

AUGUSTYN BORCZ

POWŁOKI WZMOCNIONE BELKAMI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CIII

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	409
2. Oznaczenia	410
3. Funkcje naprężeń	413
4. Warunki brzegowe i podporowe	420
5. Przykład liczbowy	426
6. Uwagi końcowe	428

## 1. Wstęp

Praca niniejsza jest streszczeniem części rozprawy kandydackiej, [28], w której podano ogólną metodę wyznaczania naprężeń w powłokach sztywno lub sprężyste podpartych i wzmocnionych na krawędzi belkami. Zasadnicza różnica między użytą tutaj metodą a stosowaną dotąd w pracach [26], [13] i [6] polega na ogólnym potraktowaniu zagadnienia w naprężeniach, a nie w przemieszczeniach, jak to zazwyczaj się czyni<sup>1</sup>.

Pracę konstrukcji rozpatrujemy w zakresie odkształceń sprężystych. W odniesieniu do powłoki przyjmujemy założenia zazwyczaj stosowane w teorii cienkich powłok i małych ugięć. Dla belki stosujemy hipotezę płaskich przekrojów.

Niewiadomymi są wielkości statyczne w powłoce i wielkości statyczne w belkach wzmacniających krawędzie powłoki. Za pomocą funkcji naprężeń  $a(\alpha, \beta)$ ,  $b(\alpha, \beta)$ ,  $c(\alpha, \beta)$  redukujemy dziesięć niewiadomych w powłoce do trzech skalnych funkcji, które tożsamościowo spełniają równania równowagi powłoki. Funkcje naprężeń wyznaczamy z warunków nierozdzielności.

Warunki brzegowe wyprowadzamy z równań równowagi belki i ze związków geometrycznych, jakie zachodzą między wielkościami statycznymi w powłoce i w belce podczas ich sprężystej współpracy.

Problem wymaga sformułowania warunków wewnątrz obszaru dla funkcji naprężeń  $a$ ,  $b$  i  $c$ , i sformułowania warunków na brzegu wzmocnionej belką.

Przedstawiona tutaj metoda ma pełne zastosowanie również dla płyt, zwłaszcza gdy rozpatruje się jednocześnie momentowy i płaski stan naprężeń. Wielu badaczy zajmowało się płytami wzmocnionymi belkami i to zarówno na drodze teoretycznej, jak też doświadczalnej.

Gdy żebra są rozmieszczone gęsto, traktuje się płytę jako konstrukcję anizotropową wprowadzając do obliczeń zredukowane sztywności ([9], [6], s. 479; [11], s. 158; [3]; [24], s. 189; [17]; [25]).

W projektowaniu przy obowiązujących przepisach obliczanie płyt opartych na żebrach jest niedokładne. Zakłada się, że oparcie płyty na

<sup>1</sup> Wykaz literatury cytowanej w tekście został podany na s. 402.

belkach jest sztywne. Belki oblicza się na oddziaływania występujące przy powyższych założeniach, wprowadzając pojęcie tak zwanej «współpracującej szerokości płyty», która łącznie z belką tworzy przekrój teowy. O wyznaczaniu «współpracującej szerokości płyty» piszą autorzy prac [4]; [1]; [9], § 21; [7]; [6], s. 112; [18]; [19]; [2].

Sprężyste połączenie belki z płytą opisane jest w pracach [14]; [15]; [24], s. 92; [5]; [16]; [17]; [23]. W tych wszystkich przypadkach belka jest traktowana jako cienki pręt, którego oś leży na powierzchni środkowej płyty. W płycie występuje tylko zgięciowy stan naprężeń.

Równocześnie płaski i zgięciowy stan naprężeń jest rozpatrywany przez M. T. Hubera ([9], § 16 i 19) metodami energetycznymi przy użyciu pojęcia «współpracującej szerokości płyty».

Ostatnio ukazały się prace, [22], [21], w których oblicza się płyty z belkami położonymi niesymetrycznie względem przekroju. Warunki współpracy płyty z belką są określane w przemieszczeniach nawet wówczas, gdy zadanie rozwiązuje się w naprężeniach i problem nie wymaga przechodzenia do przemieszczeń.

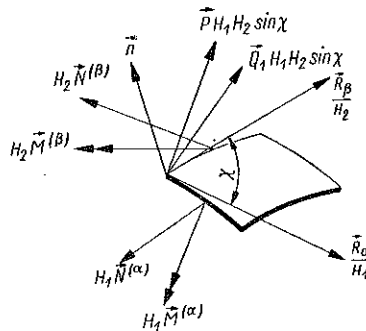
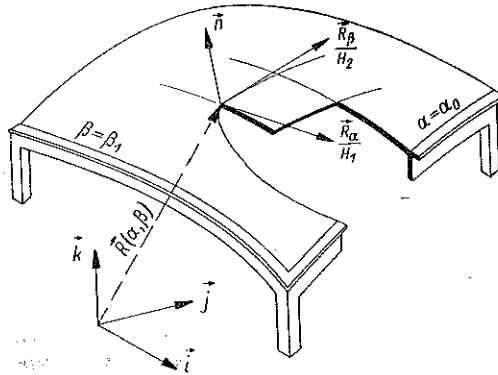
## 2. Oznaczenia

$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \beta)$	wektorowe równanie powierzchni środkowej powłoki we współrzędnych $\alpha, \beta$ (rys. 1),
$R'_1, R'_2, R_{12}$	krzywizny powierzchni,
$h$	grubość powłoki,
$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} = \mathbf{R}_\alpha, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = \mathbf{R}_\beta$	pochodne wektora,
$H_1, H_2, H_3$	współczynniki formy metrycznej,
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	jednostkowe wektory stałego układu odniesienia (wersory),
$\frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1}, \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}; \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} \times \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2}$	jednostkowe wektory ruchomego układu odniesienia, oznaczane również przez 1, 2, 3,
$\chi$	kąt zawarty między kierunkami $\mathbf{R}_\alpha$ i $\mathbf{R}_\beta$ ,
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	wektory sił i momentów będących obciążeniami zewnętrznymi powłoki,
$\mathbf{G}, \mathbf{Z}$	wektory sił i momentów obciążających bezpośrednio belkę, a przypadające na jednostkę długości powłoki,
$\mathbf{L}, \mathbf{K}$	wektorowe funkcje naprężeń,
$a, b, c$	skalarne funkcje naprężeń,
$E, G, \nu$	stałe materiałowe powłoki,
$E', G', \nu'$	stałe materiałowe belki,
$\xi_0, \eta_0, \gamma_0$	położenie środka ciężkości belki we współrzędnych ruchomych na krawędzi powłoki (rys. 2),
$F$	pole powierzchni przekroju belki,

- $I_{jk}$  składowe tensora momentu bezwładności przekroju belki,  
 $\Phi$  funkcja rozwiązująca,  
 $w$  składowa ugięcia prostopadłego do płyty,  
 $\Theta$  funkcja Airy'ego.

