przybliżenie dla całego zakresu zmienności Θ_0 . Gdy Θ_0 jest mniejsze od $1/2$, wtedy drobne pęcherzyki są rozproszone w cieczy, gdy $\Theta_0 \approx 1/2$, mamy do czynienia z pianą, gdy zaś $1/2 \ll \Theta_0 < 1$, drobne krople cieczy są rozproszone w gazie.

7. Założenie wymiany ciepła podanej w p. 3

7.1. Wyprowadzenie równania rozchodzenia się małych zaburzeń. Przyjęcie w p. 3 założeń pomocniczych pozwoliło ułożyć równania (2.35). Wyprowadźmy z nich równanie różniczkowe dla potencjału prędkości φ .

W tym celu wyrugujmy z ostatnich pięciu równań układu niewiadome ξ , π_g , τ_g i τ_c oraz wprowadźmy K_b według wzoru (3.2.II), a otrzymamy zależność między π_c a s :

$$\left[\kappa(1+\nu) - \frac{\nu}{3} \right] \left\{ - \left[(1-\Theta_0) \frac{p_0}{E} + \frac{\Theta_0}{\kappa(1+\nu) - \frac{\nu}{3}} \right] \frac{\partial \pi_c}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right\} +$$

$$+ a \left(\frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{c'}{c_0} + 1 \right) \left[K_b(1+\nu) - \frac{\nu}{3} \right] \left\{ - \left[(1-\Theta_0) \frac{p_0}{E} + \frac{\Theta_0}{K_b(1+\nu) - \frac{\nu}{3}} \right] \pi_c + s \right\} + \Theta_0(1+\nu) a C_2(x, y, z) = 0.$$

Wprowadzając jeszcze obliczone uprzednio prędkości a_1 i a_2 sprowadzimy ją do postaci

$$(3.14) \quad \left(- \frac{1}{a_1^2} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \pi_c}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \Omega_1 \left(- \frac{1}{a_2^2} \frac{p_0}{\rho_0} \pi_c + s \right) + \Theta_0(1+\nu) a C_2 = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.15) \quad \Omega_1 = a \left(1 + \frac{c'}{c''} \frac{1 - \Theta_0}{\Theta_0} \right) \frac{K_b (1 + \nu) - \frac{\nu}{3}}{\kappa (1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} =$$

$$= 3 \frac{a^*}{c_p r_0} \left(1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{c_p}{c'} \right) \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{3 K_b} \right) \nu}{1 + \left(1 - \frac{1}{3 \kappa} \right) \nu}$$

[por. (2.34)].

Otrzymana zależność (3.14) między π_c i s ma postać różniczkową; potwierdza to założenie, że nie mamy do czynienia z przemianą barotropową. Równanie rozchodzenia się małych zaburzeń otrzymamy różniczkując (3.14) względem czasu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{a_1^2} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \pi_c}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \Omega_1 \left(-\frac{1}{a_2^2} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \pi_c}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) = 0$$

i podstawiając obliczone z dwóch pierwszych równań układu (2.35) pochodne

$$\frac{\partial \pi_c}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{p_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla^2 \varphi.$$

Otrzymamy w rezultacie równanie

$$(3.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi \right) + \Omega_1 \left(\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi \right) = 0.$$

Równanie (3.16) dla φ jest poszukiwanym równaniem rozchodzenia się małych zaburzeń w mieszaninie spełniającej przyjęte w p. 3 założenia. Rozpatrzmy jeszcze dwa szczególne przypadki jednowymiarowego rozchodzenia się zaburzeń fali płaskiej i fali kulistej.

W przypadku rozchodzenia się fali płaskiej możemy tak obrać kartezjański układ współrzędnych x, y, z , aby zmiany $\varphi(x, t)$ zachodziły jedynie w kierunku osi x . Wtedy

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

i równanie (3.16) przybierze postać

$$(3.17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \Omega_1 \left(\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0.$$

W przypadku rozchodzenia się fali kulistej możemy w jej środku obrać początek układu kulistego. Potencjał prędkości $\varphi(r, t)$ zależy wtedy tyl-

ko od odległości r badanego punktu od środka fali i od czasu t a laplasjan wynosi

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Podstawiając to wyrażenie do (3.16) otrzymamy

$$(3.18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} \right] + \Omega_1 \left[\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} \right] = 0.$$

Iloczyn $r\varphi(r, t)$ w przypadku fali kulistej oraz potencjał $\varphi(x, t)$ w przypadku fali płaskiej spełniają równanie różniczkowe o tej samej postaci. Rozpatrując w dalszym ciągu jedynie potencjał fali płaskiej $\varphi(x, t)$ będziemy pamiętali, że wyniki można przenieść bez trudu na przypadek rozchodzenia się fali kulistej.

7.2. Rozchodzenie się płaskich fal harmonicznych. Zajmiemy się teraz rozchodzeniem się w naszej mieszaninie płaskich fal harmonicznych o znanej częstotliwości. Przyjmiemy, że potencjał $\varphi(x, t)$ posiada postać

$$(3.19) \quad \varphi(x, t) = \Phi e^{-\beta x + i\omega(t-x/a)}$$

a właściwie, że jest on równy części rzeczywistej wymienionej funkcji. (Wprowadzenie funkcji zespolonej ułatwia tok obliczeń). Wielkości β i a charakteryzujące tłumienie i prędkość fali harmonicznej powinny być tak dobrane, aby spełnione było równanie (3.17). Wyznamy je jako funkcje danej częstotliwości kołowej ω .

Podstawiając pochodne potencjału prędkości

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \varphi, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \left(\beta + i \frac{\omega}{a} \right)^2 \varphi, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} &= -i\omega^3 \varphi, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x^2} &= i\omega \left(\beta + i \frac{\omega}{a} \right)^2 \varphi, \end{aligned}$$

do podzielonego przez $-i\omega^3 \varphi$ równania (3.17), otrzymamy

$$(3.20) \quad \left[\frac{1}{a_1^2} - \left(\frac{\beta}{i\omega} + \frac{1}{a} \right)^2 \right] + \frac{\Omega_1}{i\omega} \left[\frac{1}{a_2^2} - \left(\frac{\beta}{i\omega} + \frac{1}{a} \right)^2 \right] = 0,$$

a stąd bez trudu znajdziemy

$$\left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right)^2 = (1 - \Theta_0) \frac{\rho_0}{E} + \frac{K_b + \kappa \frac{\Omega_1}{i\omega} (1 + \nu) - \frac{\nu}{3}}{1 + \frac{\Omega_1}{i\omega}} \Theta_0 \frac{\rho_0}{P_0}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(3.21) \quad K_1 = \frac{x + K_b \frac{i \omega}{\Omega_1}}{1 + \frac{i \omega}{\Omega_1}}$$

możemy zapisać to inaczej

$$(3.22) \quad \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right)^2 = (1 - \Theta_0) \frac{\varrho_0}{E} + \frac{K_1 (1 + \nu) - \frac{\nu}{3}}{\left[x (1 + \nu) - \frac{\nu}{3} \right] \left[K_b (1 + \nu) - \frac{\nu}{3} \right]} \Theta_0 \frac{\varrho_0}{p_0}$$

Otrzymany wzór pozwala obliczyć obydwie poszukiwane wielkości a i β , gdyż wszystkie wielkości występujące z prawej strony równości są dane [ϱ_0 jest znaną funkcją Θ_0 (2.4.1) i wynosi

$$\varrho_0 = \Theta_0 \varrho_{g0} + (1 - \Theta_0) \varrho_{c0},$$

$K_b \approx 1$, $\nu \approx 0$, a jedynie K_1 zależy od zmiennej niezależnej ω]. Jednakże obliczenie pierwiastka funkcji zespolonej i następne oddzielenie części rzeczywistej od urojonej jest dosyć żmudne. Dlatego też wyrażenia dla a i β wyprowadzimy bezpośrednio ze wzoru (3.20).

Przyrównajmy do zera część rzeczywistą równania (3.20)

$$\frac{1}{a_1^2} + \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 + 2 \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{\beta}{\omega} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = 0$$

oraz jego część urojoną

$$\frac{1}{a_2^2} + \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2 - 2 \frac{\omega}{\Omega_1} \frac{\beta}{\omega} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Z otrzymanego układu równań możemy obliczyć dwie niewiadome $1/a^2$ i β/ω . Po przeprowadzeniu obliczeń znajdujemy

$$(3.23) \quad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}}{\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}} \right)^2} \right]$$

oraz

$$(3.24) \quad \beta = \frac{a \omega}{2} \frac{\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega}}$$

Zamiast wzorów (3.23) i (3.24) możemy napisać w przybliżeniu

$$(3.25) \quad a = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega}}{\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}}}$$

oraz

$$(3.26) \quad \beta = \frac{\omega}{2} \frac{\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega}\right) \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}\right)}}$$

Błąd popełniany przy tym jest zależny od wielkości liczby

$$(3.27) \quad \delta = \frac{\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}}{\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}}.$$

Możemy bowiem wzór (3.23) przekształcić do postaci

$$a = \sqrt{\frac{\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega}}{\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + \delta^2)^{1/2} \right]^{-1/2}},$$

a następnie dla $\delta < 1$ rozwinąć w szereg funkcję występującą w nawiasie:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + \delta^2)^{1/2} \right]^{-1/2} &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 - \frac{1}{8} \delta^4 + \dots \right) \right]^{-1/2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 - \frac{1}{16} \delta^4 + \dots \right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{8} \delta^2 + \frac{7}{128} \delta^4 - \dots \end{aligned}$$

Pozostawiając z niego jedynie pierwszy wyraz otrzymujemy w stosunku do wzoru (3.23) przybliżenie, którego błąd względny jest rzędu $\delta^2/8$.

