

RYSZARD DĄBROWSKI

SKRĘCANIE MOSTOWYCH I HYDROTECHNICZNYCH
KONSTRUKCJI CIENKOŚCIENNYCH
O PRZEKROJU ZAMKNIĘTYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CI

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp	283
2. Rodzaje konstrukcji mostowych i hydrotechnicznych o przekroju zamkniętym	286
2.1. Konstrukcje mostowe	286
2.2. Zamknięcia wodne	289
3. Równania technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym nieodkształcalnym	292
3.1. Przypadek czystego skręcania	292
3.2. Równania różniczkowe skręcania skrępowanego	294
3.3. Rozwiązanie równań różniczkowych zagadnienia dla kilku przypadków obciążenia	298
3.4. Teoria uproszczona i porównanie wyników	300
4. Zastosowania teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym nieodkształcalnym	302
4.1. Uogólnienie rozwiązania na przypadek przekroju otwarto-zamkniętego	302
4.2. Charakterystyki przekrojów mostowych i poprzeczne linie wpływowe naprężeń normalnych	309
4.3. Konstrukcje z narzuconą osią obrotu (klapy soczewkowate) Numeryczno-wykreslny sposób wyznaczania charakterystyk przekroju	317
4.4. Pręty zakrzywione o przekroju zamkniętym bisymetrycznym	327
5. Skręcanie dźwigarów skrzynkowych o przekroju odkształcalnym	332
5.1. Wyprowadzenie równania różniczkowego według teorii przybliżonej dla pręta obciążonego między przeponami	332
5.2. Rozwiązanie równania różniczkowego. Układ zastępczy	338

1. Wstęp

W nowoczesnym budownictwie stalowym zaznacza się tendencja do stosowania konstrukcji pełnościennych o przekroju zamkniętym między innymi w budownictwie mostowym (pewne typy mostów drogowych i kolejowych) i w budownictwie wodnym (różnego rodzaju zamknięcia). Również w mostach żelbetowych znalazły zastosowanie konstrukcje nośne o przekroju zamkniętym. Konstrukcje takie odznaczają się dużą sztywnością na skręcanie, dzięki której są w stanie przenosić obciążenia poprzeczne działające na znacznym mimośrodku względem ich osi podłużnej.

Łatwość konstrukcyjnego rozwiązania przekrojów zamkniętych w obiektach stalowych wiąże się z zastosowaniem spawania; dzięki spawaniu zmniejsza się przy tym zużycie materiału, a konstrukcja zyskuje na wygładzie.

W budownictwie mostowym przekrój skrzynkowy był zastosowany po raz pierwszy przed przeszło stu laty w Anglii w moście kolejowym mającym rozpiętość 145 m.

W okresie powojennym w Niemczech mosty o przekroju zamkniętym zostały już kilkakrotnie wykonane dla bardzo dużych rozpiętości przy nadzwyczaj małych wysokościach konstrukcyjnych. Były to z reguły mosty wielopręsłowe o zmiennej wysokości przekroju, w których dla jezdni zastosowana została konstrukcja w postaci płyty ortotropowej, a blacha jezdni została wciągnięta do współpracy jako pas górny dźwigarów głównych (rys. 1e). Płytę z blachy zastosowano również u dołu z myślą zastąpienia grubych wielowarstwowych pasów jedną blachą przekształcającą przekrój mostu w przekrój skrzynkowy. Uzyskane dzięki temu zwiększenie sztywności skrętnej przy przenoszeniu jednostronnego obciążenia użytkowego było dodatkową korzyścią konstrukcyjną, która jednak przy dużej rozpiętości mostu i znacznym rozstawie skrajnych dźwigarów nie daje istotnej korzyści ekonomicznej. Przy dużych rozpiętościach przeważa bowiem wpływ ciężaru własnego, zwłaszcza w mostach o małych wysięgach jezdni poza dźwigary skrajne (jeżeli np. na wspornikach znajdują się tylko stosunkowo mniej obciążone chodniki).

Dlatego przy szerszych mostach o kilku dźwigarach głównych (w przypadku przekrojów zamkniętych właściwiej jest mówić o kilku środnikach jednego dźwigara) korzystne jest rozwiązanie, w którym część zamknięta dana jest w skrajnych partiach przekroju (rys. 1f).

Rozwiązanie analogiczne do omówionych spotkać można również w mostach żelbetowych.

W sposób bardziej istotny sztywność skrętna przekroju zamkniętego została wykorzystana w mostach przedstawionych na rys. 1a-1d. Tutaj część zamknięta zajmuje tylko około $1/3$ szerokości mostu, a na wsporniki została wyniesiona również część jezdni. Zaletą takiego rozwiązania jest możliwość zastosowania węższych filarów, co np. odgrywa ważną rolę przy usytuowaniu nowych, szerszych mostów na starych podporach lub przy przeprowadzaniu wiaduktów w warunkach ograniczających szerokości podpór. W konstrukcjach charakteryzujących się wyniesieniem znacznej części przekroju na wsporniki sztywność skrętna przekroju zamkniętego odgrywa istotną rolę, zwłaszcza przy średnich i małych rozpiętościach. Występujące przy skręcaniu naprężenia styczne i normalne wymagają odpowiedniej analizy.

W budownictwie wodnym, jak już wspomniano, jako konstrukcje o przekroju zamkniętym wykonywane są z powodzeniem różnego rodzaju zamknięcia, służące do trwałego lub okresowego spiętrzania wody (rys. 4-7). Zastosowanie konstrukcji pełnościennych (spawanych) w zamknięciach wodnych zmniejsza niebezpieczeństwo korozji i obniża koszty związane z konserwacją.

Teorii ustrojów cienkościennych o przekroju zamkniętym poświęcono w ostatnich 25 latach szereg prac. Bodźcem do rozwoju teorii służyły problemy związane z obliczaniem konstrukcji nośnych w samolotach.

W pierwszych pracach autorzy (Reissner, [1], Ebner, [2], Grzędzielski, [3], Bielajew¹⁾) zajmowali się skręcaniem pewnego wyidealizowanego przekroju zastępczego, którego ścianki przenoszą jedynie naprężenia styczne, a naprężenia normalne są przenoszone przez pręty podłużne, skupione w określonych punktach obwodu, i odbierające naprężenia styczne ze ścianek. Teoria ta ma charakter przybliżenia.

Z drugiej strony zagadnienie skręcania było w ostatnich latach rozważane również w sposób ścisły, między innymi w oparciu o teorię powłok, [6] - [8]. Ścisła teoria prowadzi jednak do nader żmudnych obliczeń.

Opracowana w różnym czasie przez kilku autorów techniczna teoria skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym opiera się na założeniu 1) niezmienności kształtu przekroju, czyli nieodkształcalności przekroju, oraz 2) założeniu, że naprężenia normalne towarzyszące skrę-

¹ Por. także [4] i [5].

powanemu skręcaniu mają przebieg podobny do wartości przesunięć podłużnych, rozpatrywanych punktów przekroju przy skręcaniu czystym.

