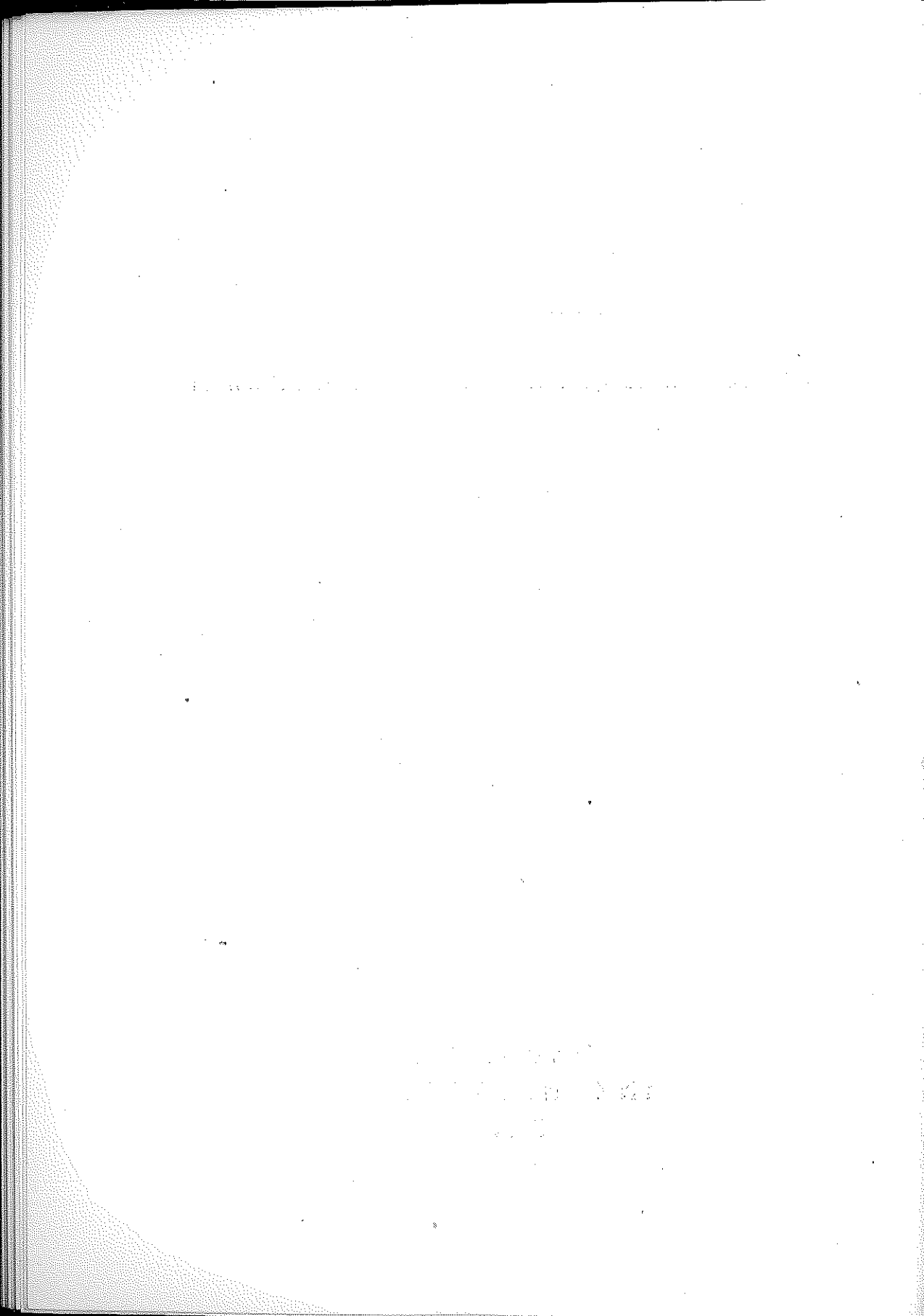


KAZIMIERZ WYSIATYCKI

NAPRĘŻENIA W TRÓJPRZEGUBOWYM ŁUKU TARCZOWYM

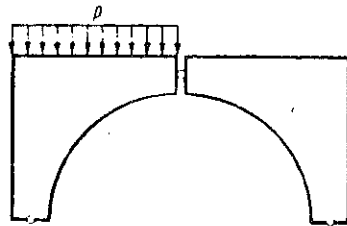
ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXV



Pomimo dużego zainteresowania dźwigarami powierzchniowymi nie znamy dokładniej rozkładu naprężeń w łukach tarczowych. H. Bay w swojej pracy, [1], oparł się na badaniach elastooptycznych, jednak nie udało mu się wyznaczyć naprężeń na drodze analitycznej. Poniżej podamy sposób pozwalający na wyznaczenie funkcji Airy'ego w trój-przegubowym łuku tarczowym, stosowanym jako konstrukcja mostowa (rys. 1)¹.

1. Ze względu na statyczną wyznaczalność układu rozpatrywać będziemy połowę łuku. Znając obciążenia zewnętrzne łatwo wyznaczymy funkcję Airy'ego oraz jej pochodne normalną i styczną na konturze tarczy, [2] i [3]. W naszym zagadnieniu posługiwać się będziemy daną funkcją Airy'ego oraz jej pochodną w kierunku promienia

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial n} \cos(n, x) + \frac{\partial F}{\partial s} \cos(n, y).$$