Łatwo wykazać, że $\delta < 1$, gdyż

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} &= \left[\frac{1}{K_b + \frac{3K_b - 1}{3} \nu} - \frac{1}{\kappa(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} \right] \Theta_0 \frac{e_0}{p_0} < \left[1 - \frac{1}{\kappa(1 + \nu)} \right] \Theta_0 \frac{e_0}{p_0} = \\ &= \frac{\kappa(1 + \nu) - 1}{\kappa(1 + \nu)} \Theta_0 \frac{e_0}{p_0} \end{aligned}$$

$$(K_b > 1, \text{ a } \nu > 0 \text{ i } \kappa > 0),$$

zaś

$$\frac{\omega}{\Omega_1} \frac{1}{a_1^2} + \frac{\Omega_1}{\omega} \frac{1}{a_2^2} > \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\omega}{\Omega_1} + \frac{\Omega_1}{\omega} \right) > \frac{2}{a_1^2} > \frac{2}{\kappa(1+\nu)} \Theta_0 \frac{\rho_0}{p_0}$$

[$1/a_1^2 < 1/a_2^2$, a funkcja $(\omega/\Omega_1 + \Omega_1/\omega)$ posiada w zakresie dodatnich wartości zmiennej ω/Ω_1 jedyne minimum 2 dla $\omega/\Omega_1 = 1$].

Stąd

$$(3.28) \quad \delta < \frac{\kappa(1+\nu) - 1}{2}.$$

Dla mieszaniny wody z powietrzem ($\kappa = 1,4$, $\nu \approx 0$) mamy $\delta < 0,2$, zaś $\delta^2/8 < 0,005$.

7.5. Zestawienie wyników i wniosków. Zbadajmy teraz, jak zmieniają się wielkości a i β dla bardzo małych i bardzo dużych częstości ω . Gdy $\omega/\Omega_1 < 1$, wtedy funkcje dla a i β możemy rozłożyć na szeregi:

$$(3.29) \quad a = a_2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= a_2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 + \dots \right\}$$

oraz

$$(3.30) \quad \beta = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \left(\frac{\omega}{\Omega_1} a_2 \right) \left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 \right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{a_2 \omega^2}{2 \Omega_1} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Szeregi te jako iloczyny szeregów bezwzględnie zbieżnych są bezwzględnie zbieżne.

Podobnie dla

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{\omega}{\Omega_1} > 1,$$

możemy rozwinąć te funkcje w szeregi według potęg Ω_1/ω . Otrzymamy

$$(3.31) \quad a = a_1 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) (a_1 \Omega_1)^2 \frac{1}{\omega^2} + \dots \right]$$

oraz

$$(3.32) \quad \beta = \frac{\Omega_1 a_1}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_1^2} \right) (a_1 \Omega_1)^2 \frac{1}{\omega^2} + \dots \right].$$

Ze wzoru (3.32) widać, że gdy częstość nieograniczenie rośnie, współczynnik tłumienia β dąży do stałej wartości

$$(3.33) \quad \beta_\infty = \frac{\Omega_1 a_1}{2} \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right).$$

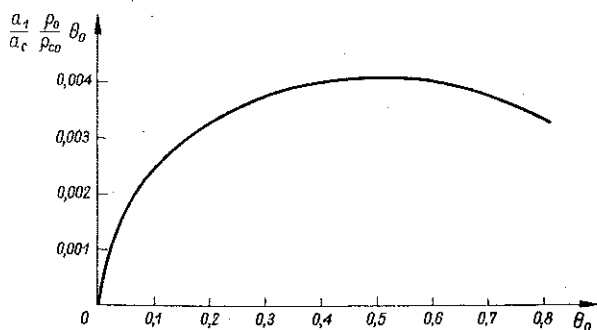
Wprowadzając β_∞ i odrzucając małe wyższych rzędów możemy podać następujące wzory przybliżone:

$$(3.34) \quad a \approx \begin{cases} a_2 \left[1 + \frac{a_2^2 \beta_\infty}{a_1 \Omega_1} \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 \right] & \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \ll 1 \right), \\ a_1 \left[1 - \frac{a_1 \beta_\infty}{\Omega_1} \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right)^2 \right] & \left(\frac{a_2 \omega}{a_1 \Omega_1} \gg 1 \right) \end{cases}$$

oraz

$$(3.35) \quad \beta \approx \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} \beta_\infty \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \right)^2 & \left(\frac{\omega}{\Omega_1} \ll 1 \right), \\ \beta_\infty \left[1 - \frac{1 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2}{2} \left(\frac{\Omega_1}{\omega} \right)^2 \right] & \left(\frac{a_2 \omega}{a_1 \Omega_1} \gg 1 \right). \end{cases}$$

Analizując wykresy funkcji $a(\omega)$, $\beta(\omega)$ (por. rys. 4 i rys. 5) możemy wyodrębnić cztery charakterystyczne wielkości: Ω_1 , a_1 , a_2 i β_∞ . Funkcje a i β rosną wraz ze wzrostem częstości ω . Prędkość a rośnie od a_2 dla $\omega = 0$ do a_1 dla $\omega \rightarrow \infty$.



Rys. 3

Znaczy to, że przy małych częstościach [por. p. 2 założenie (2)] zachodzi prawie idealna wymiana ciepła między cieczą i gazem, a przy częstościach dużych [por. p. 2 założenie (1)] wymiana ciepła zanika. Współczynnik tłumienia β rośnie od zera w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu częstości, a następnie dąży asymptotycznie do β_∞ dla dużych częstości. Dla częstości kołowych ω bliskich Ω_1 zmienia się charakter obu funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$. Z parabolicznego wzrostu dla $\omega < \Omega_1$ funkcje te dla $\omega > \Omega_1$ zbliżają się asymptotycznie do swych granicznych wartości w nieskończoności.

Spośród czterech wielkości Ω_1 , a_1 , a_2 i β_∞ zbadaliśmy w p. 6.2 wpływ stosunku objętościowego θ_0 i promienia pęcherzyka r_0 na a_1 i a_2 . Obecnie rozpatrzymy jeszcze zmienność Ω_1 i β_∞ .

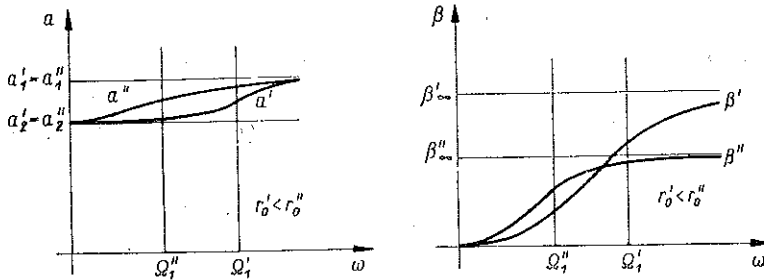
Ponieważ w praktycznie interesujących nas przypadkach zachodzi na ogół

$$\nu = 2 \frac{\sigma}{p_0 r_0} \approx 0, \quad \frac{c_p'}{c'} \approx 0,$$

(np. dla mieszaniny wody z powietrzem $c'_p/c' \approx 10^{-3}$), więc dla Θ_0 niezbyt bliskich jedności mamy

$$(3.36) \quad \Omega_1 \approx 3 \frac{a^*}{c'_p r_0}.$$

Jak widać, w interesującym nas przypadku ($\Theta_0 < 1$), Ω_1 nie zależy od Θ_0 , natomiast jest odwrotnie proporcjonalne do r_0 .



Rys. 4

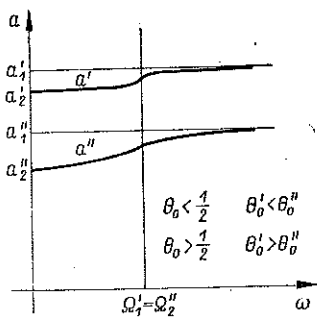
Podstawmy teraz Ω_1 ze wzoru (3.36), $1/a_1^2$ i $1/a_2^2$ ze wzoru (3.4) do (3.33). Uwzględniając $\nu \approx 0$ i $K_b \approx 1$ otrzymamy

$$(3.37) \quad \beta_\infty \approx \frac{a_1}{2} \left(3 \frac{a^*}{c'_p r_0} \right) \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \Theta_0 \frac{\rho_0}{p_0} \right) \approx \left(\frac{3}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{a^*}{c'_p a_g} \frac{a_c}{a_g} \frac{\rho_{c0}}{\rho_{g0}} \right) \frac{1}{r_0} \left(\frac{a_1}{a_c} \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} \Theta_0 \right).$$

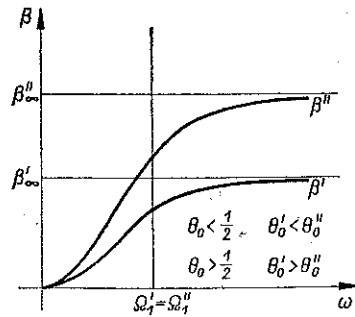
Pierwszy nawias tego wyrażenia nie zależy ani od Θ_0 , ani od r_0 , drugi ($\nu \approx 0$) zależy tylko od Θ_0 . Widzimy więc, że β_∞ jest odwrotnie proporcjonalne do r_0 , a zależność β_∞ od Θ_0 jest zawarta w czynniku

$$\frac{a_1}{a_c} \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} \Theta_0.$$

Na wykresie (rys. 3) jest podana ta zależność dla mieszaniny wody z powietrzem ($a_c = 1460$ m/sek, $a_g = 344$ m/sek, $\rho_g/\rho_c = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\nu \approx 0$).



