

EUGENIUSZ BIELEWICZ

DRGANIA PRZESTRZENNE
MOSTÓW JEDNOPRZEŚŁOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXIII

ADDITIONAL INFORMATION

ADDITIONAL INFORMATION

ADDITIONAL INFORMATION

1. Wstęp

Mosty należą do konstrukcji, których zasadnicze obciążenie użytkowe stanowią pojazdy ruchome. Stąd oddziaływanie pojazdu na most jest zagadnieniem dynamicznym. Problem ten jest bardzo złożony. Pojazdy traktowane niezależnie są już układami o nieskończonej ilości stopni swobody, a drgania ich nie są również jeszcze całkowicie zbadane (dotyczy to szczególnie lokomotyw parowych jako układów najbardziej dynamicznie skomplikowanych). Zagadnienie oddziaływania pojazdu ruchomego na most jest zagadnieniem zespołu drgań przestrzennych pojazdu i konstrukcji mostowej. Dodatkową trudność stanowią występujące również niezależnie od drgań całości drgania poszczególnych elementów mostu (np. prętów kratownicy).

Problem ten nie doczekał się jeszcze należytego rozwiązania, chociaż pierwsze prace z tego zakresu datują się sprzed stu lat.

1.1. Rys historyczny. Pierwsze prace teoretyczne ukazały się w połowie ubiegłego stulecia. Willis (1849 r.), Stokes (1849 r.) i P. Barlow (1851 r.) przyjęli następujące uproszczenia: most został potraktowany jako belka prosta, pozioma, o stałym przekroju poprzecznym i pozbawiona masy. Jako obciążenie przyjęto stałą, pionową siłę obdarzoną masą poruszającą się ze stałą prędkością. Rozwiązania otrzymano w postaci szeregów. Rozwiązanie określone za pomocą znanych funkcji dla tego przypadku podał Zimmerman (1896 r.). W pracach późniejszych (Kryłow 1905 r., Timoszenko 1908 r. i 1911 r.) zostało przyjęte inne założenie, jeżeli chodzi o wpływ masy mostu i pojazdu na drgania: masę pojazdu pominięto uwzględniając masę mostu. W jednej z dalszych prac z tego zakresu Timoszenko (1922 r.) uwzględnił harmoniczne pulsowanie ruchomej, pionowej siły.

Równoległe do dociekań teoretycznych prowadzone były prace doświadczalne. Przegląd badań eksperymentalnych podaje praca [4]. Pierwsze doniesienie^o o pomiarach doświadczalnych pochodzi z 1875 r. Są to badania drgań mostu na linii kolejowej koło Ohio za pomocą oscylografu dającego wykres w skali naturalnej. Dalsze badania prowadzone były za pomocą ulepszonej aparatury do pomiaru ugięć, naprężeń i zapisu drgań. Z ważniejszych prac wcześniejszych należy wymienić badania we Francji

(1889-1892), w Stanach Zjedn. (A. R. E. A. 1907-1910), w Szwajcarii (1917), w Indiach (1917-1922). Ostatnie prace są wynikami najbardziej obszer-nych badań i zostały ujęte w 8 dużych tomach; nie doprowadziły one jednak do określonych wniosków. Znalezione pomiary wykazały, że pomi-nięcie masy pojazdu daje wyniki bliższe rzeczywistości niż pominięcie masy mostu. Dalszy rozwój strony teoretycznej zagadnienia szedł w kie-runku jednoczesnego uwzględnienia masy mostu i pojazdu, drgań pojazdu i tłumienia. Obszerne zestawienie prac tego okresu podano w referacie [6].

Z badaczy polskich zagadnieniem tym zajmuje się J. Nałeszkie-wicz. W pracy [9]¹ tego autora wyprowadzono ściśle równania drgań mostu z uwzględnieniem masy mostu i pojazdu w postaci nieskończonego układu równań różniczkowych oraz podano przybliżone ich rozwiązanie. Praca [7] zawiera rozwiązania dla drgań belek ciągłych oraz rozwiązanie z uwzględnieniem drgań części resorowanej pojazdu, ale w obu wypad-kach został pominięty wpływ masy pojazdu na drgania.

W ostatnich latach poza rozwojem aparatury pomiarowej można stwier-dzić w rozwiązaniach teoretycznych tendencję do upraszczania własności dynamicznych mostu i pojazdu, ale z uwzględnieniem czynników zasad-nicznych. Pochodzi to stąd, że w rozwiązaniach teoretycznych przy użyciu szeregów trygonometrycznych już pierwszy wyraz daje dostatecznie do-bre przybliżenie dla praktyki inżynierskiej. W pracy [16] stosując układ o jednym stopniu swobody podano praktyczną metodę wyznaczania drgań pionowych belki pod wpływem poruszającej się siły stałej. Pomiary spraw-dzające na modelu wykazały bardzo dobrą zgodność z obliczeniami. Po-dobnie również w pracy [1] została przedstawiona praktyczna metoda obliczenia drgań pionowych mostu z tym uzupełnieniem w stosunku do sposobu podanego w pracy [16], że zostało uwzględnione pulsowanie siły pionowej. Pomiary doświadczalne mostu kratowego kolejowego o roz-piętości 45 m były zgodne z wynikami teoretycznymi. W pracy [2] zro-biono jeszcze dalszy krok naprzód, gdyż poza czynnikami uwzględnionymi w poprzednich pracach most i pojazd potraktowano jako zespół dwóch układów o jednym stopniu swobody. Pomiary wykonane na modelu i dwóch mostach drogowych przy określonym typie pojazdu wykazały dobrą do-kładność obliczeń. Praca [12] jest próbą określenia współczynników dy-namicznych dla mostów na podstawie pomiarów doświadczalnych. Współ-czynniki dynamiczne wyznaczono w oparciu o bardzo liczne pomiary naprężeń za pomocą czujników elektrooporowych i elektromagnetycznych oraz aparatury pozwalającej na jednoczesną rejestrację naprężeń w 72 punktach, uzależniając je od prędkości i typu lokomotywy oraz rodzaju mostu.

¹ Praca zawiera przegląd historyczny rozwiązań teoretycznych, z którego sko-rzystaliśmy w niniejszej pracy.

Wszelkie znane nam prace teoretyczne i doświadczalne dotyczą drgań pionowych mostu jako niewątpliwie najważniejszych. Można znaleźć w niektórych sprawozdaniach dane świadczące o istnieniu drgań przestrzennych mostów. Praca [5] zawiera wzmiankę stwierdzającą istnienie drgań skrętnych dźwigarów głównych mostu. W pracy [4] znajdujemy wykresy drgań poziomych środka pasa górnego mostu otwartego. Praca [12] zawiera oscylogram naprężeń w stężeniu wiatrowym krótkiego mostu blaszakowego z płytą żelbetową. Ponieważ naprężenia dynamiczne w stężeniach wiatrowych mostów powstają jedynie wskutek drgań poziomych i skrętnych, badania dynamiczne pełne powinny je również uwzględnić. Zagadnienie to jest szczególnie ważne dla mostów kolejowych dwutorowych i przy niesymetrycznym obciążeniu mostów drogowych.

1.2. Oddziaływanie pojazdu na most. Jeżeli ograniczyć się do rozpatrzenia konstrukcji mostowej bez pojazdu, oddziaływanie jego (ściślej — jednej pary kół) można podzielić na trzy grupy uwzględniające:

- 1) stałą co do wielkości siłę pionową (ewentualnie moment skręcający) obdarzoną masą,
- 2) różnego rodzaju siły periodyczne,
- 3) przypadkowe impulsy.

Do grupy pierwszej zaliczamy ciężar nieresorowanej części pojazdu (w przypadku niesymetrycznego obciążenia otrzymujemy dodatkowo moment skręcający). Do grupy drugiej zaliczamy siły wynikające z drgań części resorowanej pojazdu, siły powstające wskutek niepełnej okrągłości kół, siły bezwładności niewyważonych części mechanizmów, wreszcie siły spowodowane przestawieniem o 180° tłoków lokomotywy. Do grupy trzeciej należą siły wynikające z nierówności podłoża, siły powstające przy przechodzeniu przez styki, siły powstające przy hamowaniu i zmianie prędkości pojazdu. Wielkości tych oddziaływań, szczególnie w mostach kolejowych, są znaczne.

W pracy [15] podano wykresy dynamicznych nacisków pionowych kół lokomotywy parowej. Wykresy te są różne dla różnych osi lokomotywy. Np. dla osi tylnej o nacisku statycznym = 6700 kG naciski dynamiczne wahają się w granicach 2700-10700 kG.

Ponieważ przy przeciążeniu jednego koła następuje odciążenie drugiego (tej samej osi), otrzymujemy w wyniku moment skręcający, zmieniający swą wartość w sposób pulsujący. Koła lokomotyw są również źródłem sił poziomych, których wartości maksymalne wahają się w granicach 0,5-0,85 nacisku pionowego. Oddziaływanie jednej osi pojazdu można sprowadzić do stałej siły pionowej (ewentualnie momentu skręcającego), obdarzonej masą, pulsującej siły pionowej, poziomej, pulsującego momentu skręcającego oraz impulsów: pionowego, poziomego i skrętnego.

1.3. Cel pracy. Praca niniejsza jest próbą określenia drgań przestrzennych mostów jednoprzęsłowych pod wpływem wymienionych poprzednio sił wymuszających i sił w sposób dowolny zależnych od czasu. Zajęto się tylko drganiami mostu jako całości. Sądzymy, że stanowisko to prowadzi do wyników dostatecznie dokładnych, jeżeli chodzi o dynamiczną pracę stężeń wiatrowych. Wyniki teoretyczne podane są w 2 rozdziałach. Rozdział drugi zawiera wyprowadzenie równań drgań przestrzennych mostów o stałym przekroju poprzecznym, których konstrukcję zastąpiono prętem cienkościennym. W rozwiązaniach tego rozdziału nie uwzględniono wpływu masy pojazdu na drgania. Wyniki więc nie mają celu praktycznego, służą jedynie za podstawę do budowy modelu zastępczego i oceny wpływu sił normalnych. Drgania mostu przy użyciu modelu zastępczego podano w rozdziale trzecim. Rozwiązania tego rozdziału, poza wpływem masy pojazdu, pozwalają uwzględnić również zmianę przekroju poprzecznego mostu. Tłumienie w obu rozdziałach przyjęto według hipotezy Sorokina. Ze względu na liniowość równań dla działania kilku sił wymuszających obowiązuje prawo superpozycji. Rozdział czwarty zawiera obliczenia praktyczne dla mostu otwartego o rozpiętości 36,08 m. Ze względu na brak ściślejszych danych liczbowych praca ogranicza się do wniosków jakościowych.

2. Drgania zastępczego pręta cienkościennego

Konstrukcja mostu ściśle rzecz biorąc stanowi wieloparametrowy układ przestrzenny. Dla uzyskania poglądu na pracę dynamiczną mostu jako całości wprowadzono uproszczenia. Układ konstrukcyjny mostu sprowadzono do postaci pręta cienkościennego przyjmując następujące założenia:

- 1) przekrój poprzeczny mostu jest stały na całej długości,
- 2) istnieje pionowa płaszczyzna symetrii,
- 3) w kratownicach słupki i krzyżulce zastąpione zostały ciągłą ścianką, która przenosi tylko naprężenia tnące,
- 4) pasy kratownic i blaszaków występują w formie powierzchni skupionych,
- 5) przekrój poprzeczny jest nieodkształcalny.

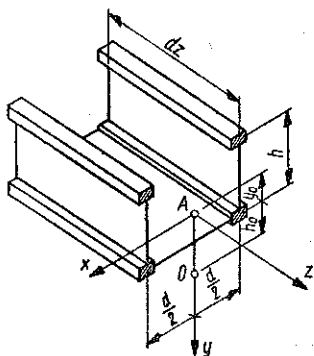
Otrzymałmy w ten sposób zastępczą postać pręta cienkościennego o profilu otwartym albo zamkniętym.

Przy wyprowadzeniu równań różniczkowych drgań zastępczego pręta cienkościennego poczyniono ponadto jeszcze dalsze następujące założenia:

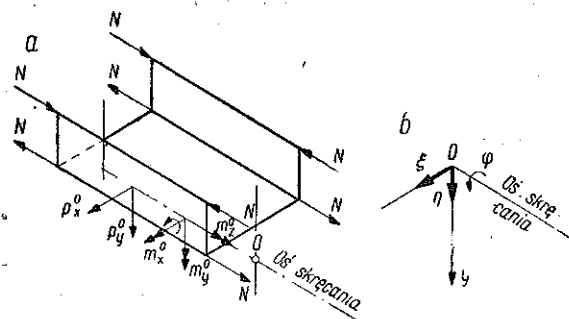
- 6) masa pojazdu nie wpływa na drgania,
- 7) siły normalne w pasach, mające wpływ na stateczność mostu (jako całości), są stałe na całej jego długości (założenie takie pozwala na oszacowanie wpływu sił normalnych na drgania),
- 8) tłumienie materiałowe jest zgodne z hipotezą Sorokina.

2.1. Równania różniczkowe drgań. Przy wyprowadzeniu równań drgań pręta cienkościennego rozpatrzono oddzielnie pręty o profilu otwartym i zamkniętym. Zajmiemy się najpierw prętami o profilu otwartym. Rozpatrzmy wycinek mostu o długości dz . Osie układu współrzędnych oraz wymiary przekroju poprzecznego przyjęto według rys. 1.

Punkt A jest środkiem ciężkości pracującego przekroju poprzecznego mostu. Punkt O jest środkiem skręcania. Obciążenie zewnętrzne składa się z obciążenia ciągłego działającego wzdłuż osi skręcania o składowych p_x^0, p_y^0 , ciągłego momentu zginającego o składowych m_x^0, m_y^0 i ciągłego momentu skręcającego m_z^0 . Kierunki dodatnie obciążeń podano na rys. 2a. Dodatnie kierunki odkształceń podano na rys. 2b, a mianowicie przesunięcie poziome ξ i pionowe η środka skręcania oraz obrót φ wokół niego.



Rys. 1



Rys. 2

Dla jednocześnie zginanego i skręcanego pryzmatycznego pręta cienkościennego przy obciążeniu statycznym stosuje się znane równania różniczkowe wiążące odkształcenia z obciążeniami (obciążenia, których dodatnie kierunki pokrywają się z kierunkami obciążeń podanych na rys. 2a, oznaczono symbolami p_x, p_y, m_x, m_y):

dla kierunku pionowego

$$(2.1) \quad EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} = p_y + \frac{\partial m_x}{\partial z}.$$

dla kierunku poziomego

$$(2.2) \quad EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} = p_x - \frac{\partial m_y}{\partial z},$$

dla obrotu wokół osi skręcania

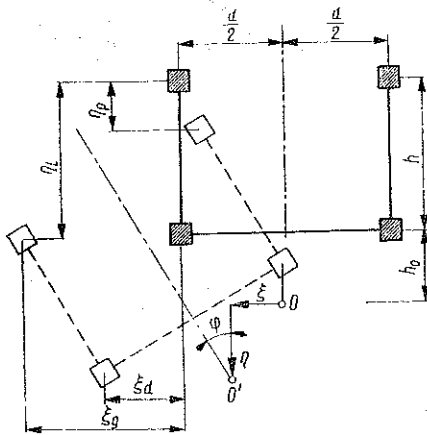
$$(2.3) \quad EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = m_z.$$

Przyjęto następujące oznaczenia: I_x , I_y są momentami bezwładności względem osi x i y , I_d jest momentem bezwładności czystego skręcania, I_ω zaś momentem wycinkowym bezwładności.