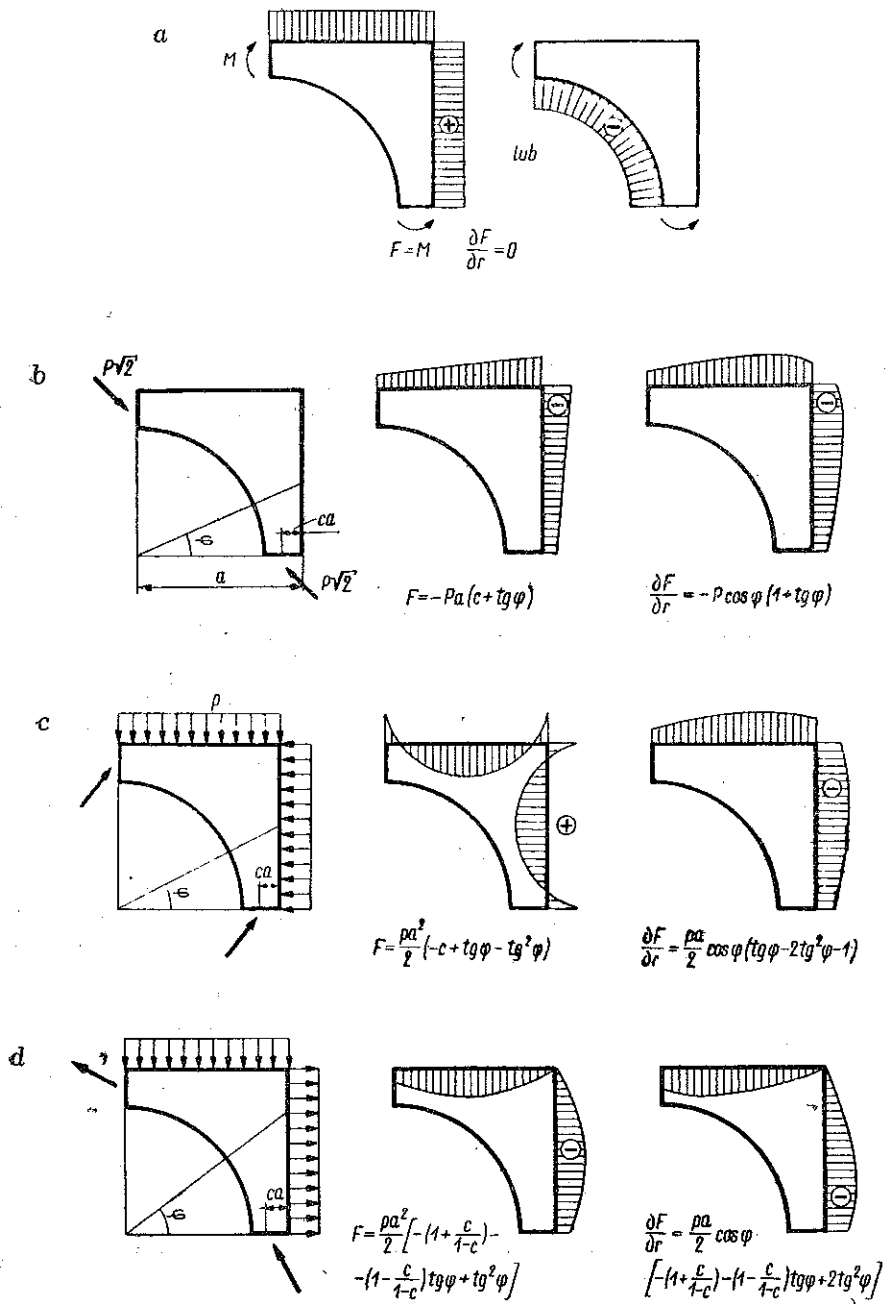


Rys. 1

Te warunki brzegowe można łatwo interpretować statycznie w przypadku, gdy kołowy brzeg tarczy jest nieobciążony (wzdłuż nieobciążonego boku możemy przyjąć $F = \partial F / \partial r = 0$); dana funkcja F w punkcie A na konturze przedstawia moment statyczny obciążenia zewnętrznego względem tego punktu, natomiast pochodna w kierunku promienia w punkcie A jest rzutem sił zewnętrznych z jednej strony tego punktu na kierunek prostopadły do promienia r . Na rysunku 2 pokazano wykresy F oraz $\partial F / \partial r$ dla kilku przypadków obciążeń łuków tarczowych.

2. Rozważymy znajdującą się w równowadze tarczę o kształcie następującym (rys. 3): bok AD jest częścią okręgu, boki AB i CD tworzą odcinki prostych, a łuk BC może tworzyć dowolna pojedyncza krzywa ciągła, nierównoległa do promienia r . Łuki AD oraz BC mogą być obciążone dowolnie, przy czym zakładamy, że funkcje określające obciążenie mogą

¹ Konstrukcje takie obliczamy mając na uwadze ciężar własny oraz obciążenie użytkowe. W pracy tej pomijamy siły masowe i zajmujemy się tylko obciążeniami użytkowymi.



Rys. 2

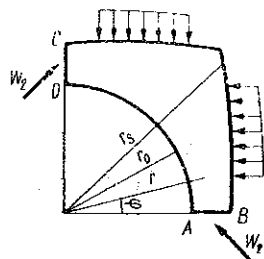
być rozwinięte w szereg Fouriera. Natomiast odcinki AB i CD są obciążone naprężeniami o nieokreślonym na razie kształcie, tworzącymi dane z góry wypadkowe W_1 i W_2 . Jako rozwiązanie przyjmiemy znane wyrażenie na funkcję Airy'ego we współrzędnych biegunach uzyskane przez rozdzielanie zmiennych

$$(2.1) \quad F = A_0 \varrho^2 + B_0 \varrho^2 \ln \varrho + C_0 + D_0 \ln \varrho + \\ + (A_1 \varrho^3 + B_1 \varrho^{-1} + C_1 \varrho + D_1 \varrho \ln \varrho) \cos \varphi + \\ + (A'_1 \varrho^3 + B'_1 \varrho^{-1} + C'_1 \varrho + D'_1 \varrho \ln \varrho) \sin \varphi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \varrho^{n+2} + B_n \varrho^n + C_n \varrho^{-n+2} + D_n \varrho^{-n}) \cos n \varphi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n \varrho^{n+2} + B'_n \varrho^n + C'_n \varrho^{-n+2} + D'_n \varrho^{-n}) \sin n \varphi$$

W wyrażeniu tym $\varrho = r/a$, gdzie a jest dowolną stałą. Dla uproszczenia wzorów pisać będziemy w dalszym ciągu tylko wyrażenia z cosinusami, ponieważ wyrazy z sinusami są takie same.

Funkcje F oraz $\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)$ na brzegu AD rozwiniemy w szeregi Fouriera:

$$(2.2) \quad \begin{cases} F = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n \varphi, \\ -\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n \varphi. \end{cases}$$



Rys. 3

Zróżniczkujemy układ (2.1) względem r i otrzymamy

$$(2.3) \quad \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \varrho} = [2A_0 \varrho + B_0 \varrho (2 \ln \varrho + 1) + D_0 \varrho^{-1}] + \\ + [3A_1 \varrho^2 - B_1 \varrho^{-2} + C_1 + D_1 (\ln \varrho + 1)] \cos \varphi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2) \varrho^{n+1} + n B_n \varrho^{n-1} + (2-n) C_n \varrho^{-n+1} - n D_n \varrho^{-n-1}] \cos n \varphi.$$

Wprowadzając ϱ_0 do wyrażeń (2.1) i (2.3) przyrównamy poszczególne wielomiany do (2.2) i otrzymamy układy równań liniowych o dwóch nie-

wiadomych, z których możemy dwie dowolne stałe wyrazić przez dwie pozostałe:

$$(2.4) \quad \begin{cases} A_0 e_0^2 + B_0 e_0^2 \ln e_0 + C_0 + D_0 \ln e_0 = b_0, \\ 2A_0 e_0 + B_0 e_0 (2 \ln e_0 + 1) + D_0 e_0^{-1} = c_0, \\ A_1 e_0^3 + B_1 e_0^{-1} + C_1 e_0 + D_1 e_0 \ln e_0 = b_1, \\ 3A_1 e_0^2 + B_1 e_0^{-2} + C_1 + D_1 (\ln e_0 + 1) = c_1, \\ A_n e_0^{n+2} + B_n e_0^n + C_n e_0^{-n+2} + D_n e_0^{-n} = b_n, \\ (n+2) A_n e_0^{n+1} + n B_n e_0^{n-1} + (2-n) C_n e_0^{-n+1} - n D_n e_0^{-n-1} = c_n. \end{cases}$$