Rys. 5a



Rys. 5b

Na wykresach (rys. 4 i 5) podany jest jakościowy wpływ zmiany promienia pęcherzyka r_0 oraz wydatku objętościowego Θ_0 na przebieg funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$.

8. Wnioski z zależności wyprowadzonych w p. 4

8.1. Obliczenie prędkości rozchodzenia się płaskich fal harmonicznych i ich tłumienia. Przyjęcie w p. 4.1 dodatkowych założeń pomocniczych doprowadziło do układu równań (2.70). Aby istniały niezerowe rozwiązania φ , s , π_g , π_c i ξ , wyznacznik tego układu powinien być równy zeru, czyli

$$(3.38) \quad \begin{vmatrix} \left(\beta + i \frac{\omega}{a}\right)^2 & i\omega & 0 & 0 & 0 \\ i\omega & 0 & 0 & \frac{p_0}{\varrho_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Theta_0} & 0 & -\frac{1-\Theta_0}{\Theta_0} \frac{p_0}{E} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3K_2 \\ 0 & 0 & 1+\nu & -1 & \nu + \left(\frac{\omega}{\Omega_b}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

W wyznaczniku tym niewiadomą jest wielkość $(\beta + i\omega/a)^2$. Możemy ją obliczyć z przyrównanego do zera rozwinięcia wyznacznika (3.38).

Po wykonaniu obliczeń i przekształceniu otrzymujemy wynik

$$(3.39) \quad \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega}\right)^2 = (1 - \Theta_0) \frac{\varrho_0}{E} + \frac{1}{K_2(1+\nu) - \frac{1}{3} \left[\nu + \left(\frac{\omega}{\Omega_b}\right)^2 \right]} \Theta_0 \frac{\varrho_0}{p_0}.$$

Obliczając pierwiastek z prawej strony wzoru oraz rozdzielając części rzeczywistą i urojoną możemy otrzymać prędkość a i współczynnik tłumienia β jako funkcję ω . Przeprowadzanie tych obliczeń byłoby bardzo żmudne i dlatego zostanie tu pominięte, natomiast dla wyciągnięcia wniosków zanalizujemy, jaki przebieg mają funkcje $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ oraz jak się zachowują przy zmianie parametrów Θ_0 i ν .

Na początku rozpatrzmy własności wchodzącej do K_2 funkcji $A(\omega/\Omega_g)$. Funkcja ta (2.66) jest iloczynem $3\Omega_g/i\omega$ przez odwrotność sumy dwóch wyrazów:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g} \coth \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} - 1}} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{\lambda_g}{\lambda_c}}{\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_c} + 1}}$$

Można wykazać, że gdy

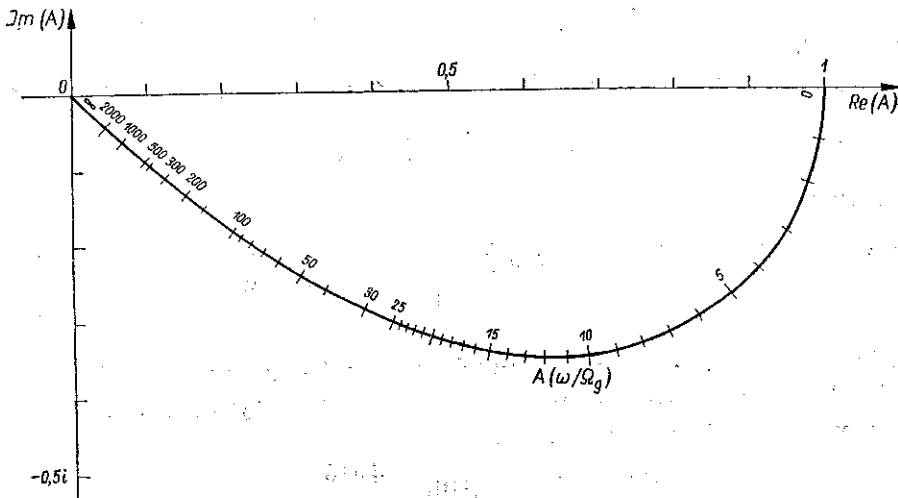
$$(3.40) \quad \frac{\lambda_g}{\lambda_c} \ll 1, \quad \frac{\Omega_c}{\Omega_g} = \frac{\lambda_c c_p'}{\lambda_g c'} < 1,$$

to wyraz drugi jest dużo mniejszy od pierwszego i można go pominąć. Wtedy

$$(3.41) \quad A\left(\frac{\omega}{\Omega_g}\right) = 3 \frac{\Omega_g}{i\omega} \left(\sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g} \coth \sqrt{\frac{i\omega}{\Omega_g}} - 1} \right).$$

Wykres funkcji $A(\omega/\Omega_g)$ w płaszczyźnie Gaussa z zaznaczonymi wartościami zmiennej niezależnej ω/Ω_g jest podany na rys. 6.

Otrzymane przybliżenie dla A nie tylko ułatwia tok obliczeń, ale i eliminuje ze wzoru (3.39) współczynnik przewodnictwa cieplnego λ_c oraz



Rys. 6

c' cieczy. Fizycznie oznacza to, że gdy spełnione są warunki (3.40), to przewodzenie ciepła w cieczy jest tak szybkie, że o wymianie ciepła między obu składnikami decyduje przewodnictwo w gazie.

Ciecze:

	λ/λ_w	c'/c'_w
Woda	1	1
Benzyna	0,21	0,25
Spirytus etyl.	0,32	0,39
Gliceryna	0,51	0,73
Rtęć	17,0	0,45

Gazy

	λ/λ_w	c'_p/c'_w
Powietrze	0,045	0,00031
Tlen	0,047	0,00031
Azot	0,045	0,00031
Wodór	0,32	0,00030
CO ₂	0,026	0,00038
Metan	0,055	0,00037

Dla orientacji, w jakim stopniu spełnione są warunki (3.40) pozwalające na zastosowanie wzoru przybliżonego (3.41), podajemy powyżej względne wielkości współczynników przewodnictwa i ciepła właściwego mierzonych w stosunku do wody.

8.2. Przypadek małych częstości ω . Aby znaleźć przybliżone wartości prędkości $a(\omega)$ i współczynnika tłumienia $\beta(\omega)$ dla bardzo małych częstości ω , znajdziemy pochodne

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{a} \right), \quad \frac{d\beta}{d\omega}, \quad \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$$

dla $\omega = 0$.

Zauważymy przede wszystkim, że dla $\omega = 0$ mamy

$$(3.42) \quad \left(\frac{1}{a} - i \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\beta}{\omega} \right) = \frac{1}{a_2^*}.$$

Oznaczyliśmy tu

$$(3.43) \quad \frac{1}{a_2^{*2}} = (1 - \Theta_0) \frac{\rho_0}{E} + \frac{1}{(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} \Theta_0 \frac{\rho_0}{p_0}.$$

(Wielkość a_2^* jest, jak łatwo się przekonać porównując wzór (3.43) z (3.4), bardzo bliska prędkości a_2 ; przyjmując $K_b = 1$ otrzymujemy $a_2^* = a_2$).

Ze wzoru (3.42) wynika od razu

$$(3.44) \quad a(0) = a_2^*, \quad \beta(0) = \frac{d\beta(0)}{d\omega} = 0.$$

Różniczkując względem ω równanie (3.39) i podstawiając $\omega = 0$ otrzymujemy

$$2 \frac{1}{a_2^*} \left[\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{a(0)} \right) - i \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{d\beta}{d\omega} \omega - \beta}{\omega^2} \right] = - \frac{i}{15} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1 + \nu}{\left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)^2} \frac{1}{\Omega_g} \Theta_0 \frac{\rho_0}{p_0}.$$

Stąd

$$(3.45) \quad \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{a(0)} \right) = 0, \quad \frac{d^2\beta(0)}{d\omega^2} = \frac{1}{15} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1 + \nu}{\left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)^2} \frac{a_2^*}{\Omega_g} \Theta_0 \frac{\rho_0}{p_0}.$$

Z obliczonych pochodnych (3.44) i (3.45) wnosimy, że prędkość a dla małych częstości niewiele się zmienia pozostając w przybliżeniu stałą

$$a \approx a_2^*,$$

zaś współczynnik tłumienia β rośnie w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu częstości

$$(3.46) \quad \beta = \frac{\kappa - 1}{30} \frac{1 + \nu}{\left(1 + \frac{2}{3}\nu\right)^2} \frac{\rho_0}{\rho_{g0}} \frac{a_2^*}{\Omega_g a_g^2} \Theta_0 \omega^2.$$

8.3. Przypadek dużych częstości ω . Zajmiemy się teraz dużymi częstościami kołowymi ω , tzn. takimi, dla których $\Omega_b/\omega \ll 1$ i $\Omega_g/\omega \ll 1$.

