

ALEKSANDER KORNECKI

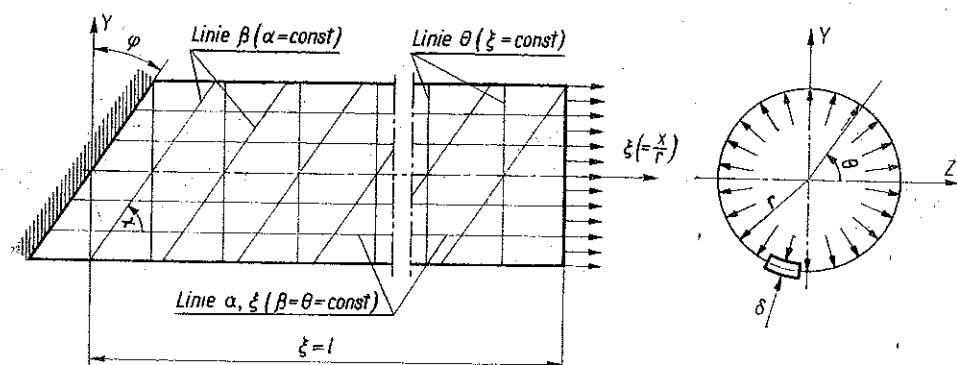
WPLYW ZAMOCOWANIA PRZEKROJU UKOŚNEGO
NA NAPRĘŻENIA W RURZE CIENKOŚCIENNEJ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXV

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Równania ogólne. Sformułowanie zagadnienia	119
2. Dwa etapy	123
3. Etap pierwszy. Błonowy stan napięcia	123
4. Etap drugi. Efekt brzegowy	126
5. Zestawienie wzorów	131

Tematem pracy jest obliczenie przybliżonych wartości naprężeń występujących w cienkościennym rurze o przekroju kołowym, obciążonej równomiernym ciśnieniem wewnętrznym p i zamocowanej wzdłuż przekroju ukośnego (rys. 1).



Rys. 1

Zagadnienie rozwiązuje się metodą asymptotyczną opracowaną przez A. L. Goldienwiejzera¹.

1. Równania ogólne. Sformułowanie zagadnienia

(1) Równania równowagi elementu powłoki walcowej o przekroju kołowym, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym p są następujące:

$$(1.1) \quad \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S_2}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + N_2 = 0, \quad T_2 - \frac{\partial N_1}{\partial \xi} - \frac{\partial N_2}{\partial \theta} = pr;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial H_1}{\partial \xi} + \frac{\partial G_2}{\partial \theta} - rN_2 = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} - rN_1 = 0, \quad S_1 - S_2 - \frac{H_2}{r} = 0.$$

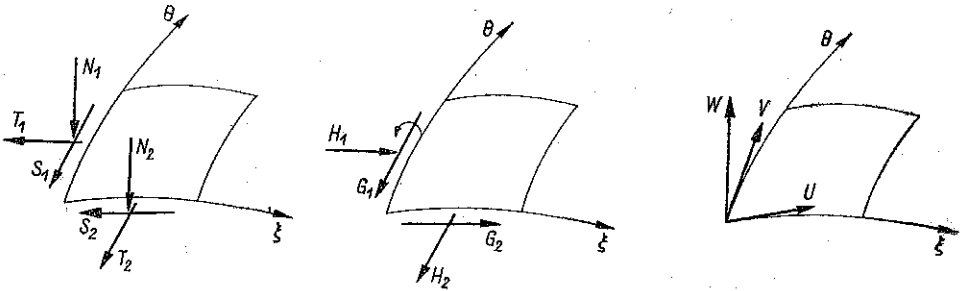
Obrany układ współrzędnych ξ, θ przedstawiono na rys. 1. Dodatkowo kierunki napięć T_i, S_i, N_i oraz momentów G_i, H_i ($i = 1, 2$) przedstawiono na rys. 2.

¹ Por. [1] oraz [2].

(2) Zależności fizyczne między napęciami, momentami i odkształceniami są następujące:

$$(1.3) \quad \begin{cases} T_1 = \frac{E\delta}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), & T_2 = \frac{E\delta}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ S_1 = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\omega + \frac{\delta^2}{6r} \tau \right), & S_2 = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \omega; \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \begin{cases} G_1 = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2), & G_2 = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H_1 = H_2 = \frac{E\delta^3}{12(1+\nu)} \tau. \end{cases}$$



Rys. 2

(3) Związki (geometryczne) między składowymi stanu odkształcenia i składowymi przesunięcia u, v, w (rys. 2) są następujące:

$$(1.5) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \omega = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right);$$

$$(1.6) \quad \kappa_1 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right), \quad \tau = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right).$$

(4) Przedstawienie równań równowagi w zależności od przesunięć u, v, w . Ze wzorów (1.3) i (1.4) wynika, że ostatnie równanie (1.2) spełnione jest tożsamościowo. Z pozostałych pięciu równań rugujemy napęcia N_1 i N_2 otrzymując w rezultacie układ trzech równań różniczkowych z ośmiu niewiadomymi. Posługując się związkami (1.3) - (1.6) wyrażamy niewiadome napęcia i momenty przy pomocy trzech funkcji u, v i w .