W dalszym ciągu postawimy $b_n = c_n = 0$ (bok AD jest nieobciążony) i otrzymamy

$$(2.5) \quad \begin{cases} A_0 = -e_0^{-2} [C_0 (2 \ln e_0 + 1) + 2D_0 \ln^2 e_0], \\ B_0 = e_0^{-2} [2C_0 + D_0 (2 \ln e_0 - 1)]; \\ A_1 = -\frac{1}{2} C_1 e_0^{-2} - \frac{1}{4} D_1 e_0^{-2} (2 \ln e_0 + 1), \\ B_1 = -\frac{1}{2} C_1 e_0^2 - \frac{1}{4} D_1 e_0^2 (2 \ln e_0 - 1); \\ A_n = (n-1) C_n e_0^{-2n} + n D_n e_0^{-2(n+2)}, \\ B_n = -n C_n e_0^{-2(n-1)} - (n+1) D_n e_0^{-2n}. \end{cases}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia $e/e_0 = \xi$ funkcje (2.1) i (2.3) przyjmą postać następującą:

$$(2.6) \quad \begin{cases} F = C_0 (1 - \xi^2 + 2\xi^2 \ln \xi) + D_0 [(1 - \xi^2) \ln e + 2\xi^2 \ln e_0 \ln \xi] + \\ + \left\{ \frac{1}{2} C_1 e_0 (-\xi^3 + 2\xi - \xi^{-1}) + \frac{1}{4} D_1 e_0 [\xi^{-1} - \xi^3 - \right. \\ \left. - 2(\xi^3 + \xi) \ln e_0 + 2\xi \ln e] \right\} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \{ C_n e_0^{-n+2} [(n-1) \xi^{n+2} - \\ - n \xi^n + \xi^{-2n+2}] + D_n e_0^{-n} [n \xi^{n+2} - (n+1) \xi^n + \xi^{-n}] \} \cos n \varphi, \\ \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial e} = e_0^{-1} \{ 4C_0 \xi \ln \xi + D_0 [2\xi \ln \xi (-1 + 2 \ln e_0) + (\xi^{-1} - \xi)] \} + \\ + \left\{ \frac{1}{2} C_1 (2 - 3\xi^2 - \xi^{-2}) + \frac{1}{4} D_1 [4(1 + \ln e) - \xi^2 (1 + \ln e_0) - \right. \\ \left. - \xi^{-2} (-1 + 2 \ln e)] \right\} \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \{ C_n e_0^{-n+1} [(n-1)(n+2) \xi^{n+1} - n^2 \xi^{n-1} - \\ - (n-2) \xi^{-n+1}] + D_n e_0^{-n-1} [n(n+2) \xi^{n+1} - n(n+1) \xi^{n-1} - n \xi^{-n-1}] \} \cos n \varphi. \end{cases}$$

Funkcje powyższe mają postać:

$$(2.7) \quad \begin{cases} F = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n f_{nC} + D_n f_{nD}) \cos n\varphi, \\ \frac{1}{a} \frac{\partial F_n}{\partial \varrho} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n f'_{nC} + D_n f'_{nD}) \cos n\varphi, \end{cases}$$

gdzie f_{nC} , f_{nD} , f'_{nC} i f'_{nD} oznaczają funkcje zmiennej ξ występujące przy współczynnikach C_n i D_n w (2.6).

Tak więc otrzymaliśmy funkcję Airy'ego (2.7), która ściśle spełnia warunki brzegowe wzdłuż boku AD . W każdym wyrazie szeregu mamy po dwie niewiadome stałe C_n i D_n . Zauważmy, że znane wielkości F i $\partial F/\partial \varrho$ na konturze są od siebie niezależne i dlatego możemy utworzyć odchylenie kwadratowe wzdłuż krzywej s boku BC w następującej postaci:

$$(2.8) \quad \delta_n^2 = \int_{BC} \left[(F_n - F)^2 + \left(\frac{\partial F_n}{\partial \varrho} - \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)^2 \right] ds$$

i zażądać, by osiągało ono minimum.

Różniczkując (2.8) kolejno względem C_n i D_n i przyrównując pochodne do zera otrzymamy w ogólnym przypadku nieskończony układ równań liniowych. Ograniczając się do $n + 1$ wyrazów otrzymamy układ $2(n + 1)$ równań liniowych, z których wyznaczymy C_n i D_n :

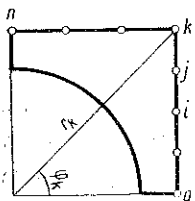
$$\begin{aligned} C_0 \delta_{00}^C + \dots + C_n \delta_{0n}^C + D_0 \delta'_{00}^C + \dots + D_n \delta'_{0n}^C + \delta_0^C &= 0, \\ C_0 \delta_{n0}^C + \dots + C_n \delta_{nn}^C + D_0 \delta'_{n0}^C + \dots + D_n \delta'_{nn}^C + \delta_n^C &= 0, \\ C_0 \delta_{00}^D + \dots + C_n \delta'_{0n}^D + D_0 \delta_{00}^D + \dots + D_n \delta_{0n}^D + \delta_0^D &= 0, \\ C_0 \delta_{n0}^D + \dots + C_n \delta'_{nn}^D + D_0 \delta_{n0}^D + \dots + D_n \delta_{nn}^D + \delta_n^D &= 0. \end{aligned}$$

Współczynniki układu są całkami po krzywej BC :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \delta_{ik}^C = \int_{BC} (f_{kC} f_{iC} + f'_{kC} f'_{iC}) \cos i\varphi \cos k\varphi ds, \\ \delta_{ik}^D = \int_{BC} (f_{kD} f_{iD} + f'_{kD} f'_{iD}) \cos i\varphi \cos k\varphi ds, \\ \delta_i^C = - \int_{BC} \left(F f_{iC} + \frac{\partial F}{\partial \varrho} f'_{iC} \right) \cos i\varphi ds, \\ \delta_i^D = - \int_{BC} \left(F f_{iD} + \frac{\partial F}{\partial \varrho} f'_{iD} \right) \cos i\varphi ds. \end{cases}$$

Indeksy u góry charakteryzują powstanie współczynników: tak np. δ_{ik}^C oznacza współczynnik w wierszu i , kolumnie k , powstały przez różniczkowanie funkcji (2.8) względem C_i . Analogicznie δ_{ik}^D oznacza współczynnik powstały przez różniczkowanie funkcji (2.8) względem D_i . Wyznacznik układu jest symetryczny względem głównej przekątnej. Współczynniki przy niewiadomych zależą tylko od wielkości tarczy, a wyrazy wolne również i od obciążenia. W razie przyjęcia wyrażeń z sinusami wzory powyższe pozostaną te same, jedynie cosinus należy zamienić na sinus. Jak można się łatwo przekonać, całkowanie — chociaż formalnie możliwe — jest dosyć żmudne i dlatego do obliczeń liczbowych zastosujemy nieco inną metodę.