Przekształćmy wzór (3.39) do postaci

$$a_3 \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right) = \left\{ 1 - 3 \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 - [3K_2(1 + \nu) - \nu] \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^2} \right\}^{1/2}$$

[wprowadziliśmy tu a_3 według wzoru (3.6)] i rozwińmy w szereg potęgowy

$$(3.47) \quad a_3 \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right) = 1 - \frac{3}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^2 + \\ - \frac{3}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left[3K_2(1 + \nu) - \nu + \frac{3}{4} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \right] \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^4 + \dots$$

Rozwińmy teraz w szereg potęg odwrotności $1/\sqrt{\omega}$ funkcję

$$K_2 = \frac{\kappa}{1 + (\kappa - 1)A}$$

Gdy $\omega/\Omega_g \rightarrow \infty$, to $\coth \sqrt{i\omega/\Omega_g} \rightarrow 1$, zaś

$$A \rightarrow 3 \left(\sqrt{\frac{\Omega_g}{i\omega}} - \frac{\Omega_g}{i\omega} + \dots \right),$$

gdzie dalsze wyrazy są małymi wyższego rzędu niż Ω_g/ω . Stąd dla $3(\kappa - 1)\sqrt{\Omega_g/\omega} \ll 1$ otrzymujemy

$$(3.48) \quad K_2 = \kappa [1 + (\kappa - 1)A]^{-1} = \kappa - 3\kappa(\kappa - 1) \sqrt{\frac{\Omega_g}{i\omega}} + \dots$$

Podstawmy wreszcie to rozwinięcie do (3.47), a z otrzymanego w ten sposób szeregu

$$a_3 \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right) = 1 - \frac{3}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^2 - \frac{9}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left[\kappa(1 + \nu) - \frac{\nu}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \right] \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^4 + \frac{27}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \kappa(\kappa - 1)(1 + \nu) \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^4 \sqrt{\frac{\Omega_g}{2\omega}} (1 - i) + \dots$$

znajdujemy rozwinięcia

$$(3.49) \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{a_3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \left(\frac{\Omega_b}{\omega} \right)^2 + \dots \right]$$

oraz

$$(3.50) \quad \beta = \frac{27\sqrt{2}}{4} \kappa(\kappa - 1) \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} (1 + \nu) \frac{\Omega_b}{a_3} \left(\frac{\Omega_b^3 \sqrt{\Omega_g}}{\omega^3} + \dots \right).$$

Jak więc widzimy, w miarę nieskończonego wzrastania częstotliwości kołowej ω prędkość a maleje dążąc do obliczonej uprzednio wielkości a_3 , zaś współczynnik tłumienia szybko maleje do zera.

8.4. Zjawisko częstotliwości rezonansowych. Zajmiemy się obecnie przypadkiem częstotliwości kołowych ω bliskich częstotliwości drgań własnych pęcherzyka Ω_r . Podstawmy wyrażenie

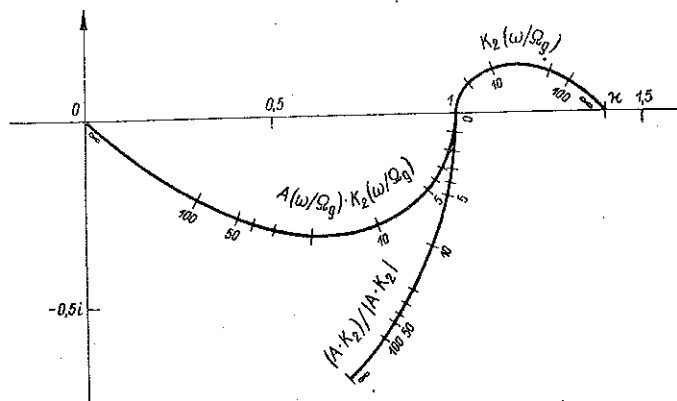
$$K_2 = \kappa + (K_2 - \kappa) = \kappa - (\kappa - 1) AK_2$$

do wzoru (3.39) wprowadzając również wielkości Ω_r ze wzoru (2.75) i a_3 z (3.6), otrzymamy

$$(3.51) \quad \left(\frac{1}{a} - i \frac{\beta}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{a_3^2} \left[1 - \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{1}{(\kappa - 1) AK_2 (1 + \nu) + \frac{1}{3} \frac{\omega^2 - \Omega_r^2}{\Omega_b^2}} \right]$$

Wzór ten możemy sprowadzić do wygodniejszej dla zanalizowania postaci

$$(3.52) \quad \frac{a_3}{a} - i \frac{a_3 \beta}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \times \frac{1}{\frac{AK_2}{|AK_2|} + \frac{1}{3(\kappa - 1)(1 + \nu)|AK_2|} \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_b} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_r} \right)^2 - 1 \right]}}$$



Rys. 7

Wraz ze zmianą częstotliwości ω zmieniają się jej funkcje AK_2 , $|AK_2|$ i $AK_2/|AK_2|$. Ich wielkości dla poszczególnych wartości zmiennej ω/Ω_g są podane na wykresach (rys. 7). Gdy częstotliwość kołowa ω zmienia się w niewielkim zakresie około wartości Ω_r (czyli gdy $(\omega/\Omega_r)^2 - 1$ jest wielkością bardzo małą), to funkcja

$$(3.53) \quad \zeta = \frac{1}{3(\kappa - 1)(1 + \nu)|AK_2|} \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_b} \right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_r} \right)^2 - 1 \right],$$

może się zmieniać około zera w zakresie bardzo dużym (szczególnie dla dużych ω/Ω_g , gdy $|AK_2| \rightarrow 0$), zaś funkcje $|AK_2|$ i $AK_2/|AK_2|$ zmieniać się wtedy będą nieznacznie. Dla jakościowego zanalizowania przebiegu $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ w okolicy częstości rezonansowej Ω_r , założymy, że gdy ζ zmienia się w dosyć szerokich granicach, wielkości

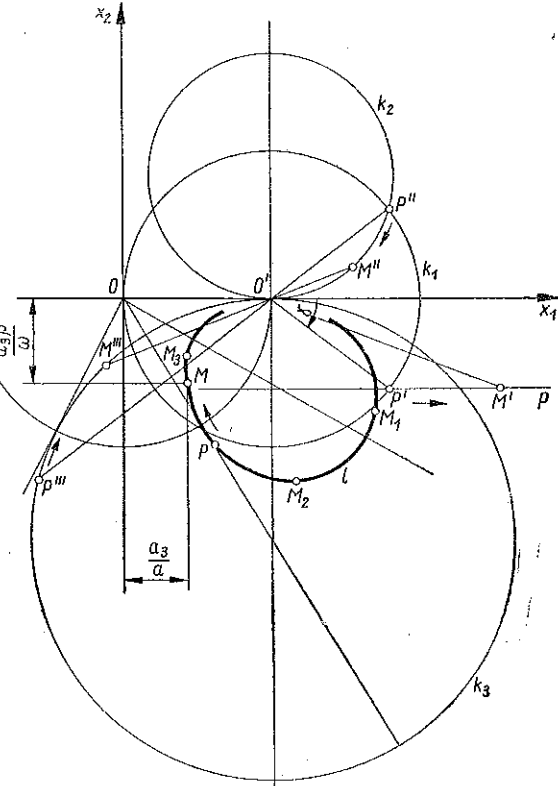
$$(3.54) \quad m = \frac{1}{(\alpha - 1)(1 + \nu)|AK_2|} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0}, \quad \gamma = \arg \frac{AK_2}{|AK_2|}$$

pozostają stałymi.

