

JAN ROŚCISZEWSKI

O METODACH OBLICZENIA WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA
FALI ROZRZEDZENIOWEJ I FALI UDERZENIOWEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXX

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	243
2. Metoda różnic skończonych	247
3. Metoda Chandrasekhara-Friedrichsa	252
4. Metoda H. Geiringer	258
5. Metoda Neumana	263

1. Wstęp*

Zagadnienie określania parametrów hydrodynamicznych (gęstości, ciśnienia, temperatury i prędkości) w jednowymiarowych przepływach gazu, w których występuje prostopadła fala uderzeniowa, nie przedstawia większych trudności. Falę uderzeniową można uważać za poruszającą się względem gazu powierzchnię, wzdłuż której zmienia się w sposób nieciągły (skokiem) prędkość gazu, jego ciśnienie, gęstość, temperatura i entropia. Parametry przepływu przed i za falą (obszar przed falą jest tym obszarem, z którego elementy gazu przechodzą przez falę) związane są podstawowymi prawami mechaniki: prawem zachowania masy, ilości ruchu i energii.

Z praw tych wynika, że przy spełnieniu drugiej zasady termodynamiki możliwe jest tylko takie rozwiązanie, przy którym ciśnienie, gęstość i temperatura przed falą uderzeniową są mniejsze od odpowiednich wielkości za falą: $p_1 < p_2$, $\rho_1 < \rho_2$, $T_1 < T_2$, [5].

Prędkość ośrodka przed falą względem fali uderzeniowej jest nadźwiękowa, a ośrodka za falą poddźwiękowa:

$$|v_1| = |u_1 - U| > a_1, \quad |v_2| = |u_2 - U| < a_2,$$

gdzie u_1 i u_2 oznaczają prędkości gazu odpowiednio przed i za falą uderzeniową, U prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej oraz a_1 i a_2 prędkości dźwięku odpowiednio przed i za falą uderzeniową.

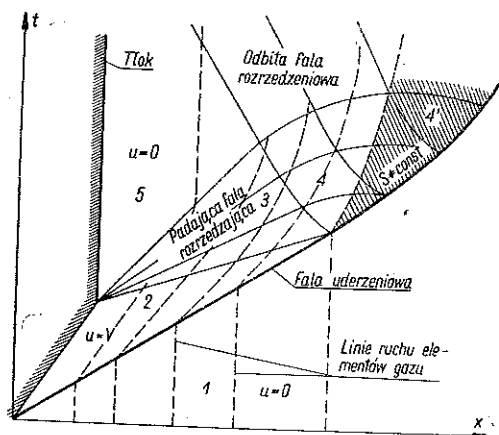
Podobnie łatwo można rozwiązać zagadnienie przepływu jednowymiarowego, w którym występuje fala rozrzedzeniowa o skończonej amplitudzie, rozchodząca się w gazie, znajdującym się w spoczynku lub ruchu jednostajnym (fala taka nosi nazwę prostej fali rozrzedzeniowej). Obszar prostej fali rozrzedzeniowej (jej szerokość) rośnie z biegiem czasu, a zmiana parametrów przepływu zachodzi w sposób ciągły. Nieciągłe mogą być tylko pochodne prędkości, ciśnienia i gęstości. Entropia elementów gazu

* Praca została przedstawiona na konferencji Pracowni Mechaniki Cieczy i Gazów Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN w Międzyzdrojach w sierpniu 1955 r.

przechodzących przez falę rozrzedzeniową nie ulega zmianie. Rozwiązanie przepływów jednowymiarowych, w których występują fale proste, podał B. Riemann w 1860 r.

Zagadnienie określenia parametrów przepływu bardzo się komplikuje w przypadku, gdy w przepływie jednowymiarowym występują równocześnie fala uderzeniowa i fala rozrzedzeniowa. Może to zachodzić np. wówczas, gdy tłok umieszczony w rurze wypełnionej gazem, znajdującym się w spoczynku, zostaje nagle wprawiony w ruch jednostajny teoretycznie z przyspieszeniem nieskończenie wielkim, sprężając gaz, a następnie zostaje zatrzymany gwałtownie.

Na wykresie w układzie x, t (x jest współrzędną mierzoną wzdłuż osi rury, t czasem) linia ruchu tłoka przedstawiona jest dwoma odcinkami zakreskowanymi z lewej strony (rys. 1). Pochylenie pierwszego odcinka określone jest prędkością tłoka $dx/dt = V_1$. Prędkość gazu po wprowadzeniu w ruch tłoka jest równa



Rys. 1

wykresie w układzie osi x, t linia ruchu fali uderzeniowej przedstawiona jest więc prostą (grubą) o nachyleniu $dx/dt = U$. W chwili gdy tłok zostaje gwałtownie zatrzymany, gaz znajdujący się przy tłoku musi mieć prędkość równą zero. Następuje więc gwałtowne zmniejszenie prędkości połączone z powstaniem zogniskowanej fali rozrzedzeniowej, która powoduje spadek prędkości od V_1 do 0. Na rysunku 1 fala ta jest przedstawiona szeregiem prostych — charakterystyk wychodzących z jednego punktu. Linie ruchu elementów gazu zostały oznaczone liniami przerywanymi.

Czoło fali rozrzedzeniowej porusza się z prędkością dźwięku względem gazu za falą uderzeniową posiadającą prędkość v_2 , musi więc ją dogonić, gdyż, jak zauważyliśmy, fala uderzeniowa przemieszcza się względem tego samego gazu z prędkością poddźwiękową ($v_2 < a_2$). Po pewnym więc czasie fala rozrzedzeniowa dogoni falę uderzeniową.

Po dojściu fali rozrzedzeniowej ciśnienie za falą uderzeniową zaczyna maleć, w związku z czym musi też zmienić się prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej. Wykażemy, że istotnie fala rozrzedzeniowa powoduje zmniejszenie prędkości rozchodzenia się fali uderzeniowej. Zauważymy, że zmiana ciśnienia za falą uderzeniową nie może spowodować zmiany parametrów przepływu przed falą uderzeniową. Wynika to stąd, że drobne zmiany ciśnienia mogłyby w obszarze przed falą uderzeniową rozchodzić się z prędkością dźwięku, a więc z mniejszą prędkością niż samo czoło fali uderzeniowej względem tego samego ośrodka. Matematycznie oznacza to, że kąt pochylenia charakterystyk względem osi x w punkcie przecięcia linii ruchu fali uderzeniowej z czołem fali rozrzedzeniowej jest większy niż kąt pochylenia linii ruchu fali uderzeniowej (rys. 2).

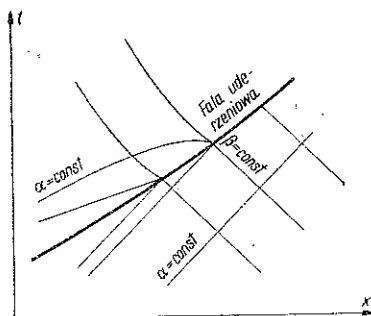
Istotnie dla fali uderzeniowej mamy

$$\frac{dx}{dt} = U > a_1 = a_0,$$

gdzie a_0 jest prędkością dźwięku dla $u_1 = 0$.

Podobnie pochylenie charakterystyk przedstawia wzór

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a = \pm a_0.$$



Rys. 2

Stąd wniosek, że zaburzenia rozchodzące się wzdłuż charakterystyk, powstałe na linii uderzeniowej, nie mogą przejść do obszaru przed falą uderzeniową.

W związku z tym parametry przepływu przed falą uderzeniową p_1 , a_1 , e_1 itp. nie ulegają zmianie. Jak wiadomo, stosunek ciśnień za i przed falą uderzeniową przedstawia wzór (por. [5])

$$(1.1) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} \frac{U^2}{a_0^2} - \frac{k-1}{k+1},$$

gdzie $u_1 = 0$, $a_1 = a_0$ oraz $k = c_p/c_v$ jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej gęstości.