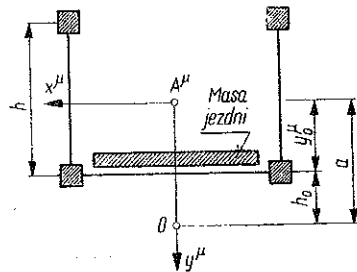
Aby otrzymać równania różniczkowe problemu, należy uwzględnić wpływ sił normalnych w pasach i siły bezwładności. Oba te wpływy można sprowadzić do obciążeń zewnętrznych, występujących w równaniach (2.1), (2.2) i (2.3). Jeżeli przekrój poprzeczny odkształci się tak, że środek skręcania dozna przesunięć ξ i η oraz nastąpi obrót wokół tego punktu, przesunięcia punktów zaczepienia sił normalnych w pasach wyrażą się następującymi zależnościami:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \xi_g = \xi + \varphi(h + h_0), & \eta_p = \eta - \varphi \frac{d}{2}, \\ \xi_d = \xi + \varphi h_0, & \eta_l = \eta + \varphi \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Związki te będą wykorzystane do zastąpienia działania sił normalnych przez równoważne działanie obciążeń ciągłych. Rozpatrzmy kierunek pionowy.



Rys. 3



Rys. 4

Wpływ sił normalnych może być przedstawiony przez następujące obciążenie ciągłe:

$$(2.5) \quad p_y^N = N \left(-\frac{\partial^2 \eta_p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Oznacza to, że przyjęty układ sił normalnych nie ma wpływu na drgania kierunku pionowego. Dla sił bezwładności natomiast mamy

$$(2.6) \quad p_y^M = -\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad m_x^M = I_x^M \frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2}.$$

W związkach tych μ oznacza masę, a I_x^μ moment bezwładności masy jednostki długości pręta względem osi x^μ . Oś x^μ przechodzi przez środek masy A^μ jednostki długości pręta. Przekrój poprzeczny pręta do obliczania wielkości masowych podano na rys. 4.

Rozpatrzmy z kolei kierunek poziomy. Znajdziemy podobnie dla sił normalnych

$$(2.6) \quad p_x^N = -2N \frac{\partial^2 \xi_g}{\partial z^2} + 2N \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial z^2} = -2Nh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

oraz dla sił bezwładności

$$(2.7) \quad \begin{cases} p_x^\mu = -\mu \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ m_y^\mu = -I_y^\mu \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} \end{cases}$$

Rozpatrując obrót około osi skręcania znajdziemy:

dla sił normalnych

$$(2.8) \quad m_z^N = -2N \frac{\partial^2 \xi_g}{\partial z^2} (h + h_0) + 2N \frac{\partial^2 \xi_d}{\partial z^2} h_0 = \\ = 2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - 2Nh (h + 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

dla siły bezwładności

$$(2.9) \quad m_z^\mu = -\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} a - I_0^\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + I_\omega^\mu \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2}.$$

W związkach powyższych I_0^μ oznacza biegunowy, masowy moment bezwładności jednostki długości pręta względem środka skręcania, I_ω^μ wycinkowy masowy moment bezwładności. Wykorzystując związki (2.5)–(2.9) z równań (2.1), (2.2) i (2.3) otrzymamy równania różniczkowe drgań pręta cienkościennego o profilu otwartym:

$$(2.10) \quad \begin{cases} EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - I_x^\mu \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} = p_y^0 + \frac{\partial m_x^0}{\partial z}, \\ EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + 2Nh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - I_y^\mu \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} = p_x^0 - \frac{\partial m_y^0}{\partial z}, \\ EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + 2Nh (h + 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - I_\omega^\mu \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} + I_0^\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_z^0. \end{cases}$$

Równania powyższe można otrzymać również z ogólnych równań drgań prętów cienkościennych podanych przez W. Z. Właso^wa. Znajdują się one wraz z wyprowadzeniem np. w pracy [11]. Z układu równań widać,

że drgania pionowe są niezależne, natomiast drgania poziome i skrętne są ze sobą sprzężone. Do obliczeń praktycznych można pominąć (jak to się zwykle czyni) wyrazy pochodzące od bezwładności obrotu przekrojów poprzecznych względem osi x'' , osi y'' i bezwładności deplanacji.

W dalszym ciągu wprowadzimy wyrazy uwzględniające tłumienie. Oparto się przy tym na hipotezie Sorokina, [14]², która przyjmuje, że siła tłumienia wewnętrznego jest proporcjonalna do bezwzględnej wartości odkształcenia. Prowadzi to do nieliniowych równań różniczkowych. Dla drgań harmonicznycch można uzyskać linearyzację zagadnienia przez przyjęcie zespolonego współczynnika między tensorem naprężeń i odkształceń. Dalszym założeniem hipotezy Sorokina jest to, że linearyzacja ta jest w przybliżeniu słuszna dla dowolnych typów drgań. W naszym przypadku zastosowanie tej hipotezy polega na wprowadzeniu zespolonego mnożnika do modułu sprężystości i modułu odkształcenia postaciowego. Dla modułu sprężystości czynnikiem tym jest liczba zespolona $[1 + i(\psi/2\pi)]$.

Przez ψ oznaczono stałą materiałową określającą rozproszenie energii: $\psi = \Delta W/W$, gdzie ΔW jest energią rozproszoną, a W energią sprężystą odpowiadającą amplitudzie odkształcenia. Dla stali według doświadczeń Sorokina, [14], $\psi = 0,015$. Czynnikiem dla modułu odkształcenia postaciowego jest w ogólności inny. Ponieważ brak jest ściślejszych danych, a według [10] tłumienie drgań skrętnych zależy od wielkości naprężeń, kształtu i wielkości rozpatrywanego ciała, przyjęto do obliczeń taki sam współczynnik jak dla modułu sprężystości (uzyskano przez to uproszczenia rachunkowe). W przykładach liczbowych przyjęto według pracy [10], że tłumienie wewnętrzne stanowi 2/3 tłumienia całkowitego (czyli że $\psi_{\text{całk.}} = (3/2) \cdot 0,015 = 0,0226$). Poza tym obliczenia praktyczne wykazują, że tłumienie nie ma decydującego wpływu na drgania. Ostatecznie równania drgań pręta przyjmują postać:

$$(2.11) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = p_y^0 + \frac{\partial m_x^0}{\partial z},$$

$$(2.12) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + 2Nh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = p_x^0 - \frac{\partial m_y^0}{\partial z},$$

$$(2.13) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) \left(EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + 2Nh(h + 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0^u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_z^0.$$

² Użyto nazwy, która już się przyjęła w polskiej literaturze technicznej, chociaż to samo założenie w formie bardziej ogólnej podane zostało w tym samym czasie w pracy [13].

Rozważmy z kolei mosty zamknięte, czyli pręt zastępczy o profilu zamkniętym. Oznaczenia dotyczące przekroju poprzecznego pręta podano na rys. 5. Obciążenia przyjęto według zasad stosowanych dla prętów o profilu otwartym. Postać równań drgań pionowych i poziomych nie ulega zmianie. Zmienia się równanie drgań skrętnych. Równanie to dla obciążenia statycznego [odpowiednik równania (2.3)] ma postać

$$(2.14) \quad \frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = m_z - \frac{EI_{\omega}}{GI_s \nu} \frac{\partial^2 m_z}{\partial z^2}.$$

Symbole I_d , I_{ω} , I_s oznaczają momenty bezwładności profilu zamkniętego odpowiednio czystego skręcania, wycinkowy i kierunkowy; $\nu = 1 - (I_d/I_s)$ jest współczynnikiem spacznienia. Równanie to otrzymujemy przy założeniu, że przesunięcia podłużne przekroju poprzecznego są proporcjonalne do pierwszej pochodnej tzw. funkcji deplanacji (a nie kąta skręcenia). Siły normalne i siły bezwładności wprowadzono do równania tak, jak to uczyniono dla profilu otwartego; mamy więc:

dla wpływu sił normalnych

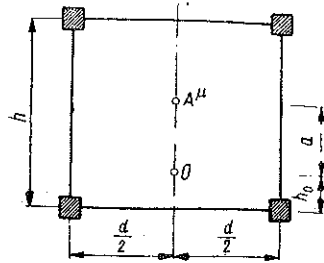
$$(2.15) \quad m_z^N = -2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - 2Nh(h - 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

dla siły bezwładności

$$(2.16) \quad m_z^{\mu} = -\mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_{\omega}^{\mu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} - I_0^{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Wprowadzając te związki do równania (2.14) otrzymano równanie drgań skrętnych pręta o profilu zamkniętym. Przy oznaczeniu $k = EI_{\omega}/GI_s \nu$ równanie przyjmie postać następującą:

$$(2.17) \quad \frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2Nh \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - k \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} \right) + 2Nh(h - 2h_0) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \right) + \mu a \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - k \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - I_{\omega}^{\mu} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} - k \frac{\partial^6 \varphi}{\partial z^4 \partial t^2} \right) + I_0^{\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2} \right) = m_z^0 - k \frac{\partial^2 m_z^0}{\partial z^2}.$$



Rys. 5

Odrzucając wyraz pochodzący od bezwładności deplanacji oraz uwzględniając tłumienie otrzymano

$$(2.18) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2Nh \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - k \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4}\right) + \\ + 2Nh(h - 2h_0) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4}\right) + \mu a \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - k \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2}\right) + \\ + I_0^{\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^2 \partial t^2}\right) = m_z - k \frac{\partial^2 m_z^0}{\partial z^2}.$$

Równanie to wraz z równaniami (2.11) i (2.12) określa drgania pręta o profilu zamkniętym. Ponieważ wpływ skręcania skępowanego jest w profilach zamkniętych mniejszy, równanie (2.14) wyrazić można w formie uproszczonej (bez wprowadzenia funkcji deplanacji)

$$(2.19) \quad \frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = m_z.$$

Wówczas równanie odpowiadające równaniu (2.18) przyjmie formę

$$(2.20) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \\ + 2Nh(h - 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0^{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_z^0.$$

2.2. Drgania własne. Równania drgań własnych zastępczego pręta cienkościennego o profilu otwartym otrzymujemy z równań (2.11), (2.12) i (2.13) przez odrzucenie stron prawych:

$$(2.21) \quad \begin{cases} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \\ \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + 2Nh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2Nh \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + 2Nh(h + 2h_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\ + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0^{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Jeżeli pręt (most) o długości l podparty jest przegubowo, tzn. że na obu podporach $\eta = \xi = \varphi = 0$ oraz $\partial^2 \eta / \partial z^2 = \partial^2 \xi / \partial z^2 = \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$ rozwiązania można przyjąć w postaci następujących szeregów Fouriera:

$$(2.22) \quad \eta_s = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\eta n} e^{i(\omega_n t + \lambda_n)} \sin a_n z,$$

$$(2.23) \quad \xi_s = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\xi n} e^{i(\omega_n t + \lambda_n)} \sin a_n z,$$

$$(2.24) \quad \varphi_s = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\varphi n} e^{i(\omega_n t + \lambda_n)} \sin a_n z,$$

gdzie $a_n = n\pi/l$ a $C_{\eta n}$, $C_{\xi n}$, $C_{\varphi n}$ i λ_n są stałymi dowolnymi zależnymi od warunków początkowych zagadnienia. Po wprowadzeniu tych funkcji do równań (2.21) i uproszczeniu przez $\sin a_n z e^{i(\omega_n t + \lambda_n)}$ otrzymano liniowe równania jednorodne na stałe $C_{\eta n}$, $C_{\xi n}$, $C_{\varphi n}$. Przy użyciu oznaczeń

$$(2.25) \quad \begin{cases} EI_x a_n^4 = B_{xn}, \\ EI_y a_n^4 = B_{yn}, \\ EI_\omega a_n^4 + GI_d a_n^2 = B_{\varphi n}, \end{cases} \quad \begin{cases} 2Nh(h + 2h_0) a_n^2 = B_{Nn}, \\ 2Nh a_n^2 = B_{hn} \end{cases}$$

można te równania napisać w następującej postaci:

$$(2.26) \quad \begin{cases} C_{\eta n} \left[B_{xn} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) - \mu \omega_n^2 \right] = 0, \\ C_{\xi n} \left[B_{yn} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) - \mu \omega_n^2 \right] - C_{\varphi n} [B_{hn} + \mu a \omega_n^2] = 0, \\ -C_{\xi n} (B_{hn} + \mu a \omega_n^2) + C_{\varphi n} \left[B_{\varphi n} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) - B_{Nn} - I_0^\mu \omega_n^2 \right] = 0. \end{cases}$$

Częstości drgań pionowych są niezależne od pozostałych

$$\omega_{\eta n}^2 = \frac{B_{xn}}{\mu} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right).$$

Ponieważ $(\psi/2\pi)^2$ jest wielkością bardzo małą w porównaniu z jednością, przeto

$$\sqrt{1 + i \frac{\psi}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2} + 1} + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2} - 1} \approx 1 + i \frac{\psi}{4\pi}.$$

Stąd mamy

$$(2.27) \quad \omega_{\eta n} = \omega_{\eta n}^0 \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right), \quad \omega_{\eta n}^0 = \sqrt{\frac{B_{xn}}{\mu}}.$$

Wykorzystując związki (2.27) w równaniu (2.22) otrzymamy równanie drgań własnych, pionowych pręta:

$$(2.28) \quad \eta_s = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\eta n} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_n^0 t} e^{i(\omega_n^0 t + \lambda_n)} \sin a_n z.$$

Częstości drgań poziomo-skrętnych otrzymano z warunku

$$(2.29) \quad \begin{vmatrix} B_{yn} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) - \mu \omega_n^2 & -B_{hn} + \mu a \omega_n^2 \\ -B_{hn} + \mu a \omega_n^2 & B_{\varphi n} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) - B_{Nn} - I_0^{\mu} \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2.30) \quad \begin{cases} D_n = \mu (I_0^{\mu} - \mu a^2), \\ F_n = B_{yn} I_0^{\mu} + \mu (B_{\varphi n} - B_{Nn}) + 2B_{hn} \mu a, \\ \bar{F}_n = B_{yn} I_0^{\mu} + B_{\varphi n} \mu, \\ G_n = B_{yn} (B_{\varphi n} - B_{Nn}) - B_{hn}^2, \\ \bar{G}_n = 2B_{yn} B_{\varphi n} - B_{yn} B_{Nn}, \\ \varrho_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{F_n^2 - 4D_n G_n} + \sqrt{(F_n^2 - 4D_n G_n)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2} (2F_n \bar{F}_n - 4D_n \bar{G}_n)^2}, \\ \beta_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-(F_n^2 - 4D_n G_n)} + \sqrt{(F_n^2 - 4D_n G_n)^2 + \frac{\psi^2}{4\pi^2} (2F_n \bar{F}_n - 4D_n \bar{G}_n)^2}. \end{cases}$$

