

ALEKSANDER LISOWSKI

WYBOCZENIE KOPUŁ KULISTYCH
W ŚWIETLE BADAŃ MODELOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
LXIV

SPIS TREŚCI

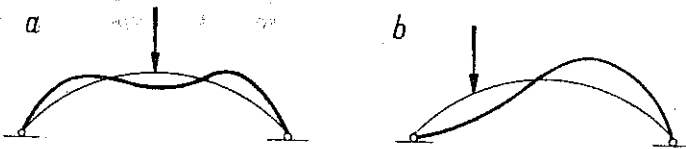
	Str.
Wstęp	99
1. Postać wyboczenia sklepień cylindrycznych	99
2. Postać odkształcenia kopuł kulistych	105
3. Wyboczenie kopuł kulistych	107
4. Wyboczenie kopuł żelbetowych konstrukcji budowlanych	112
5. Zakończenie	114

Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień opracowywanych przez Pracownię Teorii Konstrukcji Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN jest zagadnienie stateczności pokryć cienkościennych. Wyniki prac zespołu w Krakowie, dotyczące określenia postaci wyboczenia sklepień cylindrycznych i kopuł kulistych na podstawie badań modelowych, opublikował autor w pracy [1].

Obecnie przedstawimy dalsze wyniki badań oraz fotografie aparatury i modeli powłok.

Na podstawie badań modeli oraz analizy postaci wyboczenia prostszych układów (prętów prostych, łuków i płyt) uczynił autor następujące założenie: *postać wyboczenia układu ma podobny charakter do odkształcenia tego układu pod działaniem siły skupionej*. Miejsce zaczepienia siły skupionej jest w znacznej mierze dowolne. W przypadkach wątpliwych należy rozważyć odkształcenia układu pod działaniem siły zaczepionej w charakterystycznych punktach (np. w przypadku łuku symetrycznego należy rozpatrzyć obciążenie siłą w zworniku oraz pomiędzy podporą a zwornikiem, rys. 1a i 1b).



Rys. 1

W pracy niniejszej rozpatrzmy wyboczenie powłok, których odkształcenia potrafimy rachunkowo obliczyć. Będą to powłoki cylindryczne i kopuły kuliste.

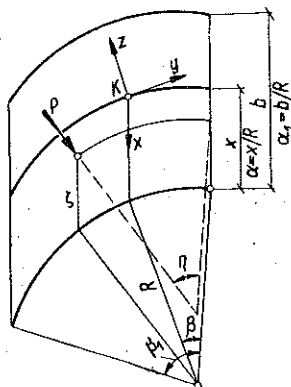
1. Postać wyboczenia sklepień cylindrycznych

1.1. Obliczenie odkształceń powłoki cylindrycznej obciążonej siłą skupioną.

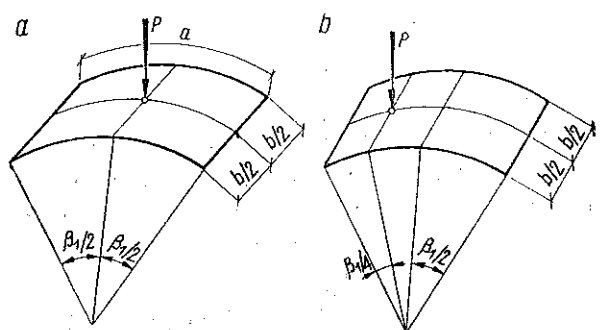
Do obliczeń odkształceń cylindrycznej powłoki kołowej (rys. 2) zastosowano funkcję *Własowa* (por. [2], s. 319 i dalsze), która prowadzi do jednego równania różniczkowego ósmego rzędu

$$(1.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{(1-\nu^2) 12 R^2}{h^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{12(1-\nu^2) R^4}{E h^3} Z,$$

gdzie $F(\alpha, \beta)$ oznacza funkcję Własowa, R promień krzywizny powłoki, h grubość powłoki, E współczynnik sprężystości podłużnej, ν współ-



Rys. 2



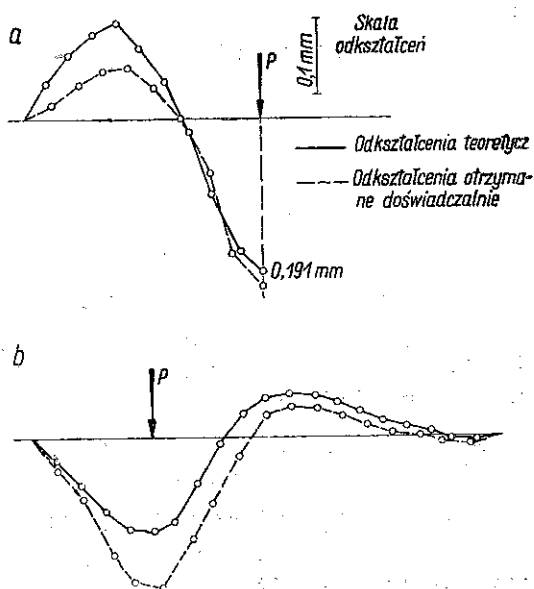
Rys. 3

czynnik Poissona, $Z(\alpha, \beta)$ obciążenie skierowane normalnie do powierzchni powłoki oraz

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

Położenie dowolnego punktu powłoki określają współrzędne niemianowane α, β oraz położenie siły obciążającej współrzędne ξ, η . W naszym przypadku chodzi nie o znalezienie odkształcenia całej powłoki, a tylko o kształt jej wygięcia. Wystarczy zatem obliczyć odkształcenie pasma środkowego (w odległości $b/2$ od ścian szczytowych) od obciążenia siłą zaczepioną w charakterystycznych punktach.

Jako przykład rozważono odkształcenie powłoki cylindrycznej opartej przegubowo-przesuwnie na krawędziach od siły zaczepionej pośrodku (rys. 3a) oraz w odległości $1/4$ rozpiętości od lewej



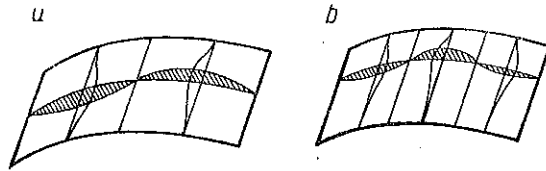
Rys. 4

krawędzi bocznej (rys. 3b) przy następujących danych: $a = b = 18$ cm, $R = 25$ cm, $h = 0,08$ cm, $E = 17000$ kG/cm² (celuloid), $P = 0,1$ kG.