W wyniku dokonanych przekształceń równania równowagi przyjmą następującą postać²:

² Ze względu na małą grubość ścianki powłoki będziemy w dalszym ciągu pomijać w drugim równaniu (1.7) wyrazy podkreślone.

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \Theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \Theta} + \left[\frac{1-\nu}{2} \left(1 + \frac{4}{3k^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(1 + \frac{1}{3k^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] v + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3k^4} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] \right\} w = 0, \\ & \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3k^4} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] \right\} v + \\ & \quad + \left(1 + \frac{1}{3k^4} \Delta^2 \Delta^2 \right) w = \frac{1-\nu^2}{E\delta} p r^2. \end{aligned} \right.$$

Znaczenie użytych symboli (nie objaśnionych na rys. 1 i 2) jest następujące:

$$(1.8) \quad k^2 = \frac{2r}{\delta}, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}.$$

(5) Warunki brzegowe. Ponieważ linie Θ leżą na powierzchni walca, to niewiadome $u(\xi, \Theta)$, $v(\xi, \Theta)$ i $w(\xi, \Theta)$ są funkcjami okresowymi zmiennej Θ :

$$(1.9) \quad \begin{cases} u(\xi, \Theta + 2\pi) = u(\xi, \Theta), \\ v(\xi, \Theta + 2\pi) = v(\xi, \Theta), \\ w(\xi, \Theta + 2\pi) = w(\xi, \Theta). \end{cases}$$

Na niezamocowanym końcu rury w przekroju $\xi = l$ (rys. 1) panuje błonowy stan napięcia określony równościami

$$(1.10) \quad T_1 = \frac{pr}{2}, \quad S_1 - \frac{H_1}{r} = 0, \quad G_1 = 0, \quad N_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial \Theta} = 0.$$

Wzdłuż krawędzi $\xi = b \sin \Theta$, gdzie $b = \operatorname{tg} \varphi$ (rys. 1), rura jest sztywno zamocowana.

Wprowadźmy zamiast współrzędnych krzywoliniowych ξ i Θ nowe (nieortogonalne) współrzędne α i β :

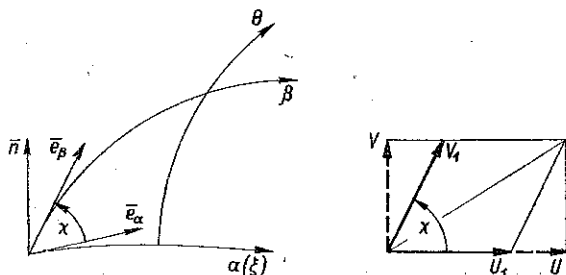
$$(1.11) \quad \alpha = \xi - b \sin \Theta, \quad \beta = \Theta.$$

Linie α i β na powierzchni środkowej walca (rys. 1) przecinają się pod kątem x równym

$$(1.12) \quad \cos x = \frac{b \cos \beta}{\sqrt{1 + b^2 \cos^2 \beta}}.$$

W nowym układzie współrzędnych krawędź zamocowana określona jest równaniem $a = 0$.

W dowolnym punkcie A krawędzi (rys. 3) przyjmujemy trzy wersory styczne odpowiednio do linii α i β oraz \mathbf{n} normalny do powierzchni. Przesunięcie punktu A wskutek odkształcenia powłoki możemy rozłożyć na składowe u_1 , v_1 i w równoległe odpowiednio do wersorów \mathbf{e}_α , \mathbf{e}_β i \mathbf{n} . Z rysunku 3 widoczne jest, że



Rys. 3

(1.13)
$$\begin{cases} u = u_1 + v_1 \cos x, \\ v = v_1 \sin x. \end{cases}$$

Po odkształceniu normalna \mathbf{n} zajmie położenie \mathbf{n}' obracając się o kąt γ_1 w płaszczyźnie $\mathbf{n}\mathbf{e}_\alpha$ oraz o kąt γ_2 w płaszczyźnie $\mathbf{n}\mathbf{e}_\beta$. Można udowodnić (dowód znajdzie czytelnik w wymienionej książce A. Goldienwiewiziera [1], s. 55), że kąty te wynoszą

$$(1.14) \quad \begin{cases} \gamma_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \gamma_2 = -\frac{1}{r} \sin x \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} - v_1 \sin x \right). \end{cases}$$

Warunek sztywnego zamocowania oznacza, że przy $a = 0$ mamy

$$(1.15) \quad u_1 = v_1 = w = 0,$$

$$(1.16) \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Ze wzorów (1.13) wynika, że warunki (1.15) są równoważne następującym warunkom: dla $\xi = b \sin \theta$

$$(1.17) \quad u = v = w = 0.$$

Biorąc pod uwagę wzory (1.14) i (1.15) stwierdzimy, że warunki (1.16) sprowadzają się do równości

$$(1.18) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0$$

albo

$$(1.19) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right]_{\xi=b \sin \theta} = 0.$$

Tak więc zadaniem naszym jest wyznaczenie funkcji $u(\xi, \theta)$, $v(\xi, \theta)$ i $w(\xi, \theta)$ spełniających układ równań różniczkowych (1.7) oraz warunki brzegowe (1.9), (1.10), (1.17) i (1.19).