Ze wzoru tego wynika, że w przypadku oddziaływania fali rozrzedzeniowej na falę uderzeniową (ciśnienie za falą uderzeniową p_2 w obszarze oddziaływania maleje) prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej U maleje. Natężenie fali uderzeniowej $(u_2 - u_1)/a_1$ z biegiem czasu ulega zmniejszeniu. Wynika to ze wzoru (por. [5])

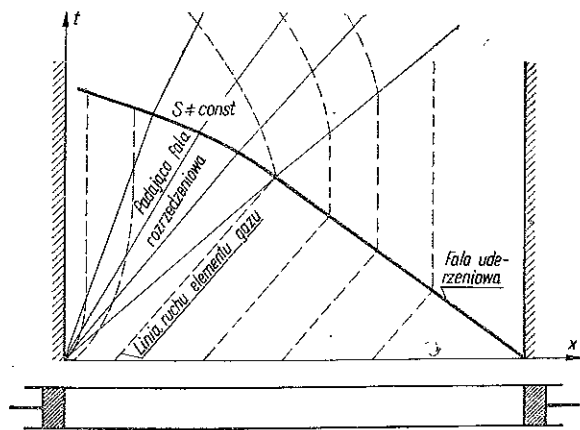
$$(1.2) \quad \frac{u_2}{a_0} = \frac{2}{k+1} \left(\frac{U}{a_0} - \frac{a_0}{U} \right).$$

Odwrotnie, w przypadku oddziaływania prostej fali zgęszczeniowej na falę uderzeniową prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej, a więc i jej natężenie, rośnie.

Wskutek zmiany natężenia fali uderzeniowej w czasie elementy gazu przechodzące przez falę uderzeniową w różnych chwilach doznają innej zmiany entropii. Zmiana entropii jest w przypadku fal uderzeniowych o niezbyt dużym natężeniu proporcjonalna do trzeciej potęgi natężenia fali. Przepływ za falą uderzeniową przestaje więc być izentropowy (ściślej homoentropowy) w całym obszarze. Wówczas niezmienniki R i e m a n n a stają się funkcjami entropii, która przybiera różną, ale stałą wartość dla każdego elementu gazu. Różnym liniom ruchu elementów gazu w omawianym obszarze odpowiadają różne wartości entropii, $S = \text{const}$.

W związku z powyższym parametry przepływu za falą uderzeniową zależą od rozkładu entropii, który zależy z kolei od przebiegu fali uderzeniowej. Przebiegu tego nie można wyznaczyć, dopóki nie znamy stanu gazu za falą uderzeniową. Występuje więc tutaj pewnego rodzaju nieokreśloność. Z punktu widzenia matematycznego rozwiązanie w tym obszarze zależy od warunków brzegowych (warunków zgodności), te zaś zależą od rozwiązania.

Przepływ w obszarze oddziaływania traktuje się często jako przepływ powstały wskutek «odbicia» fali rozrzedzeniowej od fali uderzeniowej.



Rys. 3

Podobne zagadnienie wzajemnego oddziaływania fali uderzeniowej i rozrzedzeniowej występuje w przypadku, gdy dwa tłoki poruszające się w rurze z jednakową prędkością w dodatnim kierunku osi x zostaną gwałtownie zatrzymane (rys. 3). Powstaje wówczas fala uderzeniowa w prawym końcu rury spotykająca się po pewnym czasie z falą rozrzedzeniową powsta-

łą w jej końcu lewym. Wskutek wzajemnego oddziaływania — jak to wynika z dalszych rozważań — musi powstać przechodząca (na stronę poddźwiękową) fala rozrzedzeniowa. Nie może natomiast powstać fala odbita, co łatwo wykazać w sposób podobny w jak w przypadku poprzednim. Obszar zmienności entropii i przepływu «nieokreślonego», który zależy od przebiegu fali uderzeniowej (ten zaś z kolei zależy od prędkości

przepływu w tym obszarze), znajduje się po poddźwiękowej stronie fali uderzeniowej.

Łatwo można wykazać, że fala uderzeniowa dogoni każdą falę rozrzedzeniową znajdującą się po stronie naddźwiękowej. Istotnie, prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej względem ośrodka przed czołem fali jest naddźwiękowa, a prędkość rozchodzenia się fali rozrzedzeniowej względem tego samego ośrodka równa się prędkości dźwięku.

W praktyce inżynierskiej zagadnienia wzajemnego oddziaływania fali uderzeniowej i rozrzedzeniowej występują przy silnikach pulsacyjnych, hamulcach bezpieczeństwa wagonów kolejowych, silnikach spalinyowych itp.

Rozwiązanie zagadnienia z punktu widzenia matematycznego wymaga zastosowania metody różnic skończonych w przypadku zastosowania równania ruchu w postaci równania Eulera (metoda Couranta) lub Lagrange'a (metoda Geiringer), albo metody uproszczonej opartej na założeniu, że entropia jest stała w całym obszarze przepływu (metoda Friedrichsa). Założenie takie można zrobić bez większego błędu wtedy, gdy natężenie fali uderzeniowej nie jest zbyt duże. Dzięki temu unika się wspomnianej «nieokreśloności» w obszarze wzajemnego oddziaływania fal i otrzymuje się rozwiązanie efektywne sprowadzające się do kwadratury.

2. Metoda różnic skończonych

Zagadnienie wyznaczenia przepływu w obszarze «nieokreślonym» charakteryzującym się różną wartością entropii wzdłuż linii ruchu każdego elementu płynu podał R. Courant w roku 1945, [1]. Wyszedł on z układu równań dla przepływu o zmiennej entropii i zastąpił je równaniami różnicowymi. Poniżej podajemy metodę zastosowaną do równań różnicowych odmiennej postaci, rozwiązanych za pomocą innej płaszczyzny pomocniczej. Metoda ta wydaje się korzystniejsza przy obliczeniach praktycznych od metody Couranta. Dla wyprowadzenia równań różnicowych wychodzimy z równania ruchu

$$(2.1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

równania ciągłości

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

oraz z następującego równania wynikającego z pierwszej zasady termodynamiki, [5]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2}{k-1}} e^{\frac{S_0 - S}{c_p - c_v}}$$

lub

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}} e^{\frac{S_0 - S}{c_p - c_v}}$$

Wskaźnikiem 0 został oznaczony pewien stan stały.

Równanie ruchu po uwzględnieniu ostatnich wzorów przyjmie postać

$$(2.1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{k-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{a^2}{(k-1)c_p} \frac{\partial S}{\partial x},$$

gdzie

$$a^2 = k \frac{p}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial (\ln p)}{\partial x}.$$

Podobnie równanie ciągłości przyjmie postać

$$\frac{\partial (\ln \rho)}{\partial t} + u \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lub

$$(2.2.2) \quad \frac{2}{k-1} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2}{k-1} u \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{c_v(k-1)} \frac{\partial S}{\partial t} + \\ + \frac{a}{c_v(k-1)} u \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{a}{c_v(k-1)} \frac{dS}{dt}.$$

Dodając i odejmując równanie (2.2.2) i (2.1.2) otrzymamy odpowiednio

$$(2.3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{k-1} a + u \right) + (u + a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{k-1} a + u \right) = \\ = \frac{a}{c_v(k-1)} \frac{dS}{dt} + \frac{a^2}{(k-1)c_p} \frac{\partial S}{\partial x},$$

$$(2.3.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{k-1} a - u \right) + (u - a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{k-1} a - u \right) = \\ = \frac{a}{c_v(k-1)} \frac{dS}{dt} - \frac{a^2}{(k-1)c_p} \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Podobnie jak w przypadku przepływów o stałej entropii układ równań opisuje rozchodzenie się fal z prędkością $dx/dt = u + a$ oraz $dx/dt = u - a$.

Oznaczając symbolami

$$\left[\frac{\delta}{\delta t} \right]_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{dx}{dt} \right]_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left[\frac{\delta}{\delta t} \right]_{\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{dx}{dt} \right]_{\beta} \frac{\partial}{\partial x}$$

pochodne w kierunkach nazwanych $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$ i określonych zależnościami

$$(2.4.1) \quad \left[\frac{dx}{dt} \right]_{\alpha} = u + a,$$

$$(2.4.2) \quad \left[\frac{dx}{dt} \right]_{\beta} = u - a,$$

otrzymamy

$$\left[\frac{\delta r}{\delta t} \right]_{\alpha} = \frac{a}{2c_v(k-1)} \frac{dS}{dt} + \frac{a^2}{2(k-1)c_p} \frac{\partial S}{\partial x}$$

Znajdziemy podobnie

$$\left[\frac{\delta s}{\delta t} \right]_{\beta} = \frac{a}{2(k-1)c_v} \frac{dS}{dt} - \frac{a^2}{2(k-1)c_p} \frac{\partial S}{\partial x},$$

gdzie $r = a/(k-1) + u/2$ oraz $s = a/(k-1) - u/2$ są niezmiennikami Riemanna.