Wyniki teoretyczne obliczeń oraz pomiarów na modelu (przy sprężycie utwierdzonych krawędziach) podano na rys. 4a i 4b.

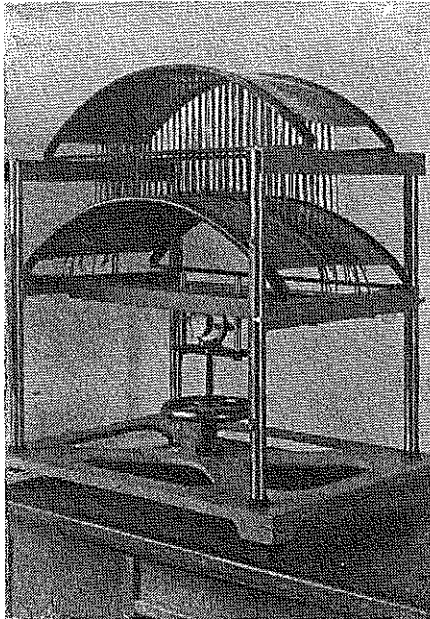
1.2. Określenie postaci wybočenja powłoki na podstawie odkształcenia tej powłoki pod obciążeniem siłą skupioną. Przejdźmy do określenia postaci wybočenja rozpatrywanej powłoki cylindrycznej na podstawie obliczonych odkształceń pasma środkowego. Analizując wykresy ugięć można przewidywać powstanie dwóch półfal z tendencją do formowania się trzeciej (rys. 4b) albo pełnych trzech półfal (rys. 4a). Do obliczenia wielkości obciążenia krytycznego należałoby dla danego sklepienia rozważyć postać symetryczną (rys. 5b) o trzech półfalach i antysymetryczną (rys. 5a) o dwóch półfalach, zaś z warunku bezpieczeństwa przyjmując mniejszą wartość q_{kr} .

W celu porównania wyników teoretycznych z doświadczeniem wykonano odpowiedni model sklepienia i obserwowano postać wybočenja



Rys. 5

powłoki kolejno zwiększając obciążenie pionowe aż do utraty stateczności. Obciążenie stanowiły gumki rozmieszczone równomiernie na powierzchni



Rys. 6

powłoki w odstępach 1,5 cm, których naciąg równomiernie zwiększano. Powłoka ulega wyboczeniu początkowo przyjmując postać dwóch pełnych półfal z lekkim zaznaczeniem się trzeciej półfali (podobnie do rys. 4b). Przy dalszym (nieznacznym już) wzroście obciążenia tworzy się ostatecznie postać symetryczna o trzech półfalach.

W celu doświadczalnego sprawdzenia postaci wybočenja powłok cylindrycznych różniących się wyniosłością, rzutem na płaszczyznę, promieniem krzywizny, grubością i materiałem użytym na powłokę skonstruowana została specjalna aparatura przedstawiona na rys. 6.

Powłoka, której badamy postać wybočenja, jest sztywno przymoco-

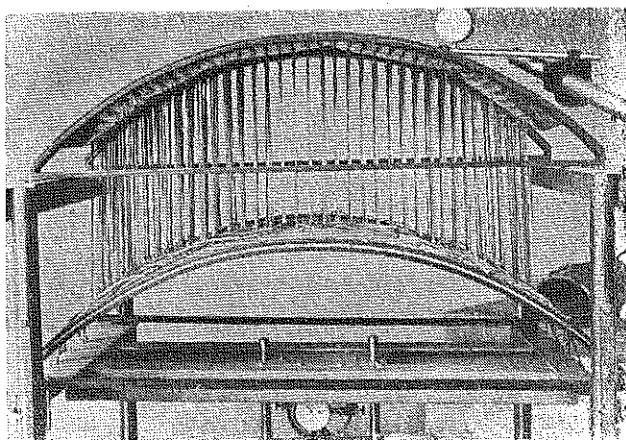
wana do nieruchomych łuków w górnej części aparatu. Obciążenie realizuje się za pomocą gumek równej długości i jednakowego przekroju, rozpiętych pomiędzy badaną powłoką a sztywną powierzchnią (o tej samej krzywiznie co badana powłoka) opartą wzdłuż czterech prowadnic na przesuwnych łukach.

a



Równomierne opuszczanie ruchomej części zapewniają cztery prowadnice stanowiące zarazem oparcie dla części górnej. Naciąg gumek

b



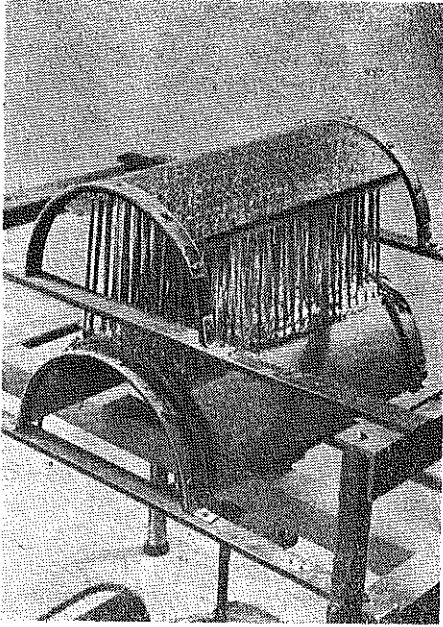
Rys. 7

odbywa się za pomocą śruby oraz obrotowego koła osadzonego na łożysku kulkowym. Wartość naciągu zmierzyć można na siłomierzu, a wydłużenie gumek odczytać na skali prowadnic.

Rozmiary badanych powłok mieszczą się w granicach 65×95 cm. Poddano badaniom powłoki o promieniu krzywizny $R = 100, 50, 25$ i $12,5$ cm. Zbadano ogółem około 70 powłok z różnych materiałów o grubości w granicach $0,5$ do $2,0$ mm.

Wyboczenie bardzo krótkiej powłoki z blachy cynkowej przedstawiają fotografie na rys. 7a i 7b, przy czym na rys. 7a widać powłokę od góry, na rys. 7b od dołu. Pomiar odkształceń w początkowym stadium wyboczenia dokonywany był za pomocą czujnika zegarowego (rys. 7b). Załączone fotografie przedstawiają obraz powłoki z materiału elasto-plastycznego po znacznym już przekroczeniu wartości obciążenia krytycznego i uformowaniu się ostrych załamania blachy po linii grzbietowej odkształcenia. Kolejne stadia wyboczenia się średniej długości powłoki cylindrycznej z celuloidu przedstawiają fotografie podane na rys. 8.