Symbolami  $N^{(\alpha)}$ ,  $N^{(\beta)}$ ,  $M^{(\alpha)}$ ,  $M^{(\beta)}$  oznaczać będziemy wektory napięć i momentów w powłoce o składowych

$$(2.1) \quad \begin{cases} N^{(\alpha)} = S_2 \frac{R_\alpha}{H_1} - N_2 \frac{R_\beta}{H_2} + Q_2 \vec{n}, \\ N^{(\beta)} = -N_1 \frac{R_\alpha}{H_1} - S_1 \frac{R_\beta}{H_2} + Q_1 \vec{n}, \\ M^{(\alpha)} = -M_2 \frac{R_\alpha}{H_1} - M_{21} \frac{R_\beta}{H_2}, \\ M^{(\beta)} = -M_{12} \frac{R_\alpha}{H_1} + M_1 \frac{R_\beta}{H_2}, \end{cases}$$



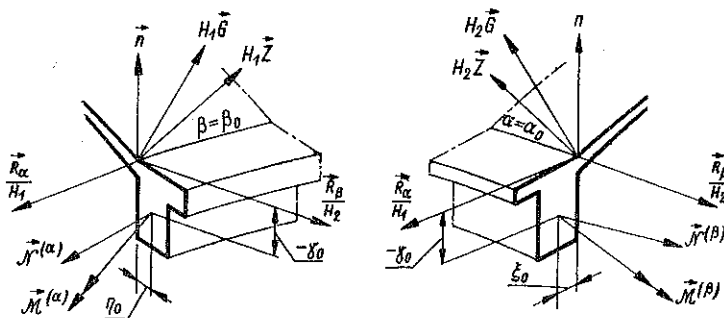
Rys. 1

gdzie  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{21}$  są skalarnymi wartościami napięć i momentów w powłoce, nazywanymi w dalszym ciągu wielkościami statycznymi.

Podobnie  $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{n}^{(\beta)}$ ,  $\mathbf{m}^{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{m}^{(\beta)}$  oznaczają wektory sił i momentów w belce (rys. 2) o składowych<sup>2</sup>

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{n}^{(\alpha)} = -n \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + t_2 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + t_1 \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}^{(\beta)} = t_2 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} - n \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + t_1 \mathbf{n}, \\ \mathbf{m}^{(\alpha)} = m_s \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_1 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_2 \mathbf{n}, \\ \mathbf{m}^{(\beta)} = m_1 \frac{\mathbf{R}_\alpha}{H_1} + m_s \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + m_2 \mathbf{n}, \end{cases}$$

gdzie  $n$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_s$  są skalarnymi wartościami sił i momentów w belce.



Rys. 2

Wprowadzimy jeszcze trzy symbole tensorów: tensor deformacji powłoki

$$[e_{jk}]^P = \begin{bmatrix} e_{11} + \gamma \kappa_{11} & e_{12} + \gamma \tau & 0 \\ e_{21} + \gamma \tau & e_{22} + \gamma \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tensor deformacji belki na krawędzi  $\beta = \beta_0$

$$[e_{jk}]^b = \begin{bmatrix} e_{11} + \eta_0 \tilde{\kappa}_{22} + \gamma_0 \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tensor deformacji belki na krawędzi  $\alpha = \alpha_0$

$$[e_{jk}]^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} + \xi_0 \tilde{\kappa}_{11} + \gamma_0 \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

<sup>2</sup> Na rysunku oznaczono je symbolami  $\vec{\mathcal{N}}^{(\alpha)}$ ,  $\vec{\mathcal{N}}^{(\beta)}$ ,  $\vec{\mathcal{M}}^{(\alpha)}$ ,  $\vec{\mathcal{M}}^{(\beta)}$ .

gdzie

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{22} &= -\frac{1}{2GH_1h} S_{2\alpha} - \frac{1-\nu^2}{E(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22})_\beta + \frac{1}{H_1H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} e_{11}, \\ \tilde{\kappa}_{11} &= \frac{1}{2GH_2h} S_{1\beta} - \frac{1-\nu^2}{E(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22})_\beta + \frac{1}{H_1H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} e_{22}.\end{aligned}$$

### 3. Funkcje naprężeń

Niewiadome wektory napięć  $N^{(\alpha)}$ ,  $N^{(\beta)}$  oraz wektory momentów  $M^{(\alpha)}$  i  $M^{(\beta)}$  (rys. 1) muszą spełniać równania równowagi ([8], s. 34)

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 N^{(\alpha)}) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 N^{(\beta)}) + H_1 H_2 \sin \chi P = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 M^{(\alpha)}) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 M^{(\beta)}) + H_1 N^{(\alpha)} \times R_\beta + H_2 N^{(\beta)} \times R_\alpha + \\ + H_1 H_2 \sin \chi Q = 0. \end{cases}$$

Łurie i Goldienwiejzler wykazali ([8], s. 37), że dla jednorodnych równań równowagi można zredukować cztery niewiadome wektory do dwóch wektorów  $L$  i  $K$ . Wykażemy, że również dla niejednorodnych równań można przeprowadzić taką redukcję.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(3.2) \quad \begin{cases} H_1 N^{(\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \int H_1 H_2 \sin \chi P d\beta, \\ H_2 N^{(\beta)} = -\frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \int H_1 H_2 \sin \chi P da, \\ H_1 M^{(\alpha)} = \frac{\partial K}{\partial \alpha} - L \times R_\alpha + \frac{1}{2} \int \left\{ \left[ \int H_1 H_2 \sin \chi P da \right] \times R_\alpha \right\} d\beta + \\ + \frac{1}{2} \int H_1 H_2 \sin \chi Q d\beta, \\ H_2 M^{(\beta)} = -\frac{\partial K}{\partial \beta} + L \times R_\beta + \frac{1}{2} \int \left\{ \left[ \int H_1 H_2 \sin \chi P d\beta \right] \times R_\beta \right\} da + \\ + \frac{1}{2} \int H_1 H_2 \sin \chi Q da. \end{cases}$$

Wówczas równania (3.2) spełniają tożsamościowo równania (3.1). Funkcje  $L$  i  $K$  są rozwiązaniem ogólnym równań jednorodnych, wyrazy całkowe są szczególnym rozwiązaniem niejednorodnych równań równowagi. Całki mogą być nieoznaczone, ponieważ chodzi tu o jakiegokolwiek rozwiązanie szczególne.

Dla uzyskania bardziej przejrzystych wyników ograniczymy dalsze rozważania do współrzędnych ortogonalnych.

Wektory  $L$  i  $K$  nie są niezależne, mianowicie składowe wektora  $L$  przedstawić można za pomocą składowych wektora  $K$ :

$$(3.3) \quad \begin{cases} K = a(\alpha, \beta) \frac{R_\alpha}{H_1} + b(\alpha, \beta) \frac{R_\beta}{H_2} - c(\alpha, \beta) \mathbf{n}, \\ L = \left( -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} c - \frac{b}{R_2'} + \frac{a}{R_{12}} - \varphi^0 \right) \frac{R_\alpha}{H_1} + \\ \quad + \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} c + \frac{a}{R_1'} - \frac{b}{R_{12}} + \varphi^0 \right) \frac{R_\beta}{H_2} + \\ \quad + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} a + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} b - \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) - (M'_{12} + M'_{21}) \right] \mathbf{n}. \end{cases}$$

Wynika to z warunków następujących:

$$(3.4) \quad H_1 M^{(\alpha)} \mathbf{n} = 0, \quad H_2 M^{(\beta)} \mathbf{n} = 0, \quad M^{(\alpha)} \frac{R_\beta}{H_2} + M^{(\beta)} \frac{R_\alpha}{H_1} = 0.$$

Pierwsze dwa równania są warunkami tego, aby momenty miały składową normalną do powłoki równą zero, trzecie równanie jest warunkiem, aby

$$M_{12} + M_{21} = 0.$$

W powyższych równaniach  $M'_{12}$ ,  $M'_{21}$ ,  $\varphi^0$ ,  $\psi^0$  są wyrazami pochodzącymi od całek szczególnych. W ten sposób dziesięć wielkości statycznych (2.1) zostało zredukowanych do trzech wielkości skalarnych  $a$ ,  $b$  i  $c$  spełniających tożsamościowo równania równowagi.