Uwzględniając zależność

$$a \frac{\partial}{\partial x} = \left[\frac{\delta}{\delta t} \right]_{\alpha} - \frac{d}{dt} = - \left[\frac{\delta}{\delta t} \right]_{\beta} + \frac{d}{dt},$$

otrzymamy

$$\left[\frac{\delta r}{\delta t} \right]_{\alpha} = \frac{a}{2(k-1)c_p} \left[\frac{\delta S}{\delta t} \right]_{\alpha} + \frac{a}{2c_p} \frac{dS}{dt}.$$

W ten sam sposób znajdziemy

$$\left[\frac{\delta s}{\delta t} \right]_{\beta} = \frac{a}{2(k-1)c_p} \left[\frac{\delta S}{\delta t} \right]_{\beta} - \frac{a}{2c_p} \frac{dS}{dt}.$$

Dla przepływów o stałej entropii wzdłuż każdej linii ruchu elementu płynu $dS/dt = 0$ otrzymamy

$$(2.5.1) \quad \left[\frac{\delta r}{\delta t} \right]_{\alpha} = \frac{a}{2(k-1)c_p} \left[\frac{\delta S}{\delta t} \right]_{\alpha}$$

oraz

$$(2.5.2) \quad \left[\frac{\delta s}{\delta t} \right]_{\beta} = \frac{a}{2(k-1)c_p} \left[\frac{\delta S}{\delta t} \right]_{\beta}.$$

Rozwiązanie zagadnienia przepływu w obszarze wzajemnego oddziaływania fal przeprowadzimy zastępując układ równań różniczkowych (2.4.1), (2.4.2), (2.5.1) i (2.5.2) następującymi równaniami różnicowymi:

$$(2.6.1) \quad [\Delta x]_{\alpha} = (u + a) [\Delta t]_{\alpha},$$

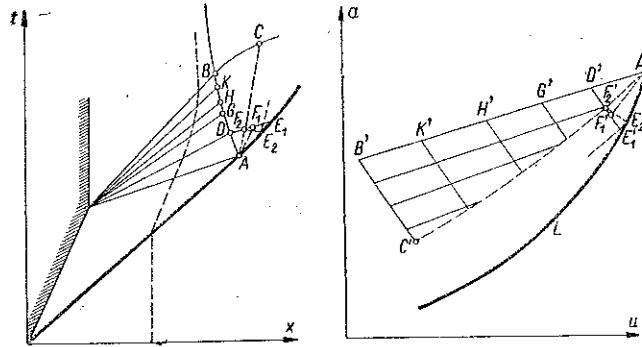
$$(2.6.2) \quad [\Delta x]_{\beta} = (u - a) [\Delta t]_{\beta},$$

$$(2.7.1) \quad [\Delta r]_{\alpha} = \frac{a}{2(k-1)c_p} [\Delta S]_{\alpha},$$

$$(2.7.2) \quad [\Delta s]_{\beta} = \frac{a}{2(k-1)c_p} [\Delta S]_{\beta}.$$

W powyższych wzorach wskaźniki α i β oznaczają przyrosty wzdłuż kierunków $\alpha = \text{const}$ i $\beta = \text{const}$.

Courant rozwiązanie zagadnienia przeprowadził w płaszczyźnie $\alpha\beta$ wychodząc z innych równań różnicowych, w których przyrosty niemiennika r brano w kierunku $\beta = \text{const}$, a przyrosty s w kierunku $\alpha = \text{const}$. Dlatego też równania powyższe mają inne znaczenie od formalnie podobnych równań podanych w pracy [1].



Rys. 4

Rozwiązanie układu równań różnicowych dla przypadku fali uderzeniowej doganianej przez falę rozrzedzeniową przeprowadzimy w płaszczyźnie pomocniczej au . W układzie tym obszar nieokreślonego przepływu wywołanego oddziaływaniem fali uderzeniowej oraz padającej i odbitej fali rozrzedzeniowej (rys. 4) ograniczony jest linią L o równaniu $u_2 = f(a_2)$, wyrażającą zależność pomiędzy prędkością gazu i prędkością dźwięku zaraz za falą uderzeniową. Funkcję tę możemy otrzymać rugując U z układu równań

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{2}{k+1} \left(\frac{U - u_1}{a_1} - \frac{a_1}{U - u_1} \right),$$

$$\frac{u_1 - u_2}{a_2} = \frac{2}{k+1} \left(\frac{U - u_2}{a_2} - \frac{a_2}{U - u_2} \right),$$

gdzie u_1 i a_1 są to stałe parametry dla gazu przed falą uderzeniową (w szczególnym przypadku $u_1 = 0$ oraz $a_1 = a_0$).

W każdym punkcie L znamy prędkość rozchodzenia się fali U oraz entropię S . W układzie osi u, a pierwsza charakterystyka fali odbitej jest linią prostą o pochyleniu, które otrzymamy różniczkując funkcję ($s = \text{const}$).

$$-s = \frac{u}{2} - \frac{a}{k-1}.$$

Mamy więc

$$\frac{du}{da} = \frac{2}{k-1}.$$

Charakterystykom jednej i drugiej rodziny w obszarze oddziaływania odpowiadają więc proste o pochyleniu $du/da = \pm 2/(k-1)$ z wyjątkiem obszaru o zmiennej entropii (ograniczonym nieznaną linią ruchu elementu gazu $A'C'$), gdzie pochylenie linii odpowiadających charakterystykom jest zmienne i zależy w myśl (2.7.1) i (2.7.2) od przyrostu entropii.

W pierwszym przybliżeniu zakładamy $\Delta S = 0$, czyli przedłużamy odcinki prostoliniowe. Zagadnienie określenia parametrów przepływu możemy przeprowadzić «krok za krokiem». Wychodząc z odpowiadającego znanej prędkości w punkcie D punktu D' kreślimy odcinek prostej o pochyleniu $du/da = -2/(k-1)$ poprowadzonym aż do przecięcia się z linią L (punkt E'_1). Następnie z punktu D prowadzimy odcinek prostej DE_1 pochyłony pod kątem odpowiadającym pochodnej

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(u+a)_{D'} + (u+a)_{E'_1}}{2}$$

Z punktu A prowadzimy odcinek linii ruchu $dx/dt = u_A$ i znajdujemy punkt przecięcia F_1 z linią DE_1 . Punkt E_1 znajdziemy na przecięciu z odcinkiem linii ruchu fali uderzeniowej pochyłonej pod kątem odpowiadającym

$$\frac{U_{E'_1} + U_{A'}}{2} = \frac{dx}{dt}$$

Odcinek $D'E'_1$ dzielimy w tym samym stosunku, w jakim punkt F_1 dzieli DE'_1 . W ten sposób znajdujemy F'_1 . Odczytując prędkość w tym punkcie możemy znaleźć drugie przybliżenie linii ruchu elementu gazu prowadząc z punktu A prostą o pochyleniu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_{A'} + u_{F'_1}}{2}$$

Stąd podobnie jak poprzednio określimy w następnym przybliżeniu położenie punktu F'_2 . Ze wzoru dla fali uderzeniowej obliczymy przyrost entropii odpowiadający zmianie parametrów za falą uderzeniową przy przejściu od punktu A do punktu E_1 . Stąd zgodnie ze wzorem (2.7.1) znajdziemy pochylenie linii odpowiadającej charakterystyce. Kreśląc z punktu F'_2 odcinek prostej o tym pochyleniu otrzymamy nowy punkt E'_2 , a na wykresie w układzie x, t znajdziemy odpowiednie położenie E_2 na przecięciu odcinka fali uderzeniowej pochyłonej pod kątem odpowiadającym pochodnej

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U_{A'} + U_{E'_2}}{2}$$

z odcinkiem charakterystyki

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(u+a)_{F'_2} + (u+a)_{E'_2}}{2}$$

Z punktu E_2' poprowadzimy odcinek charakterystyki $\beta = \text{const}$, pochylonej pod kątem odpowiadającym $\Delta S_{E_2'}$, a z punktu E_2 kreśliśmy odcinek linii ruchu pod kątem odpowiadającym pochodnej $dx/dt = (u)_{E_2}$ itd.

Postępując w analogiczny sposób możemy wyznaczyć poszukiwane prędkości i prędkość dźwięku w całym «nieokreślonym» obszarze przepływu. Znając rozkład prędkości dźwięku, a stąd temperatury, możemy znaleźć zmianę ciśnienia i gęstości wzdłuż każdej linii ruchu elementu gazu z równania izentropy (wzdłuż każdej linii ruchu entropia jest stała). W ten sposób wyznaczymy wszystkie parametry przepływu. Dokładność metody zależy oczywiście od ilości punktów na AB i od ilości kolejnych przybliżeń.

3. Metoda Chandrasekhara-Friedrichsa

Metodę przybliżonego rozwiązania zagadnienia wzajemnego oddziaływania podał Chandrasekhar, następnie rozwinął ją Friedrichs, [2].