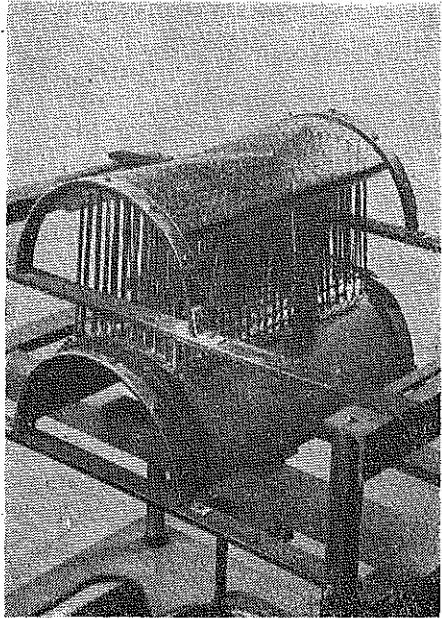
a



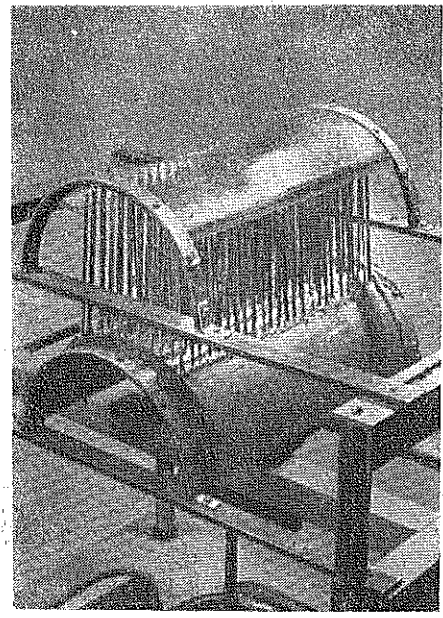
b



c

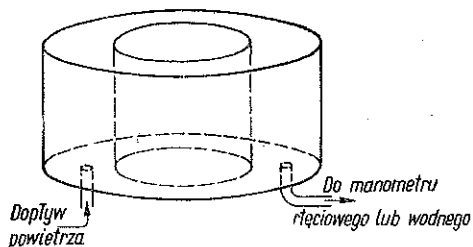


d

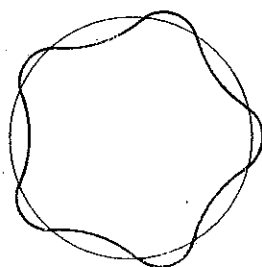


Rys. 8

Oprócz tych doświadczeń, w których obciążano powłoki za pomocą blisko siebie rozłożonych sił skupionych, badane były modele w kształcie cylindra zamkniętego (rys. 9). Przez wpompowanie powietrza uzyskiwano ciśnienie równomiernie rozłożone, skierowane radialnie do środka cylindra. Po przekroczeniu wartości obciążenia krytycznego cylinder ulegał wyboczeniu przyjmując postać skończonej ilości półfal (rys. 10). Rodzaj odkształcenia był zgodny z rodzajem określonym przez autora na drodze teoretycznej.

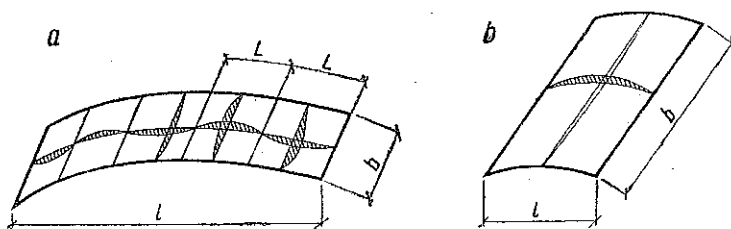


Rys. 9



Rys. 10

Na podstawie badań doświadczalnych oraz analizy wzoru podającego przemieszczenia normalne powłoki pod działaniem obciążenia siły skupionej¹ wysnuto wniosek, dotyczący wpływu poszczególnych parametrów, jak rodzaju materiału, rzutu na płaszczyznę, krzywizny, grubości powłoki oraz warunków brzegowych na postać wyboczenia. Decydują-



Rys. 11

cym czynnikiem jest rzut na płaszczyznę (stosunek długości do szerokości sklepienia, $b : a$). W powłokach krótkich $b : l \leq 1,5$ tworzy się dwie lub więcej półfal w kierunku zakrzywienia powłoki (gdzie l jest szerokością, a b długością sklepienia). Im powłoka jest krótsza (przy pozostałych czynnikach niezmiennych), tym więcej tworzy się półfal (rys. 11a). W powłokach średnich przy $1,5 < b : l \leq 8$ przeważa postać o jednej półfali (rys. 11b). Postać wyboczenia charakteryzuje długość półfali L .

¹ Por. [2], s. 336.

Wymienimy jeszcze czynniki, które wpływają w mniejszym stopniu na postać wybożenia:

- (1) krzywizna $1/R$, z której wzrostem maleje długość fali L ,
- (2) grubość powłoki h , z której zwiększeniem rośnie długość fali.

Wyniki doświadczeń przeprowadzonych z powłokami z blach: aluminiowej, miedzianej, cynkowej i żelaznej oraz z celulozoidu i plexiglasu pozwalają wnioskować, że rodzaj materiału (przy ograniczeniu do materiałów izotropowych) nie wpływa na postać odkształcenia. Do tego samego rezultatu dojdziemy analizując wzór na odkształcenie powłoki cylindrycznej, gdzie stałe materiałowe E i ν wpływają tylko na wielkość ugięcia, ale nie zmieniają charakteru odkształcenia.

Warunki brzegowe wpływają oczywiście na postać wybożenia; tak więc np. utwierdzenie zmniejszy w pewnym stopniu ilość uformowanych półfal, jednak ze względu na trudności matematyczne wpływ ten nie został dotychczas określony.

