FRANCISZEK SZELĄGOWSKI

STAN NAPIĘCIA TARCZY KOŁOWEJ OBCIĄŻONEJ WEWNĘTRZNYMI SIŁAMI SKUPIONYMI

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CIX

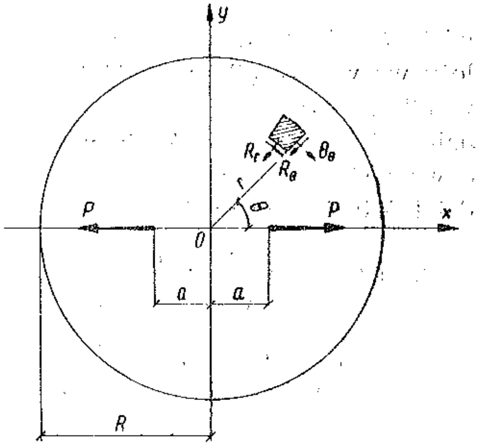
Określimy stan napięcia tarczy kołowej rozciąganej od środka tej tarczy dwiema wewnętrznymi równoodległymi siłami skupionymi (rys. 1).

Na podstawie pracy [1] funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ dla nieograniczonej tarczy rozciąganej dwiema wewnętrznymi siłami skupionymi są następujące:

$$\Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right),$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a}\right),$$

$$F(z) = \frac{iP}{\pi(1+k)}\left\{-a\left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2}\right] + k\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)\right\},$$



Rys. 1

gdzie $k = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$.

Na obwodzie koła o promieniu R omawianej tarczy nieograniczonej będą panowały naprężenia R_Θ i R_R zgodnie ze wzorem

$$R_\Theta + iR_R = -\frac{iz}{2}\,\frac{P}{\pi(1+k)}\left[\frac{1}{(z+a)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right] + \frac{z^2}{2R^2}\,\frac{iP}{\pi(1+k)}\times$$
$$\times\left\{-a\left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2}\right] + k\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{iP}{2\pi(1+k)}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} + \frac{1}{z_1-a} - \frac{1}{z_1+a}\right). \tag{1}$$

Jeżeli na obwodzie tego koła przyłożymy naprężenia R_Θ i R_R określone wzorem (1), lecz odwrotnego znaku, to w wyniku działań otrzymamy tarczę kołową rozciąganą dwiema wewnętrznymi siłami skupionymi.

Wzór (1) po zmianie znaku na przeciwny przedstawia się w sposób następujący:

$$R_\Theta + iR_R = \frac{iP}{2\pi(1+k)}\left\{\frac{z}{(z+a)^2} - \frac{z}{(z-a)^2} + \frac{z^2}{R^2}\left[\frac{a}{(z+a)^2} + \frac{a}{(z-a)^2} + \right.\right. \tag{2}$$

$$\left.\left. + \frac{k}{z+a} - \frac{k}{z-a}\right] - \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a} - \frac{1}{z_1-a} + \frac{1}{z_1+a}\right\}.$$

Ponieważ odpowiadająca temu obciążeniu funkcja $\Phi(z)$ jest określona w myśl pracy [2] wzorem

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\oint (R_R + iR_\Theta)\,\frac{t+z}{t(t-z)}\,dt + C, \tag{3}$$

gdzie $t = Re^{i\Theta}$, więc dla otrzymania funkcji podcałkowej $R_R + iR_\Theta$ należy we wzorze (2) zamienić i na $-i$, po czym otrzymany w ten sposób wynik trzeba pomnożyć przez i. Ponadto za pomocą związku $zz_1 = R^2$ należy jeszcze wykonać odpowiednie przekształcenia, ażeby funkcja $\Phi(z)$ dawała skończone wartości naprężeń. Po wykonaniu wyżej omówionych działań będziemy mieli

$$R_R + iR_\Theta = \frac{P}{2\pi(1+k)}\left\{\frac{R^2 z}{(R^2+az)^2} - \frac{R^2 z}{(R^2-az)^2} + R^2\left[\frac{a}{(R^2+az)^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{a}{(R^2-az)^2} + \frac{k}{z(R^2+az)} - \frac{k}{z(R^2-az)}\right] - \frac{z}{R^2-az} + \frac{z}{R^2+az} -$$

$$\left. - \frac{z_1}{R^2-az_1} + \frac{z_1}{R^2+az_1}\right\}.$$

Teraz zmieniając zmienną z na zmienną t, zaś zmienną z_1 na zmienną t_1 i uwzględniając tę funkcję we wzorze (3), otrzymamy po scałkowaniu

$$\Phi(z) = \frac{2P}{\pi(1+k)}\left\{R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2} - \frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right] + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \frac{R^2 k + z^2}{z}\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right)\right\} + C_1.$$