3. Obierzemy na konturze tarczy $n+1$ punktów (rys. 4). W każdym z tych punktów wyznaczmy wartość funkcji Airy'ego F_k oraz $(1/a)(\partial F/\partial \varrho)_k$. Jako przybliżenie F_n przyjmijmy $(n+1)$ wyrazów szeregu (2.1). Postępując jak poprzednio wyrazimy dwie stałe każdego wyrazu szeregu (2.1) i (2.3) przez dwie pozostałe i otrzymamy układ (2.6). W ten sposób warunki brzegowe wzdłuż boku AD są spełnione ściśle. W celu wyznaczenia pozostałych stałych żądamy, by F_n w punkcie k było równe F_k , a $\partial F_n/\partial r$ w punkcie k było równe $(1/a)(\partial F/\partial \varrho)_k$. Dla każdego punktu k otrzymamy dwa równania; dla wszystkich $(n+1)$ punktów otrzymamy $2(n+1)$ równań. Równania dla punktu k mają postać następującą ($\xi_k = \varrho_k/\varrho_0$):



Rys. 4

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & C_0(1 - \xi_k^2 + 2\xi_k^2 \ln \xi_k) + D_0[(1 - \xi_k^2) \ln \varrho_k + 2\xi_k^2 \ln \varrho_0 \ln \xi_k] + \\ & \quad + \frac{1}{2} C_1 \varrho_0 (-\xi_k^3 + 2\xi_k - \xi_k^{-1}) \cos \varphi_k + \\ & \quad + \frac{1}{4} D_1 \varrho_0 [\xi_k^{-1} - \xi_k^3 - 2(\xi_k^3 + \xi_k) \ln \varrho_0 + 2\xi_k \ln \varrho_k] \cos \varphi_k + \\ & \quad + \sum_{n=2}^n \{ C_n \varrho_0^{-n+2} [(n-1) \xi_k^{n+2} - n \xi_k^n + \xi_k^{-2n+2}] \cos n \varphi_k + \\ & \quad + D_n \varrho_0^{-n} [n \xi_k^{n+2} - (n+1) \xi_k^n + \xi_k^{-n}] \cos n \varphi_k \} = F_k, \\ & 4C_0 \varrho_0^{-1} \xi_k \ln \xi_k + D_0 \varrho_0^{-1} [2\xi_k \ln \xi_k (2 \ln \varrho_0 - 1) + (\xi_k^{-1} - \xi_k)] + \\ & \quad + \frac{1}{2} C_1 [2 - 3\xi_k^2 - \xi_k^{-2}] \cos \varphi_k + \\ & \quad + \frac{1}{4} D_1 [4(\ln \varrho_k + 1) - \xi_k^2 (\ln \varrho_0 + 1) - \xi_k^{-2} (2 \ln \varrho_k - 1)] \cos \varphi_k + \\ & \quad + \sum_{n=2}^n \{ C_n \varrho_0^{-n+1} [(n-1)(n+2) \xi_k^{n+1} - n^2 \xi_k^{n-1} - \\ & \quad - (n-2) \xi_k^{-n+1}] \cos n \varphi_k + D_n \varrho_0^{-n-1} [n(n+2) \xi_k^{n+1} - \\ & \quad - n(n+1) \xi_k^{-n-1} - n \xi_k^{-n-1}] \cos n \varphi_k \} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)_k. \end{aligned} \right.$$

W wyniku otrzymamy tablicę współczynników (tabl. 1):

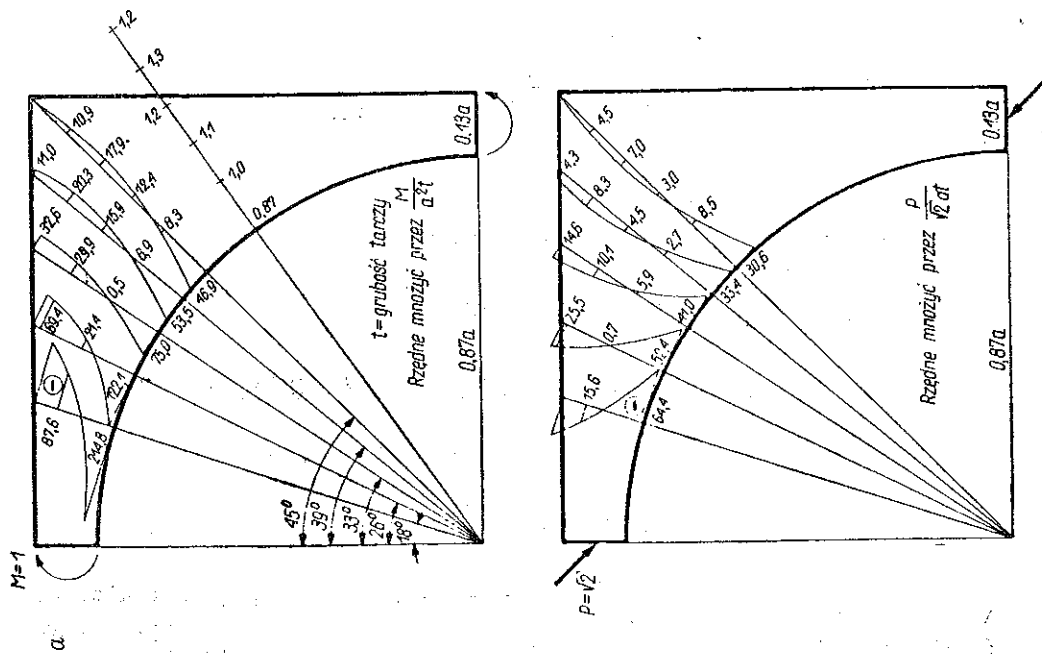
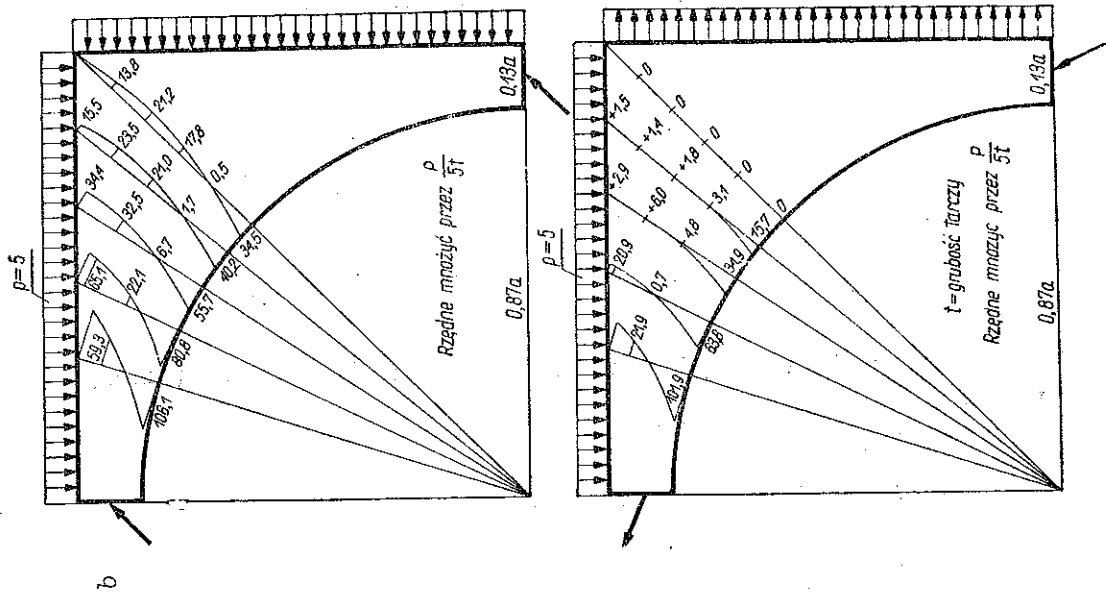
Tablica 1