2. Dwa etapy

Poszukiwać będziemy rozwiązania w następującej postaci:

$$(2.1) \quad u = u^* + \bar{u}, \quad v = v^* + \bar{v}, \quad w = w^* + \bar{w}.$$

Funkcje u^* , v^* i w^* są okresowe względem zmiennej θ i spełniać powinny układ równań różniczkowych (1.7) oraz wszystkie warunki (1.10) na krawędzi $\xi = l$, a ponadto w przekroju $\xi = b \sin \theta$ warunki

$$(2.2) \quad u^* = v^* = 0.$$

Niewiadome \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} — również okresowe względem θ — spełniać powinny równania różniczkowe jednorodne odpowiadające układowi (1.7) oraz następujące warunki brzegowe:

dla $\xi = l$

$$(2.3) \quad \bar{T}_1 = \bar{S}_1 - \frac{\bar{H}_1}{r} = \bar{G}_1 = \bar{N}_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \theta} = 0;$$

dla $\xi = b \sin \theta$

$$(2.4) \quad \bar{u} = \bar{v} = 0,$$

$$(2.5) \quad \bar{w} = -w^*, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = -\frac{\partial w^*}{\partial \xi}.$$

W równaniach (2.3) postawiliśmy kreski nad literami dla podkreślenia, że chodzi o napięcia i momenty określone przemieszczeniami \bar{u} , \bar{v} i \bar{w} .

3. Etap pierwszy. Błonowy stan napięcia

W układzie równań różniczkowych (1.7) występuje parametr k , który jest wielkością bardzo dużą w porównaniu z jednością, ponieważ powłoka jest cienka. Biorąc to pod uwagę założymy, że funkcje $u^*(\xi, \theta, k)$, $v^*(\xi, \theta, k)$, $w^*(\xi, \theta, k)$ można przedstawić w postaci szeregów:

$$(3.1) \quad \begin{cases} u^* = u_0^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^4} u_1^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^8} u_2^*(\xi, \theta) + \dots, \\ v^* = v_0^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^4} v_1^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^8} v_2^*(\xi, \theta) + \dots, \\ w^* = w_0^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^4} w_1^*(\xi, \theta) + \frac{1}{k^8} w_2^*(\xi, \theta) + \dots, \end{cases}$$

gdzie funkcje $u_i^*(\xi, \Theta)$, $v_i^*(\xi, \Theta)$ i $w_i^*(\xi, \Theta)$ nie zależą od parametru k . Podstawiając szereg (3.1) do równań (1.7) otrzymujemy po uporządkowaniu następujący układ równań:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) u_0^* + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial \xi \partial \Theta} + \nu \frac{\partial w_0^*}{\partial \xi} + \frac{1}{k^4} L_{11} + \frac{1}{k^8} L_{12} + \dots = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \xi \partial \Theta} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) v_0^* + \frac{\partial w_0^*}{\partial \Theta} + \frac{1}{k^4} L_{21} + \frac{1}{k^8} L_{22} + \dots = 0, \\ \nu \frac{\partial u_0^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0^*}{\partial \Theta} + w_0^* + \frac{1}{k^4} L_{31} + \frac{1}{k^8} L_{32} + \dots = \frac{1-\nu^2}{E\delta} p r^2. \end{cases}$$

Symbolem $L_{m,n}$ oznaczono funkcje złożone zależne od funkcji u_i^* , v_i^* i w_i^* oraz od ich pochodnych.

Zachowując tylko pierwszy wyraz w każdym z szeregów (3.1), tj. przyjmując $1/k^4 \approx 0$, otrzymujemy po odrzuceniu wskaźnika 0:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \Theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi \partial \Theta} + \nu \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi \partial \Theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial w^*}{\partial \Theta} = 0, \\ \nu \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \Theta} + w^* = \frac{1-\nu^2}{E\delta} p r^2. \end{cases}$$

Warunki brzegowe (1.10) wobec związków (1.3) i (1.4) oraz założenia $1/k^4 \approx 0$ przyjmują następującą postać dla $\xi = l$:

$$(3.4) \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial v^*}{\partial \Theta} + w^* \right) = \frac{1-\nu^2}{E\delta} \frac{p r^2}{2}, \quad \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u^*}{\partial \Theta} = 0;$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \Theta} - v^* \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \Theta} - v^* \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Układ równań (3.3) można sprowadzić do jednego równania czwartego rzędu, a zatem można spełnić tylko cztery warunki, po dwa na każdej krawędzi powłoki, gdy tymczasem w zagadnieniu naszym mamy sześć warunków: (2.2), (3.4) i (3.5).