Idea, na której jest oparta ta metoda, wiąże się z podstawowymi własnościami fal uderzeniowych i fal prostych. Polega ona na pominięciu w rozwinięciach odpowiednich funkcji dla fali uderzeniowej według parametrów określających natężenie fali uderzeniowej wyrażen z potęgami wyższymi od drugiej; natężenie może być określone przez

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1}, \quad \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad \text{lub} \quad \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}.$$

Wtedy w myśl twierdzenia udowodnionego przez Courant a i Friedrichsa (por. [1], § 72) parametry hydrodynamiczne za falą uderzeniową są takie same, jak parametry za prostą falą zgęszczeniową o tym samym natężeniu i tym samym stanie gazu przed czołem fali.

Pominięcie dalszych wyrażen w rozwinięciu względem natężenia fali uderzeniowej jest równoznaczne z założeniem niezmienności entropii elementu gazu przy przejściu w poprzek fali uderzeniowej (zmiana entropii jest proporcjonalna dla słabych fal uderzeniowych do trzeciej potęgi natężenia fali). Błąd wynikający z opuszczenia wyrażen z wyższymi potęgami natężenia fali od drugiej jest bardzo mały dla $(p_2 - p_1)/p_1 \leq 1,5$. I tak np. dla fali uderzeniowej o natężeniu 1,5 otrzymamy dla $k = 1,4$ według ścisłych wzorów

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = 0,71, \quad \frac{a_2 - a_1}{a_1} = 0,15, \quad \frac{s_2 - s_1}{a_1} = 0,02,$$

podczas gdy dla fali prostej o takim samym natężeniu otrzymamy

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = 0,7, \quad \frac{a_2 - a_1}{a_1} = 0,14, \quad \frac{s_2 - s_1}{a_1} = 0.$$

Stąd wynika, że nawet dla fal o natężeniu nieco większym od 1,5 metoda powyższa może być stosowana.

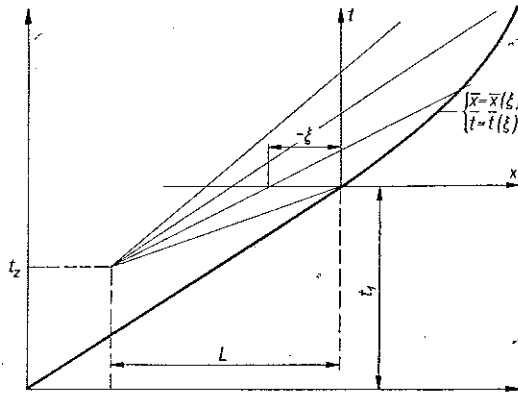
Bliższą analizę dokładności metody Chandrasekhara-Friedrichsa przeprowadził Anneli Lax za pomocą porównania z wynikami otrzymanymi na podstawie rachunku różnic skończonych, [3]. Wykazał on dość dobrą zgodność nawet dla fal o natężeniu 3.

Dałej zakładamy, że nie następuje odbicie fali rozrzedzeniowej w obszarze oddziaływania na falę uderzeniową.

Przy powyższych założeniach unika się nieokreśloności, o której była mowa poprzednio, i zagadnienie wyznaczenia linii uderzeniowej sprowadza się do rozwiązania zwyczajnego równania różniczkowego.

Założenie to upraszcza rachunek, chociaż można byłoby równie dobrze uwzględnić odbicie fali prostej spełniając warunki zgodności wzdłuż linii ruchu fali uderzeniowej. Wydaje się z punktu widzenia fizycznego rzeczą bardziej uzasadnioną to drugie założenie z uwagi na to, że w obszarze wzajemnego oddziaływania musi powstać zaburzenie rozchodzące się w kierunku łoka, tzw. «odbicie» fali rozrzedzeniowej.

Rozważmy teraz bardziej szczegółowo przypadek fali uderzeniowej doganianej przez falę rozrzedzeniową. Zagadnienie to można łatwo rozwiązać stosując również podaną poprzednio metodę wykreślną, która w tym przypadku znacznie się upraszcza, gdyż w płaszczyźnie ua w całym obszarze wzajemnego oddziaływania obrazem charakterystyk są linie proste.



Rys. 5

Obierzmy układ współrzędnych tak, aby punkt $t = 0, x = 0$ był punktem przecięcia pierwszej charakterystyki fali prostej z linią ruchu fali uderzeniowej (rys. 5).

Falę prostą poruszającą się w dodatnim kierunku osi x przedstawia w płaszczyźnie xt wzór

$$(3.1) \quad x = \xi + (u + a)t = \xi + \omega(\xi)t,$$

gdzie ξ oznacza odciętą punktu przecięcia charakterystyki z osią x ; u prędkość skierowaną wzdłuż osi x .

W obszarze tej fali mamy niezmiennik Riemanna:

$$s = \frac{a}{k-1} - \frac{u}{2} = \text{const.}$$

Uwzględniając, że $\omega(\xi) = u + a$ i oznaczając prędkość dźwięku w punkcie spiętrzenia (gdzie $u = 0$) przez a_0 , otrzymamy z ostatniego wzoru oraz z równania izentropy

$$(3.2) \quad \begin{cases} u = \frac{2}{k+1}(\omega - a_0), & p = p_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k+1}}, \\ a - a_0 = \frac{k-1}{k+1}(\omega - a_0), & \rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{k+1}}. \end{cases}$$

Aby znaleźć linię ruchu fali uderzeniowej w płaszczyźnie $x-t$ wykorzystamy zależność (1.2) pomiędzy prędkością gazu za falą uderzeniową a prędkością rozchodzenia się fali uderzeniowej

$$(3.3) \quad u_2 = \frac{2}{k+1} \left(U - \frac{a_0^2}{U} \right),$$

gdzie założyliśmy, że prędkość przed falą uderzeniową $u_1 = 0$ (założenie to nie zmniejsza ogólności; można byłoby też założyć $u_1 = \text{const}$).

Rozwijając U w szereg potęgowy według wyrazów

$$(3.4) \quad \sigma = \frac{\omega - a_0}{a_0} = \frac{u + a - a_0}{a_0}$$

i wprowadzając oznaczenia

$$\nu = \frac{U - a_0}{a_0} \quad \text{lub} \quad U = a_0(1 + \nu),$$

otrzymamy ze wzoru (3.3) [po uwzględnieniu (3.2)]

$$\sigma = 1 + \nu - \frac{1}{1 + \nu} = \nu \frac{2 + \nu}{1 + \nu} = 2\nu - \nu^2 + \nu^3 - \nu^4 + \dots,$$

$$\sigma^2 = (1 + \nu)^2 - 2 + \frac{1}{(1 + \nu)^2} = 4\nu^2 - 4\nu^3 + 5\nu^4 + \dots$$

Stąd

$$\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{8}\sigma^2 = \nu + \frac{1}{8}\nu^4.$$

Pomijając zgodnie z poprzednimi założeniami wyrażenia z potęgą ν^4 , otrzymamy

$$(3.5) \quad U = a_0(1 + \nu) = a_0 \left(1 + \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{8}\sigma^2 \right).$$

Współrzędne linii ruchu fali uderzeniowej w obszarze przecięcia z falą prostą mogą być wyrażone jako funkcje parametru ξ : $\bar{x}(\xi)$, $\bar{t}(\xi)$, a stąd

$$U = U[\bar{x}(\xi), \bar{t}(\xi)],$$

Na podstawie wzoru (3.1) wstawiając $x = \bar{x}$, $t = \bar{t}$ i różniczkując względem parametru ξ wzdłuż linii ruchu fali uderzeniowej, po uwzględnieniu zależności

$$\frac{d\bar{x}}{d\xi} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{d\xi} = U \frac{d\bar{t}}{d\xi},$$

otrzymamy

$$(3.6) \quad \frac{d\bar{t}}{d\xi} \{U - [u(\xi) + a(\xi)]\} = \bar{t} [u'(\xi) + a'(\xi)] + 1.$$

We wzorze tym $u'(\xi)$ i $a'(\xi)$ oznaczają pochodne względem parametru ξ .

Równanie (3.6) jest zwyczajnym liniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, gdyż $u(\xi)$, $a(\xi)$, $u'(\xi)$ i $a'(\xi)$ są danymi funkcjami ξ .