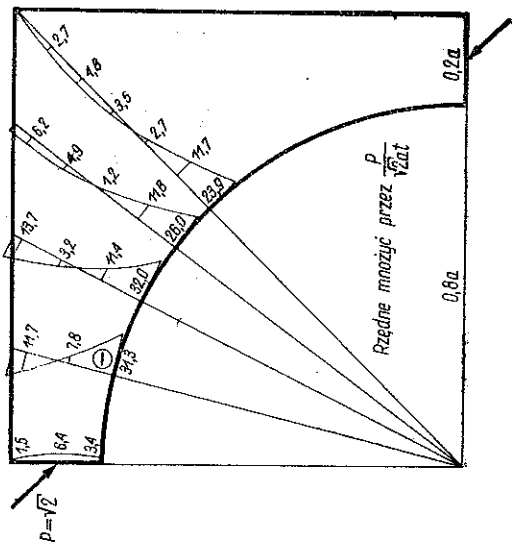
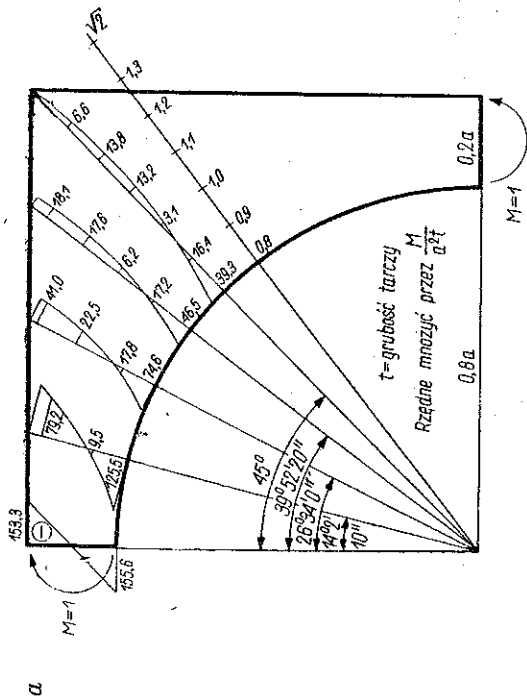
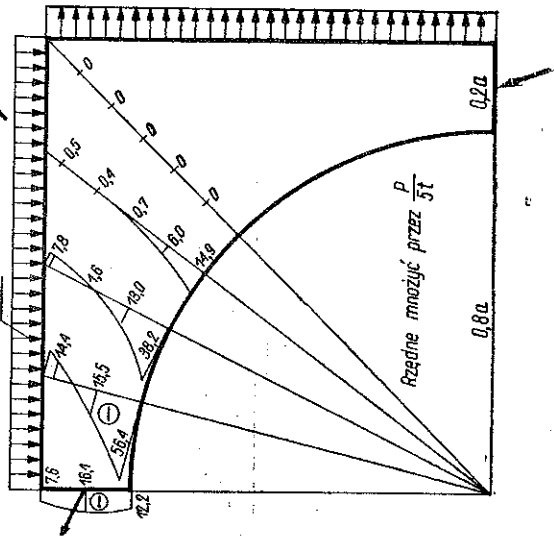
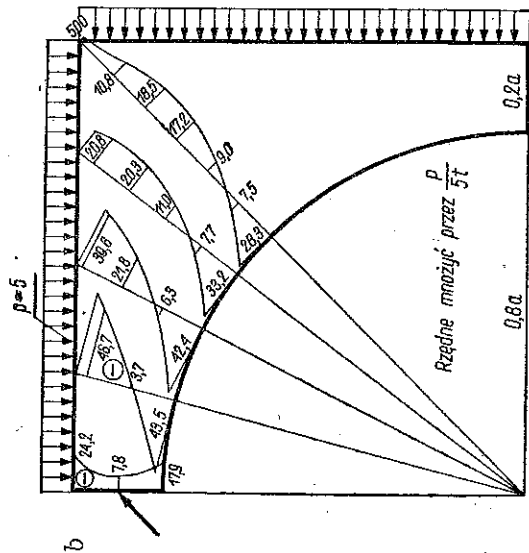
C_0	D_0			C_n	D_n	
δ_{0C_0}	δ_{0D_0}	.	.	δ_{0C_n}	δ_{0D_n}	F_0
$\delta_{0C_0}^x$	$\delta_{0D_0}^x$.	.	$\delta_{0C_n}^x$	$\delta_{0D_n}^x$	$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)_0$
.
δ_{nC_0}	δ_{nD_0}	.	.	δ_{nC_n}	δ_{nD_n}	F_n
$\delta_{nC_0}^x$	$\delta_{nD_0}^x$.	.	$\delta_{nC_n}^x$	$\delta_{nD_n}^x$	$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)_n$

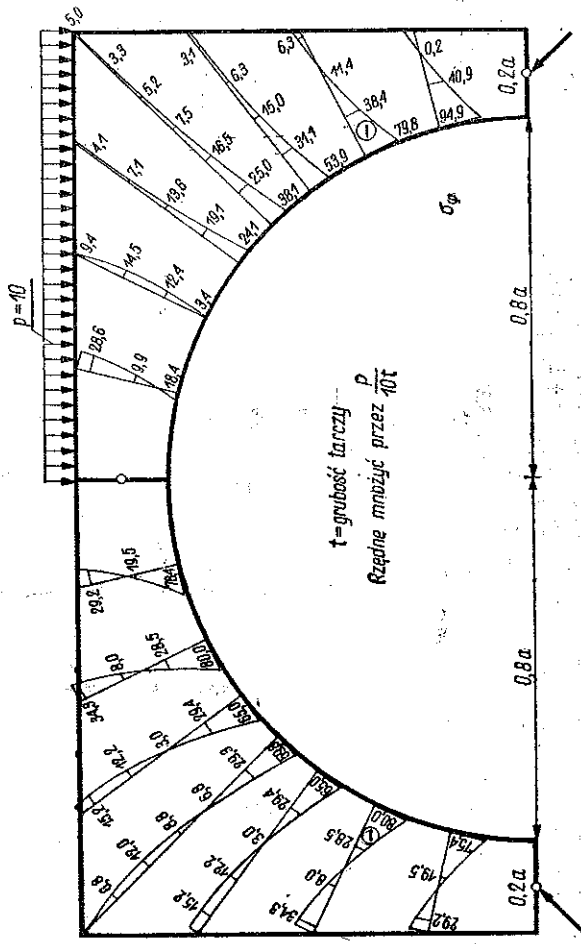
Współczynniki występujące w tej tablicy są określone za pomocą wzorów