Wprowadzając zmienną ζ (3.53) oraz stałe m i γ (3.5), możemy wzór (3.52) napisać w postaci

$$(3.55) \quad \frac{a_3}{a} - i \frac{a_3 \beta}{\omega} = \sqrt{1 - m \frac{1}{e^{i\gamma} + \zeta}}$$

Na płaszczyźnie zespolonej (rys. 8) liczbie $e^{i\gamma}$ odpowiada wektor $\overrightarrow{O'P'}$ o jednostkowym module, tworzący kąt γ z osią rzeczywistą x_1 . Na prostej p , równoległej do osi x_1 znajdują się końce M' wektorów $\overrightarrow{O'M'}$ odpowiadających liczbom $e^{i\gamma} + \zeta$ (ζ jest oczywiście zawsze rzeczywiste). Odwrotności $1/(e^{i\gamma} + \zeta)$ odpowiada wektor $\overrightarrow{O'M''}$ o końcu położonym na okręgu k_2 o średnicy $|1/\sin \gamma|$ będącym inwersją prostej p względem okręgu jednostkowego k_1 . Mnożąc wektory $\overrightarrow{O'M''}$ przez $-m$ otrzymujemy wektory $\overrightarrow{O'M'''} o końcach M''' położonych na okręgu k_3 o średnicy $|m/\sin \gamma|$. Te same punkty M''' okręgu są końcami wektorów $\overrightarrow{OM''''}$ odpowiadających liczbom zespolonym$



Rys. 8

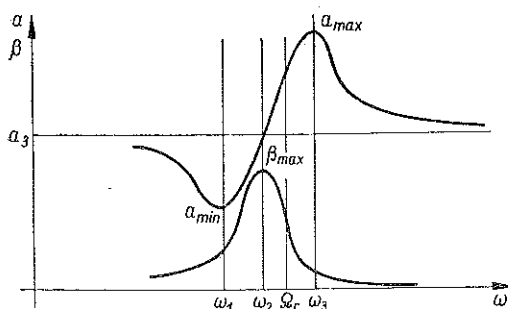
$$1 - m \frac{1}{e^{i\gamma} + \zeta}$$

($\overline{OO'} = 1$). Dzieląc kąt $x_1 \overline{OM''}$ na połowę i odcinając odcinek $\overline{OM} = \sqrt{\overline{OM''}}$ znajdujemy wektor \overline{OM} odpowiadający liczbie zespolonej

$$\sqrt{1 - m \frac{1}{e^{i\gamma} + \xi}}$$

(bierzemy przy tym tylko ten z dwóch pierwiastków, który posiada dodatnią część rzeczywistą). Przy tej ostatniej transformacji punkty okręgu k_3 przechodzą w punkty linii l .

Jak wynika ze wzoru (3.55), część rzeczywista odpowiadającej wektorowi \overline{OM} liczby zespolonej jest równa a_3/a , zaś opatrzona przeciwnym znakiem część urojona wynosi $a_3\beta/\omega$. Gdy częstość kołowa ω zmienia się w niewielkim zakresie w okolicy częstości rezonansowej Ω_r , wtedy odpowiadający jej punkt M przemieszcza się po linii l przechodząc w miarę wzrostu ω punkty M_1, M_2 i M_3 .



Rys. 9

Rozpatrzmy, jak zmieniają się wówczas wielkości a i β .

Oznaczmy przez ω_1, ω_2 i ω_3 częstości odpowiadające wektorom $\overline{OM}_1, \overline{OM}_2$ i \overline{OM}_3 (por. rys. 8 oraz rys. 9). Gdy ω rośnie przechodząc przez wartość ω_1 , wtedy (rys. 8) $a_3\beta/\omega$ rośnie, a a_3/a osiąga maksimum, czyli prędkość a osiąga minimum (rys. 9). Przy dalszym wzroście ω osiąga maksimum wyrażenia $a_3\beta/\omega$ dla $\omega = \omega_2$.

Stąd możemy wnosić, że β osiąga maksimum β_{max} dla wartości niewiele większej od ω_2 . Zaś dla $\omega = \omega_3$ osiąga maksimum a_{max} prędkość a , po czym dąży ona asymptotycznie do a_3 .

Jak to również wynika z konstrukcji przeprowadzonej na rys. 8, wraz ze wzrostem średnicy okręgu

$$(3.56) \quad \frac{m_1}{\sin \gamma} = \frac{1}{(\alpha - 1)(1 + \nu)} \frac{E}{p_0} \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{1}{\operatorname{Im} \left[A \left(\frac{\omega}{\Omega_g} \right) K_2 \left(\frac{\omega}{\Omega_g} \right) \right]}$$

rosną również a_{max} i β_{max} , zaś a_{min} maleje.

8.5. Zestawienie wyników i wnioski. Zestawimy teraz wnioski wypływające z obliczeń przeprowadzonych w pp. 8.1 - 8.4. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że ze względu na założenia przyjęte w p. 4.1 odległość między pęcherzykami powinna być dostatecznie duża, czyli zawartość gazu w mieszaninie powinna być mała: $\Theta_0 \ll 1$.

Również wpływ napięcia powierzchniowego występujący w wyrażeniu ν o bardzo małej wartości liczbowej można pominąć.

Wtedy $\Theta^0/(1-\Theta_0) \approx \Theta_0$ i $\Omega_r^2 \approx 3\kappa\Omega_b^2$, a wzór (3.39) możemy zastąpić wzorem przybliżonym

$$(3.57) \quad \left(\frac{a_3}{a} - i \frac{a_3 \beta}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \frac{\Theta_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa} AK_2}.$$

Dla małych częstości otrzymujemy wówczas por. (3.46)

$$(3.58) \quad \beta = \frac{\beta''(0)}{2} \left(\frac{\omega}{\Omega_g}\right)^2,$$

gdzie przez

$$(3.59) \quad \beta''(0) = \left(\frac{1}{15} \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\lambda_g}{c_\nu a_g} \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \frac{a_c}{a_g}\right) \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{a_c^*}{a_c} \frac{\varrho_0}{\varrho_{c0}} \Theta_0\right)$$

oznaczyliśmy drugą pochodną β względem ω/Ω_g przy $\omega/\Omega_g = 0$. Podobnie dla dużych częstości otrzymamy [por. (3.49)]

$$(3.60) \quad a = a_3 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \frac{a_c^2}{a_g^2}\right) \Theta_0 \left(\frac{\Omega_r}{\omega}\right)^2 + \dots\right]$$

oraz [por. (3.50)]

$$(3.61) \quad \beta = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (\kappa-1) \sqrt{\frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \frac{a_c}{a_g}}\right) \frac{1}{r_0} \Theta_0 \left[\frac{\Omega_r^3 \sqrt{\Omega_g}}{\omega^{7/2}} + \dots\right].$$

Nie wiemy jeszcze, jaki przebieg mają funkcje $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ dla pośrednich wartości częstości ω zawartej między Ω_g a Ω_r . W zależności od parametrów określających własności mieszaniny mogą przy tym zachodzić dwa przypadki:

$$(I) \quad \Omega_g < \Omega_r, \quad (II) \quad \Omega_r < \Omega_g.$$

Poniżej zajmiemy się jedynie przypadkiem pierwszym ($\Omega_g < \Omega_r$) jako praktycznie ważniejszym (dla mieszaniny wody z pęcherzykami powietrza o promieniu $r_0 = 0,1$ mm jest w normalnych warunkach $\Omega_g/\Omega_r \approx 0,021$).

Gdy

$$\Omega_g < \omega < \Omega_r,$$

wtedy

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 < 1, \quad \frac{\kappa-1}{\kappa} |AK_2| < \frac{\kappa-1}{\kappa} < 1.$$

Zaś dla częstości ω niezbyt bliskich częstości rezonansowej Ω_r słuszna jest również nierówność

$$\left|\left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa} AK_2\right| < 1.$$

Stąd możemy funkcję (3.57) rozwinąć w szereg

$$(3.62) \quad \left(\frac{a_3}{a} - i \frac{a_3 \beta}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \Theta_0 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \Theta_0 \left\{ \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa} AK_2\right] + \dots \right\}.$$

Zwróćmy uwagę, że dla małych Θ_0 i $\nu \approx 0$ otrzymujemy ze wzorów (3.4) i (3.6) przybliżoną wartość

$$(3.63) \quad \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \approx 1 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \Theta_0.$$

Wzór (3.62) możemy więc napisać w postaci

$$\left(\frac{a_1}{a} - i \frac{a_1 \beta}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g} \frac{a_1}{a_3}\right)^2 \Theta_0 \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa} AK_2 \right] + \dots$$

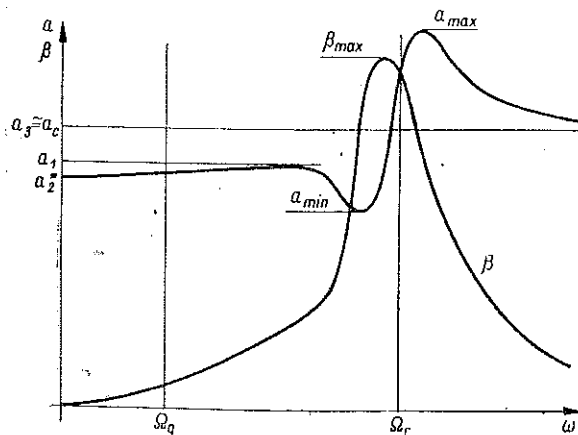
Gdy Θ_0 jest bardzo małe, możemy jeszcze raz prawą stronę otrzymanego wyrażenia rozwinąć w szereg. Po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej znajdujemy rozwinięcie

$$(3.64) \quad \frac{a_1}{a} \approx 1 + \left[\frac{1}{2} \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \right] \left[\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 \Theta_0 \right] \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_r}\right)^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \operatorname{Re}(AK_2) \right] + \dots,$$

oraz

$$(3.65) \quad \beta = \left(\frac{1}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\lambda_g}{c_p a_g} \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \frac{a_c}{a_g} \right) \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{a_c a_1}{a_3^2} \Theta_0 \right) \left[\frac{\omega}{\Omega_g} \operatorname{Im}(-AK_2) \right] + \dots$$

Zestawiając razem wyprowadzone wzory zanalizujemy jakościowo wykresy funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ dla przypadku $\Omega_g < \Omega_r$. Możemy przy tym wyodrębnić kilka wielkości charakterystycznych. Są nimi dwie częstotliwości kołowe



Rys. 10

$$\Omega_g = \frac{\lambda_g}{c_p} \frac{1}{r_0^2},$$

$$\Omega_r = \sqrt{3\kappa \frac{p_0}{\varrho_{c0}} \frac{1}{r_0}},$$

pięć prędkości rozchodzenia się małych zaburzeń:

$$a_3 = \sqrt{\frac{E}{(1-\Theta_0)\varrho_0}},$$

$$a_1 = \frac{a_3}{\sqrt{1 + \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \Theta_0}},$$

$$a_2^* = \frac{a_3}{\sqrt{1 + \kappa \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_{g0}} \left(\frac{a_c}{a_g}\right)^2 \Theta_0}},$$

a_{min} i a_{max} oraz maksimum współczynnika tłumienia β_{max} .