Łatwo sprawdzić przez podstawienie, że funkcje

$$(3.6) \quad \begin{cases} u^* = \frac{pr^2}{2E\delta} (1-2\nu) (\xi - b \sin \Theta), \\ v^* = \frac{pr^2}{2E\delta} (1-2\nu) (\xi - b \sin \Theta) b \cos \Theta, \\ w^* = \frac{pr^2}{2E\delta} \{ (2-\nu) + (1-2\nu) b [b \cos^2 \Theta + (\xi - b \sin \Theta) \sin \Theta] \} \end{cases}$$

spełniają przybliżone równanie równowagi (3.3) oraz wszystkie wymagane warunki brzegowe, z wyjątkiem pierwszego równania (3.5).

Istotnie,

$$(3.7) \quad G_1^* = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)r^2} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \Theta} - v^* \right) \right] = \\ = p \frac{\nu(1-2\nu)}{1-\nu^2} \frac{\delta^2}{8} b^2 \cos 2\Theta \neq 0.$$

Jednakże momentom gnącym G_1^* odpowiadają naprężenia znacznie mniejsze od naprężeń odpowiadających napięciu T_1^*

$$\sigma_1^* = \frac{T_1^*}{\delta} \pm \frac{G_1^* \cdot 6}{\delta^2} = \frac{pr}{2\delta} \left[1 \pm \frac{1}{k^2} \frac{3\nu(1-2\nu)}{1-\nu^2} b^2 \cos 2\Theta \right].$$

Drugi składnik w nawiasie posiada mnożnik $1/k^2$, który jest znacznie mniejszy od jedności, wobec czego

$$\frac{T_1^*}{\delta} + \frac{G_1^* \cdot 6}{\delta^2} \approx \frac{T_1^*}{\delta}$$

i warunki (1.10) są w przybliżeniu spełnione.

Kilka słów należy poświęcić omówieniu fizycznej strony zagadnienia. Korzystając ze wzorów (1.5) i (1.3) można do równań (3.3) wprowadzić funkcje określające napięcia. Otrzymamy wówczas

$$(3.8) \quad \frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial S^*}{\partial \Theta} = 0, \quad \frac{\partial S^*}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2^*}{\partial \Theta} = 0, \quad T_2^* = pr,$$

gdzie

$$S^* = S_1 = S_2^* = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \omega.$$

Równania równowagi (3.8) określają tzw. błonowy (bezmomentowy) stan napięcia, a ich całkami spełniającymi warunki (1.10) są funkcje:

$$(3.9) \quad T_1^* = \frac{pr}{2}, \quad T_2^* = pr, \quad S^* = 0.$$

Napięciu T_2^* , które równoważy ciśnienie na ścianki, odpowiadają przesunięcia

$$(3.10) \quad u^* = -\nu \frac{2B}{1-2\nu} \xi, \quad v^* = 0, \quad w^* = \frac{2B}{1-2\nu}.$$

Napięcie T_1^* rozciąga walec (który pracuje teraz jak pręt prosty), wywołując przemieszczenia

$$(3.11) \quad u^* = \frac{B}{1-2\nu} \xi, \quad v^* = 0, \quad w^* = -\nu \frac{B}{1-2\nu},$$

gdzie stała B wynosi

$$(3.12) \quad B = \frac{p r^2}{2 E \delta} (1 - 2\nu).$$

Sumując odpowiednie równania (3.10) i (3.11) stwierdzamy, że pierwszy warunek (2.2) nie jest spełniony. Wobec tego należy jeszcze wyznaczyć całkę ogólną równań jednorodnych $T_1^* = T_2^* = S^* = 0$, czyli $\varepsilon_1^* = \varepsilon_2^* = \omega^* = 0$ i dobrać tak stałe całkowania, aby w sumie z przesunięciami określonymi wzorami (3.10) i (3.11) spełnić warunki brzegowe (2.2). Takimi całkami są sumy następujących funkcji:

$$(3.13) \quad u^* = -B b \sin \theta, \quad v^* = B b \xi \cos \theta, \quad w^* = B b \xi \sin \theta,$$

$$(3.14) \quad u^* = 0, \quad v^* = -B b^2 \cos \theta \sin \theta, \quad w^* = B b^2 \cos 2\theta.$$

Przemieszczenia (3.13) określają obrót walca (jako bryły sztywnej) wokół osi z . W wyniku tego obrotu znikają na krawędzi $a = 0$ przesunięcia $u^* = B b \sin \theta$ wywołane rozciąganiem, jednocześnie jednak zostaje naruszony warunek $v^*(0) = 0$. Dla spełnienia tego warunku należy przyłożyć momenty gnące G_1^* i G_2^* , wywołujące przesunięcia (3.14). Momenty G_1^* i G_2^* , o których mowa była wyżej, zakłócają w nieznacznym stopniu błonowy stan napięcia panujący w powłoce. Wzory (3.6) otrzymujemy dodając odpowiednie równania (3.10), (3.11), (3.13) i (3.14).