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{kC_0} = 1 - \xi_k^2 + 2\xi_k^2 \ln \xi, \\ \delta_{kD_0} = (1 - \xi_k^2) \ln \varrho_k + 2\xi_k^2 \ln \varrho_0 \ln \xi_k, \\ \delta_{kC_1} = \frac{1}{2} \varrho_0 (-\xi_k^3 + 2\xi_k - \xi_k^{-1}) \cos \varphi_k, \\ \delta_{kD_1} = \frac{1}{4} \varrho_0 [\xi_k^{-1} - \xi_k^3 - 2(\xi_k^3 + \xi_k) \ln \varrho_0 + 2\xi_k \ln \varrho_k] \cos \varphi_k, \\ \delta_{kC_i} = \varrho_0^{-i+2} [(i-1) \xi_k^{i+2} - i \xi_k^i + \xi_k^{-2i+2}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kD_i} = \varrho_0^{-i} [i \xi_k^{i+2} - (i+1) \xi_k^i + \xi_k^{-i}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kC_0}^x = 4\varrho_0^{-1} \xi_k \ln \xi_k, \\ \delta_{kD_0}^x = \varrho_0^{-1} [2\xi_k \ln \xi_k (2 \ln \varrho_0 - 1) + (\xi_k^{-1} - \xi_k)], \\ \delta_{kC_1}^x = \frac{1}{2} (2 - 3\xi_k^2 - \xi_k^{-2}) \cos \varphi_k, \\ \delta_{kD_1}^x = \frac{1}{4} [4(\ln \varrho_k + 1) - \xi_k^2 (\ln \varrho_0 + 1) - \xi_k^{-2} (2 \ln \varrho_k - 1)] \cos \varphi_k, \\ \delta_{kC_i}^x = \varrho_0^{-i+1} [(i-1)(i+2) \xi_k^{i+1} - i^2 \xi_k^{i-1} - (i-2) \xi_k^{-i+1}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kD_i}^x = \varrho_0^{-i-1} [i(i+2) \xi_k^{i+1} - i(i+1) \xi_k^{i-1} - i \xi_k^{-i-1}] \cos i\varphi_k. \end{array} \right.$$

Widzimy, że obliczenie współczynników jest proste, gdyż dla $i \geq 2$ występują w nich tylko wielomiany pomnożone przez $\cos i\varphi_k$. Gdy $i=0,1$ mamy jeszcze dodatkowo logarytmy naturalne. Macierz utwo-



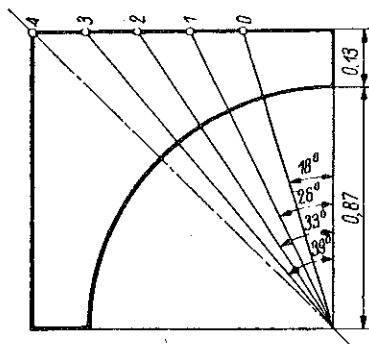




Rys. 6

C

Tablica 2. Macierz układu



$\rho = 0,87$ — symetria

Funkcja odpowiadająca szeregowi (2.1) została przyjęta w postaci:

$$F = (A_0 \rho^2 + B_0 \rho^2 \ln \rho + C_0 + D_0 \ln \rho) + (A_2 \rho^4 + B_2 \rho^4 + C_2 + D_2 \rho^{-1}) \sin 2 \varphi + (A_4 \rho^6 + B_4 \rho^4 + C_4 \rho^{-2} + D_4 \rho^{-4}) \cos 4 \varphi + (A_6 \rho^8 + B_6 \rho^6 + C_6 \rho^{-4} + D_6 \rho^{-6}) \sin 6 \varphi + (A_8 \rho^{10} + B_8 \rho^8 + C_8 \rho^{-6} + D_8 \rho^{-8}) \cos 8 \varphi.$$

Współczynniki obliczono według wzorów (3.3)

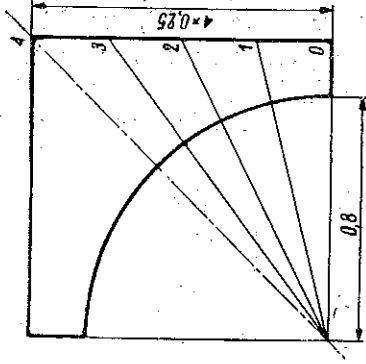
	C_0	D_0	A_2	C_2	A_4	D_4	A_6	C_6	A_8	C_8	Suma
8 F	1 0741 920	- 0,801 360	0,767 310	- 0,341 550	0,607 330	- 0,654 130	2,421 300	- 4,224 080	- 2,500 620	6,571 590	2,587 760
$\frac{\partial F}{\partial r}$											
2	1,052 550	- 1,110 980	1,110 460	- 0,433 800	0,963 650	- 0,814 070	4,239 190	- 5,346 820	- 4,385 930	8,763 900	3,588 150
8 F	1,352 400	- 1,438 800	1,904 370	- 0,778 300	- 0,943 760	0,863 370	2,231 000	- 3,099 610	- 6,439 640	12,836 570	6,437 600
$\frac{\partial F}{\partial r}$											
4	1,446 200	- 1,495 670	2,102 370	- 0,725 230	- 1,173 550	0,797 490	3,165 950	- 3,016 370	- 10,346 520	13,812 940	4,562 580
8 F	2,445 760	- 2,555 360	4,090 060	- 1,500 370	- 5,310 520	3,976 360	- 3,847 300	4,088 330	- 1,950 260	2,845 340	2,280 040
$\frac{\partial F}{\partial r}$											
6	1,989 110	- 2,006 300	3,487 470	- 1,031 220	- 5,314 300	2,774 910	- 4,512 030	3,170 240	- 2,650 570	2,586 010	- 1,509 630
8 F	4,197 920	- 4,302 640	7,766 890	- 2,522 220	- 14,382 570	3,650 290	- 22,733 030	18,217 630	32,861 070	34,625 450	- 7,972 110
$\frac{\partial F}{\partial r}$											
8	2,661 330	- 2,624 160	5,278 770	- 1,315 360	- 11,905 160	4,757 880	- 22,681 250	11,880 560	38,079 780	- 27,779 230	- 3,626 840
8 F	7,400 980	- 7,413 920	14,701 600	- 4,083 200	- 33,848 160	15,664 240	- 71,508 320	41,567 360	147,011 520	- 111,750 250	- 2,338 170
$\frac{\partial F}{\partial r}$											
10	3,630 940	- 3,432 440	7,949 130	- 1,600 830	- 23,192 390	6,828 900	- 60,525 250	23,143 670	149,100 060	- 79,789 980	22,160 610
Suma	26,916 090	- 27,231 630	49,158 430	- 14,832 630	- 94,504 930	42,764 640	- 173,729 740	86,379 410	337,928 890	- 206,523 560	26 819 920

Tablica 5. Macierz układu

$\varrho = 0,8$ — symetria

Funkcję odpowiadającą szeregowi (2.1) przyjęto w tej samej postaci co poprzednio.

Współczynniki obliczono według wzorów (3.2).