Wówczas

$$(2.31) \quad \omega_{1n, 2n}^2 = \frac{F_n \pm \varrho_n + i \left(\frac{\psi}{2\pi} \bar{F}_n \pm \beta_n \right)}{2D_n}.$$

Jak wykazują obliczenia praktyczne, wpływ sił normalnych na drgania jest bardzo nieznaczny. Jeżeli więc pominąć wyrazy zawierające siły normalne, to $\bar{F}_n = F_n$ i $\bar{G}_n = 2G_n$. Stąd otrzymamy

$$\varrho_n \approx \sqrt{F_n^2 - 4D_n G_n^0}, \quad \beta_n \approx \sqrt{F_n^2 - 4D_n G_n^0} \frac{\psi}{2\pi},$$

gdzie

$$G_n^0 = B_{yn} B_{\varphi n}.$$

Wyrażenie określające częstości sprowadza się do postaci

$$(2.31.1) \quad \omega_{1n, 2n}^2 = \frac{\bar{F}_n^2 \pm \sqrt{F_n^2 - 4D_n G_n^0}}{2D_n} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\omega_{1n}^0 = \frac{\bar{F}_n - \sqrt{\bar{F}_n^2 - 4D_n G_n^0}}{2D_n}, \quad \omega_{2n}^0 = \frac{\bar{F}_n + \sqrt{\bar{F}_n^2 - 4D_n G_n^0}}{2D_n}$$

wyrażono wzory (2.31.1) w następującej postaci:

$$(2.32) \quad \omega_{1n} = \omega_{1n}^0 \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right), \quad \omega_{2n} = \omega_{2n}^0 \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right).$$

Uwzględniając te związki w równaniach (2.23) i (2.24) otrzymano równania drgań własnych poziomych i skrętnych:

$$(2.33) \quad \xi_s = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{\xi n 1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} e^{i(\omega_{1n}^0 t + \lambda_{n1})} + C_{\xi n 2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} e^{i(\omega_{2n}^0 t + \lambda_{n2})}] \sin a_n z,$$

$$(2.34) \quad \varphi_s = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{\varphi n 1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} e^{i(\omega_{1n}^0 t + \lambda_{n1})} + C_{\varphi n 2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} e^{i(\omega_{2n}^0 t + \lambda_{n2})}] \sin a_n z.$$

Dla każdego n mamy sześć stałych: $C_{\xi n 1}$, $C_{\xi n 2}$, $C_{\varphi n 1}$, $C_{\varphi n 2}$, λ_{n1} , λ_{n2} , które zależą od warunków początkowych problemu. Między nimi zachodzą dwa następujące związki, wynikające z równań (2.26):

$$(2.35) \quad \begin{cases} \frac{C_{\xi n 1}}{C_{\varphi n 1}} = S_{n1} = \frac{\mu a \omega_{1n}^{0^2}}{B_{yn} - \mu \omega_{1n}^0}, \\ \frac{C_{\varphi n 2}}{C_{\xi n 2}} = S_{n2} = \frac{\mu a \omega_{2n}^{0^2}}{B_{\varphi n} - I_0^\mu \omega_{2n}^0}. \end{cases}$$

Jeżeli pręt może przesuwać się tylko w kierunku poziomym lub tylko obracać się, to odpowiednie częstotliwości drgań tylko poziomych lub tylko skrętnych wyrażają się w sposób następujący:

$$(2.36) \quad \begin{cases} \omega_{\xi n} = \sqrt{\frac{B_{yn}}{\mu}} \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right) = \omega_{\xi n}^0 \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right), \\ \omega_{\varphi n} = \sqrt{\frac{B_{\varphi n}}{I_0^\mu}} \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right) = \omega_{\varphi n}^0 \left(1 + i \frac{\psi}{4\pi} \right). \end{cases}$$

Łatwo jest zauważyć, że w każdym przypadku najmniejsza częstość wypada dla $n=1$.

Aby otrzymać równania drgań pręta o profilu zamkniętym, wystarczy rozważyć równanie drgań skrętnych. Warunki brzegowe przyjęto takie same, jak dla prętów o profilu otwartym. Po odrzuceniu strony prawej równania (2.18), wprowadzeniu do niego związku (2.24) i uproszczeniu przez $\sin a_n z e^{i(\omega_n t + \lambda_n)} (1 + k a_n^2)$ otrzymano równanie liniowe na $C_{\varphi n}$. Jeżeli

pominąć wpływ sił normalnych, który w tym przypadku jest jeszcze mniejszy, otrzymamy równanie

$$(2.37) \quad -C_{\xi n}(\mu a \omega_n^2) + C_{\varphi n} \left[\frac{1}{1+k\alpha_n^2} \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \alpha_n^4 + GI_d \alpha_n^2 \right) \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) - I_0^{\mu} \omega_n^2 \right] = 0.$$

Widzimy, że równanie to różni się od równania trzeciego (2.26) jedynie występowaniem wielkości zależnych od sztywności skrętnej.

Dla profili zamkniętych sztywność skrętną oznaczono jako

$$(2.38) \quad B_{\varphi n} = \frac{1}{1+k\alpha_n^2} \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \alpha_n^4 + GI_d \alpha_n^2 \right).$$

Jeżeli uwzględnić równanie (2.20), to w wyrażeniu tym należy przyjąć $k=0$.

2.3. Drgania wymuszone i własne. Rozważać będziemy następujące typy sił wymuszających, poruszających się ze stałą prędkością v :

- 1) pionowa siła działająca na osi symetrii pręta (może to być siła pulsująca, impuls lub siła dowolnie zależna od czasu),
- 2) moment skręcający (pulsujący impuls lub dowolnie zależny od czasu),
- 3) siła pozioma działająca na osi skręcania (siła pulsująca, impuls lub siła dowolnie zależna od czasu).

Częstość pulsowania przyjmujemy za równą prędkości kątowej obrotu kół pojazdu. Jeżeli średnica koła wynosi D_0 , a prędkość jazdy v , to częstość pulsowania $p=2v/D_0$. Ponieważ wpływ sił normalnych nie ma znaczenia (co można stwierdzić rozważając drgania własne), przeto można było go pominąć.

2.3.1. Działanie siły pionowej. Działanie pulsującej pionowej siły prowadzi tylko do drgań pionowych. Siłę tę przedstawiono za pomocą następującego szeregu Fouriera:

$$(2.39) \quad p_y^0(z, t) = \frac{2P}{l} e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin v_n t \sin a_n z,$$

gdzie $v_n = a_n v$.

Równanie drgań pionowych (2.11) przyjmie wtedy postać

$$(2.40) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{2P}{l} e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin v_n t \sin a_n z.$$

Równanie drgań wymuszonych przyjęto w postaci

$$(2.41) \quad \eta_w = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\eta n}(t) \sin a_n z.$$

Po podstawieniu i uproszczeniu przez $\sin a_n z$ otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne dla $T_{\eta n}$:

$$(2.42) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) B_{xn} T_{\eta n} + \mu \frac{d^2 T_{\eta n}}{dt^2} = \frac{2P}{l} \sin v_n t e^{ipt}.$$

Prawą stronę równania przekształcono do postaci

$$\frac{2P}{l} \sin v_n t e^{ipt} = \frac{P}{l} \{ \sin(p+v_n)t - \sin(p-v_n)t + i [\cos(p-v_n)t - \cos(p+v_n)t] \}.$$

Jako rozwiązanie przyjęto funkcję

$$(2.43) \quad T_{\eta n} = A_1 \sin(p+v_n)t + A_2 \sin(p-v_n)t + i [B_1 \cos(p-v_n)t + B_2 \cos(p+v_n)t].$$

Po wykonaniu różniczkowania i podstawieniu do równania (2.42) otrzymano następujące wartości współczynników:

$$(2.44) \quad \begin{cases} A_1 = -B_2 = \frac{P}{l} \frac{1}{B_{xn} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) - \mu(p+v_n)^2}, \\ B_1 = -A_2 = \frac{P}{l} \frac{1}{B_{xn} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) - \mu(p-v_n)^2}. \end{cases}$$

Po wyeliminowaniu liczby zespolonej w mianowniku i podstawieniu do równania (2.43) otrzymano

$$(2.45) \quad T_{\eta n} = \frac{P}{l} \left\{ \frac{B_{xn} - \mu(p+v_n)^2 - i B_{xn} \frac{\psi}{2\pi}}{[B_{xn} - \mu(p+v_n)^2]^2 + \left(B_{xn} \frac{\psi}{2\pi}\right)^2} [\sin(p+v_n)t - i \cos(p+v_n)t] - \frac{B_{xn} - \mu(p-v_n)^2 - i B_{xn} \frac{\psi}{2\pi}}{[B_{xn} - \mu(p-v_n)^2]^2 + \left(B_{xn} \frac{\psi}{2\pi}\right)^2} [\sin(p-v_n)t - i \cos(p-v_n)t] \right\}.$$

Po wyodrębnieniu części urojonej rozwiązania i wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.46) \quad \begin{cases} L_{x(p+v)} = 1 - \frac{\mu(p+v_n)^2}{B_{xn}} = 1 - \left(\frac{p+v_n}{\omega_{\eta n}^0}\right)^2, \\ L_{x(p-v)} = 1 - \left(\frac{p-v_n}{\omega_{\eta n}^0}\right)^2, & L_{\psi} = \frac{\psi}{2\pi}, \\ M_{x(p+v)}^2 = L_{x(p+v)}^2 + L_{\psi}^2, \\ M_{x(p-v)}^2 = L_{x(p-v)}^2 + L_{\psi}^2 \end{cases}$$

otrzymano następujące wyrażenie na $T_{\eta n}$:

$$(2.47) \quad T_{\eta n} = \frac{P}{l B_{xn}} \left[\frac{-L_{\psi} \sin(p + v_n) t - L_{x(p+v)} \cos(p + v_n) t}{M_{x(p+v)}^2} + \frac{L_{\psi} \sin(p - v_n) t + L_{x(p-v)} \cos(p - v_n) t}{M_{x(p-v)}^2} \right]$$

Ponieważ praktycznie interesują nas amplitudy drgań, przekształcono powyższy wzór do postaci

$$(2.48) \quad T_{\eta n} = \frac{P}{l B_{xn}} \left\{ \frac{\sin[(p - v_n)t + k_2]}{M_{x(p-v)}} \frac{\sin[(p + v_n)t + k_1]}{M_{x(p+v)}} \right\},$$

gdzie

$$\operatorname{tg} k_1 = \frac{L_{x(p+v)}}{L_{\psi}}, \quad \operatorname{tg} k_2 = \frac{L_{x(p-v)}}{L_{\psi}}.$$

Dalsze przekształcenie daje

$$(2.49) \quad T_{\eta n} = \frac{P}{l B_{xn}} h_{\eta n} \sin(pt + \gamma_{\eta n})$$

przy oznaczeniach

$$h_{\eta n}^2 = \frac{1}{M_{x(p-v)}^2} + \frac{1}{M_{x(p+v)}^2} - \frac{2 \cos(k_1 - k_2 + 2v_n t)}{M_{x(p-v)} M_{x(p+v)}},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{\eta n} = \frac{M_{x(p+v)} \sin(k_2 - v_n t) - M_{x(p-v)} \sin(k_1 + v_n t)}{M_{x(p+v)} \cos(k_2 - v_n t) - M_{x(p-v)} \cos(k_1 + v_n t)}.$$

Aby otrzymać całą ogólną równania (2.40), należy uwzględnić drgania własne. Przyjmując część urojoną równania (2.28), otrzymano

$$(2.50) \quad \eta = \eta_w + \eta_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{l B_{xn}} \left[T_{\eta n} \frac{l B_{xn}}{P} + C_{\eta n} e^{-\frac{\psi}{4n} \omega_n^0 t} \sin(\omega_{\eta n}^0 t + \lambda_{\eta n}) \right] \sin a_n z.$$

Przyjęto następujące warunki początkowe dla $t = 0$:

$$\eta = f_{\eta}(z), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = g_{\eta}(z).$$

Funkcje $f_{\eta}(z)$ i $g_{\eta}(z)$ przedstawiono w postaci szeregu Fouriera (jak dla funkcji nieparzystych w przedziale l)

$$(2.51) \quad \begin{cases} f_{\eta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f_{\eta}(k) \sin a_n k dk \right) \sin a_n z, \\ g_{\eta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l g_{\eta}(k) \sin a_n k dk \right) \sin a_n z. \end{cases}$$

Po zastosowaniu oznaczeń

$$(2.52) \quad \begin{cases} A_\eta = \frac{\sin k_1}{M_{x(p+v)}} - \frac{\sin k_2}{M_{x(p-v)}} + \frac{2B_{xn}}{P} \int_0^l f_\eta(k) \sin a_n k dk, \\ B_\eta = \frac{(p+v_n) \cos k_1}{M_{x(p+v)}} - \frac{(p-v_n) \cos k_2}{M_{x(p-v)}} + \frac{2B_{xn}}{P} \int_0^l g_\eta(k) \sin a_n k dk \end{cases}$$

otrzymaliśmy następujące wzory na stałe całkowania:

$$(2.53) \quad \operatorname{ctg} \lambda_{\eta n} = \frac{B_\eta}{A_\eta} \frac{1}{\omega_{\eta n}^0} + \frac{\psi}{4\pi},$$

$$(2.54) \quad C_{\eta n} = A_\eta \frac{1}{\sin \lambda_{\eta n}}.$$

Dla otrzymania amplitudy równanie (2.50) przekształcono do postaci

$$(2.55) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{l B_{xn}} K_{\eta n} \sin(pt + \varepsilon_{\eta n}),$$

gdzie

$$(2.56) \quad \begin{cases} K_{\eta n} = \sqrt{h_{\eta n}^2 + q_{\eta n}^2 + 2h_{\eta n} q_{\eta n} \cos [(\omega_{\eta n}^0 - p)t + \lambda_{\eta n} - \gamma_{\eta n}]}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\eta n} = \frac{h_{\eta n} \sin \gamma_{\eta n} + q_{\eta n} \sin [(\omega_{\eta n}^0 - p)t + \lambda_{\eta n}]}{h_{\eta n} \cos \gamma_{\eta n} + q_{\eta n} \cos [(\omega_{\eta n}^0 - p)t + \lambda_{\eta n}]}, \\ q_{\eta n} = C_{\eta n} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{\eta n}^0 t}. \end{cases}$$