Gdy ω rośnie przechodząc przez wartość Ω_g , nieznacznie rośnie również i a od a_2^* zbliżając się do a_1 (rys. 10). W dalszym ciągu dla częstości niewiele mniejszej od częstości rezonansowej a maleje do a_{min} , po czym szybko wzrasta do a_{max} przy częstości niewiele większej od Ω_r . Wreszcie dla dużych częstości ω wielkość a zbliża się asymptotycznie do swej granicznej wartości a_3 .

Współczynnik tłumienia β rośnie od zera (przy $\omega = 0$) w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu częstości. Następnie po przekroczeniu Ω_g wzrost β jest nieco powolniejszy [w przybliżeniu według wzoru (3.65)]. Wreszcie około częstości rezonansowej Ω_r następuje gwałtowny wzrost β do β_{max} , po czym dąży on asymptotycznie do zera (rys. 10).

Zastanowimy się jeszcze, jak wpływa zmiana parametrów mieszaniny Θ_0 i r_0 na przebieg funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$.

Charakterystyczne częstości Ω_g i Ω_r nie zależą od Θ_0 , natomiast maleją one wraz ze wzrostem promienia pęcherzyka r_0 . Maleje wówczas również i ich stosunek Ω_g/Ω_r .

Gdy rośnie Θ_0 , wzrastają również wielkości a_3 , a_{max} i β_{max} [por. (3.56)], zaś maleją wówczas a_1 , a_2^* (por. rys. 3) i a_{min} . Wpływ Θ_0 jest podany na rys. 11.

Zmiana promienia pęcherzyka r_0 nie wpływa na zmianę a_1 , a_2^* i a_3 . W niewielkim stopniu wpływa ona również na zmianę a_{min} , a_{max} i β_{max} . Wpływ r_0 na przebieg funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ podany jest na rys. 12.

9. Wnioski ogólne

Obliczenia oparte o wzajemnie wykluczające się założenia dodatkowe przyjęte w pp. 2, 3 i 4 prowadzą do różnych wyników.

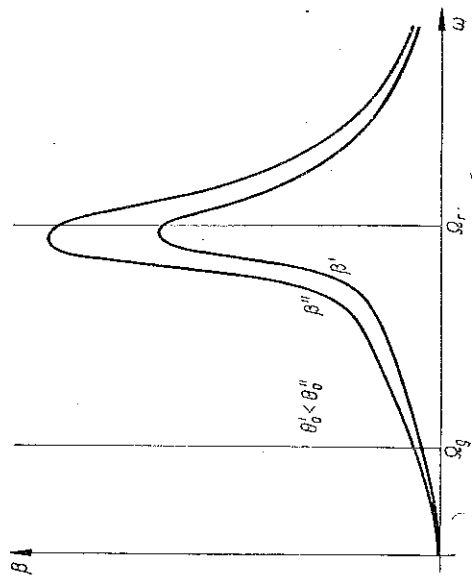
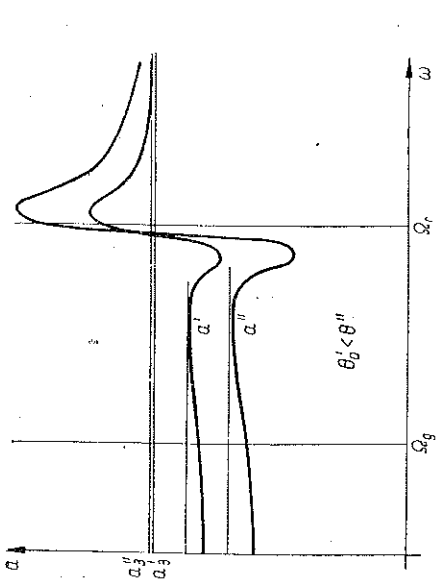
A więc przyjęcie, że w mieszaninie zachodzą jedynie pewne wybrane (por. p. 2) przemiany barotropowe, doprowadziło do wzorów (3.4) i (3.6), które możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{a_3^2} = (1 - \Theta_0) \frac{\rho_0}{E},$$

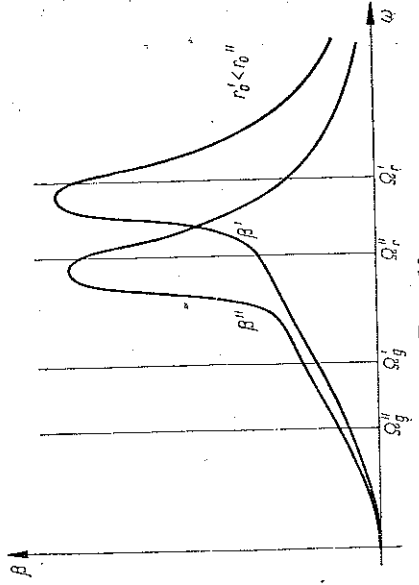
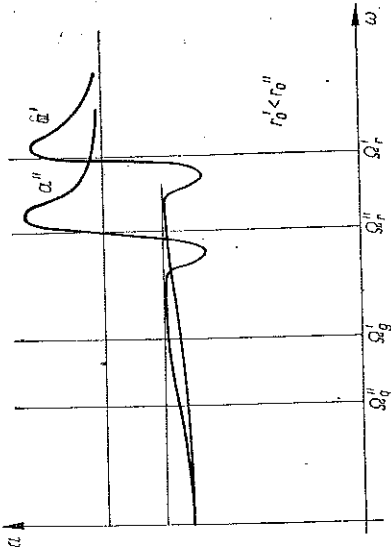
$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{a_3^2} \left[1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{E}{\rho_0} \frac{1}{\kappa(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} \right],$$

$$\frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{a_3^2} \left[1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{E}{\rho_0} \frac{1}{K_b(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}} \right] \quad (K_b \approx 1).$$

Jeśliby mieszanina podlegała rzeczywiście jednej z obranych przemian barotropowych, prędkość rozchodzenia się w niej jakiegokolwiek nieskończenie małego zaburzenia byłaby niezależna od jego charakteru, a tłu-



Rys. 11



Rys. 12

mienia nie byłoby wcale. Na przykład prędkość rozchodzenia się płaskich fal harmonicznycy byłaby niezależna od częstości (brak dyspersji fal).

Założenia wymiany ciepła przyjęte w p. 3 prowadzą do równania różniczkowego rozchodzenia się zaburzeń w mieszaninie [wzór (3.16)].

Stąd zaś znajdujemy prędkość i tłumienie płaskich fal harmonicznycy bądź to w postaci zespolonej [por. (3.22)]

$$\left(\frac{1}{a} - i\frac{\beta}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{a_3^2} \left\{ 1 + \frac{\Theta_0}{1 - \Theta_0} \frac{E}{p_0} \frac{K_1 \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right) (1 + \nu) - \frac{\nu}{3}}{\left[\kappa(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}\right] \left[K_b(1 + \nu) - \frac{\nu}{3}\right]} \right\},$$

bądź też po rozdzieleniu części rzeczywistej od urojonej w postaci wygodniejszych do obliczeń wzorów przybliżonych (3.25) i (3.26). Ze wzorów tych widać, że tak prędkość a jak i współczynnik tłumienia β zależą od częstości ω [(zjawisko dyspersji fal)].

W obu powyższych przypadkach nie przyjmowaliśmy żadnych założeń ograniczających zakresu rozpatrywanych przez nas nieskończenie małych zaburzeń, jak również nie wykorzystaliśmy podanego na początku (p. 1.1) założenia, że odległość między pęcherzykami powinna być dostatecznie duża (w stosunku do promienia pęcherzyka). Z równania falowego (2.24) lub równania (3.16) można wyprowadzić tak prawo rozchodzenia się fal harmonicznycy, jak i innych rodzajów zaburzeń (np. niewielkiego impulsu). Z drugiej strony, ponieważ odległość między pęcherzykami nie musi być duża, wyniki mogą się odnosić i do mieszanin z dużą zawartością gazu (np. do pian). Dopuszczalność rozszerzenia zakresu rozpatrywanych mieszanin wydaje się być tym bardziej usprawiedliwiona, iż zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami możemy pominąć w pianach wpływ bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy na różnicę ciśnień między cieczą a gazem. Za to dla dużych odległości między pęcherzykami wpływ bezwładności, szczególnie przy dużych częstościach drgań, jest tak znaczny, że nie uwzględniając go (por. p. 3) musimy się liczyć z rozbieżnościami z rzeczywistym przebiegiem zjawiska.