2. Postać odkształcenia kopuł kulistych

Uproszczone równanie powierzchni odkształconej kopuły kulistej ma postać ([2], s. 400)

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{K}{D} w = \frac{Z}{D},$$

przy czym $K = Eh/R^2$. We wzorze tym odpowiednie symbole oznaczają (por. rys. 12): w normalne ugięcie powłoki (wzdłuż osi z), D sztywność powłoki na zginanie, Z składową obciążenia zewnętrznego w kierunku osi z , E współczynnik sprężystości, h grubość powłoki oraz R promień krzywizny kopuły.

Równanie (2.1) przyjmuje analogiczną postać do równania płyty na sprężystym podłożu przez proste przekształcenie:

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} (q - Kw),$$

gdzie K jest współczynnikiem odporu sprężystego gruntu oraz q przedstawia obciążenie pionowe działające na płytę.

W układzie biegunowym r, α operator Laplace'a ma postać

$$(2.3) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

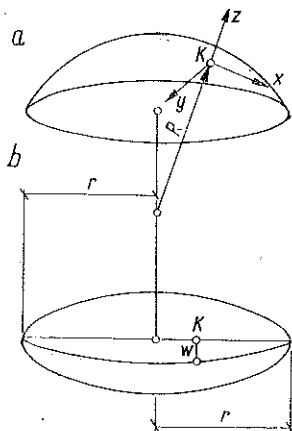
Obliczenia wykonano metodą różnic skończonych, dzieląc płytę okręgami w równych odstępach $\Delta r = r/n$, gdzie r jest promieniem płyty, a n

liczbą naturalną zastosowanego podziału płyty². Ponieważ w naszych rozważaniach nie tyle chodzi o konkretne wielkości ugięć w poszczególnych punktach płyty, ile o określenie rodzaju odkształcenia kopuły pod działaniem siły skupionej, wprowadzimy uproszczenia. Przyjmijmy, że siła działa wzdłuż osi kopuły (rys. 13), co upoważnia do traktowania problemu jako zagadnienia osiowo symetrycznego.

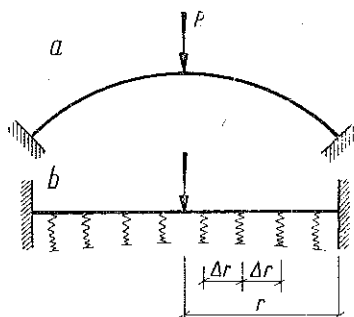
Lewa strona równania nie będzie ulegała zmianie bez względu na zastosowany podział płyty, jeżeli liczbę Δr^4 z mianownika przeniesiemy do licznika drugiej strony równania.

Prawa strona równania (2.1) przyjmie wówczas postać

$$\frac{1}{D} (q - Kw) \Delta r^4 = \frac{q}{D} \Delta r^4 - \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \Delta r^4 w.$$



Rys. 12



Rys. 13

Jeżeli oznaczymy

$$(2.4) \quad \Delta r^4 c = \frac{K}{D} \Delta r^4 = \frac{12(1 - \nu^2)}{R^2 h^2} \Delta r^4,$$

to widzimy, że dla każdej wartości K i D możemy dobrać taki podział płyty na okręgi w odstępach Δr , aby $\Delta r^4 c$ równało się dowolnej liczbie stałej, np. 1.

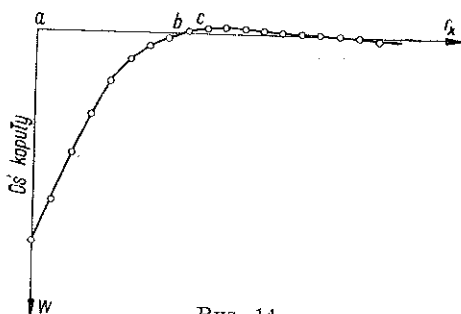
Stąd nasuwa się ważny praktycznie wniosek, że wystarczy rozwiązać tylko jeden przykład, aby na podstawie tego rozwiązania określić rodzaj odkształcenia w innym przypadku. Różnica rozwiązań wynikać będzie tylko z warunków brzegowych, ale przyjmując, że płyta rozpościera się dostatecznie daleko od miejsca działania siły, wpływ ten jest bardzo nieznaczny.

Wykonano obliczenie ugięć płyty okrągłej na sprężystym podłożu obciążonej siłą skupioną pośrodku. Przyjęto podział promienia płyty na 20

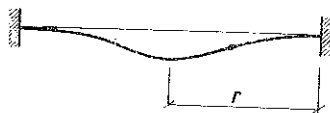
² Przykład obliczenia ugięć płyty okrągłej na sprężystym podłożu podał autor w pracy [1].

części. Do obliczeń przyjęto $\Delta r^4 K/D = 1/16$. Przekrój płyty podaje rys. 14. Ponieważ dążymy do określenia niecki wgłębienia, możemy przyjąć dwa charakterystyczne punkty: pierwszy, w którym krzywa ugięcia przecina po raz pierwszy oś wykresu (ugięcie równe się zeru) oraz drugi, największego wybrzuszenia do góry. Profil ugięcia przypomina charakter ugięcia płyty utwierdzonej na obwodzie o promieniu r (rys. 15).

Dla określenia wielkości promienia zastępczego według rys. 14, aby sprowadzić nieckę wygięcia kopuły do odpowiadającej jej niecki płyty utwierdzonej na obwodzie, brak autorowi dostatecznej ilości danych. Sądzić można, że promień ten przebiegać będzie od środka kopuły a do punktu położonego pomiędzy punktami b i c . Pierwszy punkt znajduje się w odległości $7,8 \Delta r$, a drugi $10 \Delta r$ od środka. Z uwagi na bezpieczeństwo przyjmiemy wartość większą, tj. wartość odcinka $a-c$.



Rys. 14



Rys. 15

Weźmy pod uwagę promień, który obliczyliśmy przyjmując $(K/D) \Delta r^4 = 1$. Wówczas otrzymamy

$$(2.5) \quad r_0 = 5 \Delta r.$$

Obliczenie niecki wgłębienia kopuły przebiegać zatem będzie w następujący sposób. Obliczamy podział promienia płyty tak, aby

$$(2.6) \quad \frac{K}{D} \Delta r^4 = 1.$$

Wówczas promień niecki otrzymamy ze wzoru (2.5).