Rozkładając lewe i prawe strony równań (3.2) na składowe, następnie porównując ze sobą wyrazy przy tych samych kierunkach otrzymamy

$$(3.5) \quad \begin{cases} N_1 = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R_2'} - \frac{a}{R_{12}} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R_1'} - \frac{b}{R_{12}} \right) + \frac{1}{2R_{12}} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + N_1', \\ N_2 = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R_1'} - \frac{b}{R_{12}} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R_2'} - \frac{a}{R_{12}} \right) + \frac{1}{2R_{12}} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + N_2', \\ S_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R_1'} - \frac{b}{R_{12}} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R_2'} - \frac{a}{R_{12}} \right) - \frac{1}{2R_2'} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + S_1', \\ S_2 = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R_2'} - \frac{a}{R_{12}} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R_1'} - \frac{b}{R_{12}} \right) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & -\frac{b}{R_{12}} - \frac{1}{2R'_1} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + S'_2, \\
 Q_1 = & \frac{1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{R'_2} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R'_1} - \frac{b}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R'_2} - \frac{a}{R_{12}} \right) + Q'_1, \\
 Q_2 = & -\frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \left( a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{R'_1} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial c}{\partial \beta} + \frac{b}{R'_2} - \frac{a}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{a}{R'_1} - \frac{b}{R_{12}} \right) + Q'_2, \\
 M_1 = & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial b}{\partial \beta} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} a + \frac{c}{R'_2} + M'_1; \\
 M_2 = & -\frac{1}{H_1} \frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} b + \frac{c}{R'_1} + M'_2; \\
 M_{12} = & -M_{21} = \frac{1}{2H_2} \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{2H_1 H_2} b \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \\
 & + \frac{1}{2H_1} \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{1}{2H_1 H_2} a \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{c}{R_{12}} + \frac{M'_{12} - M'_{21}}{2}.
 \end{aligned}$$

Całki szczególne równań (3.1) dla  $Q = 0$  i współrzędnych ortogonalnych są następujące:

$$\begin{aligned}
 \varphi^0 = & -\frac{1}{2H_1} \mathbf{n} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\alpha \right) \times \mathbf{R}_\alpha \right] d\beta, \\
 \psi^0 = & \frac{1}{2H_2} \mathbf{n} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\beta \right) \times \mathbf{R}_\beta \right] d\alpha, \\
 M'_{12} = & -\frac{1}{2H_2} \frac{R_\beta}{H_1} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\beta \right) \times \mathbf{R}_\beta \right] d\alpha, \\
 M'_{21} = & -\frac{1}{2H_1} \frac{R_\alpha}{H_2} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\alpha \right) \times \mathbf{R}_\alpha \right] d\beta, \\
 N'_1 = & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \varphi^0 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \varphi^0 + \frac{1}{2R_{12}} (M'_{12} + M'_{21}) - \frac{1}{2H_2} \frac{R_\alpha}{H_1} \int H_1 H_2 P d\alpha, \\
 N'_2 = & -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi^0 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \varphi^0 + \frac{1}{2R_{12}} (M'_{12} + M'_{21}) - \frac{1}{2H_1} \frac{R_\beta}{H_2} \int H_1 H_2 P d\beta, \\
 S'_1 = & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \varphi^0 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \varphi^0 - \frac{1}{2R'_2} (M'_{12} + M'_{21}) - \frac{1}{2H_2} \frac{R_\beta}{H_2} \int H_1 H_2 P d\alpha, \\
 S'_2 = & -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi^0 + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \varphi^0 - \frac{1}{2R'_1} (M'_{12} + M'_{21}) + \frac{1}{2H_1} \frac{R_\alpha}{H_1} \int H_1 H_2 P d\beta,
 \end{aligned}$$

$$Q'_1 = \frac{1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} (M'_{12} + M'_{21}) + \frac{1}{R'_2} \varphi^0 + \frac{1}{R_{12}} \psi^0 + \frac{1}{2H_2} \mathbf{n} \int H_1 H_2 P d\alpha,$$

$$Q'_2 = -\frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M'_{12} + M'_{21}) + \frac{1}{R'_1} \varphi^0 + \frac{1}{R_{12}} \psi^0 + \frac{1}{2H_1} \mathbf{n} \int H_1 H_2 P d\beta,$$

$$M'_1 = \frac{1}{2H_2} \frac{R_\beta}{H_2} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\beta \right) \times R_\beta \right] d\alpha,$$

$$M'_2 = -\frac{1}{2H_1} \frac{R_\alpha}{H_1} \int \left[ \left( \int H_1 H_2 P d\alpha \right) \times R_\alpha \right] d\beta.$$

Aby rozłożyć wyrazy całkowe (3.2) na kierunki  $R_\alpha, R_\beta, \mathbf{n}$ , należy te ostatnie przedstawić za pomocą wektorów  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  układu stałego, czyli powierzchnię przedstawić równaniem

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta) = a(\alpha, \beta) \mathbf{i} + \beta(\alpha, \beta) \mathbf{j} + \gamma(\alpha, \beta) \mathbf{k}.$$

Funkcje  $a, b, c$  nie mogą być dowolne. Muszą one spełniać warunki nierozdzielności, które wyrażone w naprężeniach mają następującą postać:

$$(3.6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta} H_1 \left[ -\frac{6}{Gh^3} M_{12} + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR_{12}} - \frac{S_1}{2GhR'_1} \right] - \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR'_1} - \frac{S_1}{2GhR_{12}} \right] \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} H_2 \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR'_2} + \frac{S_2}{2GhR_{12}} \right] + \left[ \frac{6}{Gh^3} M_{21} + \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR_{12}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_2}{2GhR'_2} \right] \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \frac{H_1 H_2}{R_{12}} \xi_1 - \frac{H_1 H_2}{R'_1} \xi_2 = 0, \\ & \left[ -\frac{6}{Gh^3} M_{12} + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR_{12}} - \frac{S_1}{2GhR'_1} \right] \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \beta} H_1 \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) + \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR'_1} - \frac{S_1}{2GhR_{12}} \right] - \\ & \quad - \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR'_2} + \frac{S_2}{2GhR_{12}} \right] \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial \alpha} H_2 \left[ \frac{6}{Gh^3} M_{21} + \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR_{12}} + \frac{S_2}{2GhR'_2} \right] + \frac{H_1 H_2}{R'_2} \xi_1 + \frac{H_1 H_2}{R_{12}} \xi_2 = 0, \\ & \frac{H_1 H_2}{R_{12}} \left[ -\frac{6}{Gh^3} M_{12} + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR_{12}} - \frac{S_1}{2GhR'_1} \right] - \frac{H_1 H_2}{R'_2} \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR'_1} - \frac{S_1}{2GhR_{12}} \right] - \frac{H_1 H_2}{R'_1} \left[ \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) + \frac{N_2 - \nu N_1}{EhR'_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{S_2}{2GhR_{12}} \right] + \frac{H_1 H_2}{R_{12}} \left[ \frac{6}{Gh^3} M_{21} - \frac{N_1 - \nu N_2}{EhR_{12}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{S_2}{2GhR'_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \xi_1) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \xi_2) = 0, \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$H_1 H_2 \xi_1 = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{H_1(N_1 - \nu N_2)}{Eh} - \frac{S_1}{2Gh} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{H_2 S_2}{2Gh} - \frac{N_2 - \nu N_1}{Eh} \frac{\partial H_1}{\partial \beta},$$

$$H_1 H_2 \xi_2 = \frac{N_1 - \nu N_2}{Eh} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{H_1 S_1}{2Gh} - \frac{S_2}{2Gh} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{H_2(N_2 - \nu N_1)}{Eh}.$$