Rozwiązanie tego równania dla warunków początkowych $\bar{t} = 0$, $\xi = 0$ określa linię ruchu fali uderzeniowej

$$(3.7) \quad \begin{cases} \bar{t}(\xi) = e^{J(\xi)} \int_0^\xi \frac{e^{-J(\xi)}}{U - (u + a)} d\xi, \\ \bar{x}(\xi) = \xi + (u + a)\bar{t}, \end{cases}$$

gdzie

$$J(\xi) = \int_0^\xi \frac{u'(\xi) + a'(\xi)}{U - [u(\xi) + a(\xi)]} d\xi.$$

Podstawiając do tych wzorów wartość U określoną przez (3.5) oraz uwzględniając zależności, wynikające ze wzorów (3.2) i (3.3),

$$(3.8) \quad u = \frac{2}{k+1} \sigma a_0, \quad a = \left(\frac{k-1}{k+1} \sigma + 1 \right) a_0,$$

otrzymamy

$$(3.9) \quad \begin{cases} \bar{t} = \frac{8}{a_0} \left(\frac{4-\sigma}{\sigma} \right)^2 \int_0^\xi \frac{\sigma(\xi) d\xi}{[4 - \sigma(\xi)]^3}, \\ \bar{x} = \xi + (1 + \sigma) a_0 \bar{t}. \end{cases}$$

Opuszczając wyrazy z potęgami wyższymi od drugiej ze wzorów (3.2) znajdziemy

$$p = \left(1 + \frac{2k}{k+1} \sigma + \frac{k}{k+1} \sigma^2 \right) p_0,$$

$$e = \frac{e_0}{\left(1 - \frac{2}{k+1} \sigma + \frac{\sigma^2}{k+1} \right)}.$$

Funkcję $\sigma(\xi)$ we wzorze (3.8) można wyznaczyć wychodząc ze wzoru

$$\sigma = \frac{\omega - a_0}{a_0}$$

i podstawiając

$$\omega = \frac{L}{t_1 - t_2} + \frac{\xi}{t_1 - t_2} = u_2 + a_2 + \frac{\xi}{t_1 - t_2},$$

gdzie $t_1 - t_2$ oznacza czas od chwili powstania fali zogniskowanej do chwili spotkania z falą uderzeniową, u_2 i a_2 parametry gazu za czołem fali uderzeniowej w każdej chwili $t < t_1$ (rys. 4).

Stąd otrzymamy

$$(3.10) \quad \sigma = \frac{1}{a_0} \left(u_2 + a_2 + \frac{\xi}{t_1 - t_2} - a_0 \right).$$

Ze wzoru (3.9) wynika, że w przypadku oddziaływania prostej fali rozrzedzeniowej [$\sigma(\xi) > 0$] intensywność fali uderzeniowej zmniejsza się z biegiem czasu, co zgadza się z ogólnymi rozważaniami we wstępie.

W miarę osłabiania fali uderzeniowej staje się ona coraz bliższa fali dźwiękowej, linia ruchu fali uderzeniowej w płaszczyźnie xt dąży więc do równoległej do ostatniej charakterystyki fali rozrzedzeniowej (równoległej — ponieważ zgodnie z założeniem niezmienności entropii stan gazu przed taką słabą falą uderzeniową jest taki sam, jak w obszarze za falą rozrzedzeniową). Oddziaływanie staje się więc w granicy nieokreślone.

Friedrichs, [2], zbadał takie asymptotyczne właściwości tłumienia fali uderzeniowej. Powyższą metodę zastosował on również do przypadku oddziaływania fali rozrzedzeniowej na dwie położone po obydwu stronach fale uderzeniowe oraz do przypadku tworzenia się fali uderzeniowej. Friedrichs metodę tę rozszerzył także na przypadek oddziaływania fali rozrzedzeniowej na falę uderzeniową w ustalonym przepływie dwuwymiarowym.

W omawianej pracy Friedrichs rozważył również schematycznie właściwości oddziaływania fali rozrzedzeniowej na spotykającą ją falę uderzeniową (rys. 3). Założył on przy tym, że po prawej poddźwiękowej stronie fali panuje spoczynek. Przy takim założeniu można stosować poprzednio omówioną teorię.

Jednakże ze wzorów dla fali uderzeniowej [$u_2 = 0$, $a_2 = (a_0)_2 = \text{const}$]

$$\frac{u_1}{(a_0)_2} = \frac{2}{k+1} \left(\frac{U}{(a_0)_2} - \frac{(a_0)_2}{U} \right),$$

$$-\frac{u_1}{a_1} = \frac{2}{k+1} \left(\frac{U - u_1}{a_1} - \frac{a_1}{U - u_1} \right), \quad \frac{(U - u_1)^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{U^2}{2} + \frac{(a_0)_2^2}{k-1},$$

otrzymamy po wyrugowaniu u_1 i a_1

$$U = \text{const.}$$

Stąd wynika, że $u_1 = \text{const}$, co odpowiadałoby ustalonej fali uderzeniowej (bez występowania fali rozrzedzeniowej). Po prawej stronie fali nie może więc panować spoczynek, ale musi powstać «fala przechodząca». Przy założeniu słabej fali uderzeniowej można pominąć zmiany entropii i przyjąć, że falą przechodzącą jest fala prosta. W obszarze tej fali mamy

$$-\frac{u_2}{2} + \frac{a_2}{k-1} = \frac{(a_0)_2}{k-1}.$$

Warunek zgodności wzdłuż linii ruchu fali uderzeniowej stanowi równanie energii

$$\frac{(u_1 - U)^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{(u_2 - U)^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1}.$$

Z ostatnich równań możemy wyznaczyć funkcję $u_2 = f(U)$:

$$u_2 = \frac{2}{k+1} \left[U - (a_0)_2 \right] + \frac{1}{k+1} \sqrt{[U - (a_0)_2]^2 - 4 \left[\frac{(a_0)_2^2}{k-1} - \frac{a_1^2}{k-1} - \frac{u_1^2}{2} + Uu_1 \right]}.$$

Jak wynika z rysunku 3 $u_2 < 0$, $U < 0$ przy pierwiastku należy wziąć znak plus, gdyż drugie wyrażenie pod pierwiastkiem jest ujemne — istotnie jest ono równe zero przed obszarem oddziaływania; wynika to z równania energii:

$$\frac{(a_0)_2^2}{k-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{(U - u_1)^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1}.$$

W obszarze fali padającej a_1 , u_1 maleją.

Podstawiając u_2 do wzoru:

$$u_2 - u_1 = \frac{2}{k+1} \left(U - u_1 - \frac{a_1^2}{U - u_1} \right)$$

otrzymamy

$$-\frac{2}{k+1} \left[(a_0)_2 + \frac{k-1}{2} u_1 \right] + \frac{2}{k+1} \sqrt{[U - (a_0)_2]^2 - 4 \left[\frac{(a_0)_2^2}{k-1} - \frac{a_1^2}{k-1} - \frac{u_1^2}{2} + Uu_1 \right]} + \frac{a_1^2}{U - u_1} = 0.$$

Wyrażamy a_1 przez u_1 na podstawie wzoru dla fali padającej:

$$\frac{a_1}{k-1} - \frac{u_1}{2} = \frac{(a_0)_1}{k-1}.$$

Stąd otrzymamy wyrażenie czwartego stopnia dla funkcji $U = f(u_1)$. Znalezione rozwiązanie można podstawić do wzoru (3.7); zagadnienie sprowadza się więc podobnie jak poprzednio do kwadratury.

Dla uproszczenia rachunków można rozwinąć otrzymane wyrażenie względem v uwzględniając wzór (3.5) i opuszczając wyrazy z potęgami wyższymi od potęgi drugiej.

4. Metoda H. Geiringer

Inną przybliżoną metodę rozwiązania zagadnienia oddziaływania fali rozrzedzeniowej na falę uderzeniową podała H. Geiringer, [4]. Punktem wyjścia tej metody są równania ruchu we współrzędnych Lagrange'a.

H. Geiringer rozwiązała zagadnienie oddziaływania fali rozrzedzeniowej spotykającej poruszającą się naprzeciwko falę uderzeniową (rys. 3). W tym przypadku — jak to przedstawiliśmy powyżej — nie może powstać odbicie fali rozrzedzeniowej ze względu na to, że fala ta znajduje się po stronie naddźwiękowej fali uderzeniowej, następuje jedynie «przejsie». W obszarze przejścia powstaje podobnie jak w poprzednim przypadku przy odbiciu przepływ nieokreślony o zmiennej entropii (rys. 3).

Poniżej zastosujemy metodę podaną przez H. Geiringer do przypadku doganianej fali uderzeniowej przez falę rozrzedzeniową.

Wprowadzimy zmienną Lagrange'a:

$$(4.1) \quad \chi = \int_{x(0,t)}^{x(\chi,t)} \rho dx.$$

We wzorze tym ρ jest gęstością odpowiadającą odciętej x w pewnej chwili t . Innymi słowy gęstość jest tu traktowana jako funkcja zmiennych niezależnych x i t jak w metodzie Eulera. Przez $\chi = 0$ będziemy rozumieć zerowy przekrój płynny (poruszający się razem z ośrodkiem); dla każdego innego przekroju zmienna χ będzie równa co do wielkości masie słupa gazu o przekroju jednostkowym pomiędzy danym przekrojem a przekrojem zerowym.