Rozważono w dalszym ciągu działanie impulsu pionowego i dowolnej siły $p(t)$. Wyznaczenie drgań pionowych od impulsu można sprowadzić do zagadnienia drgań własnych przy następujących warunkach początkowych:

$$(2.57) \quad \text{dla } t=0 \quad \eta=0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{Pdt}{\mu} \delta(z - \bar{z}).$$

W powyższym warunku Pdt jest impulsem pionowym, $\delta(z - \bar{z})$ funkcją Diraca, oraz \bar{z} punktem działania impulsu. Równania służące do wyznaczenia $C_{\eta n}$ i $\lambda_{\eta n}$ są następujące:

$$(2.58) \quad \begin{cases} C_{\eta n} \sin \lambda_{\eta n} = 0, \\ C_{\eta n} \omega_{\eta n}^0 \left(-\frac{\psi}{4\pi} \sin \lambda_{\eta n} + \cos \lambda_{\eta n} \right) = \frac{2Pdt}{l\mu} \int_0^l \delta(z - \bar{z}) \sin a_n z dz = \\ = \frac{2Pdt}{l\mu} \sin a_n \bar{z}. \end{cases}$$

Rozwiązanie daje

$$(2.59) \quad \lambda_{\eta n} = 0, \quad C_{\eta n} = \frac{2Pdt}{l\mu\omega_{\eta n}^0} \sin a_n \bar{z}.$$

Stąd drgania spowodowane impulsem są określone następującym równaniem:

$$(2.60) \quad \eta_I = \frac{2Pdt}{l\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\eta n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{\eta n}^0 t} \sin a_n \bar{z} \sin(\omega_{\eta n}^0 t) \sin a_n z.$$

Korzystając z tego rozwiązania drogą całkowania otrzymano równanie drgań dla dowolnej siły $P(t)$ zaczepionej w punkcie $z = \bar{z}$:

$$(2.61) \quad \eta_P = \frac{2}{l\mu} \int_0^t \left\{ P(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{\eta n}^0 (t-\tau)}}{\omega_{\eta n}^0} \sin a_n \bar{z} \sin[\omega_{\eta n}^0 (t-\tau)] \sin a_n z \right\} d\tau.$$

W przypadku siły ruchomej mamy $\bar{z} = vt$.

2.3.2. Działanie momentu skręcającego. W przypadku działania pulsującego momentu skręcającego równania różniczkowe drgań (2.11), (2.12) i (2.13) przyjmą postać (pominięto wpływ sił normalnych w pasach):

$$(2.62) \quad \begin{cases} \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_x \frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \\ \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) \left(EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m_z(z, t). \end{cases}$$

Ze względu na niezależność równania pierwszego wymuszone drgania pionowe nie wystąpią. Dla pozostałych dwóch równań drgania wymuszone przyjęto w formie następujących szeregów Fouriera:

$$(2.63) \quad \xi_w = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi n}(t) \sin a_n z,$$

$$(2.64) \quad \varphi_w = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\varphi n}(t) \sin a_n z.$$

Moment skręcający przedstawiono szeregiem Fouriera

$$(2.65) \quad m_z(z, t) = \frac{2M_s}{l} e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin v_n t \sin a_n z.$$

Po wprowadzeniu związków (2.63), (2.64) i (2.65) do równań drugiego i trzeciego (2.62) otrzymano po uproszczeniu przez $\sin a_n z$ układ dwóch równań różniczkowych, zwyczajnych z niewiadomymi funkcjami $T_{\xi n}$ i $T_{\varphi n}$. Równania te wypisano przy zastosowaniu oznaczeń (2.25):

$$(2.66) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) B_{yn} T_{\xi n} + \mu \frac{d^2 T_{\xi n}}{dt^2} + \mu a \frac{d^2 T_{\varphi n}}{dt^2} = 0,$$

$$(2.67) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) B_{\varphi n} T_{\varphi n} + I_0^\mu \frac{d^2 T_{\varphi n}}{dt^2} + \mu a \frac{d^2 T_{\xi n}}{dt^2} = \frac{2 M_s}{l} e^{ipt} \sin v_n t.$$

Prawą stronę równania (2.67) przekształcono do postaci

$$(2.68) \quad \frac{2 M_s}{l} e^{ipt} \sin v_n t = \frac{M_s}{l} \{ \sin(p+v_n)t - \sin(p-v_n)t + i[\cos(p-v_n)t - \cos(p+v_n)t] \}.$$

Zostały przyjęte następujące rozwiązania dla funkcji $T_{\xi n}$ i $T_{\varphi n}$:

$$(2.69) \quad T_{\xi n} = A_1 \sin(p+v_n)t + A_2 \sin(p-v_n)t + i[A_3 \cos(p-v_n)t + A_4 \cos(p+v_n)t],$$

$$(2.70) \quad T_{\varphi n} = B_1 \sin(p+v_n)t + B_2 \sin(p-v_n)t + i[B_3 \cos(p-v_n)t + B_4 \cos(p+v_n)t].$$

Po podstawieniu tych funkcji do równań (2.66) i (2.67) otrzymano łatwy do rozwiązania układ ośmiu równań liniowych na stałe A_1 - A_4 , B_1 - B_4 . Po podstawieniu do równań (2.69) i (2.70) wartości tych stałych oraz wyodrębnieniu części urojonej tych związków, otrzymano poszukiwane wzory dla funkcji $T_{\xi n}$ i $T_{\varphi n}$.

Wprowadzone zostały następujące oznaczenia:

$$(2.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{y(p+v)} = 1 - \frac{\mu(p+v_n)^2}{B_{yn}} = 1 - \left(\frac{p+v_n}{\omega_{\xi n}^0} \right)^2, \\ L_{y(p-v)} = 1 - \left(\frac{p-v_n}{\omega_{\xi n}^0} \right)^2, \\ L_{\varphi(p\pm v)} = 1 - \frac{(p\pm v_n)^2 I_0^\mu}{B_{\varphi n}} = 1 - \left(\frac{p\pm v_n}{\omega_{\varphi n}^0} \right)^2, \\ \mu_{y(p\pm v)} = \frac{\mu a (p\pm v_n)^2}{B_{yn}} = a \left(\frac{p\pm v_n}{\omega_{\xi n}^0} \right)^2, \\ \mu_{\varphi(p\pm v)} = \frac{\mu a (p\pm v_n)^2}{B_{\varphi n}}, \\ L_{\varphi y(p+v)} = L_{\varphi(p+v)} L_{y(p+v)} - \left(\frac{\psi}{2\pi} \right)^2 - \mu_{y(p+v)} \mu_{\varphi(p+v)}, \\ L_{\varphi y(p-v)} = L_{\varphi(p-v)} L_{y(p-v)} - \left(\frac{\psi}{2\pi} \right)^2 - \mu_{y(p-v)} \mu_{\varphi(p-v)}, \\ L_{\psi(p\pm v)} = [L_{y(p\pm v)} + L_{\varphi(p\pm v)}] \frac{\psi}{2\pi}, \\ M_{(p\pm v)}^2 = L_{\varphi y(p\pm v)}^2 + L_{\psi(p\pm v)}^2. \end{array} \right.$$

Przy tych oznaczeniach znajdziemy

$$(2.72) \quad T_{\xi n} = \frac{M_s}{iB_{\varphi n}} \left\{ \frac{-\mu_y(p+v)}{M_{(p+v)}^2} [L_{\psi(p+v)} \sin(p+v_n)t + L_{\varphi y(p+v)} \cos(p+v_n)t] + \right. \\ \left. + \frac{\mu_y(p-v)}{M_{(p-v)}^2} [L_{\psi(p-v)} \sin(p-v_n)t + L_{\varphi y(p-v)} \cos(p-v_n)t] \right\},$$

$$(2.73) \quad T_{\varphi n} = \frac{M_s}{iB_{\varphi n}} \left\{ \frac{\left[\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p+v)} - L_{\psi(p+v)} L_{y(p+v)} \right] \sin(p+v_n)t}{M_{(p+v)}^2} \right. \\ \left. - \frac{\left[L_{y(p+v)} L_{\varphi y(p+v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p+v)} \right] \cos(p+v_n)t}{M_{(p+v)}^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left[L_{y(p-v)} L_{\varphi y(p-v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p-v)} \right] \cos(p-v_n)t}{M_{(p-v)}^2} \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p-v)} - L_{\psi(p-v)} L_{y(p-v)} \right] \sin(p-v_n)t}{M_{(p-v)}^2} \right\}.$$

Dalsze przekształcenia prowadzą do wzoru

$$(2.74) \quad T_{\xi n} = \frac{M_s}{iB_{\varphi n}} \left\{ \frac{-\mu_y(p+v) \sin[(p+v_n)t + k_{3n}]}{M_{(p+v)}} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_y(p-v) \sin[(p-v_n)t + k_{4n}]}{M_{(p-v)}} \right\},$$

gdzie

$$(2.75) \quad \operatorname{tg} k_{3n} = \frac{L_{\varphi y(p+v)}}{L_{\psi(p+v)}}, \quad \operatorname{tg} k_{4n} = \frac{L_{\varphi y(p-v)}}{L_{\psi(p-v)}},$$

oraz do wzoru

$$(2.76) \quad T_{\varphi n} = \frac{M_s}{iB_{\varphi n}} \left\{ \frac{\sqrt{L_y^2(p+v) + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{M_{(p+v)}} \sin[(p+v_n)t + k_{5n}] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{L_y^2(p-v) + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{M_{(p-v)}} \sin[(p-v_n)t + k_{6n}] \right\},$$

gdzie

$$(2.77) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} k_{5n} = \frac{-\left[L_{\psi(p+v)} L_{\varphi\psi(p+v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p+v)} \right]}{\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi\psi(p+v)} - L_{\psi(p+v)} L_{\psi(p+v)}}, \\ \operatorname{tg} k_{6n} = \frac{L_{\psi(p-v)} L_{\varphi\psi(p-v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p-v)}}{-\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi\psi(p-v)} + L_{\psi(p-v)} L_{\psi(p-v)}}. \end{cases}$$

Podstawiając funkcje (2.72), (2.73) lub (2.76) i (2.77) do równań (2.63) i (2.64) otrzymano równania drgań wymuszonych, poziomych i skrętnych.

Dla uzyskania ogólnego rozwiązania wyprowadzono równania drgań własnych oraz uwzględniono warunki początkowe. Wyodrębniając część urojoną funkcji (2.33) i (2.34) oraz uwzględniając związki (2.35) otrzymano, że drgania poziome i skrętne opisane są następującymi funkcjami:

$$(2.78) \quad \xi = \xi_w + \xi_s = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_{\xi n} + C_{\varphi n 1} S_{n 1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin(\omega_{1n}^0 t + \lambda_{n 1}) + C_{\xi n 2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} \sin(\omega_{2n}^0 t + \lambda_{n 2}) \right] \sin \alpha_n z,$$

$$(2.79) \quad \varphi = \varphi_w + \varphi_s = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_{\varphi n} + C_{\varphi n 1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin(\omega_{1n}^0 t + \lambda_{n 1}) + C_{\xi n 2} S_{n 2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} \sin(\omega_{2n}^0 t + \lambda_{n 2}) \right] \sin \alpha_n z.$$

Przyjęto następujące warunki początkowe:

$$(2.80) \quad \text{dla } t=0 \quad \xi = f_{\xi}(z), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = g_{\xi}(z), \quad \varphi = f_{\varphi}(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_{\varphi}(z).$$

Prawe strony wzorów (2.80) przedstawiono w formie szeregów Fouriera i wraz z funkcjami (2.78) i (2.79) podstawiono do warunków (2.80). Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.81) \quad \begin{cases} r_{1n} = \omega_{1n}^0 \left(-\frac{\psi}{4\pi} \sin \lambda_{n 1} + \cos \lambda_{n 1} \right), \\ r_{2n} = \omega_{2n}^0 \left(-\frac{\psi}{4\pi} \sin \lambda_{n 2} + \cos \lambda_{n 2} \right) \end{cases}$$

otrzymano następujące równania:

$$(2.82) \quad \begin{cases} C_{\varphi n1} S_{n1} \sin \lambda_{n1} + C_{\xi n2} \sin \lambda_{n2} = \frac{2}{l} \int_0^l f_{\xi}(k) \sin \alpha_n k dk - T_{\xi n}^0 = A_{\xi n}, \\ C_{\varphi n1} S_{n1} r_{1n} + C_{\xi n2} r_{2n} = \frac{2}{l} \int_0^l g_{\xi}(k) \sin \alpha_n k dk - \frac{\partial T_{\xi n}^0}{\partial t} = B_{\xi n}, \\ C_{\varphi n1} \sin \lambda_{n1} + C_{\xi n2} S_{n2} \sin \lambda_{n2} = \frac{2}{l} \int_0^l f_{\varphi}(k) \sin \alpha_n k dk - T_{\varphi n}^0 = A_{\varphi n}, \\ C_{\varphi n1} r_{1n} + C_{\xi n2} S_{n2} r_{2n} = \frac{2}{l} \int_0^l g_{\varphi}(k) \sin \alpha_n k dk - \frac{\partial T_{\varphi n}^0}{\partial t} = B_{\varphi n}. \end{cases}$$

Symbole $T_{\xi n}^0$, $\partial T_{\xi n}^0 / \partial t$, $T_{\varphi n}^0$ i $\partial T_{\varphi n}^0 / \partial t$ oznaczają wartości funkcji $T_{\xi n}$, $T_{\varphi n}$ i ich pochodnych dla $t=0$.

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymano

$$(2.83) \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \lambda_{n1} = \frac{S_{n2} B_{\xi n} - B_{\varphi n}}{S_{n2} A_{\xi n} - A_{\varphi n}} \frac{1}{\omega_{1n}^0} + \frac{\psi}{4\pi}, \\ \operatorname{ctg} \lambda_{n2} = \frac{S_{n1} B_{\varphi n} - B_{\xi n}}{S_{n1} A_{\varphi n} - A_{\xi n}} \frac{1}{\omega_{2n}^0} + \frac{\psi}{4\pi}, \end{cases}$$

$$(2.84) \quad \begin{cases} C_{\varphi n1} = \frac{S_{n2} A_{\xi n} - A_{\varphi n}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \frac{1}{\sin \lambda_{n1}}, \\ C_{\xi n2} = \frac{S_{n1} A_{\varphi n} - A_{\xi n}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \frac{1}{\sin \lambda_{n2}}. \end{cases}$$

W ten sposób uzyskano ogólne rozwiązanie równania drugiego i trzeciego (2.62) przy warunkach (2.80).

Rozpatrzmy działanie impulsu skrętnego i dowolnie zmiennego w czasie momentu skręcającego.