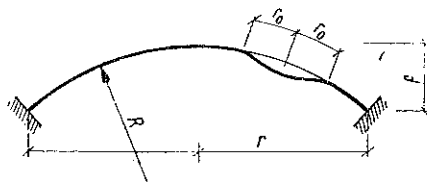
3. Wyboczenie kopuł kulistych

Miejscowa utrata stateczności jest istotną postacią wyboczenia kopuł kulistych. Występuje ona jako wkłębienia pod wpływem obciążenia działającego do wewnątrz kopuły (rys. 16).

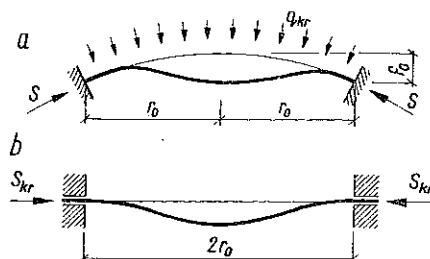
Nie można z góry przewidzieć miejsca utworzenia się wkłębienia w przypadku równomiernie rozłożonych sił wewnętrznych w powłoce

(np. w kuli pod działaniem stałego obciążenia zewnętrznego skierowanego normalnie do powierzchni). Decydować o nim będzie lokalne osłabienie powłoki, koncentracja naprężeń czy pewien impuls wyginający powłokę.

Zgodnie z założeniem uczynionym we wstępie przyjmiemy, że wielkość wklęsnięcia (charakteryzuje ją promień r_0) jest zgodna z niecką powstałą pod wpływem obciążenia kopuły siłą skupioną. Jeżeli znana jest już postać wyboczenia kopuły, obliczenie można ograniczyć do części powierzchni kopuły zakreślonej promieniem r_0 i obciążonej rzeczywistymi siłami S występującymi w powłoce. Przytoczony typ wyboczenia charakteryzuje utratę stateczności kopuł bardzo płaskich. Ponieważ w kopułach żelbetowych wykonywanych w rzeczywistości wyniosłość rozpatrywanego elementu kopuły $f_0/2R_0$ jest bardzo mała, zagadnienie stateczności kopuły sprowadzić można z niezbyt wielkim błędem do wyboczenia płyty okrągłej obciążonej na obwodzie siłami S , skierowanymi radialnie do środka płyty (rys. 17).



Rys. 16



Rys. 17

W rozważaniach przyjmiemy ponadto, że do momentu wyboczenia (podobnie jak czynimy to zwykle w płytach) powłoka znajduje się w stanie błonowym.

Przykład 1. Obliczyć obciążenie krytyczne q_{kr} skierowane normalnie do powierzchni kopuły wykonanej z plexiglasu o wyniosłości $\zeta = f/l = 0,2$. Pozostałe wymiary są następujące: $R = 18,2$ cm; $h = 0,1$ cm, $E = 30000$ kG/cm².

Podstawiając dane liczbowe do wzoru (2.6) otrzymujemy

$$\Delta r^4 = \frac{D}{K} = \frac{h^3 R^2}{12(1-\nu^2)} = \frac{0,1^3 \cdot 18,2^2}{12(1-0,25^2)} = 0,295 \text{ cm}^4.$$

Skąd $\Delta r = 0,737$ cm.

Uwzględniając zależność (2.5) znajdziemy

$$r_0 = 5 \Delta r = 5 \cdot 0,737 = 3,68 \text{ cm}.$$

Przyjmujemy do obliczeń, że w powłoce pod obciążeniem q występuje równomierny rozkład naprężeń (pominiemy zakłócenia naprężeń wywo-

łane pierścieniem oporowym) oraz że wystąpi obrotowo-symetryczna postać wyboczenia (rys. 18).

Zagadnienie sprowadzimy do rozważania płyty okrągłej utwierdzonej na obwodzie³. Wielkość obciążenia krytycznego S_{kr} obliczymy według wzoru podanego dla płyty utwierdzonej na konturze ([3], s. 702):

$$(3.1) \quad S_{kr} = \frac{14,68 D}{r_0^2} = \frac{14,68 \cdot 30\,000 \cdot 0,1^3}{12(1 - 0,25^2) \cdot 3,68^2} = 2,9 \text{ kG/cm.}$$

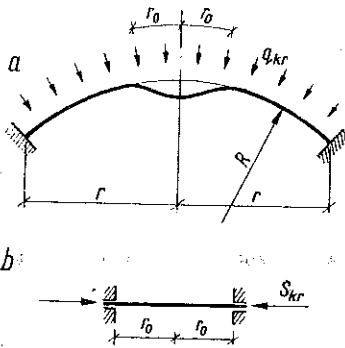
Znając siły osiowe działające w kopule kulistej wielkość obciążenia krytycznego q_{kr} obliczymy ze wzoru

$$S_{kr} = 0,5 q_{kr} R.$$

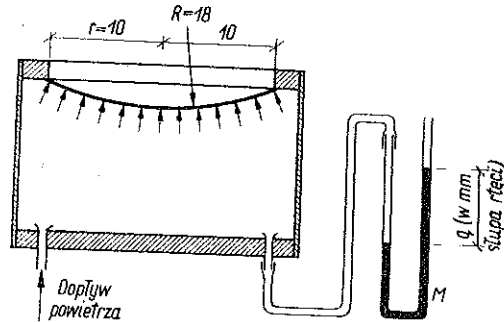
Stąd znajdziemy wielkość obciążenia krytycznego:

$$q_{kr} = \frac{S_{kr}}{0,5 R} = \frac{2,9}{0,5 \cdot 18,2} = 0,32 \text{ at.}$$

W celu porównania wyników teoretycznych z wynikami otrzymanymi z doświadczenia wykonany został model kopuły z plexiglasu (rys. 19).



Rys. 18



Rys. 19

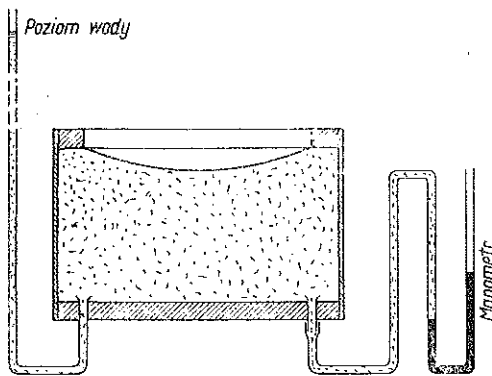
Obciążenie kopuły stanowi różnica ciśnień powietrza pomiędzy ciśnieniem wewnątrz hermetycznie zamkniętego cylindra, którego dno stanowi kopuła, a ciśnieniem zewnętrznym. W ten sposób zostało zrealizowane idealne równomiernie rozłożone obciążenie skierowane normalnie do powierzchni kopuły. Obciążenie mierzone było na manometrze ręciowym.