Na przykład dla powłoki walcowej określonej równaniem (rys. 3)

$$R(\alpha, \beta) = R \sin \frac{\alpha}{R} \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + R \cos \frac{\alpha}{R} \mathbf{k},$$

dla obciążeń siłami  $g(\alpha, \beta)$  prostopadłymi do powierzchni środkowej otrzymamy

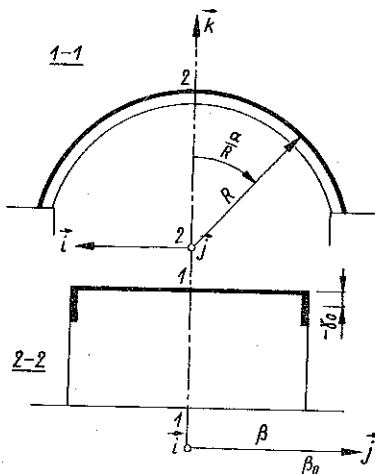
$$(3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= -c_{\beta\beta} + \cos \frac{\alpha}{R} \int g \sin \frac{\alpha}{R} d\alpha - \sin \frac{\alpha}{R} \int g \cos \frac{\alpha}{R} d\alpha, \\ N_2 &= -c_{\alpha\alpha} - \frac{1}{R} a_\alpha, \quad S_1 = c_{\alpha\beta} + \frac{1}{R} a_\beta, \\ S_2 &= -c_{\alpha\beta} - \frac{1}{2R} (a_\beta - b_\alpha) - \frac{1}{4R} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta - \\ &\quad - \frac{1}{4R} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{4R} \iint g dad\beta, \\ Q_1 &= \frac{1}{2} (a_{\beta\beta} - b_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{R} \int g \sin \frac{\alpha}{R} d\alpha - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{R} \int g \cos \frac{\alpha}{R} d\alpha, \\ Q_2 &= -\frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\alpha}) + \frac{1}{R} c_\beta - \frac{1}{4R} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta + \\ &\quad + \frac{1}{4R} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{2} \int g d\beta, \\ M_1 &= -b_\beta, \quad M_2 = -a_\alpha + \frac{1}{R} c, \\ M_{12} &= -M_{21} = \frac{1}{2} (a_\beta + b_\alpha) - \frac{1}{4} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{4} \iint g dad\beta. \end{aligned} \right.$$

Równania (3.6) przyjmują postać

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{aligned} -(1+\nu) M_{12\beta} + (M_2 - \nu M_1)_\alpha + \frac{h^2}{12R} [(N_2 - \nu N_1)_\alpha - 3(1+\nu) S_{1\beta}] &= 0, \\ (1+\nu) M_{21\alpha} + (M_1 - \nu M_2)_\beta + \frac{h^2}{12R} (N_1 - \nu N_2)_\beta &= 0, \\ (N_1 - \nu N_2)_{\beta\beta} + (N_2 - \nu N_1)_{\alpha\alpha} + (1+\nu) (S_{2\alpha\beta} - S_{1\beta\alpha}) - \\ &\quad - \frac{12}{Rh^2} (M_2 - \nu M_1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Po wstawieniu do równań (3.8) zależności (3.7) otrzymamy

$$(3.9) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) a + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} b - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} c = 0, \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} a + \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) b + \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} c = 0, \\ \left( \Delta \Delta + \frac{12}{R^2 h^2} \right) c + \frac{12\nu}{R h^2} \frac{\partial}{\partial \beta} b - \frac{12}{R h^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} a + \frac{1}{R} \left[ (1+\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \right] a = 0. \end{cases}$$



Rys. 3

Gdy pominiemy wyrazy ze współczynnikiem

$$\frac{h^2}{12R} \text{ oraz } \frac{1}{R} \left[ (1+\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \right] a$$

i wprowadzimy oznaczenia

$$(3.10) \quad \begin{cases} a = \frac{1}{R} \left[ (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \right] \Phi, \\ b = -\frac{1}{R} \left( \nu \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right) \Phi, \\ c = \Delta \Delta \Phi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \end{cases}$$

to uczynimy tożsamościowo zadość dwu pierwszym równaniom układu (3.9), a z trzeciego otrzymamy równanie o budowie podobnej jak w pracy [27], s. 317:

$$(3.11) \quad \Delta \Delta \Delta \Delta \Phi + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \Phi = 0.$$

Należy zauważyć, że wystarczy rozpatrywać jednorodne równanie (3.11), ponieważ całki szczególne równań (3.1) są również całkami szczególnymi równań (3.6).

Wielkości statyczne wyrażają się za pośrednictwem funkcji naprężeń wzorami

$$(3.12) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Delta \Phi + \cos \frac{\alpha}{R} \int g \sin \frac{\alpha}{R} da - \sin \frac{\alpha}{R} \int g \cos \frac{\alpha}{R} da, \\ N_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \Delta \Phi - \frac{1}{R^2} \left[ (2-\nu) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right] \Phi, \\ S_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \Delta \Phi + \frac{1}{R^2} \left[ (2-\nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^3} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \right], \\ S_2 = -\left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \Delta + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \Delta \Phi - \frac{1}{4R} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta - \\ \quad - \frac{1}{4R} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{4} \iint g dad\beta, \\ Q_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \Delta \Phi - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{R} \int g \sin \frac{\alpha}{R} da - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{R} \int g \cos \frac{\alpha}{R} da, \\ Q_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \Delta \Phi - \frac{1}{4R} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta + \\ \quad + \frac{1}{4R} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{2} \int g d\beta, \\ M_1 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Phi, \quad M_2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Phi, \\ M_{12} = -M_{21} = \frac{1-\nu}{R} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} \Phi - \frac{1}{4} \cos \frac{\alpha}{R} \iint g \cos \frac{\alpha}{R} dad\beta - \\ \quad - \frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{R} \iint g \sin \frac{\alpha}{R} dad\beta - \frac{1}{4} \iint g dad\beta. \end{array} \right.$$

Podobnie dla płyty prostokątnej otrzymamy podstawiając do warunków nierozdzielności równania

$$(3.13) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = -C_{yy}, \quad N_2 = -C_{xx}, \\ S_1 = C_{xy}, \quad S_2 = -C_{xy}, \\ M_1 = -b_y, \quad M_2 = -a_x, \\ M_{12} = -M_{21} = \frac{1}{2} (a_y + b_x) - \frac{1}{2} \int g dx dy, \\ Q_1 = -\frac{1}{2} (a_{yy} - b_{xy}) - \frac{1}{2} \int g dx, \\ Q_2 = \frac{1}{2} (a_{xy} - b_{xx}) - \frac{1}{2} \int g dy \end{array} \right.$$

następujący układ równań na funkcje naprężeń:

$$(3.14) \quad \begin{cases} (1 + \nu) a_{yy} + 2a_{xx} + (1 - \nu) b_{xy} = 0, \\ (1 + \nu) b_{xx} + 2b_{yy} + (1 - \nu) a_{xy} = 0, \\ \Delta \Delta C = 0. \end{cases}$$

Podstawiając

$$(3.15) \quad a = -\Phi_{xy}, \quad b = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \Phi_{yy} + \frac{2}{1 - \nu} \Phi_{xx}$$

zredukujemy trzy funkcje naprężeń do dwóch  $C$  i  $\Phi$ . Z warunków nierozdzielności otrzymamy dwa równania

$$(3.16) \quad \Delta \Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Delta C = 0.$$