Równania drgań spowodowanych impulsem skrętnym otrzymano odzrucając drgania wymuszone i przyjmując następujące warunki początkowe:

$$(2.85) \quad \text{dla } t=0 \quad \xi=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}=0, \quad \varphi=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{Mdt}{I_0^{\mu}} \delta(z-\bar{z}).$$

Przez Mdt oznaczono impuls skrętny. Stałe całkowania wyrażą się wówczas za pomocą następujących związków:

$$(2.86) \quad \begin{cases} \lambda_{n1} = \lambda_{n2} = 0, \\ C_{\varphi n1} = -\frac{2Mdt}{II_0^\mu} \sin \alpha_n \bar{z} \frac{1}{\omega_{1n}^0 (S_{n1} S_{n2} - 1)}, \\ C_{\xi n2} = -\frac{2Mdt}{II_0^\mu} \sin \alpha_n \bar{z} \frac{S_{n1}}{\omega_{2n}^0 (S_{n1} S_{n2} - 1)}, \end{cases}$$

a stąd równania drgań poziomych i skrętnych mają postać

$$(2.87) \quad \xi_I = \frac{2Mdt}{II_0^\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{(S_{n1} S_{n2} - 1)} \left(-\frac{S_{n1}}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin \omega_{1n}^0 t + \right. \\ \left. + \frac{S_{n1}}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} \sin \omega_{2n}^0 t \right) \sin \alpha_n z,$$

$$(2.88) \quad \varphi_I = \frac{2Mdt}{II_0^\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{(S_{n1} S_{n2} - 1)} \left(-\frac{1}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin \omega_{1n}^0 t + \right. \\ \left. + \frac{S_{n1} S_{n2}}{\omega_{2n}^0} \sin \omega_{2n}^0 t \right) \sin \alpha_n z.$$

Przez całkowanie otrzymano równania drgań dla dowolnego $M(t)$ działającego w punkcie \bar{z} lub ruchomego ($\bar{z} = vt$):

$$(2.89) \quad \xi_M = \frac{2}{II_0^\mu} \int_0^t \left\{ M(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{(S_{n1} S_{n2} - 1)} \left[-\frac{S_{n1}}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{1n}^0 (t-\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{S_{n1}}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{2n}^0 (t-\tau) \right] \sin \alpha_n z \right\} d\tau,$$

$$(2.90) \quad \varphi_M = \frac{2}{II_0^\mu} \int_0^t \left\{ M(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{(S_{n1} S_{n2} - 1)} \left[-\frac{1}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{1n}^0 (t-\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{S_{n1} S_{n2}}{\omega_{2n}^0} \sin \omega_{2n}^0 (t-\tau) \right] \sin \alpha_n z \right\} d\tau.$$

2.3.3. Działanie siły poziomej. Pod wpływem działania pulsującej siły poziomej, zaczepiającej na osi skręcania, wymuszonych drgań pionowych nie będzie. Równania drgań poziomych i skrętnych (2.12) i (2.13) mają w tym przypadku postać

$$(2.91) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) EI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = p_x(z, t),$$

$$(2.92) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi} \right) \left(EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \mu a \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0^\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

W celu otrzymania rozwiązania przyjęto dokładnie taki sam tok postępowania, jak w wypadku działania momentu skręcającego. Pulsująca siłę poziomą rozwinęto w szereg Fouriera

$$(2.93) \quad p_x(z, t) = \frac{2H}{l} e^{ipt} \sum_{n=1}^{\infty} \sin v_n t \sin a_n z = \\ = \frac{H}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(p+v_n)t - \sin(p-v_n)t + i(\cos(p-v_n)t - \cos(p+v_n)t) \right].$$

Rozwiązania drgań wymuszonych poszukiwano w postaci (2.63) i (2.64). Równania różniczkowe zwyczajne dla funkcji $T_{\xi n}$ i $T_{\varphi n}$ są następujące:

$$(2.94) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) B_{yn} T_{\xi n} + \mu \frac{d^2 T_{\xi n}}{dt^2} + \mu a \frac{d^2 T_{\varphi n}}{dt^2} = \\ = \frac{H}{l} \left[\sin(p+v_n)t - \sin(p-v_n)t + i(\cos(p-v_n)t - \cos(p+v_n)t) \right],$$

$$(2.95) \quad \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) B_{\varphi n} T_{\varphi n} + I_0^{\mu} \frac{d^2 T_{\varphi n}}{dt^2} + \mu a \frac{d^2 T_{\xi n}}{dt^2} = 0.$$

Postać rozwiązań (2.69) i (2.70) może być zastosowana również w tym przypadku. Stałe A_1 - A_4 i B_1 - B_4 wyznaczamy równie łatwo, jak w przypadku działania momentu skręcającego. Po podstawieniu ich wartości do związków (2.69) i (2.70) i określeniu części urojonej tych rozwiązań oraz przy zastosowaniu oznaczeń (2.71) otrzymaliśmy następujące funkcje:

$$(2.96) \quad T_{\xi n} = \frac{H}{l B_{yn}} \left\{ \frac{\left[\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p+v)} - L_{\psi(p+v)} L_{\varphi(p+v)} \right] \sin(p+v_n)t}{M_{(p+v)}^2} \right. \\ \frac{\left[L_{\varphi(p+v)} L_{\varphi y(p+v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p+v)} \right] \cos(p+v_n)t}{M_{(p+v)}^2} \\ \frac{\left[\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p-v)} - L_{\psi(p-v)} L_{\varphi(p-v)} \right] \sin(p-v_n)t}{M_{(p-v)}^2} + \\ \left. \frac{\left[L_{\varphi(p-v)} L_{\varphi y(p-v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p-v)} \right] \cos(p-v_n)t}{M_{(p-v)}^2} \right\},$$

$$(2.97) \quad T_{\varphi n} = \frac{H}{l B_{yn}} \left\{ \frac{-\mu_{\varphi(p+v)} \left[L_{\psi(p+v)} \sin(p+v_n)t + L_{\varphi y(p+v)} \cos(p+v_n)t \right]}{M_{(p+v)}^2} \right. \\ \left. + \frac{\mu_{\varphi(p-v)} \left[L_{\psi(p-v)} \sin(p-v_n)t + L_{\varphi y(p-v)} \cos(p-v_n)t \right]}{M_{(p-v)}^2} \right\}.$$

Stosując dalsze przekształcenia otrzymano

$$(2.98) \quad T_{\xi n} = \frac{H}{lB_{yn}} \left\{ \frac{\sqrt{L_{\varphi}^2(p+v) + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{M_{(p+v)}} \sin [(p+v_n)t + k_{7n}] + \frac{\sqrt{L_{\varphi}^2(p-v) + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{M_{(p-v)}} \sin [(p-v_n)t + k_{8n}] \right\},$$

gdzie

$$(2.99) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} k_{7n} &= \frac{-L_{\varphi(p+v)} L_{\varphi y(p+v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi(p+v)}}{\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p+v)} - L_{\psi(p+v)} L_{\varphi(p+v)}}, \\ \operatorname{tg} k_{8n} &= \frac{L_{\varphi(p-v)} L_{\varphi y(p-v)} + \frac{\psi}{2\pi} L_{\psi(p-v)}}{-\frac{\psi}{2\pi} L_{\varphi y(p-v)} - L_{\psi(p-v)} L_{\varphi(p-v)}}, \end{aligned} \right.$$

oraz

$$(2.100) \quad T_{\varphi n} = \frac{H}{lB_{yn}} \left\{ \frac{-\mu_{\varphi(p+v)} \sin [(p+v_n)t + k_{9n}]}{M_{(p+v)}} + \frac{\mu_{\varphi(p-v)} \sin [(p-v_n)t + k_{10n}]}{M_{(p-v)}} \right\},$$

gdzie

$$(2.101) \quad \operatorname{tg} k_{9n} = \frac{L_{\varphi y(p+v)}}{L_{\psi(p+v)}}, \quad \operatorname{tg} k_{10n} = \frac{L_{\varphi y(p-v)}}{L_{\psi(p-v)}}.$$

Rozwiązanie ogólne ma również w tym przypadku postać równań (2.78) i (2.79), w których funkcje $T_{\xi n}$ i $T_{\varphi n}$ należy przyjmować według wzorów (2.96) i (2.97) lub (2.98) i (2.100). Przyjmując warunki początkowe według równań (2.80) można zauważyć, że wzory (2.83) na stałe całkowania są nadal słuszne. W ten sposób zagadnienie drgań pod wpływem poziomej siły pulsującej zostało rozwiązane.

Rozpatrywać będziemy działanie impulsu poziomego i dowolnej siły poziomej $H(t)$ (na osi skręcania). Wzorując się na rozwiązaniu dla impulsu skrętnego rozważono tylko równania drgań własnych przy następujących warunkach początkowych dla $t=0$:

$$(2.102) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= 0, & \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{Hdt}{\mu} \delta(z - \bar{z}), \\ \varphi &= 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Przez Hdt oznaczono impuls poziomy. Otrzymano następujące wzory na stałe całkowania:

$$(2.103) \quad \lambda_{n1} = \lambda_{n2} = 0,$$

$$(2.104) \quad \begin{cases} C_{\varphi n1} = \frac{2Hdt}{l\mu} \sin \alpha_n \bar{z} \frac{S_{n2}}{\omega_{1n}^0 (S_{n1} S_{n2} - 1)}, \\ C_{\xi n2} = -\frac{2Hdt}{l\mu} \sin \alpha_n \bar{z} \frac{1}{\omega_{2n}^0 (S_{n1} S_{n2} - 1)}. \end{cases}$$

Równania drgań poziomych i skrętnych od działania impulsu mają postać

$$(2.105) \quad \xi_t = \frac{2Hdt}{l\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \left(\frac{S_{n1} S_{n2}}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin \omega_{1n}^0 t - \frac{1}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} \sin \omega_{2n}^0 t \right) \sin \alpha_n z,$$

$$(2.106) \quad \varphi_t = \frac{2Hdt}{l\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z} S_{n2}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \left(\frac{1}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 t} \sin \omega_{1n}^0 t - \frac{1}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 t} \sin \omega_{2n}^0 t \right) \sin \alpha_n z.$$

Przez całkowanie równań (2.105) i (2.106) otrzymano rozwiązania dla dowolnej siły poziomej $H(t)$ zaczepionej w punkcie \bar{z} osi skręcania:

$$(2.107) \quad \xi_H = \frac{2}{l\mu} \int_0^t \left\{ H(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \left[\frac{S_{n1} S_{n2}}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{1n}^0 (t-\tau) - \frac{1}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{2n}^0 (t-\tau) \right] \sin \alpha_n z \right\} d\tau,$$

$$(2.108) \quad \varphi_H = \frac{2}{l\mu} \int_0^t \left\{ H(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \bar{z} S_{n2}}{S_{n1} S_{n2} - 1} \left[\frac{1}{\omega_{1n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{1n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{1n}^0 (t-\tau) - \frac{1}{\omega_{2n}^0} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_{2n}^0 (t-\tau)} \sin \omega_{2n}^0 (t-\tau) \right] \sin \alpha_n z \right\} d\tau.$$

2.4. Uwagi końcowe. Wzory na drgania poziome i skrętne nie zostały doprowadzone do postaci, przedstawiających od razu amplitudy drgań, ze względu na zbyt skomplikowane zależności jak również z tego powodu, że nie wszystkie wyrazy mają praktyczne znaczenie (w szczególności odnosi się to do wyrazu zawierającego drugą główną częstość ω_{2n}^0). Rozwiązania tego rozdziału są słuszne zarówno dla prętów o profilu otwar-

tym, jak również o profilu zamkniętym. Różnica jest tylko w sztywności skrętnej. W przypadku stosowania równania (2.18) drgań skrętnych

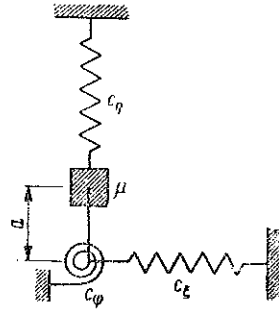
$$B_{\varphi n} = \frac{1}{1 + k\alpha_n^2} \left(\frac{EI_{\omega}}{\nu} \alpha_n^4 + GI_d \alpha_n^2 \right)$$

i wówczas należy również prawą stronę równania drgań skrętnych podzielić przez $1 + k\alpha_n^2$, gdzie $k = EI_{\omega}/GI_s \nu$ (zgodnie z oznaczeniem p. 2.1.)

3. Model zastępczy drgań mostu

Analizując rozwiązania drugiego rozdziału można zauważyć, że szeregi Fouriera przedstawiające drgania są szybko zbieżne. Wynika to z istnienia w mianowniku n^4 (co ukryte jest w B_{x_n} , B_{y_n} i $B_{\varphi n}$).

Jak wykazują obliczenia zawarte w pracy [8] (odnoszące się do rozwiązań Timoszenki) uwzględnienie tylko pierwszego wyrazu szeregu jest już dostatecznie dokładne dla zastosowań praktycznych. Jeżeli ograniczyć się do badania drgań środka mostu (jak to się zwykle czyni), uzyskuje się jeszcze dalszą poprawę dokładności, gdyż w tym wypadku drugi wyraz szeregu równy jest zeru. Uwaga ta jest podstawą założeń stosowanych przez autorów prac [1], [2] i [16] do badania drgań pionowych mostu. Słuszność tego rodzaju założeń została potwierdzona doświadczalnie. Rozszerzając te założenia na drgania przestrzenne mostu wprowadzono model zastępczy ciała o trzech stopniach swobody. Model tego ciała zbudowano w ten sposób, że równania różniczkowe drgań modelu mają postać równań (2.11), (2.12) i (2.13) przy przyjęciu



Rys. 6

$$(3.1) \quad \eta = \eta(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \xi = \xi(t) \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi = \varphi(t) \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Model zastępczy stanowi ciało o masie μ zawieszony symetrycznie na pionowej sprężynie o stałej C_{η} . Dalsze więzy ciała stanowi pozioma sprężyna o stałej C_{ξ} , której oś znajduje się w odległości a od środka masy ciała oraz sprężyna skrętne o stałej C_{φ} . Model ten nie uwzględnia wpływu sił normalnych. Powiązanie modelu z układem rzeczywistym odbywa się przez przyjęcie zgodności odkształceń i częstości własnych.

Dla kierunku pionowego powtórzono postępowanie przedstawione w pracy [1] z tą tylko różnicą, że konsekwentnie tłumienie przyjęto według hipotezy Sorokina.