Pierwsze opracowania technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym (np. pierwsza praca U m a n s k i e g o, [9], por. także [10], czy też praca B o r n s c h e u e r a, [11]), były właściwie przeniesieniem znanego przedtem równania różniczkowego skręcania skrepowanego prętów cienkościennych o przekroju otwartym na przekroje zamknięte².

W opracowaniach dokładniejszych (późniejsza praca U m a n s k i e g o, [9], por. także [10], oraz praca B e n s c o t t e r a, [13]) zagadnienie skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym sprowadzone jest do dwóch równań różniczkowych, w których obok funkcji kąta skręcenia występuje jeszcze pewna funkcja deplanacji (spaczenia) wprowadzona dla określenia naprężeń normalnych.

W niniejszej pracy teoria techniczna (w ujęciu podanym przez U m a n s k i e g o, por. [10]) została przedstawiona pokrótce w rozdziale trzecim.

W rozdziale czwartym przedstawiono zastosowanie tej teorii do obliczania naprężeń w przekrojach mostowych o jednej osi symetrii po uprzednim wyprowadzeniu odpowiednich równań dla przekroju otwarto-zamkniętego, charakterystycznego dla wielu przekrojów mostowych. Dalej podana została metoda obliczania dowolnego przekroju otwarto-zamkniętego, charakteryzującego się narzuconą osią obrotu, w zastosowaniu do obliczania naprężeń powstających od skręcania w zamknięciach kłapowych. Ponadto w rozdziale czwartym obejmującym wyłącznie przekroje nieodkształcalne wyprowadzone zostały równania różniczkowe dla pręta zakrzywionego na podstawie teorii uproszczonej. Chodzi tu o mosty zakrzywione o przekroju zamkniętym.

W rozdziale piątym rozpatrzone zostało zagadnienie skręcania dźwignara skrzynkowego o przekroju odkształcalnym. Przy pewnych założeniach upraszczających wyprowadzono równanie różniczkowe zagadnienia, wykazujące analogię do zagadnienia zginania zwykłej belki na sprężystym podłożu.

W niniejszej pracy rozpatrywane są tylko konstrukcje posiadające stały przekrój na całej ich długości.

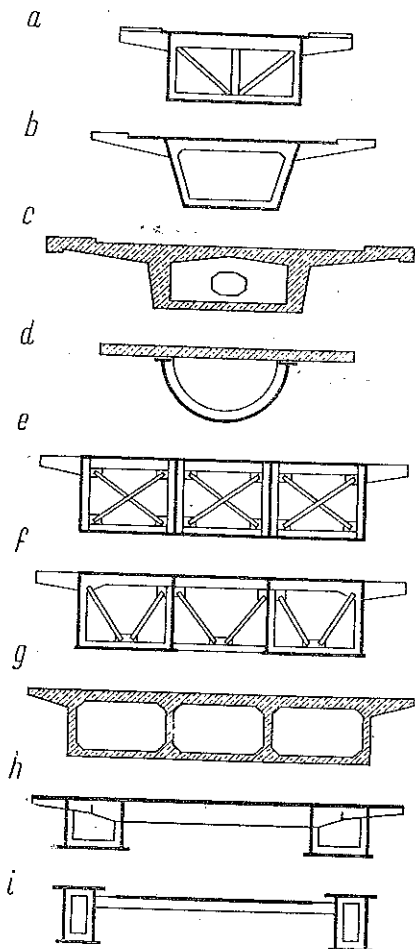
Rozważania teoretyczne poprzedza (w rozdziale drugim) omówienie różnych typów konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym, stosowanych w budownictwie mostowym i hydrotechnicznym.

² To równanie dla szczególnego przypadku belki dwuteowej zostało wyprowadzone przez T i m o s z e n k ę (1905), a później przez W e b e r a (1926) rozszerzone na przekroje o niejednakowych półkach. Uogólnienie na dowolne przekroje otwarte przedstawili W a g n e r (1929) (por. uwagi bibliograficzne podane w [12]) i W ł a s o w (por. np. [10]).

Do niektórych podręczników mostowych wydanych w ostatnich dwóch latach, [14], wprowadzono już krótkie rozdziały poświęcone skręcaniu konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym, co świadczy o tym, że omawiane zagadnienie nabiera wagi w budownictwie mostowym. Zasluguje ono na pełniejsze opracowanie.

2. Rodzaje konstrukcji mostowych i hydrotechnicznych o przekroju zamkniętym

2.1. Konstrukcje mostowe. Różne typy przekrojów skrzynkowych stosowanych w budownictwie mostowym zarówno stalowym, jak i żelbetowym przedstawione są na rys. 1a-1i.



Rys. 1

Podzielić je można na przekroje jednokomorowe (1a-1d) i wielokomorowe (1e-1g oraz 1h-1i).

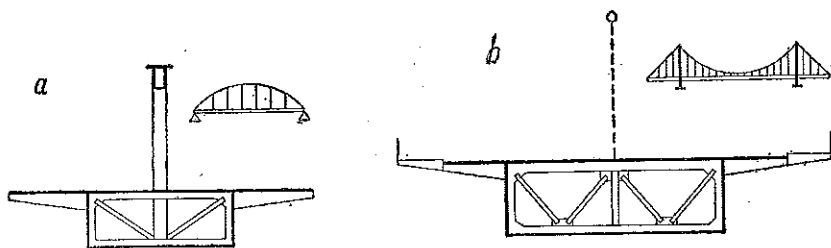
Przekroje jednokomorowe (jednostopne) w najprostszym przypadku składają się tylko z części zamkniętej (rys. 1a). Szersze możliwości konstrukcyjne daje zastosowanie przekroju otwarto-zamkniętego (rys. 1b-1d); przekrój skrzynkowy zapewniający sztywność skrętną konstrukcji może być dany tylko w części środkowej przekroju (np. na 1/3 szerokości mostu), pozostała część jezdni i chodniki zostają wyniesione na wsporniki. W płycie jezdni w części wspornikowej zarówno w konstrukcji stalowej b, jak i żelbetowej c czy wreszcie w konstrukcji zespolonej d powstają przy skręcaniu przekroju, wskutek trwałego połączenia tej części z częścią zamkniętą, dodatkowe naprężenia normalne i styczne podobnie jak w części zamkniętej.

Przekroje wielokomorowe stosowane są przy większych szerokościach mostu, gdzie zazwyczaj celowe jest stosowanie kilku środków.

Mosty stalowe typu e-f wykonano już dla bardzo znacznych rozpiętości. Bliższe dane znaleźć można w literaturze, [15], [16].