Obserwowano odkształcenie się kopuły przy kolejno zwiększającym się obciążeniu. Widocznych zmian kształtu powłoki przez dłuższy prze-

³ Ścisłejsze rozwiązanie zagadnienia stateczności kopuły po określeniu postaci wyboczenia można znaleźć np. metodami podanymi w pracy [4], s. 740 i dalsze albo stosując do obliczeń rachunek różnic skończonych (por. [5]).

ciąg czasu nie zaobserwowano. W pewnej chwili nastąpiło zapadnięcie się kopuły w części środkowej i nastąpiło natychmiast zniszczenie kopuły przez wyrwanie części powłoki ograniczonej niemal regularnym okręgiem. Maksymalne ciśnienie zmierzone na manometrze wynosiło 320 mm słupa rtęci, co odpowiada 0,485 at. Wynik ten o 50% większy od obliczonego teoretycznie wskazuje, że zastępczy promień r_0 należałoby przyjąć raczej bliżej punktu zerowych ugięć, tj. bliżej punktu b na rys. 14. Jednak przy dotychczasowej zbyt małej ilości doświadczeń z zakresu warunku bezpieczeństwa proponujemy pozostać przy zależności (2.5).

Pozostało jeszcze niewyjaśnione zjawisko, mianowicie czy rzeczywiście o wyboczeniu kopuły decyduje postać wyboczenia miejscowego. Wówczas wartość obciążenia krytycznego (skierowanego radialnie do powłoki) nie zależałaby od wyniosłości kopuły przy tych samych danych pozostałych (R , h , E , i i ν) przy założeniu, że wytworzona niecka zmieści



Rys. 20

się w pewnej tylko części powłoki, a więc przy pominięciu kopuł bardzo płaskich.

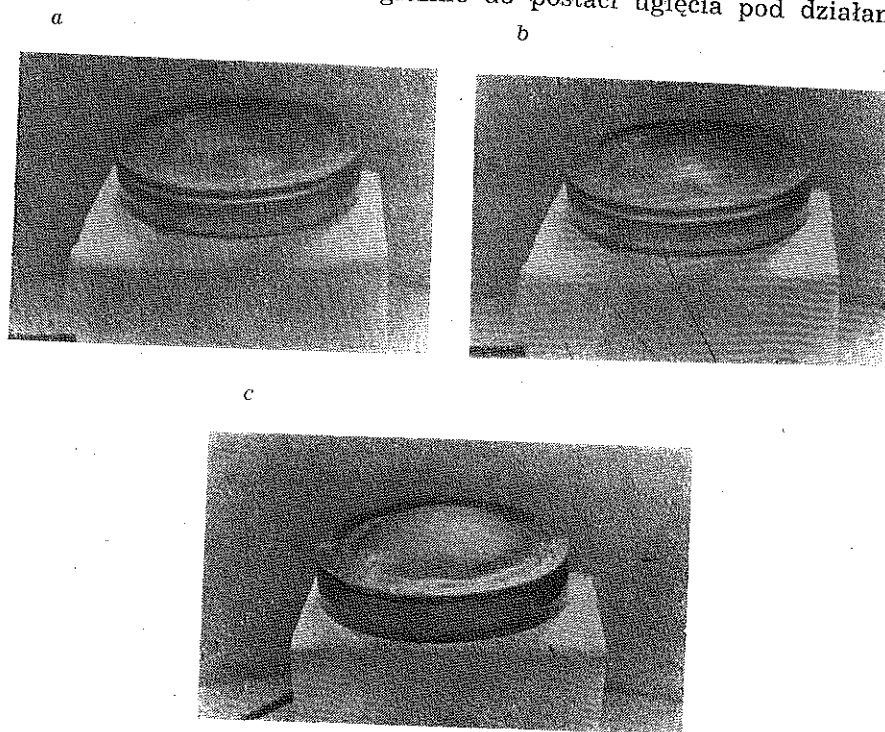
Wykonano nowe modele z celuloidu, a więc z materiału wybitnie plastycznego, a obciążenie ciśnieniem powietrza zastąpiono obciążeniem słupa wody. Wypełniono wodą całe wnętrze zbiornika oraz rurkę gumową z końcówką szklaną. Przez podnoszenie końca rurki do góry uzyskano kolejny wzrost ciśnienia działającego na powierzchnię powłoki (rys. 20).

Uzyskano po pierwsze bardziej powolny wzrost obciążenia, po drugie (co było w danym doświadczeniu rzeczą istotną) z chwilą rozpoczęcia zjawiska wyboczenia powłoka ulegała wygięciu przez co objętość zbiornika została w tym momencie powiększona i woda w cienkiej rurce nagle opadała do dołu, przez co ciśnienie działające na powłokę ulegało zmniejszeniu. W ten sposób wyboczenie powłoki zostało jakby powstrzymane i można było zaobserwować zjawisko już w początkowej fazie.

Obserwowano wyboczenie powłoki w postaci wklęsnięcia, które teraz w sposób powolny stopniowo zwiększało się aż do stabilizacji (rys. 22). Wielkość najmniejszej zaobserwowanej niecki (w granicach błędu doświadczenia) potwierdza wyniki teoretyczne. Wyniki doświadczeń przedstawiają fotografie kolejnej postaci wyboczenia kopuły (rys. 21). Przy dalszym wzroście obciążenia uzyskać można dla powłoki z tak elastycz-

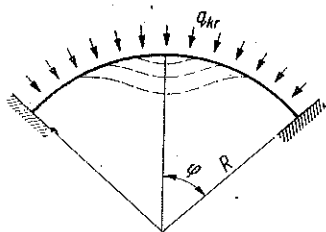
nego materiału, jakim jest celuloid, całkowite przegięcie kopuły na drugą stronę.