Stałą sprężyny C_{η} obliczamy jako siłę pionową, działającą w określonym punkcie na osi mostu, która powoduje przesunięcie pionowe da-

nego punktu, równe jednostce (1 cm): $C_\eta = 1/\delta\eta$. Obiór punktu zależy od tego, jakiego przekroju poprzecznego interesują nas drgania. Obliczamy poza tym częstość drgań pionowych obranego punktu (praktycznie stosujemy jedną z metod przybliżonych) «Masę pionową» modelu określamy wówczas ze wzoru

$$(3.2) \quad \mu_\eta = \frac{C_\eta}{\omega_\eta^2}$$

Masa ciała zastępczego dla drgań pionowych, czyli «masa pionowa», jest różna od «masy poziomej». Podobnie obliczamy charakterystyki poziome i skrętne. Wielkość C_ξ jest siłą poziomą, która powoduje jednostkowe przesunięcie poziome rozważanego przekroju poprzecznego mostu (bez skręcania), a C_φ jest momentem potrzebnym do obrócenia danego przekroju poprzecznego o kąt jednostkowy (bez przesunięcia poziomego).

Obliczyć musimy poza tym częstość drgań poziomych (tylko) i skrętnych (tylko). W praktyce stosujemy metody przybliżone. Określamy wówczas masę poziomą jako

$$(3.3) \quad \mu = \frac{C_\xi}{\omega_\xi^2}$$

i moment bezwładności ciała względem punktu zaczepienia sprężyn poziomej i skrętnej:

$$(3.4) \quad I_0 = \frac{C_\varphi}{\omega_\varphi^2}$$

Pozostaje jeszcze do określenia odległość a . Wielkość tę dobieramy tak, aby obliczona za pomocą pozostałych charakterystyk modelu częstość podstawowa poziomo-skrętna odpowiadała rzeczywistej. Stosowanie modelu pozwala na uwzględnienie masy pojazdu i zmiany przekroju poprzecznego mostu. Istnieje duża swoboda operowania parametrami modelu. Uwzględnić można zarówno masę pojazdu będącego źródłem sił wymuszających (np. lokomotywa), jak i masę pojazdu bez sił wymuszających (np. wagony).

Częstości drgań własnych mostu można obliczać dowolną metodą przybliżoną czyniąc założenia odnośnie konstrukcji mostu mniej lub bardziej bliskie rzeczywistości. Istnieje możliwość obliczania częstości własnych mostu jako kratownicy przestrzennej lub jako pręta cienkościennego o odkształcalnym przekroju poprzecznym. Częstości te można również uzyskać z pomiaru na rzeczywistym obiekcie.

Jeżeli chodzi o zmienność przekroju poprzecznego mostu, to należy sądzić, że dla mostów o niedużych różnicach (mosty o pasach równoległych) można stosować do przybliżonych obliczeń zastępczy profil cienkościenny. Dla mostów o dużych zmianach przekroju poprzecznego (mosty paraboliczne) sprawa wyznaczenia charakterystyk modelu staje się za-

gadnieniem dodatkowym. Wpływ masy pojazdu na drgania uwzględnia się praktycznie w następujący sposób: przyjmuje się szereg ustawień pojazdu na moście i dla każdego ustawienia oblicza się potrzebne wielkości do wyznaczenia stałych modelu. Dotyczy to częstości drgań: pionowej, poziomej, skrętnej i podstawowej poziomo-skrętnej. Drgania określonego przekroju poprzecznego mostu zastępujemy więc drganiami modelu o zmiennych skokowo charakterystykach (C_η , C_ξ i C_φ nie zmieniają się). Wychylenia końcowe w jednym przedziale czasu są warunkami początkowymi dla następnego przedziału.

Tłumienie przyjmujemy według hipotezy Sorokina. Wpływ poruszania się sił wymuszających wzdłuż mostu uwzględniamy przez zmianę amplitudy. Powinniśmy opierając się na rozwiązaniach rozdziału drugiego przyjąć zależność sinusoidalną. Ponieważ charakterystyki modelu przyjmujemy jako zmienne skokowo, konsekwentnie zastosowano to założenie również do amplitudy sił wymuszających (uzyskujemy prostsze wzory końcowe). Równania drgań modelu dla określonego przedziału czasu mają postać następującą (użyto w tym przypadku oznaczenia pochodnych za pomocą kropek):

dla kierunku pionowego mamy

$$(3.5) \quad \mu_\eta \ddot{\eta} + \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) C_\eta \dot{\eta} = P(t),$$

dla poziomego

$$(3.6) \quad \mu \ddot{\xi} + \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) C_\xi \dot{\xi} + \mu a \ddot{\varphi} = H(t),$$

a dla obrotu

$$(3.7) \quad I_0 \ddot{\varphi} + \left(1 + i \frac{\psi}{2\pi}\right) C_\varphi \dot{\varphi} + \mu a \ddot{\xi} = M(t).$$

Rozwiązania dla poszczególnych przypadków możemy uzyskać z rozwiązań z rozdziału drugiego, uwzględniając zmianę oznaczeń i przyjmując $\sin v_n t = 1$ oraz $n = 1$. Poniżej zestawiono wzory służące do bezpośrednich obliczeń.

3.1. Wzory dla kierunku pionowego. Drgania swobodne

$$(3.8) \quad \eta_s = B_\eta e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_\eta t} e^{i(\omega_\eta t + \lambda_\eta)}.$$

Działanie siły harmoniczej (Pe^{ipt}). Drgania wymuszone

$$(3.9) \quad \begin{cases} \eta_w = a_\eta e^{i(pt + \varepsilon_\eta)} \\ a_\eta = \frac{P}{C_\eta} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_\eta}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_\eta = \frac{-\frac{\psi}{2\pi}}{1 - \left(\frac{p}{\omega_\eta}\right)^2}. \end{cases}$$

Działanie siły harmoniczej (drżania wymuszone i własne z uwzględnieniem warunków początkowych):

warunki początkowe (dla $t=0$)

$$(3.10) \quad \eta = \eta_0, \quad \dot{\eta} = \dot{\eta}_0,$$

wzory dla drżania

$$(3.11) \quad \eta = \eta_\omega + \eta_s = a_\eta \sin(p t + \varepsilon_\eta) + B_\eta e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_\eta t} \sin(\omega_\eta t + \lambda_\eta),$$

wartości stałych

$$(3.12) \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \lambda_\eta = \frac{\dot{\eta}_0 - a_\eta p \cos \varepsilon_\eta}{\eta_0 - a_\eta \sin \varepsilon_\eta} \frac{1}{\omega_\eta} + \frac{\psi}{4\pi}, \\ B_\eta = (\eta_0 - a_\eta \sin \varepsilon_\eta) \frac{1}{\sin \lambda_\eta}. \end{cases}$$

Działanie impulsu pionowego Pdt

$$(3.13) \quad \eta_I = \frac{Pdt}{\mu_\eta \omega_\eta} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_\eta t} \sin \omega_\eta t.$$

Działanie siły dowolnej $P(t)$:

$$(3.14) \quad \eta_P = \frac{1}{\mu_\eta \omega_\eta} \int_0^t P(\tau) e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_\eta (t-\tau)} \sin \omega_\eta (t-\tau) d\tau.$$

3.2. Wzory dla kierunku poziomego i obrotu. Drżania swobodne: częstotliwości podstawowe

$$(3.15) \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}, & E = \mu C_\varphi + I_0 C_\xi, \\ \omega_2^2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}, & F = C_\xi C_\varphi, \\ & D = \mu (I_0 - \mu a^2); \end{cases}$$

wzory dla drżania

$$(3.16) \quad \xi_s = B_{\varphi_1} S_1 e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} e^{i(\omega_1 t + \lambda_1)} + B_{\xi_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} e^{i(\omega_2 t + \lambda_2)},$$

$$(3.17) \quad \varphi_s = B_{\varphi_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} e^{i(\omega_1 t + \lambda_1)} + B_{\xi_2} S_2 e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} e^{i(\omega_2 t + \lambda_2)},$$

$$(3.18) \quad S_1 = \frac{a \left(\frac{\omega_1}{\omega_\xi} \right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_\xi} \right)^2}, \quad S_2 = \frac{\mu a \frac{\omega_2^2}{C_\varphi}}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_\varphi} \right)^2}.$$

Działanie obciążenia harmonicznego: oznaczenia

$$(3.19) \quad \begin{cases} k_{\xi} = 1 - \left(\frac{p}{\omega_{\xi}}\right)^2, & \mu_{\xi} = p^2 \frac{\mu a}{C_{\xi}}, \\ k_{\varphi} = 1 - \left(\frac{p}{\omega_{\varphi}}\right)^2, & \mu_{\varphi} = p^2 \frac{\mu a}{C_{\varphi}}, \end{cases}$$

$$(3.20) \quad k_{\xi\varphi} = k_{\xi} k_{\varphi} - \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 - \mu_{\xi} \mu_{\varphi}, \quad k_{\psi} = \frac{\psi}{2\pi} (k_{\xi} + k_{\varphi}), \quad T_k^2 = k_{\xi\varphi}^2 + k_{\psi}^2;$$

wzory dla drgań wymuszonych

$$(3.21) \quad \xi_w = a_{\xi} e^{i(pt + \varepsilon_{\xi})},$$

$$(3.22) \quad \varphi_w = a_{\varphi} e^{i(pt + \varepsilon_{\varphi})}.$$

Działanie pulsującego momentu skracającego Me^{ipt} :
drgania wymuszone

$$(3.23) \quad a_{\xi} = \frac{M}{C_{\varphi}} \frac{\mu_{\xi}}{T_k}, \quad \text{tg } \varepsilon_{\xi} = \frac{-k_{\psi}}{k_{\xi\varphi}},$$

$$(3.24) \quad a_{\varphi} = \frac{M}{C_{\varphi}} \frac{\sqrt{k_{\xi}^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{T_k}, \quad \text{tg } \varepsilon_{\varphi} = \frac{\frac{\psi}{2\pi} k_{\xi\varphi} - k_{\psi} k_{\xi}}{k_{\xi} k_{\xi\varphi} + \frac{\psi}{2\pi} k_{\psi}}$$

Działanie pulsującej siły poziomej He^{ipt} :
drgania wymuszone

$$(3.25) \quad a_{\xi} = \frac{H}{C_{\xi}} \frac{\sqrt{k_{\varphi}^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2}}{T_k}, \quad \text{tg } \varepsilon_{\xi} = \frac{\frac{\psi}{2\pi} k_{\xi\varphi} - k_{\psi} k_{\varphi}}{k_{\varphi} k_{\xi\varphi} + \frac{\psi}{2\pi} k_{\psi}}$$

$$(3.26) \quad a_{\varphi} = \frac{H}{C_{\xi}} \frac{\mu_{\varphi}}{T_k}, \quad \text{tg } \varepsilon_{\varphi} = \frac{-k_{\psi}}{k_{\xi\varphi}}.$$

Działanie obciążenia harmonicznego (drgania wymuszone i własne
z uwzględnieniem warunków początkowych):

warunki początkowe dla $t = 0$:

$$(3.27) \quad \xi = \xi_0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0;$$

wzory dla drgań

$$(3.28) \quad \xi = a_{\xi} \sin(pt + \varepsilon_{\xi}) + B_{\varphi_1} S_1 e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + \\ + B_{\xi_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin(\omega_2 t + \lambda_2),$$

$$(3.29) \quad \varphi = a_{\varphi} \sin(pt + \varepsilon_{\varphi}) + B_{\varphi_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + \\ + B_{\xi_2} S_2 e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin(\omega_2 t + \lambda_2),$$

wartości stałych

$$(3.30) \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} \lambda_1 = \frac{S_2 N_\xi - N_\varphi}{S_2 L_\xi - L_\varphi} \frac{1}{\omega_1} + \frac{\psi}{4\pi}, & B_{\varphi_1} = \frac{S_2 L_\xi - L_\varphi}{S_1 S_2 - 1} \frac{1}{\sin \lambda_1}, \\ \operatorname{ctg} \lambda_2 = \frac{S_1 N_\varphi - N_\xi}{S_1 L_\varphi - L_\xi} \frac{1}{\omega_2} + \frac{\psi}{4\pi}, & B_{\xi_2} = \frac{S_1 L_\varphi - L_\xi}{S_1 S_2 - 1} \frac{1}{\sin \lambda_2}; \end{cases} \quad (3.30)$$

oznaczenia

$$(3.31) \quad \begin{cases} L_\xi = \xi_0 - a_\xi \sin \varepsilon_\xi, & L_\varphi = \varphi_0 - a_\varphi \sin \varepsilon_\varphi, \\ N_\xi = \dot{\xi}_0 - a_\xi p \cos \varepsilon_\xi, & N_\varphi = \dot{\varphi}_0 - a_\varphi p \cos \varepsilon_\varphi. \end{cases} \quad (3.31)$$

Impuls skrzętny Mdt : wzory dla drgań

$$(3.32) \quad \xi_I = \frac{Mdt S_1}{I_0 S_1 S_2 - 1} \left(\frac{-1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin \omega_2 t \right),$$

$$(3.33) \quad \varphi_I = \frac{Mdt}{I_0 S_1 S_2 - 1} \left(\frac{-1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin \omega_1 t + \frac{S_1 S_2}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin \omega_2 t \right).$$

Impuls poziomy Hdt : wzory dla drgań

$$(3.34) \quad \xi_I = \frac{Hdt}{\mu S_1 S_2 - 1} \left(\frac{S_1 S_2}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin \omega_2 t \right),$$

$$(3.35) \quad \varphi_I = \frac{Hdt S_2}{\mu S_1 S_2 - 1} \left(\frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 t} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 t} \sin \omega_2 t \right).$$

Wpływ położenia punktu działania impulsów uwzględnia się przez wprowadzenie współczynnika $\sin(\pi \bar{z}/l)$, gdzie \bar{z} oznacza współrzędną punktu działania impulsu.

Dowolny moment skrzęcający $M(t)$: wzory dla drgań

$$(3.36) \quad \xi_M = \frac{1}{I_0} \frac{S_1}{S_1 S_2 - 1} \int_0^t M(\tau) \left[\frac{-1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 (t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau) + \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 (t-\tau)} \sin \omega_2 (t-\tau) \right] d\tau,$$

$$(3.37) \quad \varphi_M = \frac{1}{I_0} \frac{1}{S_1 S_2 - 1} \int_0^t M(\tau) \left[\frac{-1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1 (t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau) + \frac{S_1 S_2}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2 (t-\tau)} \sin \omega_2 (t-\tau) \right] d\tau.$$

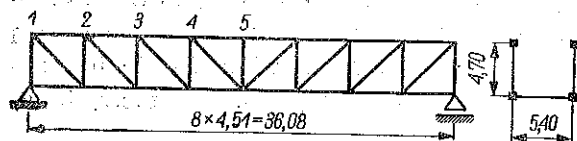
Dowolna siła pozioma $H(t)$ równania drgań

$$(3.39) \quad \xi_H = \frac{1}{\mu} \frac{1}{S_1 S_2 - 1} \int_0^t H(\tau) \left[\frac{S_1 S_2}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) - \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2(t-\tau)} \sin \omega_2(t-\tau) \right] d\tau,$$

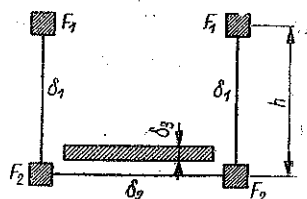
$$(3.40) \quad \varphi_H = \frac{1}{\mu} \frac{S_2}{S_1 S_2 - 1} \int_0^t H(\tau) \left[\frac{1}{\omega_1} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) - \frac{1}{\omega_2} e^{-\frac{\psi}{4\pi} \omega_2(t-\tau)} \sin \omega_2(t-\tau) \right] d\tau.$$

4. Przykład liczbowy

Przedstawione rozwiązania w p. 2 i 3 zastosowano do obliczenia drgań poziomo-skrętnych mostu kolejowego otwartego o rozpiętości 36,08 m. Schemat statyczny mostu i jego przekrój poprzeczny przedstawia rys. 7.