W budownictwie mostów żelbetowych przekroje wielokomorowe *g* były stosowane z pewnością wcześniej aniżeli konstrukcje jednokomorowe o dużych wysięgach wsporników (typ *c*); na zalety konstrukcyjne i architektoniczne tych ostatnich zwrócono uwagę w latach ostatnich (por. [17]).

W konstrukcjach typu *e-g* (jak to już podkreślono we wstępie) duża sztywność skrętna przekroju przy dużej rozpiętości mostu nie zostaje w pełni wykorzystana. Obciążeniem działającym mimosrodkowo względem podłużnej osi mostu może być właściwie tylko obciążenie użytkowe, a raczej tylko ta część obciążenia użytkowego, która nie działa na całej szerokości mostu (por. rys. 2*a* i 2*b*). Jaką stanowi ona część całkowitego obciążenia użytkowego, zależy od obowiązujących w danym kraju norm i przepisów. Jesliby np. przyjmowało się obciążenie użytkowe z jednego tylko pasa jezdni, wówczas działanie skrętne odgrywałoby większą rolę, a zatem i korzyści z zastosowania przekroju skrzynkowego byłyby większe. W mostach o dużych rozpiętościach przeważa ciężar własny konstrukcji i korzyści z zastosowania przekroju zamkniętego na całej szerokości jezdni są mniejsze. Trzeba bowiem mieć również to na uwadze, że szerokie ścianki dolne wymagają odpowiedniego stężenia (uźebrowania), zwłaszcza w dźwigarach o zmiennej wysokości.



Rys. 2

Wielkość dodatkowych naprężeń normalnych wywołanych skręcaniem mostów o przekroju jedno- i wielokomorowym, a także o przekroju otwartym, została bliżej zanalizowana niżej w p. 4.2.

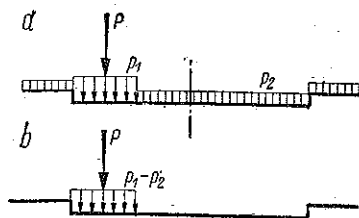
Duża sztywność skrętna, a tym samym zastosowanie przekroju skrzynkowego, staje się nieodzownym czynnikiem konstrukcyjnym w mostach typu jednodźwigarowego (rys. 3*a* i 3*b*). W mostach tych obciążenie symetryczne przenosi pojedynczy dźwigar główny — łuk ze sztywnym ściąganiem (rys. 3*a*, por. także [18]) lub ustrój wiszący (rys. 3*b*, por. także [19]). Natomiast obciążenie antysymetryczne względem podłużnej osi mostu przenoszone jest przez dźwigar usztywniający, posiadający odpowiednią sztywność skrętną.

Do konstrukcji typu jednodźwigarowego można właściwie zaliczyć omówione już przekroje skrzynkowe jednokomorowe o dużych wysięgach

wsporników, gdzie duża sztywność skrętna jest również praktycznie nieodzowna dla racjonalnego przeniesienia obciążeń użytkowych.

Istotną rolę spełniają główne dźwigary skrzynkowe w przypadku umieszczenia ich na zewnątrz przekroju i utwierdzenia w nich jezdni (rys. 1h i 1i).

Pasy górne dźwigarów skrzynkowych w pierwszym rozwiązaniu *h*, które może znaleźć zastosowanie między innymi w mostach wiszących, stanowią zarazem część składową blachy jezdni, tak że belkę mostową



Rys. 3

można by traktować jako pręt o przekroju cienkościennym otwarto-zamkniętym. Tutaj jednak istotną rolę gra odkształcalność przekroju i zadanie jest skomplikowane; można zadowolić się prostszym rozwiązaniem przybliżonym, mającym zastosowanie w przypadku *i*.

W przypadku *i* płyta ortotropowa jezdni łączy dwa (osobne) dźwigary skrzynkowe i jest do nich sprężysto utwierdzona poniżej poziomu pasów górnych tych dźwigarów. Naprężenia normalne, wywołane skręcaniem w praktyce ograniczają się do części zamkniętych. W odróżnieniu od przypadku poprzedniego naprężenia normalne w płycie jezdni nie występują pod wpływem skręcania. Konstrukcję typu *i* zastosowano również w mostach zakrzywionych w planie (por. [20]).

Szereg bardzo ciekawych rozwiązań mostów skrzynkowych (typów omówionych powyżej) przedstawiono w pracy [21].

Duża sztywność skrętna cechuje przekroje zamknięte, stężone dostatecznie gęsto przeponami. W konstrukcjach stalowych z uwagi na cienkość blachy przepony są nieodzowne. Mogą to być przepony kratowe lub ramowe. Te ostatnie są mniej sztywne i muszą być umieszczone w mniejszych odstępach.

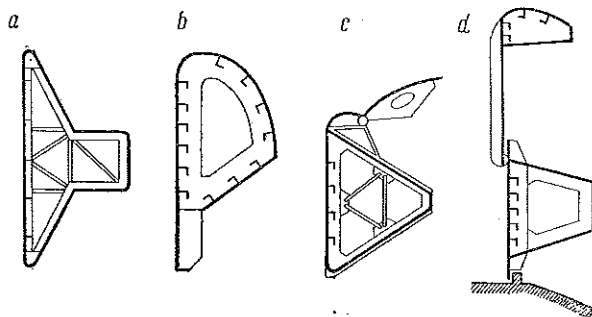
Przekroje wzmocnione przeponami kratowymi można traktować jako nieodkształcalne w swojej płaszczyźnie. Przekroje między przeponami zmieniają jednak w pewnej mierze kształt nawet wówczas, gdy obciążenie zewnętrzne działa (poprzez układ podłużnic lub za pośrednictwem płyty jezdni) praktycznie tylko na przekroje stężone przeponami. Przy dostatecznie gęstym rozstawieniu sztywnych przepon (np. w przekrojach prostokątnych przy odstępach równym średniej arytmetycznej szerokości obu sąsiednich ścianek) wpływ ten można pominąć (por. [22]).

Przekroje wzmocnione przeponami ramowymi, zwłaszcza niezbyt silnymi, są przekrojami odkształcalnymi i przy gęstym rozstawieniu przepon mogą być analizowane metodą podaną w p. 5.1 - 5.2.