Na podstawie ostatnich badań autora nad drganiami kopuł kulistych przypuszczać można, że analogicznie do postaci ugięcia pod działaniem



Rys. 21

siły skupionej wyboczenie kopuły zaczyna się przez utworzenie się niecki oraz przez powstawanie kolejnych szybko zanikających fal o postaci osiowo symetrycznej, skierowanych do środka niecki (rys. 23). W dal-



Rys. 22



Rys. 23

szym ciągu decyduje wgłębienie niecki, która kolejno ulega powiększeniu aż do zniszczenia kopuły. Jednak tych fal (które, jeżeli występują, posiadają bardzo małe wychYLENIA w stosunku do niecki) nie udało się dotychczas wykryć.

Wykonano ponadto modele takich samych powłok kulistych o różnej wyniosłości (przy różnej wartości kąta φ ograniczającego powłokę) przy pozostałych czynnikach niezmiennych. Doświadczenie potwierdziło, że wartość obciążenia krytycznego nie zależy od wyniosłości kopuły (z pominięciem kopuł bardzo płaskich).

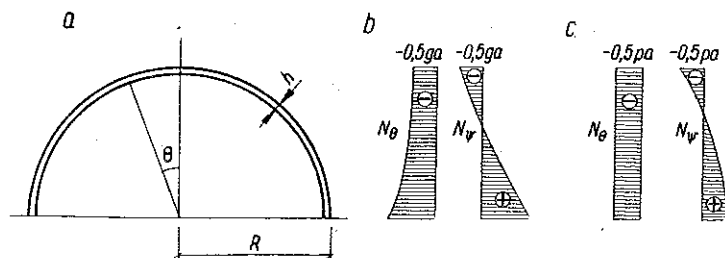
Porównajmy jeszcze otrzymane obciążenie krytyczne w przykładzie 1 z obciążeniem obliczonym według wzoru Zolli'ego (por. [4], s. 749):

$$(3.2) \quad q_{kr} = E \frac{h^2}{R^2} \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 30\,000 \frac{0,1^2}{18,2^2} \frac{2}{\sqrt{3(1-0,25^2)}} = 1,1 \text{ at.}$$

Zgadza się to z wynikami doświadczeń radzieckich, które określają, że rzeczywiste obserwowane obciążenie krytyczne jest 2 do 4 razy mniejsze od obliczonego według wzoru Zolli'ego.

4. Wyboczenie kopuł żelbetowych konstrukcji budowlanych

Na podstawie wyników badań modelowych oraz teoretycznych założeń poczynionych dotychczas postaramy się odpowiedzieć na pytanie, do jakich rozpiętości dojść mogą kopuły żelbetowe z zachowaniem bezpieczeństwa co do możliwości wyboczenia⁴.



Rys. 24

W rozważaniach przyjmijmy, że w powłoce panuje stan błonowy oraz że materiał powłoki jest idealnie jednorodny, izotropowy, liniowo sprężysty, a pominiemy wpływ skurczu betonu, temperatury, błędy wykonania itp.

Przykład 2. Obliczyć wartość obciążenia krytycznego dla półkuli żelbetowej o grubości powłoki $h = 6$ cm oraz promieniu $R = 50$ m (rys. 24). Do obliczeń przyjęto, że $E = 160\,000$ kG/cm², $\nu = 0,25$. Korzystając ze wzoru (2.6) otrzymujemy

$$\Delta r = \sqrt[4]{\frac{R^2 h^2}{12(1-\nu^2)}} = \sqrt[4]{\frac{5000^2 \cdot 6^2}{12(1-0,25^2)}} = 94,6 \text{ cm,}$$

⁴ Z pytaniem takim spotkaliśmy się kilkakrotnie podczas wygłaszanych referatów na temat stateczności powłok.

a następnie ze wzoru (2.5) otrzymujemy promień niecki wgłębienia:

$$r_0 = 5 \Delta r = 5 \cdot 94,6 = 473 \text{ cm.}$$

Podstawiając powyższe dane do wzoru (3.1) otrzymujemy wartość krytycznej siły wewnętrznej (na jednostkę długości przekroju):

$$S_{kr} = \frac{14,68 D}{r_0^2} = \frac{14,68}{473^2} \frac{160\,000 \cdot 6^3}{12(1 - 0,25^2)} = 201,4 \text{ kG/cm.}$$

Skąd ostatecznie znajdujemy

$$q_{kr} = \frac{S_{kr}}{0,5 R} = \frac{201,4}{0,5 \cdot 5000} = 806 \text{ kG/m}^2.$$

Na rys. 24b podano wykresy naprężeń w kopule od obciążenia pionowego równomiernie rozłożonego na jednostkę powierzchni powłoki g , a na rys. 24c od obciążenia p równomiernie rozłożonego na jednostkę rzutu poziomego⁵.

Z obu tych wykresów wynika, że najprędzej spodziewać się można wyboczenia powłoki w części wierzchołkowej kopuły. W wierzchołku kopuły naprężenie (zarówno od g i p) osiąga tę samą wartość co i przy radialnym równomiernym obciążeniu powłoki q (por. rys. 18). Wobec tego skorzystać można w przybliżeniu z rozwiązania uzyskanego dla obciążenia normalnego do powierzchni.

Przyjmijmy następujące obciążenie kopuły:

plyta żelbetowa grubości 6 cm	$0,06 \cdot 2400 = 144 \text{ kG/m}^2$
tynek cementowo wapienny grubości 2 cm	$0,02 \cdot 1900 = 38 \text{ kG/m}^2$
wyrównanie powłoki zaprawionej cementem	$0,015 \cdot 2100 = 32 \text{ kG/m}^2$
pokrycie blachą	35 kG/m ²
obciążenie śniegiem	70 kG/m ²
ogółem obciążenie wynosi	<u>319 kG/m²</u>

Przy pominięciu innych typowych obciążeń (np. wiatru) otrzymamy dla rozpatrywanego przypadku wartość współczynnika bezpieczeństwa $n = 806/319 = 2,5$.

Jest to wprawdzie wartość praktycznie biorąc za niską, ale widzimy, że teoretycznie istnieje możliwość przykrycia rozpiętości 100 m za pomocą kopuły o grubości powłoki tylko 6 cm. W przypadku stosowania kopuł odcinkowych graniczna rozpiętość kopuły ulegnie odpowiedniej redukcji w stosunku do promienia krzywizny R .

⁵ Przykłady obliczeń kopuł obrotowych podał autor w książce [6].