Funkcję $F(z)$ zgodnie z pracą [2] otrzymamy ze wzoru

$$F(z) = \frac{R^2}{2z^2}\left[\frac{1}{\pi i}\oint (R_\Theta + iR_R)\,\frac{t+z}{t(t-z)}\,dt + iz\Phi'(z) - i\Phi(z)\right]. \tag{5}$$

Występująca w tym wzorze pod znakiem całki funkcja $R_\Theta + iR_R$ powstaje ze wzoru (2) drogą przekształcenia za pomocą związku $zz_1 = R^2$, co jest uzasadnione koniecznością otrzymania skończonych wartości naprężeń. Zatem po przekształceniu mamy

$$R_\Theta + iR_R = \frac{iP}{2\pi(1+k)}\left\{\frac{R^2 z_1}{(R^2+az_1)^2} - \frac{R^2 z_1}{(R^2-az_1)^2} + R^2\left[\frac{a}{(R^2+az_1)^2} + \frac{a}{(R^2-az_1)^2} - \frac{k}{R^2}\left(\frac{a}{R^2+az_1} + \frac{a}{R^2-az_1}\right)\right] - \frac{z_1}{R^2-az_1} + \frac{z_1}{R^2+az_1} - \frac{z}{R^2-az} + \frac{z}{R^2+az}\right\}.$$

Zmieniając zmienną z na zmienną t, zaś zmienną z_1 na zmienną t_1 po scałkowaniu otrzymamy

$$\frac{1}{\pi i}\oint (R_\Theta + iR_R)\frac{t+z}{t(t-z)}\,dt = \frac{2Pi}{\pi(1+k)}\left(\frac{z}{R^2+az} - \frac{z}{R^2-az}\right) + iC_2.$$

Uwzględniając powyższy wynik we wzorze (4) oraz wprowadzając jednocześnie do tego wzoru wartość funkcji $\Phi(z)$ i jej pochodnej znajdziemy

$$F(z) = \frac{R^2}{2z^2}\,\frac{2Pi}{\pi(1+k)}\left\{\frac{z}{R^2+az} - \frac{z}{R^2-az} - R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2} - \frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right] - \frac{R^2k+z^2}{z}\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right) + R^2 z\left[\frac{R^2-az-2a^2}{(R^2+az)^3} - \frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3}\right] + R^2\frac{z^2-R^2k}{z}\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right) - aR^2(R^2k+z^2)\left[\frac{1}{(R^2+az)^2} + \frac{1}{(R^2-az)^2}\right]\right\} + \frac{R^2}{2z^2}\,i(C_2 - C_1). \tag{6}$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków, że dla $r = R$ wartości naprężeń $R_\Theta + iR_R$, określonych ze wzoru

$$R_\Theta + iR_R = -\frac{i}{4}z\Phi'(z) + \frac{z^2}{2R^2}F(z) + \frac{i}{4}\left[\Phi(z) + \Phi_1(z_1)\right],$$

powinny być równe naprężeniom (2) oraz że naprężenia dla $r = 0$ powinny mieć wartości skończone. Przy tym występujące w tym wzorze funkcje $\Phi(z)$ i $F(z)$ wyrażają się wzorami (4) i (6); z pierwszego warunku mamy $C_1 + C_2 = 0$, zaś z drugiego warunku

$$C_2 - C_1 = \frac{4Pa}{\pi R^2}\,\frac{1-k}{1+k}.$$

Z powyższego układu dwóch równań otrzymujemy

$$C_1 = -\frac{2Pa}{\pi R^2}\,\frac{1-k}{1+k}, \qquad C_2 = \frac{2Pa}{\pi R^2}\,\frac{1-k}{1+k}.$$