W p. 4 przyjmujemy jeszcze inne założenia uwzględniające wpływ wymiany ciepła i bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy na zmiany temperatury i ciśnień obu składników mieszaniny. Ograniczamy za to zakres rozpatrywanych zaburzeń jedynie do płaskich fal harmonicznycy, a zakres rozpatrywanych mieszanin jedynie do zawierających bardzo małą objętość gazu. Prędkość rozchodzenia się płaskich fal harmonicznycy oraz ich tłumienie można wówczas obliczyć ze wzoru (3.51). Również i w tym przypadku wielkości a i β zależą od częstości ω fali harmonicznej.

Porównując ze sobą wszystkie wyprowadzone wzory przytoczone powyżej oraz analizując przebiegi funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ (por. pp. 7.3 i 7.5) możemy wyciągnąć kilka ogólnych wniosków.

Przede wszystkim stwierdzamy, że obliczone w p. 6 przy założeniu przemian barotropowych prędkości a_1 , a_2 i a_3 są granicznymi prędkościami rozchodzenia się fal harmonicznycy przy założeniach pp. 3 i 4.

Dla bardzo małych częstości ω ($\omega \ll \Omega_1$ dla założeń p. 3 lub $\omega \ll \Omega_g$ i $\omega \ll \Omega_r$ dla założeń p. 4) prędkość bardzo mało różni się od prędkości a obliczonej przy założeniu idealnej wymiany ciepła między cieczą a gazem. Dla większych częstości $\omega \gg \Omega_1$ przy założeniach p. 3 lub $\Omega_g \ll \omega \ll \Omega_r$, gdy $\Omega_g/\Omega_r \ll 1$, przy założeniach p. 4 prędkość a jest bardzo bliska prędkości a_1 obliczonej przy założeniu braku wymiany ciepła między obu składnikami mieszaniny.

Fakt ten znajduje proste wytłumaczenie. Gdy okres drgań pęcherzyka w czasie rozchodzenia się w mieszaninie płaskiej fali harmonicznycy jest duży w porównaniu z czasem potrzebnym do wyrównania temperatur między gazem a cieczą ($1/\omega \gg 1/\Omega_1$ lub $1/\omega \gg 1/\Omega_g$), wtedy oba te składniki mają w przybliżeniu jednakowe temperatury. Gdy zaś jest odwrotnie, ciecz nie nadąża w odprowadzaniu ciepła od szybko zmieniającego swą temperaturę pęcherzyka gazu i jej temperatura pozostaje w przybliżeniu stała.

Gdy, tak jak to uczyniliśmy w p. 4, uwzględnimy jeszcze wpływ bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy, to stwierdzimy, że w czasie rozchodzenia się fali harmonicznycy powstaje nie tylko dodatkowa różnica ciśnień, ale i występuje przesunięcie fazowe między ciśnieniami gazu i cieczy (a zatem i między ciśnieniem cieczy a objętością pęcherzyka). Przy częstościach dużo mniejszych od częstości drgań własnych pęcherzyka ($\omega \ll \Omega_r$) to przesunięcie fazowe jest znikomo małe i jego wpływ można pominąć. Jednak przy częstościach dużych lub tego samego rzędu co Ω_r wpływ bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy na własności akustyczne mieszaniny jest dominujący. Wymienione wyżej przesunięcie fazowe decyduje o tym, że po przekroczeniu częstości rezonansowej Ω_r prędkość a posiada maksimum większe od a_3 , czyli mieszanina staje się jak gdyby «bardziej sztywne» niż w przypadku granicznym ($\omega \rightarrow \infty$, $a \rightarrow a_3$), gdy pęcherzyki gazu zachowują się jak kulki idealnie sztywne. Gdy bowiem przesunięcie fazowe między ciśnieniem cieczy a objętością pęcherzyka jest wystarczająco duże, chwilowemu wzrostowi ciśnienia odpowiada chwilowy wzrost (a nie ubytek) objętości gazu. A więc uwzględnienie bezwładności prowadzi do wniosku, że około częstości rezonansowej Ω_r prędkość a silnie rośnie od minimum do maksimum, po czym maleje do granicznej wartości a_3 odpowiadającej przemianie barotropowej mieszaniny o nieziennej objętości pęcherzyków ($r = \text{const}$).

W dalszym ciągu porównując przebiegi funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ dla różnych założeń p. 3 i p. 4 widzimy, że gdy $\omega \ll \Omega_r$ oraz $\Omega_g \ll \Omega_r$, to jakościowo są one do siebie podobne.

Tak jak prędkość $a(\omega)$ obliczona ze wzoru (3.25) rośnie od a_2 i zbliża się asymptotycznie do a_1 , tak samo obliczona ze wzoru (3.51) rośnie od $a_2^* \approx a_2$ i zbliża się do a_1 , zaś współczynnik tłumienia $\beta(\omega)$ rośnie w obu przypadkach w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu częstości. Częstości Ω_1 i Ω_g spełniają w obu przypadkach podobną rolę — są one odwrotnościami czasu relaksacji dla wymiany ciepła między obu składnikami.

We wstępie zaznaczyliśmy, że zajmować się będziemy jedynie rozchodzeniem się zaburzeń w «idealnej mieszaninie», której własności mogą tylko w przybliżeniu być odzwierciedleniem własności mieszaniny rzeczywistej. Zastanówmy się, w jakim stopniu przyjęte przez nas założenia są słuszne.

Podstawowymi założeniami przyjętymi przez nas w p. 1.1 są założenia o równomiernym rozproszeniu gazu w mieszaninie traktowanej jako ośrodek ciągły oraz jednakowy promień pęcherzyków. W p. 3 przyjęliśmy dodatkowe założenia o pewnym prawie wymiany ciepła i pominięciu bezwładności otaczającej pęcherzyk cieczy. W p. 4 inne założenia dodatkowe zostały wyprowadzone z rozpatrzonych wstępnie drgań harmonicznym objętościowych pojedynczego pęcherzyka powietrza.

Mieszaninę możemy uważać za ośrodek ciągły, jeżeli odległość między pęcherzykami jest mała w porównaniu z odległością, na której zachodzą znaczniejsze zmiany parametrów (ciśnienia, gęstości średniej itd.). W szczególności odległość między pęcherzykami powinna być mniejsza od długości fali dźwiękowej $2\pi a/\omega$. W związku z tym nie możemy się spodziewać słuszności wyprowadzonych wzorów dla dużych częstości ω .

Mieszanina rzeczywista zawiera oczywiście pęcherzyki o różnych promieniach. Założenie jednakowego wymiaru wszystkich pęcherzyków może dać wyniki jedynie jakościowo zgodne z rzeczywistym przebiegiem zjawiska. Chcąc otrzymać do celów praktycznych przybliżone wzory uwzględniające pewien zadany rozkład prawdopodobnych wymiarów pęcherzyków gazu

$$\Theta'_0 = \Theta'_0(r_0), \quad (\Theta_0 = \int_0^{\infty} \Theta'_0(r_0) dr_0),$$

należałoby jeszcze przeprowadzić całkowanie (uśrednienie) względem promienia pęcherzyka. Dla częstości małych $\omega \ll \Omega_r$ zmiany promienia r_0 w niewielkim stopniu wpływają na zmianę przebiegu funkcji $a(\omega)$ i $\beta(\omega)$ (por. rys. 4 i rys. 12), dlatego też można by w przypadku, gdy pęcherzyki niewiele się różnią między sobą, założyć, że ich wymiary są jednakowe. Natomiast dla częstości ω bliskich częstości rezonansowej Ω_r założenie takie powinno dawać duże błędy.

Pęcherzyk gazu może nie tylko zmieniać swoją objętość, ale może także podlegać deformacjom postaci. Drgania postaciowe wpłyną na powstanie częstości rezonansowych wyższych rzędów. Również i w pianach mo-

gą powstać częstotliwości rezonansowe drgań, których wielkość trudno jest oszacować stosowanymi wyżej metodami. Istnienie tego rezonansu jest nowym czynnikiem wpływającym na niezgodność wyników z rzeczywistością dla dużych częstotliwości ω .

Założenie wymiany ciepła przyjęte w p. 3 należałoby potwierdzić doświadczalnie, za dopuszczalnością przyjętego założenia dla małych częstotliwości ω i małych zawartości gazu przemawia jakościowa zgodność wyników z wynikami otrzymanymi w p. 8.

Badania rozchodzenia się fal harmonicznycch w mieszaninie cieczy z bardzo niewielką ilością pęcherzyków gazu są w literaturze światowej opracowywane tak od strony teoretycznej jak i doświadczalnej. Zainteresowanie tym problemem wypływa z potrzeb praktycznych. Drobne zawartości pęcherzyków gazu w wodzie morskiej wpływają bowiem na zmianę jej własności akustycznych i zniekształcenie wskazań echosond.