Rys. 7



Rys. 8

Na podstawie rysunków roboczych mostu obliczono pole powierzchni pasów i grubości zastępczych ścianek. Grubości te liczono w oparciu o dwie zasady: zachowania jednakowej masy i równości energii potencjalnej.

Ciężar jezdni $g = 1,0 \text{ t/mb}$, $\delta_3 = 2,36 \text{ cm}$

Tablica 1

Przedział	$F_1 [\text{cm}^2]$	$F_2 [\text{cm}^2]$	$\delta_1 [\text{cm}]$	$\delta_2 [\text{cm}]$
1-2	174	117,6	1,02	0,47
2-3	215	187	0,93	0,44
3-4	257	270	0,73	0,44
4-5	257	353	0,57	0,44

Oba sposoby obliczeń dały bardzo bliskie rezultaty, tak że przyjęte grubości z dostatecznym przybliżeniem spełniają oba warunki. Zestawienie wielkości charakteryzujących przekrój poprzeczny mostu w odpowiednich przedziałach podaje tablica 1, a oznaczenia widoczne są na rys. 8.

4.1. Obliczenie według p. 2. Zgodnie z założeniami przyjęto stały, średni przekrój poprzeczny mostu:

$$F_1 = F_2 = 230 \text{ cm}^2, \quad \delta_1 = 0,8 \text{ cm}, \quad \delta_2 = 0,45 \text{ cm}.$$

Obliczono częstości własne mostu oraz drgania spowodowane przez następujące obciążenia wymuszające: pulsującą siłę poziomą, przyłożoną na osi skręcania, i pulsujący moment skręcający. Drgania wyznaczono dla dwóch prędkości jazdy: $v = 8,5 \text{ m/sek} = 30,6 \text{ km/godz.}$ i dla prędkości krytycznej, tzn. gdy częstość pulsowania równa jest częstości podstawowej ω_1^0 (w celu liczbowego powiązania częstości pulsowania p z prędkością jazdy v przyjęto średnicę koła $D_0 = 1,5 \text{ m}$).

Przyjęto następujące warunki początkowe: dla $t = 0$

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

We wszystkich przypadkach ograniczono się do wyznaczenia pierwszego wyrazu szeregu Fouriera. Poniżej podano częstości własne oraz równania drgań poziomych i skrętnych dla poszczególnych przypadków oraz wykresy linii wpływowych amplitud drgań środka mostu, porównując je każdorazowo z wartościami statycznymi. Wartości linii wpływowych obliczono dla $z = (1/4)l, (1/2)l, (3/4)l$ i l . Równania drgań wyznaczono z dużą dokładnością. Przy obliczaniu amplitud stosowano odpowiednie uproszczenia. Amplitudy zostały obliczone przy użyciu jednostek: metr, tona, sekunda.

Częstości własne przy pominięciu wpływu sił normalnych

$$\omega_{\eta}^{0^2} = 2399,0 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right], \quad \omega_1^{0^2} = 863,53 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right], \quad \omega_2^{0^2} = 10528,8 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right];$$

częstość drgań poziomych (tylko)

$$\omega_{\xi}^2 = 3152,2 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right];$$

częstość drgań skrętnych (tylko)

$$\omega_{\varphi}^2 = 1068,7 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right].$$

Jeżeli przyjąć za siły normalne w pasach $N = 260 \text{ t}$ (jest to siła w pasie odpowiadająca naprężeniom $\sigma = 1000 \text{ kg/cm}^2$), to otrzymamy następujące wartości częstości własnych:

$$\omega_{\eta}^{0^2} = 2399,0 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right], \quad \omega_1^{0^2} = 805,6 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right], \quad \omega_2^{0^2} = 10670,0 \left[\frac{1}{\text{sek}^2} \right].$$

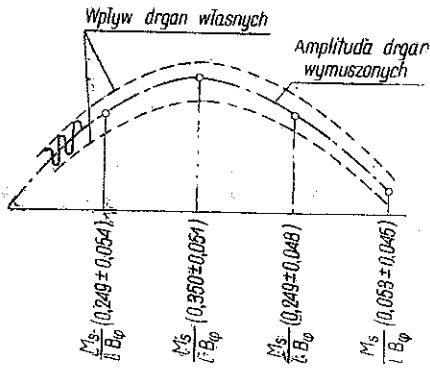
4.1.1. Działanie pulsującego momentu skręcającego o $M = M_s e^{ip t}$

$$v = 8,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{sek}} \right], \quad \psi = 0,0226,$$

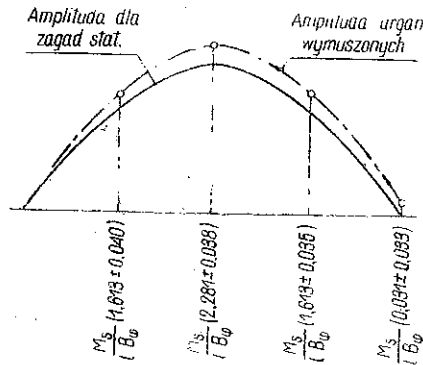
$$\xi = \frac{M_s}{l B_p} \sin \frac{\pi z}{l} \left\{ -0,0016 \sin(p + va)t - 0,2012 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,00115 \sin(p - va)t + 0,1478 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 0,0569 e^{-0,053 t} \sin(29,39 t - \frac{\pi}{2} - 0,009) + 0,0035 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right\},$$

$$\varphi = \frac{M_s}{l B_p} \sin \frac{\pi z}{l} \left\{ -0,0049 \sin(p + va)t - 1,1625 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,0045 \sin(p - va)t + 1,1198 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 0,0420 e^{-0,053 t} \sin(29,4 t - \frac{\pi}{2} - 0,009) + \right. \\ \left. + 0,0007 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right\}.$$

Przy obliczaniu amplitud pominięto wyrazy pierwszy, trzeci i szósty jako nie mające znaczenia.



Rys. 9



Rys. 10

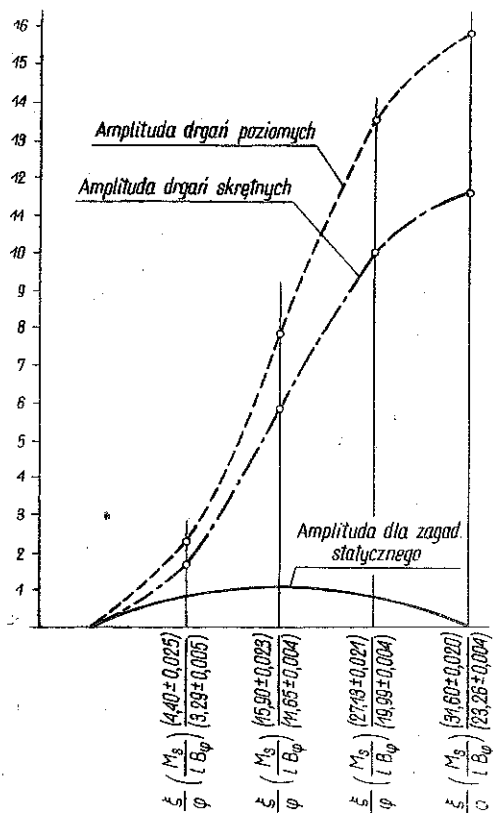
Na rysunku 9 przedstawiono linię wpływową amplitudy drgań poziomych środka mostu. Podano amplitudę drgań wymuszonych i oddzielnie wpływ drgań własnych. W ten sposób opisano też rzędne wykresu.

Rysunek 10 przedstawia wykres linii wpływowej amplitudy drgań skrętnych środka mostu. Wykreślono amplitudę drgań wymuszonych i amplitudę dla zagadnienia statycznego. Wpływ drgań własnych podano tylko w opisie rzędnych (ze względu na bardzo małe wartości).

Prędkość krytyczna (rezonans)

$$v = 22,04 \frac{\text{m}}{\text{sek}} = 79,5 \frac{\text{km}}{\text{godz}}, \quad p = \omega_1^0 = 29,4 \frac{1}{\text{sek}}, \quad \psi = 0,0226,$$

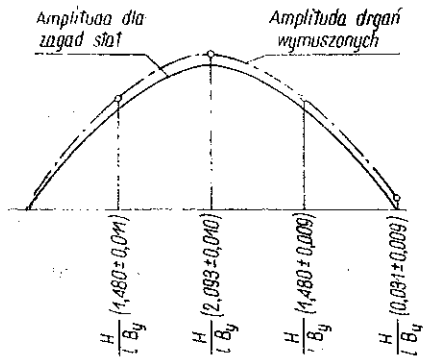
$$\xi = \frac{M_s}{lB_\varphi} \sin \frac{\pi z}{l} \left[-0,225 \sin(p + va)t + 9,446 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,220 \sin(p - va)t + 7,028 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 16,447 e^{-0,053 t} \sin\left(29,4 t + \frac{\pi}{2} - 0,001\right) + \right. \\ \left. + 0,027 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right],$$



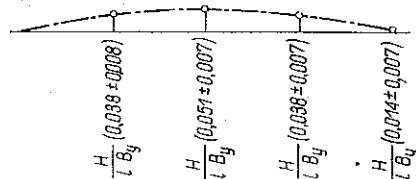
Rys. 11

$$\varphi = \frac{M_s}{lB_\varphi} \sin \frac{\pi z}{l} \left[-0,171 \sin(p + va)t + 5,872 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,167 \sin(p - va)t + 6,265 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 12,142 e^{-0,053 t} \sin\left(29,4 t + \frac{\pi}{2} - 0,001\right) + \right. \\ \left. + 0,005 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right].$$

Rysunek 11 przedstawia wykresy linii wpływowych amplitud drgań poziomych i skrętnych środka mostu w porównaniu z linią wpływową amplitudy dla zagadnienia statycznego. Amplitudę drgań skrętnych podano w postaci wychylenia poziomego punktu znajdującego się w odległości 1 m od osi skręcania. Jako jednostkę przyjęto maksymalną amplitudę obrotu (sprowadzoną do wychylenia poziomego) przy statycznym działaniu momentu skręcającego. W tym przypadku nie można oddzielać od siebie drgań wymuszonych i własnych. W opisie rzędnych podano wpływ drgań własnych drugiej podstawowej częstotliwości.



Rys. 12



Rys. 13

4.1.2. Działanie pulsującej siły poziomej

$$H_x = H e^{ipt}, \quad v = 3,5 \frac{\text{m}}{\text{sek}}, \quad \psi = 0,0226,$$

$$\xi = \frac{H}{lB_y} \sin \frac{\pi z}{l} \left[-0,002 \sin(p + va)t - 1,053 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,002 \sin(p - va)t + 1,100 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 0,011 e^{-0,053 t} \sin\left(29,4 t - \frac{\pi}{2} - 0,010\right) - \right. \\ \left. - 0,003 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right],$$

$$\varphi = \frac{H}{lB_y} \sin \frac{\pi z}{l} \left[-0,0002 \sin(p + va)t - 0,029 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,0002 \sin(p - va)t + 0,021 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 0,008 e^{-0,053 t} \sin\left(29,4 t - \frac{\pi}{2} - 0,010\right) + \right. \\ \left. + 0,0005 e^{-0,185 t} \sin(102,6 t + \lambda_2) \right].$$

Na rysunkach 12 i 13 podano wykresy linii wpływowych amplitud drgań środka mostu. Rysunek 12 przedstawia linię wpływową amplitudy drgań poziomych, rys. 13 linię wpływową amplitudy drgań skrętnych. Za-

sady sporządzania rysunków są takie same jak rys. 9 i 10, jedynie na rys. 12 nie przedstawiono graficznie wpływu drgań własnych jako bardzo małych.

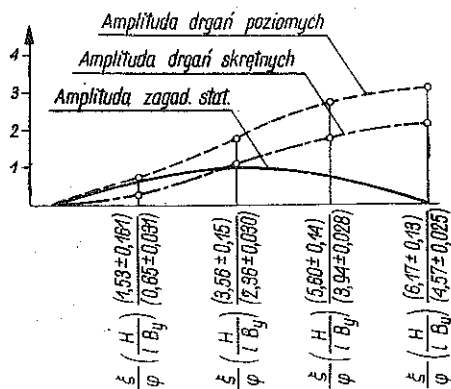
Prędkość krytyczna (rezonans)

$$v = 22,04 \frac{\text{m}}{\text{sek}}, \quad p = \omega_1^0 = 29,4 \frac{1}{\text{sek}}, \quad \psi = 0,0226,$$

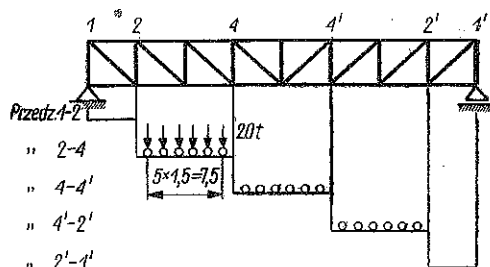
$$\xi = \frac{H}{lB_y} \left[-0,048 \sin(p + va)t + 0,742 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,047 \sin(p - va)t + 2,448 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 3,261 e^{-0,053t} \sin\left(29,4t + \frac{\pi}{2} - 0,001\right) + \right. \\ \left. + 0,174 e^{-0,185t} \sin(102,6t + \lambda_2) \right],$$

$$\varphi = \frac{H}{lB_y} \left[-0,032 \sin(p + va)t + 1,361 \cos(p + va)t + \right. \\ \left. + 0,032 \sin(p - va)t + 1,013 \cos(p - va)t - \right. \\ \left. - 2,407 e^{-0,053t} \sin\left(29,4t + \frac{\pi}{2} - 0,001\right) - \right. \\ \left. - 0,034 e^{-0,185t} \sin(102,6t + \lambda_2) \right].$$

Na rysunku 14 podano wykresy amplitud drgań poziomych i skrętnych środka mostu według zasad przyjętych na rys. 11.