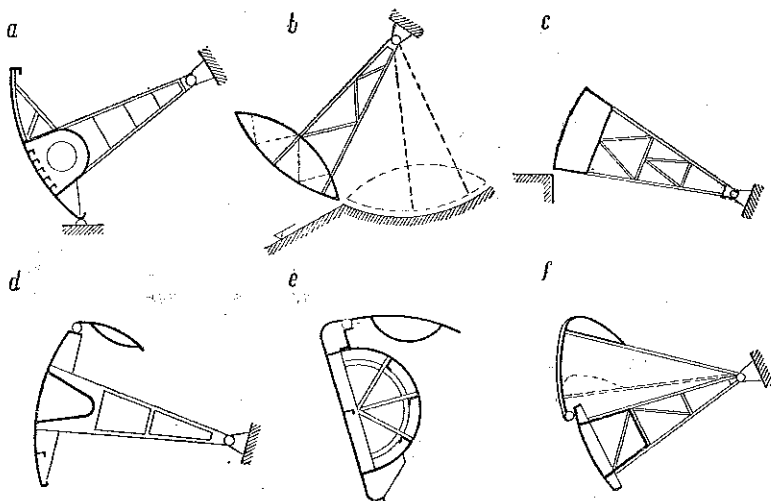
W mostach żelbetowych przepony są konieczne tylko w przekrojach podporowych. Racjonalniejsze ze względu na wykonanie jest rozwiązanie prostsze, kiedy w prześle nie daje się przepon. Należy wówczas zanalizować dodatkowe zginanie ścianek w płaszczyźnie przekroju i wzrost odkształceń przy jednostronnym obciążeniu mostu (por. p. 5.2).

2.2. Zamknięcia wodne. W ostatnich latach różnego typu zamknięcia stosowane w budownictwie wodnym, wykonywane są coraz częściej jako konstrukcje pełnościenne o przekroju zamkniętym. Ich zaletą obok dużej wytrzymałości skrętnej jest możliwość racjonalnego i prostego skonstruowania oraz łatwość konserwacji jak również estetyczny wygląd (por. [23]).

Przykłady zastosowania konstrukcji pełnościennej o przekroju zamkniętym można znaleźć w następujących typach zamknięć:



Rys. 4



Rys. 5

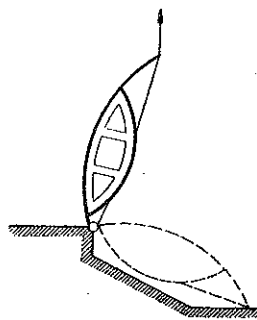
1) zasuwki rolkowe (pojedyncze) (rys. 4a i 4b), pojedyncze z klapą (rys. 4c), jak również zasuwki podwójne (rys. 4d),

2) zamknięcie sektorowe (inaczej segmentowe): zwykle (rys. 5a-5c), sektorowo-klapowe (rys. 5d i 5e) i sektorowe podwójne (rys. 5f),

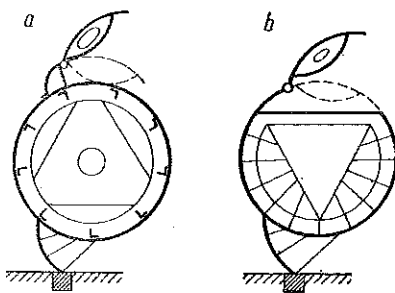
3) zamknięcia obrotowe w postaci kłapy soczewkowatej (rys. 6),

4) zamknięcia walcowe (rys. 7a i 7b).

Pod działaniem niesymetrycznego obciążenia wszystkie wymienione konstrukcje ulegają skręcaniu. Pod względem statycznym możemy wyróżnić dwie grupy konstrukcji: 1) posiadające swobodną (naturalną) oś obrotu i 2) posiadające narzuconą oś obrotu.



Rys. 6



Rys. 7

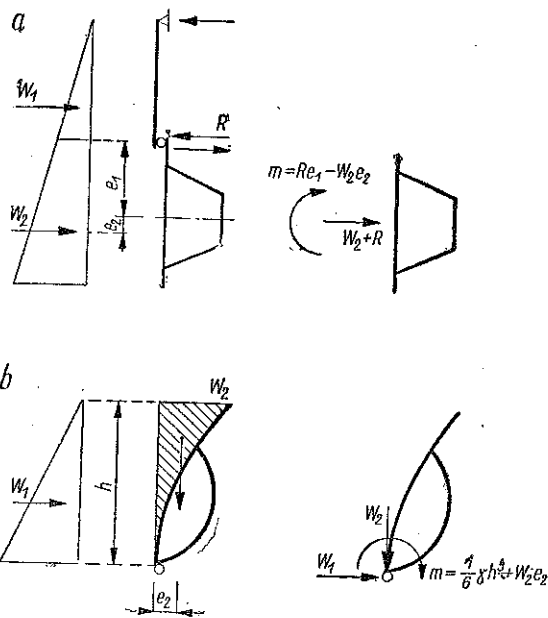
Z wyjątkiem klap soczewkowatych (rys. 6), które należą do grupy drugiej, wszystkie pozostałe zasadniczo zaliczyć można do pierwszej grupy z tym zastrzeżeniem,

że w konstrukcjach mieszanych (rys. 4c, 5d, 5e, 7a, 7b) występują również kłapy obracające się wokół narzuconych osi obrotu jako elementy dodatkowe.

Na rysunku 8 przedstawione są najbardziej niekorzystne przypadki obciążenia dla konstrukcji obu rodzajów.

Przy określaniu stanu naprężenia wywołanego tym obciążeniem należy rozróżniać obciążenie lokalne i obciążenie całości konstrukcji, która jest traktowana jako pręt cienkościenny.

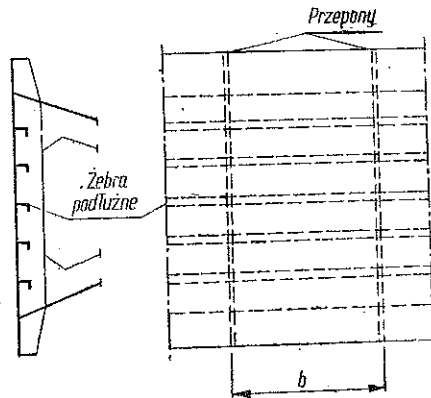
Płaskie elementy, na które działa bezpośrednio ciśnienie wody, jak np. na rys. 4a-4d, są wzmocnione żebrami podłużnymi, opierającymi się na przeponach. Prostokątny element blachy poszycia (rys. 9), ograniczony dwiema przeponami i dwoma sąsiednimi żebrami, pracuje



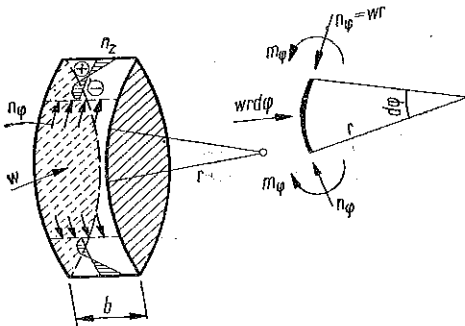
Rys. 8

w przybliżeniu jak płyta zamocowana na obwodzie. Należy zwrócić uwagę na to, że nośność graniczna tego elementu płytowego jest znacznie większa od obciążenia, przy którym w zginanej płycie osiągnięta zostaje granica plastyczności we włóknach skrajnych. Nośność płyty o małej grubości w stosunku do wymiarów rzutu jest większa dzięki błonowemu stanowi naprężenia, jaki powstaje przy dużych ugięciach (rzędu grubości płyty).