Zatem funkcje $\Phi(z)$, $\Phi_1(z_1)$ i $F(z)$ określające stan napięcia tarczy kołowej rozciąganej dwiema wewnętrznymi siłami skupionymi, równoodległymi od środka tej tarczy, będą na podstawie prawa niezależności działania sił i odkształceń równe sumie funkcji określających dwa omówione wyżej stany obciążenia tarczy. Wobec powyższego znajdziemy

$$\Phi(z)=\frac{2P}{\pi(1+k)}\left\{\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}+R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2}-\frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{R^2k+z^2}{z}\left(\frac{1}{R^2+az}-\frac{1}{R^2-az}\right)-\frac{a(1-k)}{R^2}\right\},$$

$$\Phi_1(z_1)=\frac{2P}{\pi(1+k)}\left\{\frac{1}{z_1-a}-\frac{1}{z_1+a}+R^2\left[\frac{z_1+a}{(R^2+az_1)^2}-\frac{z_1-a}{(R^2-az_1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{R^2k+z_1^2}{z_1}\left(\frac{1}{R^2+az_1}-\frac{1}{R^2-az_1}\right)-\frac{a(1-k)}{R^2}\right\},$$

$$F(z)=\frac{iP}{\pi(1+k)}\left\{-a\left[\frac{1}{(z+a)^2}+\frac{1}{(z-a)^2}\right]+k\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}\right)\right\}+$$
$$+\frac{iP}{\pi(1+k)}\frac{R^2}{2z^2}\left\{\frac{4a(1-k)}{R^2}-2R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2}-\frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right]-\right.$$
$$-\frac{4R^2k}{z}\left(\frac{1}{R^2+az}-\frac{1}{R^2-az}\right)+2R^2z\left[\frac{R^2-az-2a^2}{(R^2+az)^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3}\right]+2z\left(\frac{1}{R^2+az}-\frac{1}{R^2-az}\right)-$$
$$\left.-2a(R^2k+z^2)\left[\frac{1}{(R^2+az)^2}+\frac{1}{(R^2-az)^2}\right]\right\}.$$

Wartości odpowiednich naprężeń R_Θ, R_r i Θ_Θ można będzie określić z równań następujących:

$$R_r+\Theta_\Theta=\frac{1}{2}\left[\Phi(z)+\Phi_1(z_1)\right]=\frac{P}{\pi(1+k)}\left\{\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}+\right.$$
$$+R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2}-\frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right]+\frac{R^2k+z^2}{z}\left(\frac{1}{R^2+az}-\frac{1}{R^2-az}\right)+$$
$$+\frac{1}{z_1-a}-\frac{1}{z_1+a}+R^2\left[\frac{z_1+a}{(R^2+az_1)^2}-\frac{z_1-a}{(R^2-az_1)^2}\right]+$$
$$\left.+\frac{R^2k+z_1^2}{z_1}\left(\frac{1}{R^2+az_1}-\frac{1}{R^2-az_1}\right)-\frac{2a(1-k)}{R^2}\right\},$$

$$2R_\Theta + i(R_r - \Theta_\Theta) = -\frac{i}{2} z\Phi'(z) + \frac{z^2}{r^2} F(z) = -\frac{iP}{\pi(1+k)} z \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(z+a)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} + R^2\left[\frac{R^2 - az - 2a^2}{(R^2+az)^3} - \frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{z^2 - R^2k}{z^2}\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right) - \frac{(R^2k+z^2)a}{z}\left[\frac{1}{(R^2+az)^2} + \frac{1}{(R^2-az)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{iP}{\pi(1+k)}\frac{z^2}{r^2}\left\{-a\left[\frac{1}{(z+a)^2} + \frac{1}{(z-a)^2}\right] + k\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{iP}{\pi(1+k)}\frac{R^2}{2r^2}\left\{\frac{4a(1-k)}{R^2} - 2R^2\left[\frac{z+a}{(R^2+az)^2} - \frac{z-a}{(R^2-az)^2}\right] - \right.$$

$$- 4\frac{R^2k}{z}\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right) + 2R^2z\left[\frac{R^2-az-2a^2}{(R^2+az)^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{R^2+az-2a^2}{(R^2-az)^3}\right] + 2z\left(\frac{1}{R^2+az} - \frac{1}{R^2-az}\right] -$$

$$\left. - 2a(R^2k+z^2)\left[\frac{1}{(R^2+az)^2} + \frac{1}{(R^2-az)^2}\right]\right\}.$$