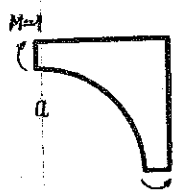
	C_0	D_0	C_2	D_2	C_4	D_4	C_6	D_6	C_8	D_8
1	0,184 840	-0,155 610	0	0	2,622 590	8,450 570	0	0	67,791 080	125,344 840
2	0,189 469	-0,187 106	0	0	4,425 332	10,080 867	0	0	102,570 814	187,493 846
3	0,181 400	-0,207 810	0,205 100	0,888 960	2,876 820	6,644 110	26,454 780	52,252 890	-40,117 890	-73,825 920
4	0,163 259	-0,182 129	0,200 145	0,776 367	3,129 658	7,025 449	32,444 777	63,014 064	-55,489 652	-101,090 454
5	0,254 380	-0,398 160	0,726 950	2,853 330	-3,229 310	-7,518 180	24,832 180	47,361 030	-265,968 830	-434,966 960
6	0,268 906	-0,254 406	0,532 908	1,987 610	-2,821 067	-6,207 754	24,068 596	46,200 144	-304,253 152	-550,952 200
7	0,787 880	-0,808 010	1,994 930	7,510 850	-26,652 900	-58,893 940	145,657 180	-280,092 530	520,463 400	942,047 520
8	0,348 689	-0,367 474	1,081 199	3,866 403	-17,474 419	-37,788 588	115,442 180	-220,128 627	489,483 245	882,303 902
9	1,435 780	-1,581 040	4,515 510	16,365 750	-82,513 550	-179,058 990	717,348 140	-1 367,956 070	5 047,598 340	9 094,596 710
10	0,568 568	-0,514 415	1,878 225	6,489 257	-43,356 291	-92,650 311	468,798 774	-888,954 297	3 980,640 321	7 154,282 593

rzona ze współczynników jest niesymetryczna względem głównej przekątnej, a wartość zera przyjmują tylko współczynniki, w których $\cos i\varphi_k = 0$. W tym przypadku cztery współczynniki są równe zeru.

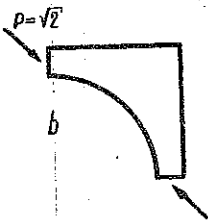
Z równań (2.4) wyeliminowaliśmy stałe A_n i B_n , można oczywiście wyeliminować inne stałe, np. B_n i D_n . Wówczas zamiast wzorów (3.2) otrzymamy

$$(3.3) \quad \begin{cases} \delta_{kA_i} = i^{-1} e_0^{i+2} [i - (i+1) \xi_k^{-2} + \xi_k^{-2i+2}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kC_i} = i^{-1} e_0^{-i+2} [i - \xi_k^{2i-2} - (i-1) \xi_k^{-2}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kA_i}^x = e_0^{i+1} [(i+2) - (i+1) \xi_k^{-2} - \xi_k^{-2i-2}] \cos i\varphi_k, \\ \delta_{kC_i}^x = e_0^{-i+1} [(-i+2) - \xi_k^{2i-2} + (i-1) \xi_k^{-2}] \cos i\varphi_k. \end{cases}$$

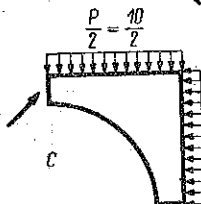
Tablica 4. Funkcja Airy'ego ($q = 0,87$)



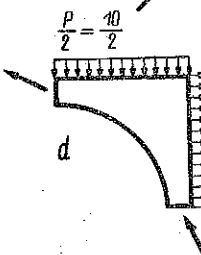
$$F = 1579,589\,014 q^2 - 2396,945\,098 q^3 \ln q - 1598,957\,140 - 1082,240\,294 \ln q + \\ + (445,281\,975 q^4 - 563,266\,067 q^2 + 87,369\,267 + 68,478\,022 q^{-2}) \sin 2\varphi + \\ + (62,835\,824 q^6 - 16,576\,206 q^4 - 74,365\,800 q^2 + 46,118\,087 q^{-4}) \cos 4\varphi + \\ + (-6,191\,322 q^8 - 5,081\,392 q^6 + 15,723\,163 q^4 - 10,064\,243 q^{-2}) \sin 6\varphi + \\ + (-0,145\,711 q^{10} - 1,137\,405 q^8 + 1,436\,287 q^6 - 0,952\,719 q^4) \cos 8\varphi$$



$$F = 82,816\,875 q^2 - 103,837\,628 q^2 \ln q - 83,191\,389 - 68,663\,805 \ln q + \\ + (36,824\,338 q^4 - 88,040\,746 q^2 + 69,936\,381 - 18,502\,351 q^{-2}) \sin 2\varphi + \\ + (10,399\,582 q^6 - 13,727\,263 q^4 + 6,743\,687 q^2 - 3,182\,346 q^{-4}) \cos 4\varphi + \\ + (-1,517\,906 q^8 + 1,417\,876 q^6 - 0,204\,894 q^4 + 0,093\,231 q^{-2}) \sin 6\varphi + \\ + (-0,080\,383 q^{10} + 0,077\,882 q^8 - 0,010\,742 q^6 + 0,006\,295 q^4) \cos 8\varphi$$



$$F = -139,667\,805 q^2 + 159,487\,042 q^2 \ln q + 139,840\,508 + 124,335\,348 \ln q + \\ + (-69,191\,991 q^4 + 174,309\,495 q^2 - 144,949\,959 + 39,854\,600 q^{-2}) \sin 2\varphi + \\ + (-23,386\,992 q^6 + 31,836\,863 q^4 - 16,841\,786 q^2 + 8,108\,188 q^{-4}) \cos 4\varphi + \\ + (4,092\,730 q^8 - 4,177\,623 q^6 + 0,839\,975 q^4 - 0,432\,735 q^{-2}) \sin 6\varphi + \\ + (0,278\,218 q^{10} - 0,247\,604 q^8 + 0,012\,181 q^6 - 0,005\,232 q^4) \cos 8\varphi$$

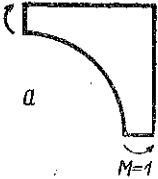
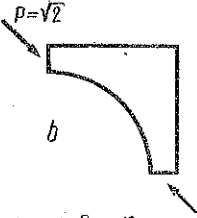
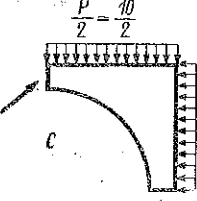
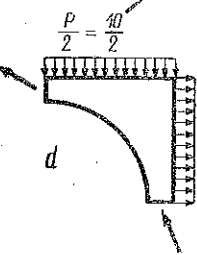


$$F = (+49,914\,865 q^4 - 122,706\,875 q^2 + 99,965\,384 - 27,009\,708 q^{-2}) \cos 2\varphi + \\ + (-8,572\,080 q^6 + 9,058\,710 q^4 - 1,645\,093 q^2 + 0,401\,500 q^{-4}) \sin 4\varphi + \\ - (0,030\,805 q^8 - 0,779\,342 q^6 + 1,121\,094 q^4 - 0,706\,399 q^2) \cos 6\varphi + \\ + (-0,153\,915 q^{10} + 0,210\,124 q^8 - 0,090\,020 q^6 + 0,058\,050 q^4) \sin 8\varphi$$

Dla $i=0,1$ możemy przyjąć współczynniki (3.2), czyli jako niewiadome obrać A_0, B_0, A_1, B_1, A_n i C_n . Możemy dowolnie posługiwać się wzorami (3.2) lub (3.3); jednakże dla obliczeń przyjęcie (3.3) jest korzystniejsze, gdyż mamy tu o wiele mniejszą różnicę wartości bezwzględnych między pierwszym (δ_{0C_0}) a ostatnim (δ_{nD_n}) wyrazem macierzy. Najwygodniej rozwiązywać równania za pomocą krakowianów.