Elementy zakrzywione przy obciążeniu lokalnym pracują jak krótkie powłoki walcowe ciągłe, podparte na przeponach (rys. 10). W powłoce powstają przede wszystkim naprężenia normalne obwodowe $n_\varphi = wr$ (gdzie w jest ciśnieniem normalnym, zaś r promieniem krzywizny), mniej więcej stałe wzdłuż tworzącej. W części poszycia przyległej do krawędzi podłużnych, gdzie występuje nagle zmiana zakrzywienia, siły n_φ zanikają. Wskutek zaburzenia brzegowego wznoszą tam siły podłużne n_z i powstają momenty obwodowe m_φ zanikające od brzegów ku środkowi poszycia. Przy bardzo wnikliwym obliczaniu konstrukcji należałoby tu



Rys. 9



Rys. 10

zatem stosować teorię powłok, jednak ograniczając się do niezbyt małych krzywizn (tzn. niezbyt dużych r); w przeciwnym razie stosować trzeba bardziej złożoną teorię dużych ugięć.

Obliczenie całości konstrukcji jako pręta cienkościennego o przekroju zamkniętym opiera się na założeniach podanych w rozdziale trzecim. Przykłady skręcania ze swobodną osią obrotu (rys. 8a)

przedstawione będą przy omawianiu konstrukcji mostowych (p. 4.1-4.2). Dla konstrukcji hydrotechnicznych posiadających przynajmniej jedną oś symetrii tok obliczenia jest identyczny.

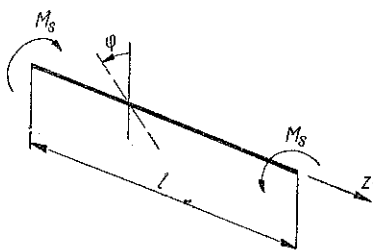
W przypadku skręcania z narzuconą osią obrotu (rys. 8b) naprężenia normalne i styczne wyznacza się również na podstawie równań podanych w rozdziale trzecim. Zginanie w zwykłym sensie tu nie występuje. Za to obliczeniowy moment skręcający względem osi obrotu z reguły jest tu odpowiednio większy niż w przypadku skręcania ze swobodną osią obrotu.

W punkcie 4.3 przedstawiony będzie sposób wyznaczania charakterystyk przekroju dla przypadku skręcania z narzuconą osią obrotu. Rozpatrywane są podobnie jak w przypadku mostów konstrukcje o stałym przekroju.

W niektórych konstrukcjach zasuw stosowany jest przekrój zmienny różny na różnych odcinkach długości jak np. w zasuwie podwójnej przedstawionej na rys. 4d. Dla odcinków o stałym przekroju można stosować wyniki teorii skręcania prętów o stałym przekroju. W miejscach zmiany przekroju wystąpią trudne do liczbowego ujęcia zaburzenia lokalne. Zazwyczaj jednak największe dodatkowe naprężenia normalne występują w środkowej części rozpiętości, gdzie przekrój jest stały, i mogą w przybliżeniu być określone z równań mających zastosowanie do pręta o przekroju stałym na całej długości.

3. Równania technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym nieodkształcalnym

3.1. Przypadek czystego skręcania. Przypadek czystego (inaczej swobodnego) skręcania charakteryzuje się pełną swobodą przemieszczeń w kierunku podłużnym. W przekrojach poprzecznych skręcanego pręta występują tylko naprężenia styczne, nie występują natomiast naprężenia normalne.



Rys. 11

Ze skręcaniem swobodnym mamy do czynienia jedynie w przypadku obciążenia pręta równymi i przeciwnie skierowanymi momentami skręcającymi, działającymi na obu końcach pręta; przekroje skrajne powinny przy tym posiadać pełną swobodę odkształcenia w kierunku podłużnym (rys. 11). Zakładamy ponadto, że mo-

menty skręcające są wywołane w przekrojach skrajnych za pomocą naprężeń stycznych, których przebieg wynika z rozkładu naprężeń stycznych w przekrojach wewnętrznych. Równoznaczne to jest ze stwierdzeniem, że przekroje poprzeczne znajdują się w jednakowym stanie naprężenia.

Z warunków równowagi otrzymuje się wartość naprężenia stycznego (rys. 12)

$$(3.1) \quad \tau = \frac{M}{\Omega \delta},$$

gdzie $\Omega = \oint h ds$ (rys. 13) oznacza podwojone pole powierzchni objęte konturem przekroju, zaś δ grubość ścianki.

Siła styczna T przypadająca na jednostkę długości obwodu ma wartość stałą $T = \tau \delta = M/\Omega = \text{const.}$

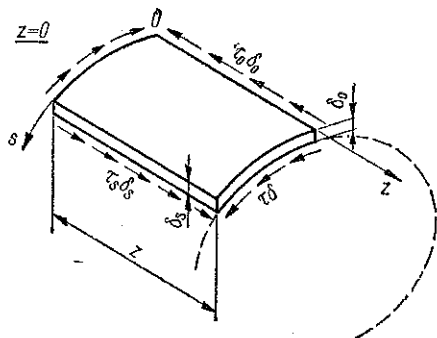
Jednostkowy kąt skręcenia $\varphi' = d\varphi/dz$ określony jest równaniem

$$(3.2) \quad \varphi' = \frac{M}{GJ_d},$$

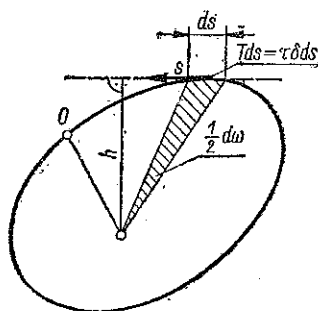
gdzie

$$(3.3) \quad J_d = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$$

jest momentem bezwładności czystego skręcania.



Rys. 12



Rys. 13

Równania (3.1) i (3.2)-(3.3) znane są pod nazwą wzorów Bredta.

Dla dalszych rozważań najważniejsze jest stwierdzenie, że przekroje skręcanego pręta przestają być płaskie, ulegają one spaczeniu.

Przesunięcia punktów w kierunku podłużnym oznaczane przez u określone są równaniem (por. np. [10])

$$(3.4) \quad u = -\varphi' \left(\omega - \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta} \right),$$

gdzie wartość $\omega = \int_0^s h ds$ oznacza podwojoną powierzchnię wycinka zawartego między konturem i dwoma promieniami wodzącymi, wyprowadzonymi ze środka obrotu i przechodzącymi przez punkt początkowy O lub rozpatrywany punkt s (rys. 13). Nazywana jest ona polem powierzchni wycinkowej danego punktu s .

Całe wyrażenie zawarte w nawiasie w (3.4),

$$(3.5) \quad \bar{\omega} = \omega - \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta},$$

stanowi dalszą charakterystykę punktu s przekroju i może być określone jako zredukowana powierzchnia wycinkowa.