Wzory na wielkości statyczne w płycie przyjmą więc postać

$$(3.17) \quad \begin{cases} N_1 = -C_{yy}, & N_2 = -C_{xx}, & S_1 = -S_2 = C_{xy}, \\ M_1 = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \Phi_{yy} + \frac{2}{1 - \nu} \Phi_{xx} \right), & M_2 = \Phi_{xy}, \\ M_{12} = -M_{21} = \frac{1}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_{xx} + \nu \Phi_{yy} \right) - \frac{1}{2} \int g dx dy, \\ Q_1 = \frac{1}{1 - \nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta \Phi - \frac{1}{2} \int g dx, \\ Q_2 = -\frac{1}{1 - \nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta \Phi - \frac{1}{2} \int g dy. \end{cases}$$

W analogiczny sposób można dla dowolnej powłoki utworzyć warunki, jakie mają spełniać funkcje naprężeń wewnątrz obszaru. W ogólnym przypadku będą to liniowe równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych i o współczynnikach funkcyjnych. W konkretnych rozwiązaniach będą konieczne pewne uproszczenia, np. założenie przybliżonej postaci warunków nierozdzielności z równoczesnym zachowaniem równań równowagi powłoki w dokładnej postaci.

#### 4. Warunki brzegowe i podporowe

Belka wzmacniająca powłokę winna czynić zadość następującym warunkom:

- 1) być w równowadze pod obciążeniem bezpośrednim i oddziaływaniem pochodzącym od powłoki,
- 2) odkształcać się tak samo jak powłoka w miejscu kontaktu.

Warunek 1 formuluje się na podstawie równania równowagi belki. Np. na krawędzi  $\beta = \beta_0$  równania równowagi zapisane wektorowo w układzie ruchomym, przyjętym na krawędzi powłoki (rys. 2) mają postać:

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\mathbf{n}^{(\alpha)} + H_1 \mathbf{N}^{(\alpha)} + H_1 \mathbf{G} = 0, \\ -\mathbf{m}^{(\alpha)} + \mathbf{n}^{(\alpha)} \times \left[ \eta_0 \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \gamma_0 \mathbf{n} \right] + \mathbf{n}^{(\alpha)} \times \\ \quad \times \left[ \mathbf{R}_\alpha + \eta_{0\alpha} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \gamma_{0\alpha} \mathbf{n} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\mathbf{R}_\beta}{H_2} + \gamma_0 \mathbf{n}_- \right] + H_1 \mathbf{M}^{(\alpha)} + H_1 \mathbf{Z} = 0. \end{cases}$$

Równania równowagi na krawędzi  $\beta = \beta_0$  oraz  $\beta_1 = \beta_1 < \beta_0$  wyrazimy wzorami skalarnymi

$$(4.2) \quad \begin{cases} n_\alpha - t_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - t_1 \frac{H_1}{R'_1} \pm H_1 S_2 + H_1 g_1 = 0, \\ -n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - t_{2\alpha} + t_1 \frac{H_1}{R_{12}} \mp H_1 N_2 + H_1 g_2 = 0, \\ -n \frac{H_1}{R'_1} - t_2 \frac{H_1}{R_{12}} - t_{1\alpha} \pm H_1 Q_2 - H_1 g_3 = 0, \\ -m_{s\alpha} - m_1 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - m_2 \frac{H_1}{R'_1} \mp \eta_0 t_{1\alpha} + \gamma_{0\alpha} t_2 + \gamma_0 t_{2\alpha} \mp \eta_0 n \frac{H_1}{R'_1} + \\ \quad + \gamma_0 n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \mp \eta_{0\alpha} t_1 \mp H_1 M_2 + H_1 Z_1 = 0, \\ m_s \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - m_{1\alpha} + m_{2\alpha} \frac{H_1}{R_{12}} + \gamma_0 n_\alpha + t_1 H_1 - \gamma_0 t_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \pm \\ \quad \pm \eta_0 t_1 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \gamma_{0\alpha} n \pm \eta_0 n \frac{H_1}{R_{12}} \mp H_1 M_{21} + H_1 Z_2 = 0, \\ m_s \frac{H_1}{R'_1} - m_1 \frac{H_1}{R_{12}} - m_{2\alpha} \mp \eta_0 n_\alpha - t_2 H_1 \pm \eta_0 t_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \pm \eta_0 t_1 \frac{H_1}{R'_1} \mp \\ \quad \mp \eta_0 t_1 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \gamma_0 t_2 \frac{H_1}{R'_1} \mp \eta_{0\alpha} n + \gamma_0 n \frac{H_1}{R_{12}} + H_1 Z_3 = 0. \end{cases}$$

W powyższych równaniach zastosowano podwójne znakowanie. Górne znaki odnoszą się do krawędzi  $\beta = \beta_0$ , a dolne do  $\beta_1 = \beta_1 < \beta_0$ .

Warunek 2 przedstawiliśmy posługując się zazwyczaj stosowanymi związkami między składowymi tensora odkształceń, a wielkościami statycznymi w powłoce:

$$(4.3) \quad \begin{cases} e_{11} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), & \kappa_{11} = -\frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2), \\ e_{22} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), & \kappa_{22} = -\frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ e_{12} = \frac{1}{Gh} S_1 = -\frac{1}{Gh} S_2, & \tau = \frac{12}{Gh^3} M_{21} = -\frac{12}{Gh^3} M_{12}, \\ \tau = \tau_{12} + \tau_{21}, & \tau_{12} = \tau_{21}. \end{cases}$$

Posługując się hipotezą płaskich przekrojów można również przedstawić wielkości statyczne w belce za pomocą odkształceń powłoki, wziętych na krawędzi kontaktu. Dla belek smukłych, czyli takich, dla których stosuje się liniowy rozkład odkształceń, otrzymamy

$$(4.4) \quad \begin{cases} n = E'F (e_{11} + \eta_0 \tilde{\kappa}_{22} + \gamma_0 \kappa_{11}), \\ m_2 = E' I_2 \tilde{\kappa}_{22} + E' I_{23} \kappa_{11}, \\ m_1 = -E' I_{23} \tilde{\kappa}_{22} - E' I_3 \kappa_{11}, \\ m_s = kI_0 G' \tau_{12}. \end{cases}$$

Ostatnie równanie (4.4) jest warunkiem fizycznym, przy czym  $kI_0$  oznacza sztywność belki na skręcanie.

Podstawiając związki (4.3) w równanie (4.4) otrzymamy następujące zależności między wielkościami statycznymi w belce a wielkościami statycznymi w powłoce na jej krawędzi

$$(4.5) \quad \begin{cases} n = \frac{E'F}{Eh} (N_1 - \nu N_2) + F \left( \mp \eta_0 \frac{m_2 I_3 \pm m_1 I_{32}}{I_{23} I_{32} - I_2 I_3} + \gamma_0 \frac{m_1 I_2 \pm m_2 I_{23}}{I_{23} I_{32} - I_2 I_3} \right), \\ m_2 = -\frac{E' I_2}{2GH_1 h} S_{2\alpha} - \frac{E' I_2}{2EGh} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_\beta + \\ \quad + \frac{E' I_2}{EH_1 H_2 h} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (N_1 - \nu N_2) \mp \frac{12E' I_{32}}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2)_\nu, \\ m_1 = \pm \frac{E' I_{23}}{2GH_1 h} S_{2\alpha} \pm \frac{E' I_{23}}{2EGh} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} (N_1 + N_2)_\beta \mp \\ \quad \mp \frac{E' I_{23}}{EH_1 H_2 h} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} (N_1 - \nu N_2) + \frac{12E' I_3}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2)_\nu, \\ m_s = \frac{6kI_0 G'}{Gh^3} M_{21}. \end{cases}$$

W równaniach (4.5) stosowano podwójne znakowanie. Górne znaki odnoszą się do krawędzi  $\beta = \beta_0$ , a dolne do krawędzi  $\beta = \beta_1 < \beta_0$ .