4. Etap drugi. Efekt brzegowy

Niejednorodnemu układowi równań różniczkowych (1.7) odpowiada następujący układ równań jednorodnych³:

³ W równaniach (4.1), (4.2) i (4.3) przyjęto $1 + 1/k^4 \approx 0$. Por. z uwagą (2) na s. 120.

$$(4.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi \partial \Theta} + \nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \Theta} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \bar{v} + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3k^4} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] \right\} \bar{w} = 0, \\ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3k^4} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] \right\} \bar{v} + \left(1 + \frac{1}{3k^4} \Delta^2 \Delta^2 \right) \bar{w} = 0. \end{cases}$$

Posługując się znanymi metodami teorii układów równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami można trzy równania (4.1) sprowadzić do jednego równania ósmego rzędu:

$$(4.2) \quad \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + 4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^6 \partial \Theta^2} + 6 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \Theta^4} + 4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \Theta^6} + \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \Theta^8} + (8 - 2\nu^3) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \Theta^2} + \\ + 8 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \Theta^4} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \Theta^6} + 3k^4 (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + 4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \Theta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \Theta^4} = 0.$$

Znając funkcję Φ można wyznaczyć przemieszczenia \bar{u} , \bar{v} i \bar{w} za pomocą następujących wzorów:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \bar{u} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ -\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{3k^4} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \left[(2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right] \right\} \Phi, \\ \bar{v} = -\frac{\partial}{\partial \Theta} \left\{ (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{3k^4} \left[\frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{4-3\nu+\nu^3}{1-\nu} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \Theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \Theta^4} \right] \right\} \Phi, \\ \bar{w} = \Delta^2 \Delta^2 \Phi. \end{cases}$$

Wprowadźmy do równania (4.2) nowe zmienne niezależne α i β określone wzorami (1.11). Otrzymamy wówczas

$$(4.4) \quad (1 + b^2 \cos^2 \beta)^4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + c_{7,1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^7 \partial \beta} + c_{6,2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + \dots + c_{0,5} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \beta^5} + \\ + [c_{4,0} + 3k^4 (1 - \nu^2)] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \dots + c_{1,0} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0,$$

gdzie współczynniki c_{mn} są funkcjami zmiennej β i nie zależą od parametru k .

Szukamy całki równania (4.4) w postaci szeregu asymptotycznego

$$(4.5) \quad \Phi = e^{kf(\alpha, \beta)} \left[F_0(\alpha, \beta) + \frac{F_1(\alpha, \beta)}{k} + \frac{F_2(\alpha, \beta)}{k^2} + \dots \right].$$

Funkcje f i F_n nie zależą od parametru k ; parametr ten zgodnie z określeniem [wzór (1.8)] jest znacznie większy od jedności.

Podstawiamy szereg (4.5) do równania (4.4) i grupujemy wyrazy zawierające czynnik k w tej samej potędze. Zadowolając się pierwszym przybliżeniem, to znaczy zachowując tylko wyrazy zawierające k w najwyższej potędze, mamy

$$(4.6) \quad k^3 F_0(\alpha, \beta) e^{kf(\alpha, \beta)} [(1 + b^2 \cos^2 \beta)^4 (f_\alpha)^8 + c_{7,1} (f_\alpha)^7 (f_\beta) + \dots + c_{0,8} (f_\beta)^8 + 3(1 - \nu^2) (f_\alpha)^4] = 0$$

i odpowiednio

$$(4.7) \quad \Phi = e^{kf(\alpha, \beta)} F_0(\alpha, \beta),$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(4.8) \quad f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad f_\beta = \frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

Ze związku (4.6) wyznaczamy funkcję $f(\alpha, \beta)$, natomiast funkcję $F_0(\alpha, \beta)$ dobieramy tak, aby spełnić warunki brzegowe (2.3) - (2.5).

Z wymienionych warunków brzegowych oraz z rozważań w p. 2 wynika, że przesunięcia u^* , v^* i w^* obliczone w p. 3 spełniają wszystkie wymagania oprócz dwóch warunków brzegowych na krawędzi zamocowanej $\alpha = 0$. Wystarczy więc wyznaczyć funkcję Φ [czyli wobec (4.6) funkcję $f(\alpha, \beta)$] jedynie w pobliżu linii $\alpha = 0$ taką, której bezwzględna wartość w miarę wzrostu α maleje dążąc do zera.

Rozłóżmy zatem poszukiwaną funkcję $f(\alpha, \beta)$ w szereg Maclaurina

$$(4.9) \quad f(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \frac{\alpha}{1!} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha=0} \frac{\alpha^2}{2!} + \dots$$

przyjmując, że wzdłuż krawędzi zamocowanej funkcja $f(\alpha, \beta)$ jest wielkością stałą, tzn. że

$$(4.10) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial \beta} \right]_{\alpha=0} = 0.$$