Przy uwzględnieniu (3.5) równanie (3.4) można zapisać w postaci
(3.6)

$$u = -\varphi' \bar{\omega}.$$

Przesunięcia podłużne u przy czystym skręcaniu są zatem proporcjonalne do wartości zredukowanych powierzchni wycinkowych $\bar{\omega}$.

3.2. Równania różniczkowe skręcania skrępowanego. Jeżeli w przypadku obciążenia przedstawionym na rys. 11 jeden z końców pręta (albo oba) będzie utwierdzony, tzn. pozbawiony swobody deplanacji, wówczas w przekroju skrajnym jak również w innych przekrojach pręta wystąpią naprężenia normalne i mamy wtedy do czynienia ze skręcaniem skrępowanym.

Ma ono miejsce również we wszystkich innych przypadkach skręcania pręta z wyjątkiem prętów o przekrojach nie ulegających deplanacji, jak przekrój kołisty, kwadratowy lub każdy inny wielobok foremny (przy stałej grubości ścianki).

Techniczna teoria skręcania skrępowanego prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym opiera się na dwóch następujących założeniach: 1) kształt geometryczny przekroju przy skręcaniu nie ulega zmianie, 2) rozkład naprężeń normalnych (wywołanych skręcaniem) jest w przekroju proporcjonalny do przesunięć podłużnych u , jakie w danym przekroju występują przy skręcaniu swobodnym.

Pierwsze założenie jest praktycznie spełnione przy dostatecznie gęstym rozmieszczeniu niepodatnych przepon poprzecznych.

W odniesieniu do drugiego założenia należy zauważyć, że w pierwszych opracowaniach (por. uwagi wstępne, p. 1) przyjmowano, że przesunięcia u również w przypadku skręcania skrępowanego są stosownie do (3.6) wprost proporcjonalne do jednostkowego kąta skręcenia φ' . Naprężenia normalne σ_z są wówczas określone równaniem

$$\sigma_z = E \frac{\partial u}{\partial z} = -E\varphi'' \bar{\omega}.$$

Na podstawie powyższej zależności można wyprowadzić równanie różniczkowe zagadnienia, w którym występuje jedyna poszukiwana funkcja $\varphi = \varphi(z)$:

$$(3.7) \quad EJ_{\bar{\omega}} \varphi^{IV} - GJ_d \varphi'' = -m;$$

m jest tutaj zewnętrznym momentem skręcającym, przypadającym na jednostkę długości.

Równanie (3.7) jest identyczne z równaniem skręcania pręta cienkościennego o przekroju otwartym. Nie uwzględnia się w nim dodatkowych odkształceń kątowych, wywołanych wtórnymi naprężeniami stycznymi τ_{ω} , ściśle związanymi z obecnością naprężeń normalnych skręcania skrępowanego $\sigma_{\omega} \equiv \sigma_z$.

W dokładniejszej teorii³ skręcania skrępowanego prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym, mającej na celu uwzględnienie dodatkowych odkształceń kątowych wywołanych wtórnymi naprężeniami stycznymi τ_w (które w przypadku przekroju zamkniętego mogą mieć bardzo istotny wpływ na wielkość naprężeń) wprowadza się obok kąta skręcenia $\varphi(z)$ jeszcze pewną funkcję $\beta(z)$, tzw. funkcję deplanacji.

Za pomocą funkcji $\beta(z)$ określa się przesunięcia podłużne według zależności

$$(3.8) \quad u = -\beta' \bar{\omega},$$

a tym samym również naprężenia podłużne

$$(3.9) \quad \sigma_z = E \frac{\partial u}{\partial z} = -E\beta'' \bar{\omega}.$$

A zatem zachowane zostaje nadal założenie o proporcjonalności rozkładu przemieszczeń u i naprężeń σ_w do wielkości $\bar{\omega}$.

Naprężenia σ_z skręcania skrępowanego powinny spełniać warunki równowagi $\Sigma N_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, czyli

$$\int_A \sigma_z dA = 0, \quad \int_A \sigma_z y dA = 0, \quad \int_A \sigma_z x dA = 0.$$

(Wskaźnik A przy znaku całki oznacza całkowanie rozciągające się na całą powierzchnię A przekroju pręta).

Równania te przy uwzględnieniu (3.9) przybierają postać

$$(3.10) \quad \int_A \bar{\omega} dA = 0, \quad \int_A \bar{\omega} y dA = 0, \quad \int_A \bar{\omega} x dA = 0.$$

Równania (3.10) pozwalają w przypadku skręcania ze swobodną (naturalną) osią obrotu określić położenie tej osi (za pomocą dwóch współrzędnych x i y) oraz wartość $\bar{\omega}$ w punkcie początkowym przekroju.

W przekrojach posiadających przynajmniej jedną oś symetrii (np. oś y) dwa pierwsze warunki (3.10) są spełnione dzięki antysymetrii rozkładu $\bar{\omega}$, natomiast trzeci warunek (3.10) określa położenie środka obrotu na osi y .

W przypadku skręcania z narzuconą osią obrotu pozostaje wyznaczyć jedynie wartość $\bar{\omega}$ w punkcie początkowym z warunku $\int_A \bar{\omega} dA = 0$.

³ Przedstawione w tym punkcie wywody oparte są na teorii Umanskiego (por. [10]).

Dalej wprowadza się pojęcie nowej wielkości statycznej, tzw. bimotoentu, określonego zależnością

$$B = \int_A \sigma_z \bar{\omega} dA,$$

która na podstawie (3.9) i po wprowadzeniu tzw. wycinkowego momentu bezwładności

$$(3.11) \quad J_{\omega} = \int_A \bar{\omega}^2 dA$$

może być przedstawiona inaczej:

$$(3.12) \quad B = -EJ_{\omega}\beta''.$$

Z (3.9) i (3.12) otrzymuje się dla naprężeń normalnych wzór

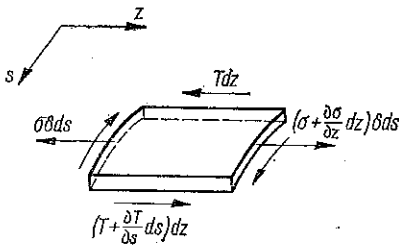
$$(3.13) \quad \sigma_{\omega} = \frac{B}{J_{\omega}} \bar{\omega}$$

o analogicznej budowie do znanego wzoru na naprężenie normalne przy zginaniu.