Wielkości hydrodynamiczne przedstawiają funkcje:

$$x \equiv x(\chi, t), \quad u \equiv u(\chi, t), \quad \rho \equiv \rho(\chi, t), \quad p \equiv p(\chi, t).$$

Z równania (4.1) po zróżniczkowaniu względem χ otrzymamy

$$\rho(\chi, t) \frac{\partial x(\chi, t)}{\partial \chi} = 1,$$

a stąd

$$(4.2) \quad \rho(\chi, t) = \frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Z równania ciągłości w zmiennych Eulera

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0,$$

otrzymamy

$$(4.3) \quad u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Równanie ruchu

$$(4.4) \quad \rho \frac{\partial^2 x(\chi, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

po uwzględnieniu (4.2) przyjmuje postać

$$(4.5) \quad \frac{\partial^2 x(\chi, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial \chi}.$$

W równaniach tych x jest traktowane jako odcięta elementu płynu. Jeżeli przepływ jest barotropowy, tj. jeżeli

$$p = p(\tau) \quad \left(\tau = \frac{1}{\rho} \right),$$

otrzymamy

$$(4.6) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(\tau)}{\partial \chi}$$

lub uwzględniając (4.2)

$$(4.6.1) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p'(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \chi} = -p'(\tau) \frac{\partial^2 x}{\partial \chi^2}.$$

Ponieważ $p'(\tau) < 0$, to wyprowadzone równanie jest typu hyperbolicznego. Uwzględniając równanie izentropy

$$(4.7) \quad p \tau^k = c^2 \quad (c = \text{const})$$

otrzymamy

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{c^2 k}{\left(\frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^{k+1}} \frac{\partial^2 x}{\partial \chi^2}.$$

Warunki brzegowe w zagadnieniu są następujące:

$$(4.9.1) \quad \text{dla } t=0 \quad x = \frac{\chi}{\rho_0}, \quad u = u_0 = 0, \quad \rho = \rho_0,$$

$$(4.9.2) \quad \text{dla } 0 < t \leq t_z \quad \chi = 0, \quad u = V_t,$$

$$(4.9.3) \quad \text{dla } t \geq t_z \quad \chi = 0, \quad u = 0.$$

Symbol t_z oznacza czas zatrzymania tłoka (rys. 1) oraz V_t prędkość tłoka.

Obszar przepływu w układzie x, t podzielony jest na cztery różne podobszary (rys. 1).

Dla obszaru (1) przed falą uderzeniową spełnione są warunki brzegowe (4.9.1). W tym obszarze rozwiązanie równania (4.8) przybierze postać (4.10)

$$x = c\chi = \text{const.}$$

Linie ruchu elementów gazu są prostymi pionowymi (obszar spoczynku). Obszar przepływu (spoczynku) przedstawionego równaniem (4.10) ograniczony jest z lewej strony linią ruchu fali uderzeniowej.

Po drugiej stronie fali uderzeniowej [obszar (2)] ruch gazu przedstawia rozwiązanie spełniające warunek brzegowy (4.9.2)

$$(4.11) \quad x = x(\chi, t) = \frac{\chi}{\rho_0} + V_t t + \text{const.}$$

Są to proste o pochyleniu określonym przez pochodną $\partial x / \partial t = V_t$.

Trzecim rozwiązaniem dla $t = t_i = \text{const}$ [obszar (3)] jest znane rozwiązanie Riemanna dla prostej fali zogniskowanej:

$$\frac{a}{k-1} \frac{u}{2} = \frac{a_2}{k-1} \frac{u_2}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t_i} = u + a \quad \text{oraz} \quad \rho = \rho_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{u-u_2}{a_2} \right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

Po podstawieniu powyższych wartości do (4.1) i scałkowaniu otrzymamy:

$$(4.12) \quad x = \frac{k+1}{k-1} t_i a_2 \left(\frac{\chi - \chi_i}{\rho_2 a_2 t_i} + 1 \right)^{\frac{k-1}{k+1}} - \frac{2}{k-1} t_i a_2 + u_2 t_i,$$

gdzie χ_i — wartość χ odpowiadająca przecięciu $t_i = \text{const}$ z czołem fali rozrzedzeniowej, $u_2 = V_t$.

Z obszaru tego trzeba wyłączyć obszar (4) ograniczony charakterystyką fali odbitej, przechodzącą przez punkt przecięcia fali uderzeniowej z czołem fali rozrzedzeniowej. W części tego obszaru, ograniczonej linią ruchu elementu płynu, wychodzącą z tego samego punktu co wspomniana charakterystyka, entropia ulega zmianie (rys. 1). W obszarze przylegającym do tłoka po zatrzymaniu i ograniczonym padającą i odbitą falą rozrzedzeniową [obszar (5)] stan gazu przedstawia równanie analogiczne do równania (4.10).

Określenie przepływu dla chwili $t < t_1$ (gdzie t_1 oznacza czas, w którym czoło fali rozrzedzeniowej dogania falę uderzeniową) nie przedstawia trudności.

Linie ruchu fali uderzeniowej można przedstawić za pomocą wzoru (1.2), w którym zamiast u_2 podstawimy prędkość tłoka V_t :

$$V_t = \frac{2}{k+1} \left(U - \frac{a_0^2}{U} \right).$$

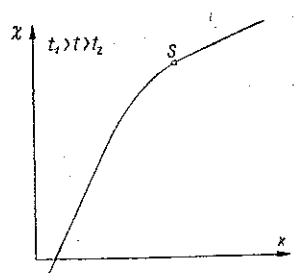
Równania (4.10), (4.11) i (4.12) pozwalają na określenie rozwiązania $x = f(\chi)$ dla każdej chwili $t \leq t_1$.

W układzie współrzędnych x, χ rozwiązanie równania (4.8) przedstawia (dla $t > t_2 \leq t_1$) linię składającą się z dwóch odcinków prostołiniowych.

wych i środkowego odcinka krzywoliniowego, odpowiadającego obszarowi fali prostej. Pochodna $\partial x/\partial \chi$ jest ciągła poza jednym punktem uderzenia S , odpowiadającym przecięciu linii $t = \text{const}$ z linią ruchu fali uderzeniowej (rys. 6).

Metoda rozwiązania zagadnienia dla $t > t_1$, zaproponowana przez H. Geiringer, polega na zastąpieniu równania różniczkowego (4.8) równaniem różnicowym, które po wprowadzeniu oznaczenia $T = t - t_1$, przyjmie następującą postać dla $k=1,4$:

$$\begin{aligned} & \frac{x(\chi, T - \Delta t) + x(\chi, T + \Delta t) - 2x(\chi, T)}{(\Delta t)^2} = \\ & = 1,4c^2 \frac{x(\chi - \Delta \chi, T) + x(\chi + \Delta \chi, T) - 2x(\chi, T)}{(\Delta \chi)^2} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{x(\chi - \Delta \chi, T) - x(\chi + \Delta \chi, T)}{2\Delta \chi} \right]^{2,4} = \\ & = 7,39 c^2 \frac{x(\chi - \Delta \chi, T) + x(\chi + \Delta \chi, T) - 2x(\chi, T)}{[x(\chi - \Delta \chi, T) - x(\chi + \Delta \chi, T)]^{2,4}} (\Delta \chi)^{0,4}. \end{aligned}$$

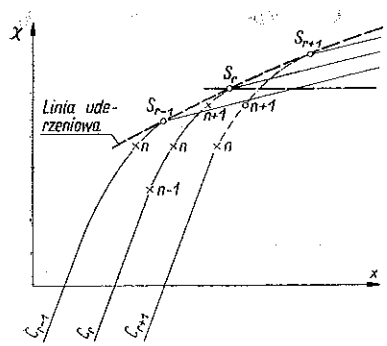


Rys. 6

Wprowadzając nowe zmienne $T = r \Delta t$ oraz $\chi = n \Delta \chi$ i oznaczenie $x(n \Delta \chi, r \Delta t) = x_n^{(r)}$, otrzymamy

$$(4.13) \quad \frac{x_n^{(r-1)} + x_n^{(r+1)} - 2x_n^{(r)}}{\Delta t^2} = 7,39 c^2 (\Delta \chi)^{0,4} \frac{x_{n+1}^{(r)} + x_{n-1}^{(r)} - 2x_n^{(r)}}{[x_{n-1}^{(r)} - x_{n+1}^{(r)}]^{2,4}}.$$

W pewnej chwili $T > 0$ funkcja $x(\chi)$ przedstawia krzywą C_{r+1} . Jednakże nie znamy wszystkich punktów tej krzywej, a tylko górnej i dolnej jej części (rys. 7). Środkowy odcinek ograniczony od góry punktem uderzenia a od dołu przecięciem z prostą poziomą przechodzącą przez punkt uderzenia krzywej C_r jest nieokreślony — odpowiada on obszarowi przepływu nieokreślonego [obszar (4') na rys. 1]. Górną i dolną część tej krzywej określają zależności analogiczne do zależności dla $t < t_1$.