Opierając się na badaniach własności akustycznych pojedynczego pęcherzyka gazu, [1] - [4], Carstensen i Foldy, [14], wyprowadzili przydatne do celów praktycznych wzory dla prędkości i tłumienia płaskich fal harmonicznycch. Inni badacze, [15] i [16], zajmowali się głównie rozpatrzeniem szczególnych przypadków powyższego rozwiązania przy wprowadzeniu pomocniczych założeń (jak np. prawo rozkładu promieni pęcherzyków) lub też porównaniem z wynikami doświadczeń.

Przedmiotem badań jest głównie rozchodzenie się fal harmonicznycch z częstotliwościami ω bliskimi częstotliwości rezonansowej Ω_r w mieszaninie z bardzo małymi stosunkami objętościowymi Θ_0 .

W porównaniu z innymi pracami niniejsza praca różni się metodą oraz zakresem badań. W pracach cytowanych bowiem rozchodzenie się fal w mieszaninie otrzymane jest przez superpozycję skutków działania oddzielnych pęcherzyków drgających a nie z ogólnych równań ruchu. Praca niniejsza natomiast jest próbą teoretycznego wyprowadzenia z ogólnych równań praw rozchodzenia się małych zaburzeń tak w mieszaninach o małej zawartości gazu jak również i w pianach.

Dla porównania otrzymanego wyniku (3.51) z badaniami doświadczalnymi w przypadku małej zawartości gazu należałoby w wymieniony wyżej sposób uwzględnić jeszcze rozkład prawdopodobieństwa wielkości poszczególnych pęcherzyków. Przydatność wzorów (3.25) i (3.26) oraz równania (3.16) dla pian trudno jest sprawdzić, gdyż brak jest danych doświadczalnych.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. Minnaert, *On Musical Air-Bubbles and the Sounds of Running Water*, Phil. Mag., t. 16, 1933, s. 235.

[2] F. D. Smith, *On the Destructive Mechanical Effects of the Gas Bubbles Liberated by the Passage of Intense Sound Through a Liquid*, Phil. Mag., t. 19, 1935, s. 1147.

- [3] E. Meyer u. K. Tamm, *Eigenschwingung und Dämpfung von Gasblasen in Flüssigkeiten*, Akust. Zeitschr. 4 (1939).
- [4] H. Pfriem, *Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen*, Akust. Zeitschr. 5 (1940).
- [5] H. Lauer, *O tiermiczeskom zatuchanji puzyrkow razlicznych gazow w wodie*, Probl. Sowriem. Fiziki 9 (1953), Akust. Beihefte 1 (1951).
- [6] M. L. Exner, *Izmerienje zatuchanja kolebliuszczichsja puzyrkow wozducha w wodie*, Probl. Sowriem. Fiziki 9 (1953), Akust. Beihefte 1 (1951).
- [7] M. L. Exner, W. Hampe, *Experimental Determination of the Damping of Pulsating Air Bubbles in Water*, Acustica, t. 3, 2 (1953).
- [8] M. Strasberg, *Gas Bubbles as Sources of Sound in Liquids*, J. A. S. A., t. 28, 1 (1956).
- [9] Yosioka, Kawashima, *Acoustic Radiation Pressure on a Compressible Sphere*, Acustica, t. 5, 3 (1955).
- [10] Yosioka, Kawashima a. Hirano, *Acoustic Radiation Pressure on Bubbles and their Logarithmic Decrement*, Acustica, t. 5, 3 (1955).
- [11] P. L. Chambré, *Speed of a Plane Wave in a Cross Mixture*, J. A. S. A., t. 26, 3 (1954).
- [12] M. A. Isakowicz, *K teorji pogloszczenia zwuka w polikrystalach*, Zurn. Ekspier. i Teoriet. Fiziki, t. 18, 1948.
- [13] Ch. Sörensen, *Absorptions-, Geschwindigkeits- und Entgasungsmessungen im Ultraschallgebiet*, Ann. der Physik, t. 26, 1936.
- [14] E. L. Carstensen a. L. L. Foldy, J. A. S. A., t. 19, 1947.
- [15] E. Meyer u. E. Skudrzyk, *Über die akustischen Eigenschaften von Gasblasen in Wasser*, Akust. Beihefte 3 (1953).
- [16] F. F. Fox, S. R. Curley a. G. S. Larson, *Phase Velocity and Absorption Measurements in Water Containing Air Bubbles*, J. A. S. A., t. 27, 1955.
- [17] *Fizyceskie osnovy podwodnoj akustiki*, cz. 4, Sowjetskoje Radio, Moskwa 1955.

Резюме

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Физические свойства действительной смеси с газом весьма трудно определить аналитически. Поэтому, в настоящей работе исследуется некоторая абстрактная смесь с заданными свойствами, которые можно рассматривать только в качестве приближения свойств действительной смеси. Итак, принято, что смесь квазиоднородна, одинаковые пузырьки идеального газа равномерно распределены в сжимаемой, но не вязкой жидкости и что временное термодинамическое состояние смеси определено при помощи четырех параметров, а именно: двух параметров состояния жидкости и двух для газа (среднее давление и температура обоих элементов).

После составления уравнений движения, вытекающих из этих положений, уравнениям придана линейная форма для частного случая распространения малых возмущений. Однако, количество уравнений

на два меньше числа выступающих в них неизвестных. В данном случае следует принять еще дополнительные предположения, учитывающие влияние инерции жидкости, окружающей пузырек, и теплообмен между обоими элементами. Эти дополнительные предположения принято в трех вариантах.

В первом варианте принято, что смесь подчиняется только лишь баротропным изменениям. Тогда возмущение распространяется с постоянной скоростью, а затухания нет. Вычисленные скорости волны для трех частных случаев: a_1 (3.8) при отсутствии теплообмена между обоими элементами, a_2 (3.8) при бесконечно быстром теплообмене и a_3 (3.9) при постоянном объеме газа (рис. 2), являются предельными значениями для остальных вариантов добавочных предположений.

В другом варианте пренебрегается влиянием инерции жидкости, окружающей пузырек, и предположено, что теплообмен между жидкостью и газом пропорционален разнице температур и поверхности пузырьков. Из сопоставленного уравнения распространения волны (3.16) выводится скорость и коэффициент затухания одномерной (плоской или сферической) гармонической волны. Скорость a увеличивается здесь от a_2 , стремясь асимптотически, по мере роста частоты ω , к a_1 ; коэффициент затухания β увеличивается тогда от нуля до постоянного значения β_{max} (рис. 4 и 5).

В третьем варианте рассматривается гармоническое колебание в бесконечной несжимаемой жидкости с учетом теплообмена. Выведенные отсюда заключения, касающиеся разницы давлений и теплообмена между пузырьками газа и жидкостью, переносятся на смесь. Зависимость вычисленной отсюда скорости плоской гармонической волны a и коэффициента затухания β от частоты колебаний ω представлена на рис. 10. На диаграмме можно заметить явление резонанса.

Summary

PROPAGATION OF SMALL PERTURBATIONS IN A GAS-LIQUID EMULSION

The physical properties of a real gas-liquid emulsion are difficult to describe mathematically. An ideal emulsion of specified properties is therefore investigated in this paper. Such properties can be treated as an approximation only to those of a real mixture. Thus, it is assumed that the emulsion is quasi-homogeneous, implying that identical bubbles of a perfect gas are uniformly distributed in a compressible inviscid liquid, and that the transient thermodynamical state of the mixture is determined by four parameters: two parameters of state of the liquid and two of the gas (for which are here taken the mean pressure and temperature of both agents).

Equations of motion resulting from these assumptions being established they are then linearized for the particular case of propagation of small perturbations. The number of equations is, however, smaller by two than the number of unknowns. Some additional assumptions should therefore be made taking into consideration the influence of inertia of the liquid surrounding a bubble, as well as heat exchange between the agents. Three types of these additional assumptions are considered.

In the first type, the emulsion is assumed to undergo only barotropic changes. Then, a perturbation is propagated with constant velocity and no damping. Wave velocities calculated for three particular cases: a_1 (3.8) with no heat exchange between the agents; a_2 (3.8), with infinitely rapid heat exchange, and a_3 (3.9), with constant specific volume of the gas (Fig. 2) — constitute limiting values for additional assumptions of other types.

In the second type, the influence of the inertia of the liquid surrounding a gas bubble is disregarded. It is assumed that heat exchange between the liquid and the gas is proportional to the difference of the temperatures and the area of bubble surface. From the equation of wave propagation thus obtained, (3.16), the velocity and the coefficient of damping are arrived at for a one-dimensional (plane or spherical) harmonic wave. The velocity a increases from a_2 tending asymptotically to a_1 with increasing ω . The damping coefficient β increases at the same time to the constant value β_{max} (Fig. 4 and 5).

In the third type is considered a harmonic vibration of a gas bubble in an infinite incompressible liquid space, heat exchange being taken into consideration. The conclusions reached here for the temperature difference and heat exchange between the agents are transferred to the emulsion. The dependence of the velocity a of a plane harmonic wave and the damping coefficient β , thus obtained, on the frequency of vibration ω is represented at Fig. 10. The appearance of the phenomenon of resonance can be observed.

ZARŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1956 r.