Z warunku równowagi sił w kierunku z (rys. 14),

$$(3.14) \quad \frac{\partial T}{\partial s} + \delta \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0,$$

oraz z warunku równowagi momentu skręcającego zewnętrznego i wewnętrznego $\int Th ds = M$ otrzymuje się wzór na naprężenia styczne $\tau = T/\delta$ przy skręcaniu skrępowanym:



Rys. 14

$$(3.15) \quad \tau = \tau_1 + \tau_{\omega} = \frac{M}{\Omega \delta} - \frac{B' \bar{S}_{\omega}}{J_{\omega} \delta}.$$

Tutaj $\tau_1 = M/\Omega \delta$ jest naprężeniem czystego skręcania, natomiast τ_{ω} jest wspomnianym poprzednio naprężeniem wtórnym, które występuje dodatkowo przy skręcaniu skrępowanym (naprężenie to nie daje żadnego wypadkowego momentu skręcającego).

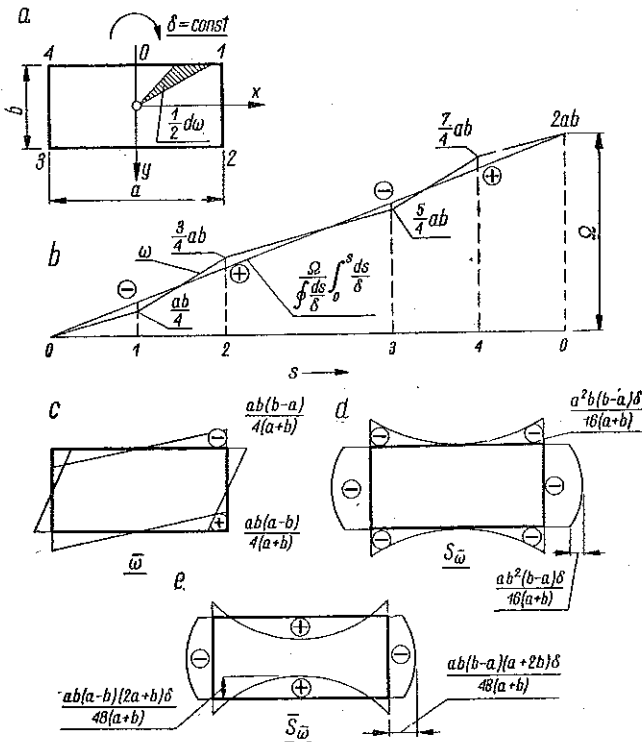
Naprężenia τ_{ω} są w przekroju proporcjonalne do tzw. zredukowanych wycinkowych momentów statycznych

$$(3.16) \quad \bar{S}_{\omega} = S_{\omega} - \frac{\int S_{\omega} h ds}{\Omega},$$

gdzie

$$(3.16.1) \quad S_{\omega} = \int_0^s \bar{\omega} dA$$

jest całką funkcji $\bar{\omega}$, natomiast drugi składnik jest wartością stałą. Wykresy $\bar{\omega}$, $S_{\bar{\omega}}$ i $\bar{S}_{\bar{\omega}}$ dla przekroju prostokątnego przedstawione są na rys. 15.



Rys. 15

Dla określenia dwóch nieznanymi funkcji $\varphi(z)$ i $\beta(z)$ potrzebne są dwa równania różniczkowe [w odróżnieniu od rozwiązania uproszczonego, określonego jednym równaniem (3.7)]. Pierwsze równanie otrzymuje się z warunku zgodności przesunięć u w punkcie początkowym obwodu po scałkowaniu po całym obwodzie zamkniętym elementarnych przesunięć

$$(3.17) \quad \partial u = \left(\frac{\tau}{G} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) ds,$$

gdzie za τ podstawia się wartość według (3.15), a przesunięcie v w kierunku stycznym do obwodu określone jest przez wzór $v = h\varphi$.

Po uwzględnieniu zależności

$$(3.18) \quad \frac{\Omega}{\int \frac{ds}{\delta}} \int \bar{S}_{\bar{\omega}} \frac{ds}{\delta} = \int \bar{\omega}^2 dA \equiv J_{\bar{\omega}}$$

i zróżniczkowaniu względem z otrzymuje się

$$(3.19) \quad EJ_{\bar{\omega}} \beta^{IV} - GJ_A \varphi'' = -m.$$

Drugie równanie wypływa z warunku równowagi momentu zewnętrznego M i wewnętrznego $\int \tau \delta h ds$, przy czym jednak τ wyraża się nie za pomocą (3.15), lecz przez

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\beta' \left(h - \frac{\Omega}{\int \frac{ds}{\delta}} \frac{1}{\delta} \right),$$

i $\partial v / \partial z = h \varphi'$ według równania (3.17).

Po wprowadzeniu tzw. kierunkowego momentu bezwładności

$$(3.20) \quad J_k = \int_A h^2 dA$$

otrzymuje się drugie równanie

$$(3.21) \quad \varphi' - \mu \beta' = \frac{M}{GJ_k},$$

gdzie wprowadzony został jeszcze współczynnik

$$\mu = 1 - \frac{J_d}{J_k}$$

charakteryzujący przekrój. Dla przekrojów nie ulegających deplanacji mamy $J_d = J_k$ i $\mu = 0$.

Równania końcowe (3.19) i (3.21) mogą być wyprowadzone również metodą energetyczną na podstawie twierdzenia o minimum energii potencjalnej przy zastosowaniu równań różniczkowych Eulera.

3.3. Rozwiązania równań różniczkowych zagadnienia dla kilku przypadków obciążenia. Równania (3.19) i (3.21) rozwiążemy względem funkcji deplanacji β^4 .

Po podstawieniu do (3.19) φ' z (3.21) otrzymuje się

$$(3.22) \quad \beta^{IV} - k^2 \beta'' = -\frac{k^2}{GJ_d} m,$$

gdzie

$$(3.23) \quad k = \sqrt{\mu \frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$$

jest współczynnikiem zanikania funkcji rozwiązującej.

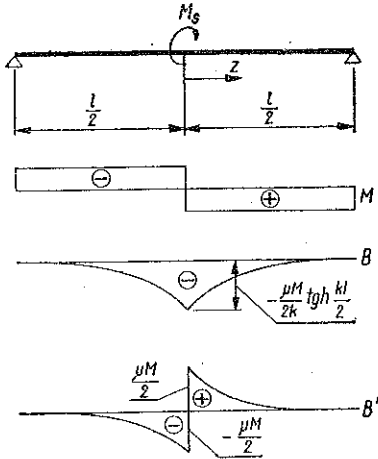
Równanie (3.22) przy uwzględnieniu (3.12) może być przedstawione za pomocą bimomentów:

$$(3.24) \quad B'' - k^2 B = -\mu m.$$

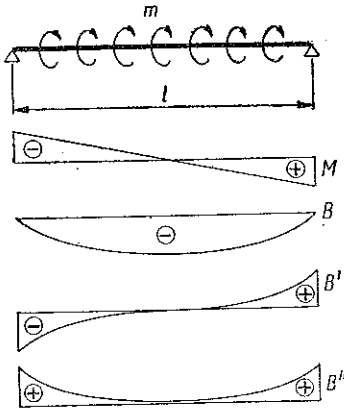
⁴ Inaczej niż to zrobiono w pracy [10], gdzie rozwiązano równanie względem kąta $\varphi(z)$. Pełny tok rozwiązania podany jest w [26].