Po rozwiązaniu tych równań znajdziemy

$$R_\Theta = -\frac{P}{2\pi(1+k)}\left\{(r^2-a^2)\,r\sin\Theta\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right) + \right.$$

$$+ R^2r\left[\left(\left[(R^2-2a^2)(3a^2r^2 - R^4)R^2 + (3R^4 - a^2r^2)a^2r^2\right]\sin\Theta + \right.\right.$$

$$\left. + \left[(R^2-2a^2)a^2r^2 + R^6\right]ar\sin 2\Theta\right) : M^3 -$$

$$- \left(\left[(R^2-2a^2)(3a^2r^2 - R^4)R^2 + (3R^4 - a^2r^2)a^2r^2\right]\sin\Theta - \right.$$

$$\left.\left. - \left[(R^2-2a^2)a^2r^2 + R^6\right]ar\sin 2\Theta\right) : N^3\right] - rR^2\sin\Theta\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{N}\right) -$$

$$- \frac{R^2k}{r}\left(\frac{R^2\sin\Theta + ar\sin 2\Theta}{M} - \frac{R^2\sin\Theta - ar\sin 2\Theta}{N}\right) -$$

$$- R^2a^2rk\left(\frac{2R^2\sin\Theta + ar\sin 2\Theta}{M^2} - \frac{2R^2\sin\Theta - ar\sin 2\Theta}{N^2}\right) +$$

$$+ ar^2R^2\left(\frac{R^2\sin 2\Theta + 2ar\sin\Theta}{M^2} + \frac{R^2\sin 2\Theta - 2ar\sin\Theta}{N^2}\right) +$$

$$+ a^2\left(\frac{2r\sin\Theta - a\sin 2\Theta}{B^2} - \frac{2r\sin\Theta + a\sin 2\Theta}{A^2}\right) -$$

$$\left. - k\left(\frac{r\sin\Theta + a\sin 2\Theta}{A} - \frac{r\sin\Theta - a\sin 2\Theta}{B}\right)\right\} +$$

$$+\frac{P}{4\pi(1+k)}\frac{R^2}{r^2}\left\{2R^2r\left[\frac{(2a^2R^2+a^2r^2-R^4)\sin\Theta-a^3r\sin 2\Theta}{N^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(2a^2R^2+a^2r^2-R^4)\sin\Theta+a^3r\sin 2\Theta}{M^2}\right]-$$

$$-\frac{4R^2k}{r}\left(\frac{R^2\sin\Theta+ar\sin 2\Theta}{M}-\frac{R^2\sin\Theta-ar\sin 2\Theta}{N}\right)+$$

$$+2rR^2\sin\Theta\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{M}\right)-$$

$$-2arR^2\left[\frac{2a(R^2k-r^2)\sin\Theta+r(a^2k-R^2)\sin 2\Theta}{M^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2a(R^2k-r^2)\sin\Theta-r(a^2k-R^2)\sin 2\Theta}{N^2}\right]+$$

$$+2R^2r\left[\left([(R^2-2a^2)(3a^2r^2-R^4)R^2+(3R^4-a^2r^2)a^2r^2]\sin\Theta+\right.\right.$$

$$\left.+[(R^2-2a^2)a^2r^2+R^6]\,ar\sin 2\Theta\right):M^3-$$

$$-\left([(R^2-2a^2)(3a^2r^2-R^4)R^2+(3R^4-a^2r^2)a^2r^2]\sin\Theta-\right.$$

$$\left.\left.\left.-[(R^2-2a^2)a^2r^2+R^6]\,ar\sin 2\Theta\right):N^3\right]\right\},$$

$$R_r=\frac{P}{\pi(1+k)}\left\{\frac{r\cos\Theta-a}{B}-\frac{r\cos\Theta+a}{A}+\right.$$