Podstawiając wyrażenie (4.10) do wzoru (4.6) otrzymujemy

$$(4.11) \quad (1 + b^2 \cos^2 \beta)^4 \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}^8 + 3(1 - \nu^2) \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}^4 = 0,$$

a stąd pomijając banalną wartość $[\partial f/\partial \alpha]_{\alpha=0} = 0$, znajdziemy

$$(4.12) \quad \left[\frac{\partial f_{1,2}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = -(1 \pm i)g, \quad \left[\frac{\partial f_{3,4}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = (1 \pm i)g,$$

gdzie

$$(4.13) \quad g = \frac{\sqrt[4]{3(1-v^2)/4}}{1 + b^2 \cos^2 \beta}.$$

Ze względu na warunki brzegowe (2.3) wartości $\partial f_3/\partial \alpha$ i $\partial f_4/\partial \alpha$ nie nadają się w danym przypadku i w rezultacie, jeśli zachować tylko pierwszy wyraz szeregu (4.9), mamy:

$$\Phi = e^{-k(1+i)g\alpha} F'_0(a, \beta) + e^{-k(1-i)g\alpha} F''_0(a, \beta)$$

albo po prostych przekształceniach

$$(4.14) \quad \Phi = [\psi_1(a, \beta) \cos kga + \psi_2(a, \beta) \sin kga] e^{-kg\alpha}.$$

Funkcje ψ_1 i ψ_2 należy tak dobrać, aby spełniły warunki brzegowe (2.4) i (2.5). Warunków tych jest ogółem cztery, mamy zaś do dyspozycji tylko dwie dowolne funkcje. Zauważmy jednak, że przy przyjętych uproszczeniach zależności (4.3) przyjmą następującą postać:

$$(4.15) \quad \begin{cases} \bar{u} = (-v + b^2 \cos^2 \beta) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}, \\ \bar{v} = b \cos \beta (2 + v + b^2 \cos^2 \beta) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}, \\ \bar{w} = (1 + b^2 \cos^2 \beta)^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}. \end{cases}$$

Stąd wynika, że przesunięcia \bar{u} i \bar{v} zawierają parametr k w stopniu niższym niż przesunięcie normalne \bar{w} (a tym bardziej kąt ugięcia $\partial \bar{w}/\partial \alpha$). A zatem, wobec niedokładnego przybliżenia stosowanego we wszystkich dotychczasowych wywodach, możemy spełnić jedynie warunki brzegowe (2.5), natomiast dwa warunki (2.4) będą spełnione tylko w przybliżeniu (por. p. 5).

Zanim przejdziemy do wyznaczania funkcji ψ_1 i ψ_2 na podstawie równań (2.5), wróćmy na chwilę do wyjściowego równania różniczkowego (4.4). Łatwo sprawdzić, że wszystkie przyjęte uproszczenia sprowadzają się formalnie do założenia, iż funkcja Φ (a tym samym wszystkie napięcia, momenty i przemieszczenia) wzrasta k -krotnie przy różniczkowaniu względem zmiennej α , natomiast nie zmienia się (albo ulega nieznacznej zmianie) przy różniczkowaniu w kierunku β tworzącym kąt x ($x \neq \pi/2$) z kierunkiem α [por. (4.5) i (4.10)].

Wzrostanie (4.4) ma w przybliżeniu następującą postać:

$$(1 + b^2 \cos^2 \beta)^4 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} + 3k^4 (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0,$$

równowagi (1.1) i (1.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\bar{T}_1 - b \cos \beta \bar{S}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (\bar{S} - b \cos \beta \bar{T}_2) = 0, \\ T_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (G_1 - 2b \cos \beta H_1 + b^2 \cos^2 \beta G_2) = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\bar{S} = \bar{S}_1 = \bar{S}_2;$$

Korzystając z równania (4.16) możemy ostatni wzór (4.15) napisać w postaci

$$(4.18) \quad \bar{w} = - \frac{3k^4 (1 - \nu^2)}{(1 + b^2 \cos^2 \beta)^2} \Phi.$$

A zatem wobec (4.14) i (2.5) mamy⁴

$$w(0, \beta) = - \frac{3k^4 (1 - \nu^2)}{(1 + b^2 \cos^2 \beta)^2} \psi_1 = -w^*(0, \beta),$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = - \frac{3k^5 g (1 - \nu^2)}{(1 + b^2 \cos^2 \beta)^2} (\psi_2 - \psi_1) = - \left[\frac{\partial w^*}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0},$$

stąd

$$(4.19) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{(1 + b^2 \cos^2 \beta)^2}{3k^4 (1 - \nu^2)} w^*(0, \beta), \\ \psi_2 = \psi_1 \left\{ 1 + \frac{1}{k} \left[\frac{\partial w^*}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \frac{1}{g w^*(0, \beta)} \right\} \approx \psi_1 \end{cases}$$

i ostatecznie

$$\bar{w} = -w^*(0, \beta) (\cos kga + \sin kga) e^{-kga}.$$

Wobec wzorów (3.6) mamy

$$(4.20) \quad \bar{w} = - \frac{pr^2}{2E\delta} c (\cos kga + \sin kga) e^{-kga},$$

gdzie

$$(4.21) \quad c = 2 - \nu + (1 - 2\nu) b^2 \cos^2 \beta.$$

⁴ Przy danym stopniu przybliżenia można przyjąć $\psi_1(\alpha, \beta) \approx \psi_1(0, \beta)$.