Rys. 7

Przebieg linii uderzeniowej dla $t > t_1$ będzie określony wtedy, gdy będziemy znali wartość $\bar{\chi} \equiv \bar{\chi}(t_1)$.

Uwzględniając, że $x = \bar{x}[\chi(t), t] = \bar{x}(t)$ otrzymamy

$$U = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dt} = u_1 + \frac{1}{e_1} \frac{d\bar{\chi}}{dt};$$

uwzględniając zasadę zachowania masy

$$\rho_1 (U - u_1) = M = \text{const}$$

otrzymamy

$$\frac{d\bar{\chi}}{dt} = M.$$

Jeżeli znamy przebieg krzywych C_{r-1} i C_r , to możemy wyznaczyć przebieg krzywej C_{r+1} w następujący sposób.

Oznaczając przez $\bar{\chi}_r$ odciętą punktu uderzenia krzywej C_r , a przez $\Delta\chi_r$ nie znaną odległość pomiędzy punktem uderzenia krzywej C_r i C_{r+1} znajdziemy

$$\Delta\bar{\chi}_r = \bar{\chi}_{r+1} - \bar{\chi}_r.$$

Zastępując poprzednie równanie różniczkowe równaniem różnicowym otrzymamy

$$\frac{\Delta\bar{\chi}_r}{\Delta t} = M_r,$$

gdzie na podstawie zasady ilości ruchu dla fali uderzeniowej, [5],

$$M_r = \pm \sqrt{\frac{(p_r)_2 - (p_r)_1}{(\tau_r)_1 - (\tau_r)_2}}.$$

We wzorze tym $(\tau_r)_1$ określone jest pochodną $\partial x / \partial \chi$ (pochylenie górnej części krzywej C_r w punkcie $\bar{\chi}_r$), wielkość $(p_r)_1$ można wyznaczyć z równania izentropii (4.7) oraz $(\tau_r)_2$ określone jest przez pochylenie dolnej części krzywej w punkcie uderzenia. Przy założeniu stosowalności wzoru (4.8) (nawet przy przejściu linii uderzeniowej) otrzymamy $(p_r)_2$. Stąd obliczymy M_r , a następnie $\Delta\chi_r$.

Na podstawie znajomości położenia trzech punktów $(n+1)$, n i $(n-1)$ na krzywej C_r oraz punktu n -tego na krzywej C_{r-1} możemy wyznaczyć za pomocą wzoru (4.13) — zakładając, że $c = \text{const}$, co odpowiada przepływowi izentropowemu — położenie punktu n -tego na krzywej C_{r+1} . Podobnie można wyznaczyć położenie wszystkich punktów położonych poniżej punktu n -tego.

Nieokreślonym pozostaje jednak punkt $(n+1)$ (rys. 7).

Punkt ten możemy wyznaczyć za pomocą interpolacji. W powyższej metodzie $\Delta\chi$ należy dobrać tak, aby $\Delta\chi > \Delta\bar{\chi}$.

Uwzględnienie zmienności entropii nie prowadzi do większych komplikacji; w tym przypadku zamiast równania izentropii trzeba wykorzystać równanie adiabaty Hugoniot'a:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\tau_2 - 6\tau_1}{\tau_1 - 6\tau_2} \quad (k = 1, 4).$$

Mnożąc obydwie strony przez $\lambda^k = (\tau_2/\tau_1)^k$ otrzymamy [uwzględniając (4.7)]

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \lambda^k \frac{6 - \lambda}{6\lambda - 1}.$$

Wzór ten pozwala na wyznaczenie stałej c_2 zaraz poniżej punktu uderzenia krzywej C_r .

Wartość stałej c pozostaje niezmienna wzdłuż linii ruchu elementów $\chi = \text{const}$ (linie poziome w układzie x, χ) aż do przecięcia linii uderzeniowej. Stąd na podstawie przebiegu krzywej C_r i znajomości rozkładu wzdłuż niej stałej c możemy określić rozkład stałych c , a więc i rozkład ciśnień wzdłuż krzywej C_{r+1} dla $\chi_{r+1} \leq \bar{\chi}_r$.

Symbol $\bar{\chi}_r$ oznacza współrzędną punktu uderzenia S_r krzywej C_r .

Wartość stałej c w punkcie $n + 1$ można określić za pomocą interpolacji. Dla obliczenia położenia punktu n -tego krzywej C_r trzeba do wzoru (4.13) podstawić wartość stałej, odpowiadającej punktowi n -temu linii C_r .

Na podstawie przebiegu krzywych C_r dla $r = 1, 2, \dots, n$, można wyznaczyć parametry gazu w całym obszarze przepływu oraz wyznaczyć przebieg linii uderzeniowej.

Pozostaje tylko zagadnienie określenia granic, w jakich powinien zawierać się przy przeprowadzaniu rachunków stosunek $\Delta t / \Delta \chi$. W tym celu zwróćmy uwagę na to, że gdy wzdłuż odcinka linii $t = \text{const}$ dane są wartości x i $\partial x / \partial t$, rozwiązanie równania różniczkowego określa przepływ w trójkącie (krzywoliniowym) utworzonym przez odcinek danej krzywej i przechodzące przez jego końce charakterystyki.

Charakterystyki te są dane przez funkcje

$$(d\chi)^2 = \frac{c^2 k}{\tau^{k+1}} (dt)^2 = \frac{a^2}{\tau^2} (dt)^2.$$

Stąd w metodzie przybliżonej obszar, w którym rozpatrujemy omawiany stosunek, powinien zawierać się w obszarze wyznaczonym przez charakterystyki, czyli w obszarze

$$\frac{\Delta t}{\Delta \chi} \leq \sqrt{\frac{\tau^{k+1}}{c^2 k}}.$$

5. Metoda Neumana

J. Neuman, [4], zaproponował oryginalną metodę rozwiązania zagadnienia współdziałania fali rozrzedzeniowej i fali uderzeniowej. Założył on w całym obszarze przepływu przemianę barotropową, tj. że

$$p = p(\tau).$$

Energia wewnętrzna jest funkcją objętości właściwej i entropii:

$$(5.1) \quad \begin{cases} e = e(\tau, S), & de = T dS - p d\tau, \\ \frac{\partial e}{\partial S} = T(\tau, S), & \frac{\partial e}{\partial \tau} = -p(\tau, S). \end{cases}$$

W myśl założenia barotropowości przepływu ciśnienie jest funkcją tylko objętości właściwej, a temperatura funkcją tylko entropii, $T = T(S)$.

Energia wewnętrzna składa się z dwóch części:

$$(5.2) \quad e(\tau, S) = e'(\tau) + e''(S).$$

Neuman składniki powyższej sumy nazwał odpowiednio «energiami potencjalną» i «energiami cieplną» i zakładał, że nie ma sprzężenia pomiędzy e' i e'' .

Zmianę składnika e'' wywołaną przez falę uderzeniową określimy z równania energii

$$e_2 - e_1 = - \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (u_2 - U)^2 - \frac{1}{2} (u_1 - U)^2 \right] = \frac{p_1 + p_2}{2} (\tau_1 - \tau_2).$$

Stąd

$$(5.3) \quad e_2'' - e_1'' = \frac{p_1 + p_2}{2} (\tau_1 - \tau_2) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} p d\tau.$$

W przypadku przepływu bez uderzenia całkowita energia (suma energii kinetycznej, potencjalnej i cieplnej) jest zachowana. W przypadku występowania fali uderzeniowej entropia wzrasta, stąd $e_2'' > e_1''$, a więc suma energii potencjalnej i kinetycznej maleje o wielkość $e_2'' - e_1''$.

Równanie różniczkowe (4.6) podstawiając $\chi = n \Delta \chi$ oraz

$$x(\chi, t) = x(n \Delta \chi, t) = x_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

możemy zastąpić równaniem różnicowym

$$(5.4) \quad \frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{p \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta \chi} \right) - p \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta \chi} \right)}{\Delta \chi}.$$

Oznaczając $t = s \Delta t$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) oraz podstawiając $\Delta \chi = 1$ otrzymamy

$$(5.4.1) \quad \frac{x_n^{(s+1)} - 2x_n^{(s)} + x_n^{(s-1)}}{(\Delta t)^2} = p(x_n^{(s)} - x_{n-1}^{(s)}) - p(x_{n+1}^{(s)} - x_n^{(s)}),$$

gdzie $x_n^{(s)} \equiv x(n \Delta \chi, s \Delta t)$.