$$+R^2\left[\frac{aR^2(2r^2+R^2)+(R^4+a^2r^2+2R^2a^2)r\cos\Theta+a^3r^2\cos 2\Theta}{M^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{-aR^2(2r^2+R^2)+(R^4+a^2r^2+2R^2a^2)r\cos\Theta-a^3r^2\cos 2\Theta}{N^2}\right]+$$

$$+\frac{R^2k}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar\cos 2\Theta}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar\cos 2\Theta}{N}\right)+$$

$$\left.+r\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar}{N}\right)-\frac{a(1-k)}{R^2}\right\}-$$

$$-\frac{P}{2\pi(1+k)}\left\{r\left[\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta+2ar}{A^2}-\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta-2ar}{B^2}\right]+\right.$$

$$+R^2r\left[\left((R^2-2a^2)3R^4ar-3R^2a^3r^3+[(R^2-2a^2)(R^4+3a^2r^2)R^2-\right.\right.$$

$$\left.-r^2a^2(3R^4+a^2r^2)]\cos\Theta+[(R^2-2a^2)a^2r^2-R^6]\,ar\cos 2\Theta\right):M^3-$$

$$-\left(-(R^2-2a^2)3R^4ar+3R^2a^3r^3+[(R^2-2a^2)(R^4+3a^2r^2)R^2-\right.$$

$$- r^2 a^2 (3R^4 + a^2 r^2)] \cos\Theta - [(R^2 - 2a^2) a^2 r^2 - R^6]\, ar \cos 2\Theta \Big) : N^3 \Big] +$$

$$+ r\Big(\frac{R^2\cos\Theta + ar}{M} - \frac{R^2\cos\Theta - ar}{N}\Big) - \frac{R^2 k}{r}\Big(\frac{R^2\cos\Theta + ar\cos 2\Theta}{M} -$$

$$- \frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{N}\Big) - R^2 ak\Big[\frac{R^4 + 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{M^2} +$$

$$+ \frac{R^4 - 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2\cos 2\Theta}{N^2}\Big] - ar^2\Big[\frac{R^4\cos 2\Theta + 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2}{M^2} +$$

$$+ \frac{R^4\cos 2\Theta - 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2}{N^2}\Big] + a\Big[\frac{r^2 + 2ar\cos\Theta + a^2\cos 2\Theta}{A^2} +$$

$$+ \frac{r^2 - 2ar\cos\Theta + a^2\cos 2\Theta}{B^2}\Big] - k\Big(\frac{r\cos\Theta - a\cos 2\Theta}{B} - \frac{r\cos\Theta + a\cos 2\Theta}{A}\Big)\Big\} +$$

$$+ \frac{P}{4\pi(1+k)}\,\frac{R^2}{r^2}\Big\{\frac{4a(1+k)}{R^2} - 2R^2\Big[\Big(aR^2(R^2 + 2r^2) +$$

$$+ (2a^2R^2 + R^4 + a^2r^2)\, r\cos\Theta + a^3r^2\cos 2\Theta\Big) : M^2 -$$

$$- \Big(-aR^2(R^2 + 2r^2) + (2a^2R^2 + R^4 + a^2r^2)\, r\cos\Theta - a^3r^2\cos 2\Theta\Big) : N^2\Big] -$$

$$- \frac{4R^2k}{r}\Big(\frac{R^2\cos\Theta + ar\cos 2\Theta}{M} - \frac{R^2\cos\Theta - ar\cos 2\Theta}{N}\Big) +$$

$$+ 2r\Big(\frac{R^2\cos\Theta + ar}{M} - \frac{R^2\cos\Theta - ar}{N}\Big) -$$

$$- 2a\Big[\frac{R^6k + a^2r^4 + (R^2k + r^2)\, 2arR^2\cos\Theta + (a^2k + R^2)r^2R^2\cos 2\Theta}{M^2} +$$

$$+ \frac{R^6k + a^2r^4 - (R^2k + r^2)\, 2arR^2\cos\Theta + (a^2k + R^2)\, r^2R^2\cos 2\Theta}{N^2}\Big] +$$