Analogicznie na krawędzi  $\alpha = \alpha_0$  i  $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$  otrzymamy równania równowagi:

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{l} -t_{2\beta} - n \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + t_1 \frac{H_2}{R_{12}} \mp H_2 N_1 + H_2 g_1 = 0, \\ -t_2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + n_\beta - t_1 \frac{H_2}{R_2'} \mp H_2 S_1 + H_2 g_2 = 0, \\ -t_2 \frac{H_2}{R_{12}} - n \frac{H_2}{R_2'} - t_{1\beta} \pm H_2 Q_1 - H_2 g_3 = 0, \\ -m_{1\beta} + m_s \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + m_2 \frac{H_2}{R_{12}} - t_1 H_2 - n_\beta \gamma_0 \mp n \xi_0 \frac{H_2}{R_{12}} + \\ + t_2 \gamma_0 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \mp t_1 \xi_0 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - n \gamma_{0\beta} \mp H_2 M_{13} + H_2 Z_1 = 0, \\ -m_1 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - m_{s\beta} - m_2 \frac{H_2}{R_2'} \pm t_{1\beta} \xi_0 - t_{2\beta} \gamma_0 - n \left( \gamma_0 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} \mp \xi_0 \frac{H_2}{R_2'} \right) - \\ - t_2 \gamma_{0\beta} \pm t_1 \xi_{0\beta} \pm H_2 M_1 + H_2 Z_2 = 0, \\ -m_1 \frac{H_2}{R_{12}} + m_s \frac{H_2}{R_2'} - m_{2\beta} + t_2 H_2 - n_\beta \xi_0 - n \left( \gamma_0 \frac{H_2}{R_{12}} \mp \xi_{0\beta} \right) \mp \\ \mp t_1 \xi_0 \frac{H_2}{R_2'} + t_2 \gamma_0 \frac{H_2}{R_2'} + H_2 Z_3 = 0. \end{array} \right.$$

Związki między wielkościami statycznymi belki i powłoki mają dla  $\alpha = \alpha_0$  oraz  $\alpha = \alpha_1 < \alpha_0$  postać

$$(4.7) \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{E'F}{Eh} (N_2 - \nu N_1) + F \left( \pm \xi_0 \frac{\pm m_1 I_{32} + m_2 I_3}{I_{23} I_{32} - I_1 I_3} - \gamma_0 \frac{\pm m_2 I_{23} + m_1 I_1}{I_{23} I_{32} - I_1 I_3} \right), \\ m_2 = -\frac{E'I_1}{2GH_2 h} S_{1\beta} + \frac{E'I_1}{2GEh} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2) \alpha - \\ - \frac{E'I_1}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (N_2 - \nu N_1) \pm \frac{12EI_{32}}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ m_1 = \pm \frac{E'I_{23}}{2GH_2 h} S_{1\beta} \mp \frac{E'I_{23}}{2GEh} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2) \alpha \pm \\ \pm \frac{E'I_{23}}{EhH_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} (N_2 - \nu N_1) - \frac{12E'I_3}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1), \\ m_s = \frac{6kI_0 G'}{Gh^3} M_{12}. \end{array} \right.$$

Podamy tu przykład zastosowania powyższych wzorów biorąc w tym celu pod uwagę powłokę walcową, pokazaną na rys. 3. Na brzegu  $\beta = \beta_0$  powłoka jest wzmocniona belką o stałym i symetrycznym przekroju, wykonaną z tego samego materiału co powłoka. Ciężar własny belki pomijamy.

Z drugiego i trzeciego równania (4.2) wyznaczamy siły poprzeczne

$$(4.8) \quad t_{2\alpha} = -N_1, \quad t_{1\alpha} = Q_2 - \frac{1}{R} n.$$

Gdy wyeliminujemy z pozostałych równań równowagi siły poprzeczne  $t_1$  i  $t_2$  otrzymamy

$$(4.9) \quad \begin{cases} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) n - \frac{Q_2}{R} + S_{2\alpha} = 0, \\ -m_{s\alpha} - \frac{m_2}{R} + \gamma_0 N_2 - M_2 = 0, \\ -m_{1\alpha\alpha} - \left( \frac{1}{R} + \gamma_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) n + Q_2 - M_{21\alpha} = 0, \\ \frac{1}{R} m_{s\alpha} - m_{2\alpha\alpha} + \left( 1 - \frac{\gamma_0}{R} \right) N_2 = 0. \end{cases}$$

W praktyce można przyjąć  $m_2 = 0$ , ponieważ w tym kierunku belka jest w porównaniu z powłoką bardzo wiotka.

Równania (4.5) przyjmują postać

$$(4.10) \quad \begin{cases} n = \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + \frac{12F\gamma_0}{h^3} (M_1 - \nu M_2), \\ m_1 = \frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2), \\ m_2 = 0, \\ m_s = \frac{6kI_0}{h^3} M_{21}. \end{cases}$$

Wstawiając (4.10) do (4.9) otrzymamy

$$(4.11) \quad \begin{cases} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left[ \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + \frac{12F\gamma_0}{h^3} (M_1 - \nu M_2) \right] - \frac{Q_2}{R} + S_{2\alpha} = 0, \\ -\frac{6kI_0}{h^3} M_{21\alpha} + \gamma_0 N_2 - M_2 = 0, \\ -\frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2)_{\alpha\alpha} - \left( \frac{1}{R} + \gamma_0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left[ \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + \frac{12F\gamma_0}{h^3} (M_1 - \nu M_2) \right] + Q_2 - M_{21\alpha} = 0, \\ \frac{6kI_0}{h^3 R} M_{21\alpha} + \left( 1 - \frac{\gamma_0}{R} \right) N_2 = 0. \end{cases}$$

Równania (4.11) formułują warunki, jakim mają uczynić zadość wielkości statyczne w powłoce wzmocnionej na krawędzi belki.

Dla płyty prostokątnej, wzmocnionej na krawędzi symetryczną belką o stałym przekroju i wykonaną z takiego samego materiału jak płyta postępując analogicznie jak powyżej otrzymamy:

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2)_x + \frac{F\eta_0}{h} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_{xy} + \\ & \quad + \left[ \frac{F\eta_0}{h} (1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 \right] S_2 + \frac{12F\gamma_0}{h^3} (M_1 - \nu M_2)_x + g_1 = 0, \\ & - \frac{6kI_0}{h^3} M_{21x} - \eta_0 Q_2 - \gamma_0 N_2 + M_2 - \eta_0 g_3 - \gamma_0 g_2 + z_1 = 0, \\ & - \frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2)_{xx} - Q_2 + M_{21x} - \gamma_0 S_{2x} + \gamma_0 g_{1x} - g_3 + z_{2x} = 0, \\ & \left[ \frac{I_2}{h} (1+\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] S_2 + \frac{I_2}{h} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_{xxy} - \\ & \quad - N_2 - \eta_0 g_{1x} - g_2 + z_{3x} = 0. \end{aligned} \right.$$

Równania (4.11) i (4.12) mają tak ogólną budowę, że zawierają przyładki klasycznych warunków podporowych. Przechodząc bowiem z odpowiednimi sztywnościami belki do zera albo do nieskończoności otrzymamy kolejno krawędź wolną, przegubowo podpartą, sztywnie zamocowaną lub sztywnie przytrzymaną.