5. Zaključenie

Potwierdzone zostało przypuszczenie autora, że postać wyboczenia układu jest zgodna z charakterem odkształceń tego układu pod działaniem siły skupionej. Upoważnia to do przypuszczenia, że jest ono słuszne nie tylko dla powłok cylindrycznych i kopuł kulistych rozważanych w niniejszej pracy, ale również dla sklepień konoidalnych, siodłowych, kopuł eliptycznych itp. Sądzymy, że na tym założeniu będzie można oprzeć badania postaci wyboczenia, a po jej określeniu przystąpić do obliczania obciążenia krytycznego wychodząc z naprężeń obliczonych według stanu błonowego.

W przypadku rozważania powłoki, której ugięcia nie potrafimy obliczyć na drodze teoretycznej, posłużyć się możemy badaniami modelowymi i na drodze doświadczalnej określić charakter odkształcenia. Po ustaleniu niecki wgłębienia pod działaniem siły skupionej zaczepionej kolejno w charakterystycznych punktach należy następnie przejść do obliczenia sił wewnętrznych według stanu błonowego. Rozkład sił wewnętrznych pozwoli ustalić, w którym miejscu najbardziej należy się spodziewać utraty stateczności powłoki i dla tego miejsca należy rozważyć warunki stateczności.

Przy rozważaniu powłoki, której nie potrafimy obliczyć nawet w stanie błonowym (tzn. nie potrafimy znaleźć rozkładu naprężeń w stanie bezmomentowym), posłużyć się można badaniami modelowymi. Należy wykonać model rzeczywistego obiektu i doświadczalnie określić postać wyboczenia oraz wartości obciążenia krytycznego. W tym celu należy ustalić prawa modelowe, aby móc wyniki doświadczenia wykonanego na modelu o zmniejszonej skali oraz w ogólnym przypadku z innego materiału przenieść na obiekt rzeczywisty. Niezwykle upraszczającym prawem modelowe jest fakt, że materiał E nie wpływa na postać odkształcenia.

Proponujemy wykonanie modelu oprzeć na założeniu, że postać jego odkształcenia pod działaniem siły skupionej jest taka sama, jak postać odkształcenia obiektu rzeczywistego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. Lisowski, *Określenie postaci wyboczenia powłok cienkościennych*, Inż. i Bud., NOT, 1956.
- [2] W. Z. Własow, *Obszczaja teorja obotoczek*, Gostiechizdat, 1949.
- [3] A. N. Dinnik, *Sprawocznik po tiechničeskoj mēchanike*, OGIZ, Gos- tiechizdat, 1949.
- [4] S. D. Ponomariew, *Osnovy sowriemiennych metodow rasczota na procznost' w maszinostrojenji*, Maszgiz, 1952.
- [5] A. Lisowski, *Wyboczenie kopuł obrotowych*, Arch. Mech. Stos. t. 4, 1952.
- [6] A. Lisowski, *Projektowanie kopuł obrotowych. Teoria i przykłady obliczeń*, Warszawa 1955.

ВЫПУЧИВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ В СВЕТЕ МОДЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В статье рассматривается способ определения деформации оболочки при потере устойчивости, а также способ определения — на этом основании — значения критической нагрузки. Основываясь на анализе форм выпучивания простейших систем (балок, арок, рам и пластинок), а также на результатах опытов, полученных на моделях оболочек, автор предполагает, что форма выпучивания системы подобна форме деформации этой системы под действием сосредоточенной силы. Это предположение позволяет определить вид деформации, а затем найти значение критической нагрузки, соответствующей принятому виду деформации.

В качестве примеров рассматриваются цилиндрические своды и сферические куполы. Короткие цилиндрические оболочки ($b : l \leq 1,5$) выпучиваются в виде ряда продолговатых углублений, определенных длиной L по искривленному направлению оболочки (рис. 11а). При средних, а в особенности, при длинных оболочках, когда длина свода в несколько раз больше пролета, решающая будет форма с одной полуволной (рис. 11б).

При рассмотрении сферических куполов предположено, что решающая форма выпучивания связана с местной потерей устойчивости. Область углубления определена радиусом r_0 , вычисленным по графику прогиба оболочки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 16). Принимая затем, что элемент оболочки выпучивается под действием сил S_{kr} , равных по величине силам, действующим на круглую пластинку, защемленную по контуру, радиусом в r_0 (рис. 17), автор получает (применяя метод конечных разностей) следующее значение критической нагрузки:

$$q_{kr} = E \frac{h^3}{R^2} \frac{0,587}{\sqrt{3(1-\nu^2)}};$$

здесь E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, R — радиус кривизны купола и ν — коэффициент Пуассона.

Полученное значение критической нагрузки q_{kr} , направленной по нормали к поверхности оболочки, а также и вид местного выпучивания подтверждаются опытами на моделях.

Summary

BUCKLING OF SPHERICAL DOMES IN THE LIGHT OF MODEL TESTS

A description of a method for determining the buckling modes of a shell, and the value of the critical load. On the basis of an analysis of buckling modes of space structures (such as beams, arches, frames and plates), and taking into consideration experimental results obtained by means of model shells, the author assumes that the buckling mode of the system is of the same type as the deflection surface due to the action of a concentrated force. This assumption enables the determination of the deformation, and then the value of the critical load corresponding to the load type assumed.

Cylindrical vaults and spherical domes are discussed as examples. Short cylindrical shells ($b : l \leq 1,5$) buckle in the form of a series of waves characterized by the dimension L along the curvature of the shell (Fig. 11a). For medium and long shells, in which the length of the shell is equal to several times its span, the form of one half-wave will be of decisive significance (Fig. 11b).

For spherical domes, it is assumed that the decisive buckling mode is that of local stability loss. The range of the wave is determined by the radius r_0 obtained from the diagram of deflection of a shell loaded with a concentrated force (Fig. 16). Assuming now that the element of the shell will buckle under the action of the forces S_{kr} equal to the forces acting on a circular plate of radius r_0 (Fig. 17) clamped along the edge, the author obtains (using the finite difference method for calculating the shell deflection) the value of the critical load:

$$q_{kr} = E \frac{h^3}{R^2} \frac{0,587}{\sqrt{3(1-\nu^2)}};$$

here E is Young's modulus, h shell thickness, R radius of curvature of the dome, and ν Poisson's ratio.

The value thus obtained of the critical load normal to the shell, and the local buckling mode have been confirmed by experiments with models.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w redakcji dnia 2 maja 1956 r.