$$+ 2R^2r\Big[\Big((R^2 - 2a^2)\, 3R^4ar - 3R^2a^3r^3 + [(R^2 - 2a^2)(R^4 + 3a^2r^2)R^2 -$$

$$- r^2a^2(3R^4 + a^2r^2)]\cos\Theta + [(R^2 - 2a^2)a^2r^2 - R^6]\, ar\cos 2\Theta\Big) : M^3 -$$

$$- \Big(-(R^2 - 2a^2)\, 3R^4ar + 3R^2a^3r^3 + [(R^2 - 2a^2)(R^4 + 3a^2r^2)R^2 -$$

$$- r^2a^2(3R^4 + a^2r^2)]\cos\Theta - [(R^2 - 2a^2)a^2r^2 - R^6]\, ar\cos 2\Theta\Big) : N^3\Big]\Big\},$$

$$\Theta_{\Theta} = \frac{P}{\pi(1+k)}\Big\{\frac{r\cos\Theta - a}{B} - \frac{r\cos\Theta + a}{A} +$$

$$+ R^2\Big[\frac{aR^2(2r^2 + R^2) + (R^4 + a^2r^2 + 2R^2a^2)\, r\cos\Theta + a^3r^2\cos 2\Theta}{M^2}$$

$$-\frac{-aR^2(2r^2+R^2)+(R^4+a^2r^2+2R^2a^2)r\cos\Theta-a^3r^2\cos 2\Theta}{N^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{R^2k}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar\cos 2\Theta}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar\cos 2\Theta}{N}\right)+$$

$$+r\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar}{N}\right)-\frac{a(1-k)}{R^2}\Bigg\}+$$

$$+\frac{P}{2\pi(1+k)}\Bigg\{r\left[\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta+2ar}{A^2}-\frac{(r^2+a^2)\cos\Theta-2ar}{B^2}\right]+$$

$$+R^2r\Bigg[\Big((R^2-2a^2)3R^4ar-3R^2a^3r^3+[(R^2-2a^2)(R^4+3a^2r^2)R^2-$$

$$-r^2a^2(3R^4+a^2r^2)]\cos\Theta+[(R^2-2a^2)a^2r^2)-R^6]\,ar\cos 2\Theta\Big):M^3-$$

$$-\Big(-(R^2-2a^2)3R^4ar+3R^2a^3r^3+[(R^2-2a^2)(R^4+3a^2r^2)R^2-$$

$$-r^2a^2(3R^4+a^2r^2)]\cos\Theta-[(R^2-2a^2)a^2r^2-R^6]\,ar\cos 2\Theta\Big):N^3\Bigg]+$$

$$+r\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar}{N}\right)-\frac{R^2k}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar\cos 2\Theta}{M}-\right.$$

$$\left.-\frac{R^2\cos\Theta-ar\cos 2\Theta}{N}\right)-R^2ak\left[\frac{R^4+2arR^2\cos\Theta+a^2r^2\cos 2\Theta}{M^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{R^4-2arR^2\cos\Theta+a^2r^2\cos 2\Theta}{N^2}\right]-ar^2\left[\frac{R^4\cos 2\Theta+2arR^2\cos\Theta+a^2r^2}{M^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{R^4\cos 2\Theta-2arR^2\cos\Theta+a^2r^2}{N^2}\right]+a\left[\frac{r^2+2ar\cos\Theta+a^2\cos 2\Theta}{A^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2-2ar\cos\Theta+a^2\cos 2\Theta}{B^2}\right]-k\left(\frac{r\cos\Theta-a\cos 2\Theta}{B}-\right.$$

$$\left.-\frac{r\cos\Theta+a\cos 2\Theta}{A}\right)\Bigg\}-\frac{P}{4\pi(1+k)}\,\frac{R^2}{r^2}\Bigg\{\frac{4a(1-k)}{R^2}-$$

$$-2R^2\left[\frac{aR^2(R^2+2r^2)+(2a^2R^2+R^4+a^2r^2)r\cos\Theta+a^3r^2\cos 2\Theta}{M^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{-aR^2(R^2+2r^2)+(2a^2R^2+R^4+a^2r^2)r\cos\Theta-a^3r^2\cos 2\Theta}{N^2}\right]-$$