Równanie (5.4.1) nie jest identyczne z równaniem (4.13). Wynika to z faktu, że przy wyprowadzaniu (4.13) było wykonywane różniczkowanie $p(\tau)$ względem χ przed przejściem do równania różnicowego. W tym przypadku pochodne zostały zastąpione przez różnice skończone. Różnica nie jest jednak istotna i budowa równań (5.4.1) i (4.13) jest podobna.

Warunki brzegowe dla równania (5.4) są następujące:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \text{dla } s = 0, & x_n^{(0)} = 0, & \frac{x_n^{(1)} - x_n^{(0)}}{\Delta t} = 0 & (n = 1, 2, \dots); \\ \text{dla } s = 1, 2, \dots, \frac{t_z}{\Delta t}, & x_0^{(s)} = 0, & u = V_t = \frac{x_0^{(s)} - x_0^{(s+1)}}{\Delta t}; \\ \text{dla } s \geq \frac{t_z}{\Delta t}, & x_0^{(s)} = 0, & u = 0. \end{cases}$$

Równanie (5.4) przy warunkach brzegowych (5.5) opisuje nasze zagadnienie w sposób przybliżony; jest ono równocześnie ścisłym równaniem innego zjawiska fizycznego modelującego przepływ. Modelem takim jest ruch indywidualnych elementów np. kulek połączonych «sprężynkami», podlegających prawu nieliniowego przyciągania i odpychania.

Z warunków brzegowych (5.5) wynika, że w układzie tym znajdującym się w spoczynku pierwszy element został wprowadzony gwałtownie w ruch — powstaje wówczas fala podłużna (analogiczna do fali uderzeniowej w przepływie gazu) powodując przekazywanie ruchu następnym elementom. W pewnej chwili $t = t_z$ pierwszy element zostaje gwałtownie zatrzymany — powstaje wtedy druga fala podłużna modelująca falę rozrzedzeniową.

W celu wykazania, że równanie (5.4) przedstawia ruch układu punktów materialnych, wyobraźmy sobie szereg takich punktów o współrzędnych $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$, każdy o masie 1, odpychających i przyciągających sąsiednie punkty według prawa $p = p(\tau)$. Przy założeniu $\Delta x = 1$ mamy $p(\tau) = p(x_n - x_{n-1})$, gdzie $\tau = \Delta x / \Delta x = x_n - x_{n-1}$ jest odległością pomiędzy dwoma punktami.

Całkowita energia mechaniczna układu wyraża się

$$\frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + \sum_n e'(x_n - x_{n-1}) = \text{const.}$$

Różniczkując względem x_n otrzymamy

$$\frac{\partial e'(x_n - x_{n-1})}{\partial \tau} - \frac{\partial e'(x_{n+1} - x_n)}{\partial \tau} = - \frac{d^2 x_n}{dt^2}.$$

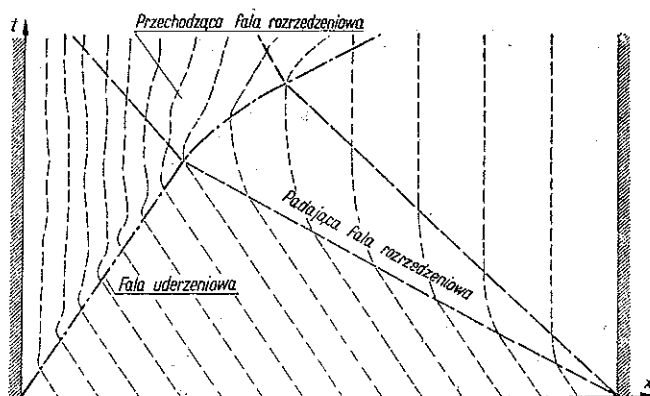
Uwzględniając (5.1) otrzymamy równanie

$$p(x_n - x_{n-1}) - p(x_{n+1} - x_n) = \frac{d^2 x_n}{dt^2},$$

co jest identyczne z równaniem (5.4) dla $\Delta x = 1$.

W przypadku omawianego modelu energia mechaniczna jest zachowana, gdy tymczasem w rzeczywistości występuje spadek energii mechanicznej. W odróżnieniu od przepływu w naszym modelu linie ruchu każdego punktu materialnego są krzywymi, gładkimi z nakładającymi się

oscylacjami. Tym dodatkowym oscylacjom (rys. 8), którym podlegają elementy w modelu mechanicznym, Neuman przypisuje analogię do zmian energii wewnętrznej e'' w przepływie.



Rys. 8

Początek oscylacji na wykresie w układzie x, t wskazuje na położenie fali uderzeniowej. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie ciągłe, w którym przebieg fali uderzeniowej określany jest *a posteriori*. W granicznym przypadku, gdy założymy, że $\Delta\chi \rightarrow 0$, okres i amplituda dodatkowych oscylacji zanikają. Nie podano jednak dowodu zbieżności.

Przebieg obliczeń polega na kolejnym stopniowym wyznaczaniu wartości $x_n^{(s)}$.

Neuman wykonał rachunki przy założeniu przemiany barotropowej w postaci

$$p(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2$$

w przypadku współdziałania spotykającej się fali uderzeniowej z rozrzedzeniową, omówionym przez H. Geiringer. Przyjęcie innej funkcji nie komplikuje obliczeń.

Wyniki obliczeń metodą Neumana podano dla przykładu na rys. 8.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. Courant a. K. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, New York 1948.
- [2] K. Friedrichs, *Formation and Decay of Shock Waves*, *Communic. Pure Appl. Math.*, t. 1, 1948.
- [3] Anneli Lax, *Decaying Shocks*, *Communic. Pure Appl. Math.*, t. 1, 1948.
- [4] H. Geiringer, *On Numerical Methods in Wave Interaction Problems*, *Advances in Applied Mechanics*, t. 1, New York 1948.
- [5] J. Rościszewski, *Aerodynamika stosowana*, MON, 1957.

Резюме

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ И ПРОСТОЙ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

В первой части статьи автор рассматривает физическую картину одномерного неустановившегося течения при наличии ударной волны и простой волны разрежения. Область взаимодействия характеризуется постоянством энтропии вдоль пути элемента газа. Однако, энтропия изменяет свое значение при переходе от одного пути (в плоскости xt) к другому.

Решения основных дифференциальных уравнений в этой области нельзя определить, так как оно зависит от граничных условий вдоль пути ударной волны, которую — не зная решения — невозможно построить.

Методы решения основываются на замене основных дифференциальных уравнений уравнением в конечных разностях, или же в пренебрежении ростом энтропии вдоль ударной волны.

В первом случае дано решение при использовании вспомогательной плоскости ua , где линия представляющая состояние газа непосредственно за ударной волной, определена однозначно.

Второй метод дает хорошее приближение в случае слабых ударных волн (рост энтропии пропорциональный третьей степени силы ударной волны).

Приближенный метод решения предложил К. Фридрихс, пренебрегая отраженной или переходной волной.

Автор показывает, что пренебрежение переходной волной, в случае встречающейся ударной волны и волны разрежения, противоречит основным законам механики.

Автор показывает, что можно изменить метод Фридрихса в том смысле, чтобы принять во внимание простую переходную волну. В этом случае можно также получить решение в замкнутом виде.

В заключение автор рассмотрел метод Г. Гейрингер (в лагранжевом представлении) и механическую модель Неймана.

Summary

METHODS FOR THE ANALYSIS OF THE INTERACTION BETWEEN A SHOCK WAVE AND A SIMPLE RAREFACTION WAVE

In the first part of the paper the author gives a physical analysis of the wave interaction problem in a one-dimensional non-steady flow.

The flow in the interaction region is «multhisentropic», i. e. the value of the entropy is constant along the path of every particle in the xt plane and different for each particle.

The solution of the fundamental equations in this region is indefinite; the solution depending on the boundary conditions along the shock waves lines which cannot be determined before the solution is obtained.

The solution methods consist in replacing the fundamental differential equations by finite difference equations, or disregarding the entropy rise along the shock line. In the first case, the solution is obtained by using the auxiliary plane ua in which the line representing the state of the gas just behind the shock wave is determined in advance.

The second method gives good approximations for small shock intensity (the entropy rise is proportional to the third power of shock strength).

This method was introduced by Friedrichs who disregarded the reflected or transited rarefaction wave.

The author of the present paper shows that disregarding the transited waves in the case of head collision of shock and rarefaction waves, we are in contradiction to the fundamental laws of mechanics (the laws of conservation of mass momentum and energy). He proposes a modification of the Friedrichs method taking the transited simple rarefaction wave into consideration. The solution is obtained in a closed form.

Finally, H. Geiringer's method based on the Lagrangian representation as well as the Neuman's mechanical model are discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1956 r.