Jeżeli korzystając z zależności (4.18) wprowadzimy do równania (4.16) składową normalną przesunięcia \bar{w} zamiast funkcji Φ , to otrzymamy

$$(4.22) \quad \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \alpha^4} + 12(1-\nu^2) \left(\frac{\sin^2 x}{R_2' \delta} \right)^2 \bar{w} = 0.$$

Przy wyprowadzaniu równania (4.22) uwzględniono wzory (1.8) i (1.12) oraz oznaczono symbolem R_2' promień krzywizny linii $\alpha = \text{const}$ na środkowej powierzchni walca (a więc i krawędzi zamocowanej $\alpha = 0$):

$$(4.23) \quad R_2' = r(1 + b^2 \cos^2 \beta).$$

Zależność (4.22) można traktować jako uogólnienie znanego równania «efektu brzegowego» w rurze cienkościennej zamocowanej wzdłuż przekroju poprzecznego (por. np. [3]), w którym to przypadku $x = \pi/2, b = 0$.

5. Zestawienie wzorów

Na podstawie wzorów (2.1), (3.6), (4.20), (4.18) i (4.15) mamy:

$$(5.1) \quad w = \frac{pr^2}{2E\delta} \{c[1 - (\cos kga + \sin kga)e^{-kga}] + (1-2\nu)b \sin \beta a\},$$

$$(5.2) \quad u = \frac{pr^2}{2E\delta} \left[(1-2\nu)a - \frac{1}{k} \frac{c(1-\nu^2)(-\nu + b^2 \cos^2 \beta)}{g(1+b^2 \cos^2 \beta)^2} \cos kga e^{-kga} \right],$$

$$(5.3) \quad v = \frac{pr^2}{2E\delta} b \cos \beta \left[(1-2\nu)a + \frac{1}{k} \frac{c(1-\nu^2)(2+\nu + b^2 \cos^2 \beta)}{g(1+b^2 \cos^2 \beta)^2} \cos kga e^{-kga} \right].$$

Ostatnie dwa wzory można uprościć pomijając składniki z czynnikiem $1/k$:

$$(5.4) \quad \begin{cases} u \approx u^* = \frac{pr^2}{2E\delta} (1-2\nu)a, \\ v \approx v^* = \frac{pr^2}{2E\delta} (1-2\nu)ab \cos \beta. \end{cases}$$

Dla wyznaczenia momentów odpowiadających przemieszczeniom \bar{u}, \bar{v} i \bar{w} skorzystamy z odpowiednio uproszczonych wzorów (1.4) i (1.6). Mamy

$$(5.5) \quad \begin{cases} \bar{G}_1 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)r^2} (1+\nu \text{ctg}^2 x) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2}, \\ \bar{G}_2 = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)r^2} (\nu + \text{ctg}^2 x) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2}, \\ \bar{H}_1 = \bar{H}_2 = \frac{E\delta^3}{12(1+\nu)r^2} \text{ctg} x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \alpha^2}, \end{cases}$$

gdzie zgodnie ze wzorem (1.12)

$$(5.6) \quad \operatorname{ctg} x = b \cos \beta.$$

Znając momenty znajdujemy z trzeciego przybliżonego równania równowagi (4.17) napięcie \bar{T}_2 :

$$\bar{T}_2 = - \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)r^3} (1+b^2 \cos^2 \beta)^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \alpha^4},$$

albo uwzględniając równanie różniczkowe (4.22)

$$(5.7) \quad \bar{T}_2 = \frac{E \delta}{R_2'} \bar{w} \sin^2 x.$$

Z dwóch pozostałych wzorów (4.17) wyznaczamy kolejno \bar{S} i \bar{T}_1 :

$$(5.8) \quad \begin{cases} \bar{S} = \frac{E \delta}{R_2'} \bar{w} \cos x \sin x, \\ \bar{T}_1 = \frac{E \delta}{R_2'} \bar{w} \cos^2 x. \end{cases}$$

Ostatecznie zatem korzystając ze wzorów (5.5), (5.7), (5.8), (3.7), (3.9), (4.20) i (1.12) oraz uwzględniając, że zgodnie z równościami (2.1)

$$T_i = T_i^* + \bar{T}_i, \quad N_i = N_i^* + \bar{N}_i \approx \bar{N}_i, \quad G_i \approx \bar{G}_i \quad (i=1, 2), \quad S = S^* + \bar{S}, \quad H \approx \bar{H},$$

otrzymujemy następujące wzory:

$$(5.9) \quad \begin{cases} T_1 = \frac{pr}{2} \left[1 - \frac{b^2 \cos^2 \beta}{(1+b^2 \cos^2 \beta)^2} c(\cos kga + \sin kga) e^{-kga} \right], \\ T_2 = pr \left[1 - \frac{c}{2(1+b^2 \cos^2 \beta)^2} (\cos kga + \sin kga) e^{-kga} \right], \\ S = - \frac{pr}{2} \frac{b \cos \beta}{(1+b^2 \cos^2 \beta)^2} c(\cos kga + \sin kga) e^{-kga}, \end{cases}$$