$$-\frac{4R^2k}{r}\left(\frac{R^2\cos\Theta+ar\cos 2\Theta}{M}-\frac{R^2\cos\Theta-ar\cos 2\Theta}{N}\right)+$$

$$+ 2r\left(\frac{R^2\cos\Theta + ar}{M} - \frac{R^2\cos\Theta - ar}{N}\right) -$$

$$-2a\left[\frac{R^6k + a^2r^4 + (R^2k + r^2)\,2arR^2\cos\Theta + (a^2k + R^2)\,r^2R^2\cos 2\Theta}{M^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^6k + a^2r^4 - (R^2k + r^2)\,2arR^2\cos\Theta + (a^2k + R^2)\,r^2R^2\cos 2\Theta}{N^2}\right] +$$

$$+ 2R^2r\Big[\Big((R^2 - 2a^2)\,3R^4ar - 3R^2a^3r^3 + [(R^2 - 2a^2)(R^4 + 3a^2r^2)R^2 -$$

$$- r^2a^2(3R^4 + a^2r^2)]\cos\Theta + [(R^2 - 2a^2)a^2r^2 - R^6]\,ar\cos 2\Theta\Big) : M^3 -$$

$$- \Big(-(R^2 - 2a^2)\,3R^4ar + 3R^2a^3r^3 + [(R^2 - 2a^2)(R^4 + 3a^2r^2)R^2 -$$

$$- r^2a^2(3R^4 + a^2r^2)]\cos\Theta - [(R^2 - 2a^2)a^2r^2 - R^6]\,ar\cos 2\Theta\Big) : N^3\Big]\Big\}.$$

We wzorach tych przyjęto oznaczenia

$$A = r^2 + 2ar\cos\Theta + a^2, \qquad B = r^2 - 2ar\cos\Theta + a^2,$$

$$M = R^4 + 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2, \qquad N = R^4 - 2arR^2\cos\Theta + a^2r^2.$$

Z wyprowadzonych wzorów można zauważyć, że dla $r = R$, tj. na obwodzie tarczy kołowej, naprężenia R_Θ i R_R są równe zeru, jak być powinno. Dla $r = 0$ naprężenia posiadają wartości skończone, zaś dla $r = a$ przybierają wartości nieskończenie wielkie.

W przekroju średnicowym tarczy największe naprężenie rozciągające ma miejsce dla $r = \Theta = 0$, przy czym wartość jego wynosi

$$R_r = X_x = -\frac{P}{\pi(1+k)a}\left[(3+k)\left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) - (3-k)\frac{a^4}{R^4}\right].$$

Stosując prawo niezależności działania sił i odkształceń można rozwiązać w podobny sposób każde zagadnienie dotyczące stanu napięcia tarczy kołowej, obciążonej w dowolny sposób wewnętrznymi siłami skupionymi jak również i momentami (parami sił), z tym tylko zastrzeżeniem, ażeby przyjęte obciążenie tarczy spełniało warunki równowagi. Ponadto wyżej przedstawiony sposób umożliwia określenie stanu napięcia tarczy, której obszar jednospójny daje się odwzorować na koło za pomocą przekształcenia konforemnego.

Literatura cytowana w tekście

[1] F. Szelągowski, *The Tension with Concentrated Forces of an Infinite Plate with a Rigid Circular Inclusion*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 4 (1956), 145.

[2] F. Szelągowski, *The State of Stress in a Disk Rotating About an Eccentric Axis*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 6 (1958).

Резюме

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОГО ДИСКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННИХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

В работе выводятся формулы, определяющие напряжения R_Θ, R_r, Θ_Θ, существующие в произвольной точке кругового диска, растягиваемого двумя внутренними сосредоточенными силами, равноотдаленными от центра этого диска.

Summary

THE STATE OF STRESS IN A CIRCULAR DISC LOADED BY CONCENTRATED FORCES INSIDE THE DISC REGION

This paper is devoted to the derivation of equations determining the stresses $R_\Theta, R_r, \Theta_\Theta$ at any point of a circular disc subjected to tension by two concentrated forces equidistant from the centre of the disc.

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 lutego 1958 r.