Rozwiązując konkretne zagadnienia należy równania (4.11) i (4.12) przedstawić za pomocą funkcji naprężeń. Obliczając naprężenia w płycie za pomocą funkcji Airy'ego  $\Theta$  i funkcji ugięcia  $w$ , przedstawimy też przy ich pomocy równania (4.12). Jeżeli wprowadzimy taki układ współrzędnych  $s, n$ , że  $s$  jest styczną do konturu tak skierowaną, że obchodząc w kierunku dodatnim pozostawimy obszar z prawej strony, zaś  $n$  jest zewnętrzną normalną do konturu, wówczas dla obciążenia prostopadłego do płyty otrzymamy dla całego brzegu jednakowe równania:

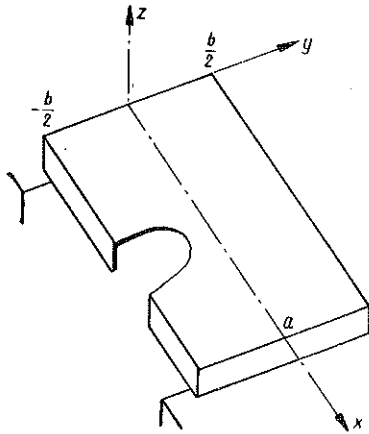
$$(4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Theta_n + \frac{F}{h} (\Theta_{nn} - \nu \Theta_{ss}) + \frac{F\eta_0}{I_2} (\Theta + \eta_0 \Theta_n) - EF\gamma_0 w_{ss} = 0, \\ & kI_0 G w_{ssn} - \eta_0 K (w_{ssn} + w_{nnn}) - K (w_{nn} + \nu w_{ss}) - \gamma_0 \Theta_{ss} = 0, \\ & EI_3 w_{sss} - K [w_{nnn} + (2-\nu) w_{ssn}] + \gamma_0 \Theta_{ssn} - g = 0, \\ & -\Theta - \eta_0 \Theta_n - \frac{I_2}{h} \left[ (1+\nu) + \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \right] \Theta_{ssn} - \frac{I_2 (1-\nu)^2}{h(1-2\nu)} \Theta_{nnn} = 0. \end{aligned} \right.$$

Analogicznie można utworzyć w ogólnym przypadku warunki brzegowe dla dowolnej powłoki. Równania odpowiadające (4.11) i (4.12) będą bardziej złożone, mogą być różniczkowo-całkowe o współczynnikach funkcyjnych.

Warunki brzegowe, ustalane lokalnie, nie zależą od warunków podparcia belki. Różniczkowa forma tych równań daje swobodę dodatkowego wyboru warunków podporowych metodami stosowanymi w teorii ustrojów prętowych, a więc w przemieszczeniach albo równie dobrze metodą sił.

### 5. Przykład liczbowy

Szczegółowy tok obliczenia powłoki objaśnimy jeszcze dodatkowo na przykładzie płyty (rys. 4) wzmocnionej z dwóch stron belkami a z dwóch pozostałych stron podpartej przegubowo. Rozpatrywaną płytę można ze względu na równoczesne występowanie płaskiego i momentowego stanu



Rys. 4

naprężeń uważać za szczególny przypadek powłoki. W podany poniżej sposób można rozwiązywać te wszystkie przypadki powłoki, gdy równania na brzegu i wewnątrz obszaru mają stałe współczynniki. Do takich równań można stosować metodę Fouriera. W innych przypadkach, bardziej złożonych nie można podać ogólnych metod rozwiązywania. Przeważnie będą to jednak przybliżone rozwiązania, a uproszczenia będą szły w kierunku zredukowania równań wewnątrz obszaru do znanych i rozwiązanych typów równań. (Warunki brzegowe mogą być nawet realizowane metodami wariacyjnymi).

Naprężenia w płycie opisuje się za pomocą funkcji  $\Theta$  i  $w$ . Muszą być tu zachowane warunki

$$(5.1) \quad \Delta\Delta\Theta = 0, \quad \Delta\Delta w = \frac{q}{K},$$

przy czym na brzegach  $x=0$ ;  $x=a$  powinno być  $w=w_{nn}=\Theta_{ss}=\Theta_{nn}=0$ , zaś dla brzegu  $y=\pm b/2$  zachowują słuszność równania (4.13). Rozwiązania poszukuje się w postaci szeregów Fouriera. Obciążenie płyty  $q_0 = \text{const}$  rozłożone w szereg ma postać

$$(5.2) \quad q = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Uwzględniając symetrię obciążenia i warunków brzegowych poszukuje się rozwiązania w postaci

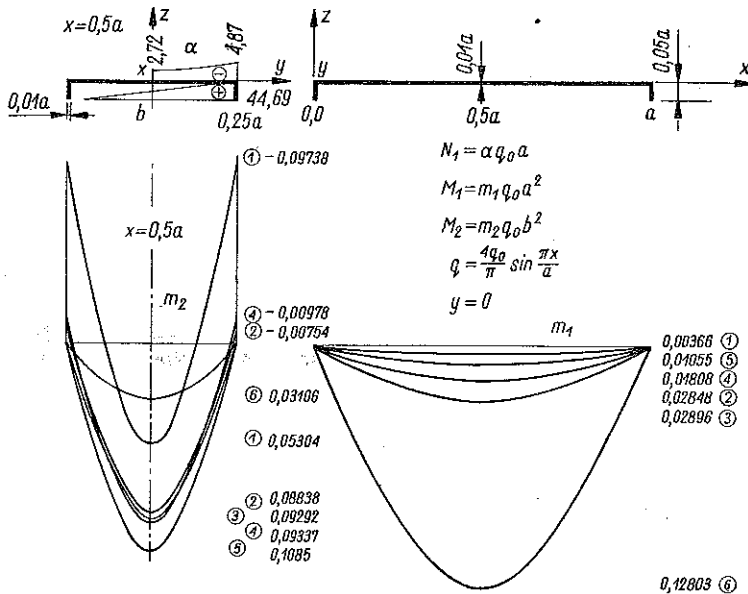
$$(5.3) \quad \begin{cases} \theta(x, y) = \frac{q_0 a^4}{K} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \\ w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{K} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{4}{n^5 \pi^5} + \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \left( C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + \right. \right. \\ \left. \left. + D_n \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \right] \sin \frac{n\pi}{a} x. \end{cases}$$

Na brzegach  $x=0$ ,  $x=a$  są już spełnione warunki brzegowe. Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  wyznacza się z warunków (4.13), ponieważ po podstawieniu (5.3) do (4.13) otrzymamy układ algebraicznych niejednorodnych równań z niewiadomymi stałymi całkowania.

Dla obciążenia

$$(5.4) \quad q = \frac{4q_0}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a},$$

otrzymano następujące wyniki, które ilustrują zależność naprężeń od sposobów podparcia na krawędzi  $y=0,5b$  (rys. 5):



Rys. 5

Rozpatrzono przypadki:

- 1) sztywne zamocowanie,
- 2) sprężyste podparcie gdy  $I_2 = 0$ ,  $I_3 \neq 0$ ,  $I_0 \neq 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ;
- 3) sprężyste podparcie gdy  $I_2 = 0$ ,  $I_3 \neq 0$ ,  $I_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ;
- 4) sprężyste podparcie gdy  $I_2 \neq 0$ ,  $I_3 \neq 0$ ,  $I_0 \neq 0$ ,  $\gamma_0 \neq 0$ ;
- 5) przegubowe podparcie,
- 6) krawędź swobodną.