$$(5.10) \quad \begin{cases} \frac{6}{\delta} G_1 = - \frac{pr}{1-\nu^2} c(1+\nu b^2 \cos^2 \beta) g^2 (\cos kga - \sin kga) e^{-kga}, \\ \frac{6}{\delta} G_2 = - \frac{pr}{1-\nu^2} c(\nu + b^2 \cos^2 \beta) g^2 (\cos kga - \sin kga) e^{-kga}, \\ \frac{6}{\delta} H = \frac{pr}{1+\nu} b \cos \beta c g^2 (\cos kga - \sin kga) e^{-kga}, \\ N_1 = \frac{2}{3k} \frac{pr}{1-\nu^2} c g^3 (1+b^2 \cos^2 \beta) \cos kga e^{-kga}. \end{cases}$$

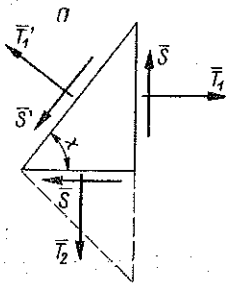
Ze wzorów powyższych wynika, że przekroje poprzeczne walca leżące w pobliżu krawędzi zamocowanej nie są przekrojami głównymi. Obliczmy jeszcze napięcia \bar{T}'_1, \bar{T}'_2 i \bar{S}' (rys. 4) w przekroju ukośnym $\alpha = \text{const}$ i do niego prostopadłym.

Z rys. 4a wynika, że

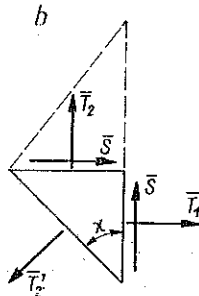
$$\begin{aligned} \bar{T}'_1 \sin x + \bar{S}' \cos x &= -\bar{S} \cos x + \bar{T}_1 \sin x = \sin x (\bar{T}_1 - \bar{S} \text{ctg } x), \\ \bar{T}'_1 \cos x - \bar{S}' \sin x &= \bar{T}_2 \cos x - \bar{S} \sin x = \sin x (\bar{T}_2 \text{ctg } x - \bar{S}), \end{aligned}$$

zatem zgodnie z równaniami (4.17) i wobec (5.6) mamy

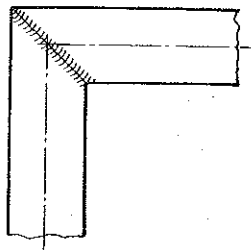
$$(5.11) \quad \begin{cases} \bar{T}'_1 \sin x + \bar{S}' \cos x = 0, \\ \bar{T}'_1 \cos x - \bar{S}' \sin x = 0. \end{cases}$$



Rys. 4



Rys. 5



Wyznacznik równań (5.11) nie równa się zero, z czego wynika, że

$$(5.12) \quad \bar{T}'_1 = 0, \quad \bar{S}' = 0.$$

W analogiczny sposób można wykazać (rys. 4b), że

$$(5.13) \quad \bar{T}'_2 = \bar{T}_2 + \bar{S} \text{ctg } x.$$

Ze wzorów (5.12) wynika, że efekt brzegowy nie wpływa na wielkość napięć działających w przekroju brzegowym ($\alpha = 0$) i leżących w płaszczyźnie stycznej do środkowej powierzchni powłoki.

Powyższe wywody znakomicie ułatwiają obliczenie przybliżonych wartości naprężeń występujących w połączeniu rurowym przedstawionym na rys. 5. Połączenia tego typu spotyka się często w praktyce.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. L. Goldienwiejzjer, *Teorja uprugich tonkich obotoczek*, 1953.
- [2] W. Tritzinsky, *Analytic Theory of Parametric Linear Partial Differential Equations*, Matem. sborn., t. 15, 2 (1944).
- [3] S. Timoshenko, *Plates and Shells*, New York 1940.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЗАДЕЛКИ КОСОГО СЕЧЕНИЯ НА НАПРЯЖЕНИЯ
В ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБЕ

В работе рассматривается напряженное и деформированное состояние тонкостенной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением и защемленной вдоль сечения, наклоненного под некоторым углом φ к оси (рис. 1).

Задача решается обычными инженерными методами, путем разложения на определение усилий и перемещений согласно безмоментной теории и на определение так называемого краевого эффекта.

Во всех выводах применяется последовательно асимптотический метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругих тонких оболочек, разработанный А. Л. Гольденвейзером.

Summary

THE STATE OF STRESS AND STRAIN IN A THIN-WALLED
TUBE RIGIDLY FIXED IN AN OBLIQUE CROSS-SECTION

This paper is devoted to consideration of the state of stress and strain in a thin-walled circularly cylindrical shell subjected to internal pressure and with one oblique section rigidly fixed.

Common engineering methods are used to solve the problem which is divided into, (1), determining the stresses and displacements according to the membrane theory, and (2), computing the so-called edge effect. Asymptotic method of integrating differential equations of the theory of thin-walled shells — as developed by A. L. Goldenveiser — is used throughout the paper.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKOW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1956 r.