Rys. 14



Rys. 15

4.2. Obliczenie drgań mostu za pomocą modelu zastępczego. Charakterystyki modelu zastępczego obliczono zastępując konstrukcję mostu profilem cienkościennym o zmiennym przedziałami przekroju poprzecznym według danych tablicy 1. Ponieważ z obliczeń w p. 4.1 wynikało, że dla rozpatrywanego mostu bardziej niebezpieczne jest działanie momentu skręcającego, obliczenia wykonano tylko dla tego przypadku. Rozpatrzono

również tylko przebieg prędkości krytycznej, tzn. prędkości, która tworzy rezonans z najmniejszą częstością własną poziomo-skrętną. Jako obciążenie przyjęto lokomotywę o ciężarze 120 t. Przyjęto ustawienia lokomotywy jak na rys. 15, co jest jednoznaczne z podzieleniem czasu przebiegu lokomotywy na 5 przedziałów. Założono poza tym, że w drganiach konstrukcji mostowej bierze udział 80% masy lokomotywy i że środek masy lokomotywy znajduje się na wysokości 1,20 m od dolnych stężeń wiatrowych. Ponieważ tłumienie nie wpływa na częstość drgań własnych, wystarczy rozpatrzeć równania (2.21) pomijając wpływ sił normalnych i tłumienia. Pominięto również wyraz $GI_d(\partial^2\varphi/\partial z^2)$, który nie ma znaczenia. Otrzymano wówczas ³

$$EI_y(z) \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \mu(z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu(z) a(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$EI_\omega(z) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + \mu(z) a(z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + I_0^\mu(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Są to równania różniczkowe cząstkowe o zmiennych przedziałami współczynnikach. Z równań tych wyznaczono częstości własne dla poszczególnych przedziałów stosując metodę Galerkin'a. Rozwiązania przyjęto w formie funkcji

$$\xi \approx \xi_0 \sin \omega t \sin \frac{\pi z}{l}, \quad \varphi \approx \varphi_0 \sin \omega t \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Metodę Galerkin'a zastosowano dla obu równań niezależnie; otrzymano wówczas częstości: poziomą ω_ξ i skrętną ω_φ oraz do układu otrzymując w tym przypadku częstości podstawowe ω_1 i ω_2 . Odległość a dobierano tak, aby obliczone za pomocą ω_ξ , ω_φ i a częstości podstawowe pokrywały się z obliczonymi poprzednio dla układu równań. Stałe sprężyn C_ξ i C_φ wyznaczono jak dla pręta o zmiennym przedziałami momencie bezwładności. W tabelicy 2 podano zestawienie charakterystyk modelu zastępczego w poszczególnych przedziałach.

Tablica 2

Przedział	C_ξ [t/m]	C_φ [t]	ω_ξ^2 [1/sek ²]	ω_φ^2 [1/sek ²]	μ [tsek ² /m ²]	I_0 [tsek ²]	a [m]
1-2	$42,8 EI_y^0$	$42,2 EI_\omega^0$	3280	840	5,19	107,5	3,58
2-4	l^3	l^3	1560	473	10,90	191	3,58
4-4'	$= 1,7 \cdot 10^4$	$= 9,05 \cdot 10^4$	1290	497	13,20	182	3,43

³ Postać równań jest słuszna ze względu na «schodkową» zmienność momentów bezwładności. Ogólnie mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EI_y(z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \quad \text{itd.}$$

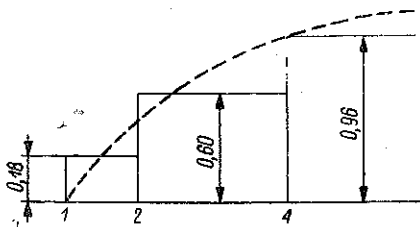
Częstości własne poziomo-skrajne dla poszczególnych przedziałów są następujące:

przedział 1-2	$\omega_1^2 = 714,4 [1/\text{sek}^2]$,	$\omega_2^2 = 10,083 [1/\text{sek}^2]$,
przedział 2-4	$\omega_1^2 = 382,8 [1/\text{sek}^2]$,	$\omega_2^2 = 7,189 [1/\text{sek}^2]$,
przedział 4-4'	$\omega_1^2 = 370 [1/\text{sek}^2]$,	$\omega_2^2 = 11,797 [1/\text{sek}^2]$.

Tablica 3

z	ξ	φ
0,0625 l	0,218 ± 0,029	0,328 ± 0,0056
0,125 l	0,349 ± 0,028	0,524 ± 0,0055
0,25 l	0,374 ± 0,138	0,839 ± 0,030
0,375 l	1,96 ± 0,130	1,90 ± 0,030
0,50 l	3,58 ± 0,130	3,24 ± 0,030
0,625 l	4,05 ± 0,84	2,91 ± 0,215
0,75 l	6,76 ± 0,78	4,87 ± 0,20
0,875 l	9,34 ± 0,74	6,83 ± 0,19
0,9375 l	9,14 ± 1,65	7,42 ± 0,36
1,0 l	10,42 ± 1,60	8,68 ± 0,34
	11,95 ± 1,51	10,10 ± 0,34
	8,16 ± 0,605	7,98 ± 0,11
	8,28 ± 0,59	8,31 ± 0,10
	8,32 ± 0,57	8,46 ± 0,10

Jest rzeczą widoczną, że częstości kształtują się niekorzystnie, gdyż częstość podstawowa przedziału 2-4 niewiele różni się od częstości przedziału 4-4'. Prędkość lokomotywy przyjęto jako krytyczną dla przedziału 4-4'. Amplitudy momentu wymuszającego w poszczególnych przedziałach przyjęto jako średnie arytmetyczne wartości funkcji $\sin(\pi/zl)$ dla początków i końców poszczególnych przedziałów. Uwidoczniono to na rys. 16. Obliczono równania drgań dla poszczególnych przedziałów według wzorów (3.15) - (3.31) i uwzględniono odpowiednie warunki początkowe. Z równań drgań obliczono amplitudy (po trzy wartości dla każdego przedziału) i na tej podstawie sporządzono wykresy linii wpływowych



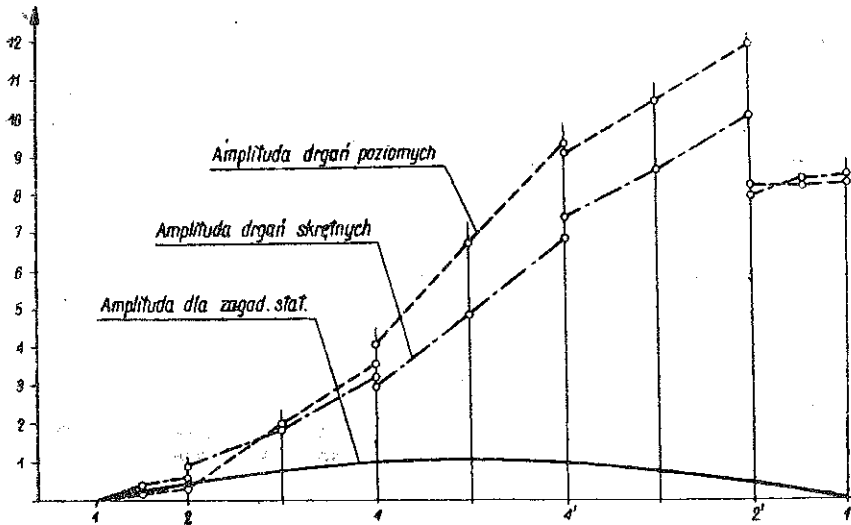
Rys. 16

dla poszczególnych przedziałów według wzorów (3.15) - (3.31) i uwzględniono odpowiednie warunki początkowe. Z równań drgań obliczono amplitudy (po trzy wartości dla każdego przedziału) i na tej podstawie sporządzono wykresy linii wpływowych

amplitud drgań poziomych i skrętnych środka mostu (rys. 17). Dla porównania wykreślono linię wpływową amplitudy obrotu środka mostu przy statycznym działaniu momentu skręcającego. Wartości liczbowe podano w tablicy 3 w takiej formie, że uwidocznił się wpływ drugiej podstawowej częstości drgań własnych. Dla wszystkich wartości tablicy 3 stosuje się czynnik M_s/lB_φ . Dalsze założenia są takie same jak w wykresach na rys. 11.

4.3. Wnioski. Przytoczone wyniki obliczeń drgań poziomo-skrętnych mostu otwartego są podstawą do następujących wniosków:

a) *Wpływ masy pojazdu na drgania mostu.* Wpływ masy pojazdu na drgania poziomo-skrętne ma podobny charakter jak w przypadku drgań pionowych. W porównaniu z rozwiązaniem dotyczącym pominięcia wpływu masy pojazdu na drgania otrzymujemy przy przebiegu krytycznym



Rys. 17

zmniejszenie amplitud oraz zmianę w rozkładzie wartości maksymalnych amplitud. Dla drgań środka mostu nie otrzymujemy maksymalnych wartości w chwili opuszczenia mostu przez pojazd. Zmiana częstości własnych mostu wskutek przemieszczania się masy pojazdu może mieć w przypadku drgań poziomo-skrętnych charakter bardziej niekorzystny dla mostu niż dla drgań pionowych. W rozważanym przykładzie otrzymano bardzo małe zmiany częstości własnych poziomo-skrętnych przy poruszaniu się lokomotywy w części środkowej mostu. Wpłynęło to na nieznaczne zmniejszenie amplitud drgań w stosunku do rozwiązań z pominięciem masy pojazdu.

b) *Współdziałanie drgań poziomo-skrętnych.* Przy prędkościach odległych od prędkości krytycznej główną rolę odgrywają drgania wymuszone, wywołane danym typem obciążenia wymuszającego. Przy działaniu momentu skręcającego wystarczy rozważyć tylko drgania wymuszone skrętne i podobnie przy działaniu siły poziomej w osi skręcania. Gdy prędkość zbliża się do krytycznej, nabierają znaczenia drgania własne układu, a tym samym występują przy dowolnych typach obciążeń wymuszających drgania poziome i skrętne w istotnych wielkościach.

c) *Charakterystyka drgań mostu otwartego.* Ponieważ most otwarty ma mniejszą sztywność skrętną niż sztywność poziomą, drgania skrętne są większe od poziomych.

Z rozwiązań pomijających wpływ masy pojazdu na drgania wynika, że zarówno w przypadku działania momentu skręcającego, jak również siły poziomej na osi skręcania przy przebiegu pojazdu z prędkością krytyczną na amplitudę wychylenia poziomego środka mostu w około 70% wpływają drgania skrętne i tylko w około 30% drgania poziome (dotyczy to maksymalnych wartości amplitudy).

Podobne wyniki otrzymano z rozwiązań opartych na zastosowaniu układu zastępczego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] B. Brückman, *Brückenschwingungen unter Verkehrslasten*, 5 Kongr. I. V. f. B. 1955.
- [2] J. M. Briggs, A. M. Asce, Herbert S. Suer, J. M. Asce and Jacobus M. Lauw, *The Vibration of Simple Span Highway Bridges*, J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engin., 2, 83 (1957).
- [3] R. Bernhard, *Beitrag zur Brückenmesstechnik*, Bautechn. 13 (1928).
- [4] A. Bühler, *Die Entwicklung der Messung dynamischer Wirkungen bei Brücken*, Bautechn. 97 (1927).
- [5] R. Bernhard, *Über Beanspruchungen englischer Eisenbahnbrücken*, Stahlbau 11 (1929).
- [6] A. Hillerberg, *Über die dynamischen Beanspruchungen von Trägern infolge beweglicher Lasten*, 3 Kongr. I. V. f. B. M., 1948.
- [7] V. Kolousek, *Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen*, Lipsk 1953.
- [8] E. Marquard, *Zur Berechnung von Brückenschwingungen unter rollenden Lasten*, Ingen. Arch. 1955.
- [9] J. Naleszkiewicz, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 5 (1953).
- [10] Г. С. Писаренко, *Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале*, Kijów 1955.
- [11] J. Rutecki, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.
- [12] E. J. Ruble, M. Asce, *Impact in Railroad Bridges*, Proc. Amer. Soc. Civ. Engin., Paper 736, 1955.
- [13] Skudrzyk, *Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper*, Österreich. Ingen. Archiv, Wiedeń 1949.

[14] Е. С. Сорокин, *Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания. Исследования по динамике сооружений*, Moskwa-Leningrad 1951.

[15] N. Streletzky, *Grundzüge für ein Verfahren zur dynamischen Untersuchung von Brücken*, Bautechn. 41 (1927).

[16] F. Stüssi, *Trägerschwingungen unter bewegter Last*, Abhandlungen I. V. B. H., 1953.

Резюме

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ МОСТОВ

Работа является попыткой теоретического исследования пространственных колебаний однопролетных мостов. В качестве нагрузки моста принимаются обобщенные силы, движущиеся вдоль моста с постоянной скоростью, а именно пульсирующую вертикальную силу, пульсирующую горизонтальную силу, пульсирующий крутящий момент, вертикальный импульс, горизонтальный импульс и крутильный импульс. Обсуждается также действие произвольно изменяющейся во времени горизонтальной силы, вертикальной силы и крутящего момента.

В п. 2 принимая ряд упрощающих предположений, конструкция моста заменяется тонкостенным стержнем. Для тонкостенного стержня установлены уравнения колебаний не принимая во внимание влияния массы подвижной нагрузки. Решения даются при использовании рядов Фурье. Ввиду небольшой длительности проезда подвижной нагрузки через мост существовала необходимость общего обсуждения вынужденных и собственных колебаний.

В п. 3 вводится приведенная модель колебаний моста, с помощью которой даны приближенные уравнения колебаний моста с учетом массы подвижной нагрузки. Рассматриваются колебания открытых и закрытых мостов. В обоих пунктах затухание принимается согласно гипотезе Сорокина.

Проводится пример расчета горизонтально-крутильных колебаний открытого моста, пролет которого равняется 36,08 м, что дало возможность сделать несколько качественных заключений.

Summary

THREE-DIMENSIONAL VIBRATIONS OF ONE-SPAN BRIDGES

This paper presents a tentative theoretical examination of space vibrations of single span bridges. The following generalized forces moving with constant velocity along the bridge are assumed to constitute the load: pulsating vertical force, pulsating horizontal force, pulsating torque,

vertical impulse, horizontal impulse and torque impulse. The action of a vertical and horizontal force and a torque varying in time in an arbitrary manner is also considered.

In Sec. 2 the structure of the bridge is replaced, with a number of simplifying assumptions, with a thin-walled bar. For the substitute thin-walled bar differential equations of motion are established, disregarding the influence of the mass of the vehicle on vibration. Solutions are obtained by means of F o u r i e r series. Bearing in mind that the passage of a vehicle lasts for a very short time it was necessary to consider simultaneous forced and free vibration.

In the Sec. 3 a substitute model of bridge vibration is introduced for the purpose of establishing approximate equations of bridge vibration taking the mass of the vehicle and the variability of cross-section into consideration. Vibration of open and closed bridges are considered. In birth sections the damping is assumed according to S o r o k i n's hypothesis.

As an example a calculation of horizontal torsional vibration is carried out for an open bridge 36,08 m in span. This enabled the obtainment of several conclusions of qualitative character.

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 lipca 1958 r.