Dla sprężystego podparcie jak w przypadku 4 otrzymamy dla  $x = 0.5a$  w końcowym wyniku obliczeń następujące wartości wielkości statycznych:

$$n = \frac{F}{h} (N_1 - \nu N_2) + F \gamma_0 \frac{m_1}{I_3} = 0,856 qa^2;$$

$$m_2 = -\frac{EI_2}{2Gh} S_x - \frac{I_2}{h} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} (N_1 + N_2)_y = -0,00911 \cdot 10^{-3} qa^3,$$

$$m_1 = \frac{12I_3}{h^3} (M_1 - \nu M_2) = 0,01145 qa^3,$$

$$m_s = 0.$$

## 6. Uwagi końcowe

1. Dziesięć niewiadomych wielkości statycznych w powłoce redukuje się za pomocą funkcji naprężeń  $a$ ,  $b$  i  $c$  do trzech. Funkcje naprężeń spełniają tożsamościowo równania równowagi i należy je wyznaczać z warunków nierozdzielności. Jak wynika z przykładu płyty i powłoki walcowej, warunki wewnątrz obszaru są tego samego typu jak w przypadku rozwiązania tego problemu w przemieszczeniach. Są to równania różniczkowe liniowe o pochodnych cząstkowych rzędu ósmego i typu eliptycznego. W ogólnym przypadku są to równania o współczynnikach funkcyjnych. Ze względu na brak ogólnych metod całkowania takich równań w konkretnych przypadkach będzie konieczne ich uproszczenie, polegające na pominięciu niektórych wyrazów albo na takiej aproksymacji współczynników funkcyjnych, aby sprowadzić je do typu rozwiązanych równań. Obliczanie powłok w naprężeniach tym się między innymi różni od metody przemieszczeniowej, że w przypadku pierwszym zawsze zachowuje się ściśle równania równowagi powłoki, natomiast tylko w przybliżeniu trzeba będzie spełniać warunki nierozdzielności. W przypadku drugim, przeciwnie, spełniamy ściśle warunki fizyczne, uproszczenia wnosimy do równań równowagi powłoki, zachowując je zazwyczaj tylko w przybliżeniu. Pod tym względem metoda naprężeń ma przewagę nad przemieszczeniową, zwłaszcza gdy się weźmie pod uwagę konstrukcje wykonane z żelbetu, w których ze względu na występowanie rys nie są zachowane postulowane często warunki nierozdzielności.

2. Na brzegu należy dawać po cztery warunki. Wymaga tego jednoznaczne rozwiązanie równań różniczkowych. Gdy brzeg jest wzmocniony belką, można warunki ustalać w dwojaki sposób: albo w przemieszczeniach, albo w naprężeniach. W ogólnym przypadku warunki przemieszczeniowe przyjmują bardziej złożoną budowę aniżeli warunki naprężeniowe. Obie metody są jednak sobie równoważne. Jeżeli bowiem w warunkach wyrażonych w naprężeniach zastąpimy wszystkie wielkości statyczne odpowiadającymi im wyrazami przemieszczeniowymi, otrzyma-

my warunki brzegowe w przemieszczeniach. Gdy problem wymaga obliczenia tylko naprężeń w konstrukcji, wówczas zadanie może być rozwiązane całkowicie w naprężeniach bez przechodzenia do przemieszczeń.

3. Warunki brzegowe są formułowane lokalnie, różniczkowo, zostawiając swobodę spełniania dowolnych warunków podporowych na końcach belki. Warunki podporowe mogą być określane metodami stosowanymi w teorii ustrojów prętowych, a więc metodą sił, albo metodą przemieszczeniową.

4. Przedstawione wzory dotyczą zasadniczo takich przypadków, gdy belka wzmacnia krawędź powłoki. W przypadku ogólniejszym, czyli dowolnym usytuowaniu belki w obszarze, należy postępować analogicznie. Różnica polega na tym, że w równaniach równowagi belki należy brać sumę oddziaływań z obu stron. Związki między wielkościami statycznymi w belce i w powłoce należy utworzyć na podstawie (4.5) i (4.7) osobno dla jednej, osobno dla drugiej strony belki biorąc odpowiednie odległości środka ciężkości belki od krawędzi powłoki i uwzględniając odpowiednie współczynniki formy metrycznej. Wielkości statyczne w belce nie zależą od tego czy je obliczamy idąc z lewej, czy też z prawej krawędzi. Stąd wynikają zależności między wielkościami statycznymi w powłoce po obu stronach belki. Są to równania ciągłości, które łącznie z równaniami belki są warunkami wzmocnienia powłoki belką umieszczoną wewnątrz obszaru<sup>2</sup>.

#### Резюме

#### ОБОЛОЧКИ ПОДКРЕПЛЕННЫЕ БАЛКАМИ

В работе дается способ расчета оболочек подкрепленных балками. Эту задачу автор представил в напряжениях, а не как это обычно делается в перемещениях. Задача рассматривается в общей форме для произвольной оболочки. Таким образом, для решения задачи необходима формулировка условий внутри области оболочки, основываясь на функциях напряжений, а также условий упругого сотрудничества балки; это сотрудничество представлено краевыми условиями. На каждом краю имеются четыре условия, т.е. количество их обеспечивает однозначность решения дифференциального уравнения с частыми произвольными эллиптического типа, из которого определяются функции напряжений.

Для сформулирования задачи внутри пространства, автор использовал функции напряжений данные Лурье и Гольденвейзером ([8], с. 37) и дополнил их особым интегралом неоднородных уравнений равновесия, а затем наложил на них условия неразрывности, применяемые к оболочкам в интеграле упругих деформаций.

Затем автор доказал, что для цилиндрической оболочки и прямоугольной пластинки получаем таким образом уравнения того же типа,

служащие для определения решающей функции, как и при решении задач в перемещениях.

Сотрудничество балки с оболочкой автор представил в виде краевых условий, которые состоят из уравнений равновесия балки, находящейся под нагрузкой воздействия оболочки и из геометрических зависимостей, которые выступают в случае полного соединения.

На примере цилиндрической оболочки и пластинки представлены применения общих формул. Подробный пример пластинки с упругими ребрами иллюстрирует место расчета. Результаты расчетов представлены графически.

### Summary

#### SHELLS STIFFENED WITH BEAMS

A method is suggested for computing shells stiffened with beams. This problem is described in stresses not, in the usual manner, in displacements. An arbitrary shell is considered. It was necessary to establish conditions inside the shell on the basis of the stress functions and the elastic interaction of the stiffening beams constituting the boundary conditions. Four conditions on each edge are available, ensuring the uniqueness of solution of the partial differential equation of the elliptical type from which the stress functions are obtained.

In order to state the problem inside the region, stress functions are used as given by Lurye and Goldenweiser ([8], p. 37). They are completed by the present author with a particular integral of non-homogeneous equilibrium equations and compatibility conditions used for shells in the elastic region.

Next it is shown that for cylindrical shells and rectangular plates, equations of the same type are obtained for the determination of the resolving function, as in the case of solution in displacements.

The interaction of the beam with the shell is expressed by the author in the form of boundary conditions obtained from the equilibrium conditions of a beam loaded by the reactions of the shell, and from geometrical relations appearing in the case in which both parts constitute a monolithic structure.

The application of the general equations is illustrated by way of an example of a cylindrical shell and a plate. The computation method is illustrated by a numerical example of a plate with elastic ribs. The results are represented graphically.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 września 1957 r.*