Przedstawiony wyżej sposób jest prostszy od metody podanej w p. 2, gdyż nie wymaga całkowania wzdłuż konturu. Wadą tej metody jest to, że nie potrafimy określić błędu przybliżenia. Podobne metody stosowane są przy określaniu odwzorowań wiernokątnych, [4], jednak zagadnienie, jakie krzywe mogą tworzyć bok BC oraz jakie punkty k trzeba przyjąć, by dokładność była najlepsza, nie zostało dotychczas wyjaśnione. Z sze-

Tablica 5. Funkcja Airy'ego ($\varrho = 0,8$)

 <p>a</p>	$F = -133,60067 \varrho^2 + 180,30108 \varrho^2 \ln \varrho + 135,15597 + 107,11419 \ln \varrho +$ $+ (-69,82530 \varrho^4 + 148,80398 \varrho^2 - 104,66843 + 24,34179 \varrho^{-2}) \sin 2 \varphi +$ $+ (-24,50218 \varrho^6 + 30,45188 \varrho^4 - 11,37393 \varrho^2 + 4,80320 \varrho^{-2}) \cos 4 \varphi +$ $+ (5,44867 \varrho^8 - 5,51110 \varrho^6 + 0,92934 \varrho^{-2} - 0,45587 \varrho^{-6}) \sin 6 \varphi +$ $+ (0,55669 \varrho^{10} - 0,50619 \varrho^8 + 0,03706 \varrho^{-2} - 0,01950 \varrho^{-6}) \cos 8 \varphi$
 <p>b</p>	$F = 106,05042 \varrho^2 - 126,06019 \varrho^2 \ln \varrho - 106,19751 - 91,07135 \ln \varrho +$ $+ (27,66947 \varrho^4 - 64,74383 \varrho^2 + 48,87224 - 12,01244 \varrho^{-2}) \sin 2 \varphi +$ $+ (5,49266 \varrho^6 - 7,04473 \varrho^4 + 2,77919 \varrho^2 - 1,18357 \varrho^{-2}) \cos 4 \varphi +$ $+ (-0,534231 \varrho^8 + 0,48333 \varrho^6 - 0,05334 \varrho^{-2} + 0,02613 \varrho^{-6}) \sin 6 \varphi +$ $+ (-0,00418 \varrho^{10} + 0,01315 \varrho^8 - 0,00353 \varrho^{-2} + 0,00198 \varrho^{-6}) \cos 8 \varphi$
 <p>c</p>	$F = -343,61161 \varrho^2 + 403,07664 \varrho^2 \ln \varrho + 343,73676 + 296,93775 \ln \varrho +$ $+ (-85,37783 \varrho^4 + 195,11940 \varrho^2 - 144,84149 + 35,15838 \varrho^{-2}) \sin 2 \varphi +$ $+ (-18,45701 \varrho^6 + 23,03242 \varrho^4 - 8,69963 \varrho^2 + 3,68037 \varrho^{-2}) \cos 4 \varphi +$ $+ (2,58429 \varrho^8 + 2,40742 \varrho^6 + 0,30788 \varrho^{-2} - 0,14526 \varrho^{-6}) \sin 6 \varphi +$ $+ (0,14822 \varrho^{10} - 0,12589 \varrho^8 + 0,006746 \varrho^{-2} - 0,00344 \varrho^{-6}) \cos 8 \varphi$
 <p>d</p>	$F = (-143,22166 \varrho^4 + 305,03392 \varrho^2 - 214,45402 + 49,85301 \varrho^{-2}) \cos 2 \varphi +$ $+ (95,62047 \varrho^6 - 131,22419 \varrho^4 + 57,33483 \varrho^2 - 24,97793 \varrho^{-2}) \sin 4 \varphi +$ $+ (33,07736 \varrho^8 - 37,00990 \varrho^6 + 7,93339 \varrho^{-2} - 3,98833 \varrho^{-6}) \cos 6 \varphi +$ $+ (-4,10048 \varrho^{10} + 3,48478 \varrho^8 - 0,18731 \varrho^{-2} + 0,09566 \varrho^{-6}) \sin 8 \varphi$

regu obliczeń wynika, że dokładność jest tym lepsza, im mniejsze jest koło w stosunku do boku tarczy. Dokładność jest również lepsza dla wewnętrznego, kołowego brzegu tarczy.

Na tablicach 2-5 oraz na rys. 5-6 podajemy naprężenia σ_φ dla dwu typów symetrycznych tarcz o stosunku promienia do boku $r/a = 0,87$ i $0,80$. Ograniczono się do pokazania naprężeń σ_φ , gdyż naprężenia σ_r oraz $\tau_{r\varphi}$ przyjmują wartości bliskie zeru. W celu ułatwienia obliczeń zastosowano superpozycję symetrycznych i antysymetrycznych obciążeń. Szereg tworzący naprężenia jest szeregiem przemiennym, co pozwoliło oszacować błąd otrzymany na wewnętrznym brzegu tarczy jako nieprzekraczający 3%. W narożu tarczy *a priori* znamy naprężenia i ten fakt także daje możliwość oszacowania błędu. Przeprowadzone badania elastooptyczne wykazały, że błąd obliczeń jest nie większy niż uzyskany na drodze doświadczalnej.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. Bay, *Dreigelenkbogenscheibe*, Berlin 1933.
- [2] K. Girkman, *Flächentragwerke*, Wiedeń 1948.
- [3] K. Wysiatski, *Rozwiązanie pewnego typu tarczy nieograniczonej*, Rozpr. Inż., 1957.
- [4] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Moskwa 1950.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЕ В ТРЕХШАРНИРНОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ АРОЧНЫХ ДИСКОВ

Рассматривается плоское напряженное состояние в симметрических, конструкциях из арочных дисков, применяемых в качестве мостовых конструкций. Принимается функцию Эри, определяющую напряжение в конструкциях из арочных дисков, в форме ряда полученного путем разделения переменных в полярных координатах. Постоянные интегрирования были получены из системы линейных уравнений, в которых коэффициенты выражаются интегралами по контуре арки или же эти коэффициенты обеспечивают удовлетворение краевым условиям в n точках контура. На круговом контуре (внутреннем) краевые условия в виде функции Эри и ее производной удовлетворяются точным образом.

Дается числовой пример и диаграммы напряжений для двух арок.

S u m m a r y

THE STRESSES IN A THREE-HINGED PLATE ARCH

The plane state of stress is considered for symmetric plate arches used as bridge structures. The Airy function determining the stresses in the arches is assumed in the form of a series obtained by separating variables in polar coordinates. The integration constants are obtained from a system of linear equations where the coefficients are either expressed in terms of integrals along the contour of the arch or secure the satisfaction of the boundary conditions at n points of the contour. On the circular contour, the boundary conditions in the form of the Airy function or its derivative are satisfied in an accurate manner.

An example of numerical calculation is given, together with stress diagrams for two arches.

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1958 r.