Dla przypadku pręta na obu końcach pozbawionego swobody obrotu, posiadającego tam swobodę deplanacji, obciążonego momentem skupionym w środku przęsła (rys. 16) otrzymuje się

$$(3.25) \quad B = \frac{\mu M_s}{2k} \frac{\text{sh } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}}, \quad B' = \frac{\mu M_s}{2} \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } \frac{kl}{2}}$$



Rys. 16



Rys. 17

Przy identycznych warunkach brzegowych jak poprzednio otrzymuje się dla obciążenia momentem równomiernie rozłożonym (rys. 17).

$$(3.26) \quad \begin{cases} B = \frac{\mu m}{k^2} \left[1 - \frac{\text{ch } k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}} \right], \\ B' = \frac{\mu m}{k} \frac{\text{sh } k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}}, \\ B'' = -\mu m \frac{\text{ch } k \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch } \frac{kl}{2}}. \end{cases}$$

Należy zwrócić uwagę na to, że w odróżnieniu od wartości bimomentów otrzymywanych dla przekrojów cienkościennych otwartych, we wzorach (3.25) i (3.26) występuje ogólny mnożnik μ .

3.4. Teoria uproszczona i porównanie wyników. Pewną niewygodę przy rozwiązywaniu bardziej złożonych zagadnień, jak skracanie prętów zakrzywionych czy też prętów znajdujących się w ośrodku sprężystym, stwarza fakt występowania w równaniach różniczkowych zagadnienia dwóch niewiadomych φ i β . Jak już była o tym mowa, początkowo stosowano w zagadnieniu skracania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym równanie

$$(3.27) \quad \varphi^{IV} - k_0^2 \varphi'' = -\frac{m}{EJ_\omega}, \quad \text{gdzie} \quad k_0 = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}},$$

ściśle jedynie w przypadku prętów o przekroju otwartym.

Porównajmy wyniki rozwiązań opierających się z jednej strony na równaniach (3.19) i (3.21), a z drugiej na prostszym równaniu (3.27) dla następujących przypadków obciążenia: 1) obciążenie momentem skupionym w środku przęsła (rys. 16) i 2) momentem równomiernie rozłożonym na całej długości przęsła (rys. 17). W obu przypadkach chodzi o pręt o swobodnej deplanacji obu końców. Porównajmy wartości maksymalnych naprężeń normalnych skracania skrepowanego.

Dla pierwszego przypadku obciążenia na podstawie (3.25) i (3.13) mamy

$$(3.28) \quad B_{max} = \frac{M_s}{2} \sqrt{\frac{\mu EJ_\omega}{GJ_d}} \operatorname{tgh} \frac{l}{2} \sqrt{\mu \frac{GJ_d}{EJ_\omega}},$$

natomiast dla tego samego przypadku na podstawie równania (3.27) jest

$$(3.29) \quad B_{max}^{upr} = \frac{M_s}{2} \sqrt{\frac{EJ_\omega}{GJ_d}} \operatorname{tgh} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}.$$

Dla przekroju prostokątnego (rys. 15a) o stałej grubości ścianki δ mamy

$$(3.30) \quad \begin{cases} J_d = \frac{2a^3b^3}{a+b} \delta, & J_\omega = \frac{a^3b^3}{24} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \delta, \\ \mu = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}, & \bar{\omega}_{max} = \frac{ab}{4} \frac{a-b}{a+b}. \end{cases}$$

Podstawiając te wartości do (3.28) i (3.29) możemy obliczyć naprężenia maksymalne:

$$(3.31) \quad \sigma_{max} = \frac{B_{max}}{J_\omega} \bar{\omega}_{max} = 0,698 \frac{M_s}{abd} \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tgh} \frac{2,15l}{a+b}$$

lub według równania uproszczonego

$$(3.32) \quad \sigma_{max}^{upr} = \frac{B_{max}^{upr}}{J_\omega} \bar{\omega}_{max} = 0,698 \frac{M_s}{abd} \operatorname{tgh} \frac{2,15l}{a-b}.$$

Dla $a \neq b$ i $l \gg (a+b)$ w obu wzorach ostatni czynnik jest bliski jedności i stosunek wartości otrzymywanych na podstawie obu porównywalnych rozwiązań wynosi

$$\frac{\sigma_{max}^{upr}}{\sigma_{max}} = \frac{a+b}{a-b}$$

Rozwiązanie uproszczone daje zatem wartości za duże.

Dla przekroju prostokątnego o stałej grubości ścianki można podać prostą zależność między maksymalnym naprężeniem σ_{ω} i naprężeniem τ_1 czystego skręcania. Jeżeli zauważymy, że to ostatnie dla rozpatrywanego przypadku obciążenia momentem skupionym w środku przęsła wynosi $\tau_1 = 1/2 M/2abd$, to przyjmując dla dużych rozpiętości zależność $\operatorname{tgh} 2,15 l/(a+b) \approx 1$ otrzymamy z (3.31), według rozwiązania dokładniejszego,

$$(3.33) \quad \sigma_{\omega} = 2,79 \frac{a-b}{a+b} \tau_1.$$

A zatem dla przekrojów bardzo wydłużonych naprężenie σ_{ω} wyniesie najwyżej 2,5-krotną wartość naprężenia τ_1 . Dla przekroju o $a = 2b$ naprężenie σ_{ω} wypada nieco mniejsze od τ_1 .

Dla drugiego przypadku obciążenia mamy na podstawie równań (3.26) i (3.13)

$$(3.34) \quad B_{max} = m \frac{EJ_{\omega}}{GJ_d} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{2} \sqrt{\mu \frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}} \right),$$

natomiast na podstawie (3.27)

$$(3.35) \quad B_{max}^{upr} = m \frac{EJ_{\omega}}{GJ_d} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}}} \right).$$

Po podstawieniu wartości (3.30) dla przekroju prostokątnego naprężenia wyrażą się wzorami

$$(3.36) \quad \sigma_{max} = 0,325 m \frac{a-b}{abd} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2,15l}{a+b}} \right),$$

$$(3.37) \quad \sigma_{max}^{upr} = 0,325 m \frac{a-b}{abd} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2,15l}{a-b}} \right).$$

Dla dostatecznie dużych rozpiętości, przy $b \ll a$, oba rozwiązania dają w tym przypadku obciążenia praktycznie te same wyniki.

Dla przekroju prostokątnego o stałej grubości ścianki, obciążonego momentem skupionym, znane jest rozwiązanie, w którym w sposób ściśle uwzględnione zostały odkształcenia postaciowe w płaszczyznach ścianek (jako zagadnienie płaskiego stanu naprężenia), [6]. Rozwiązanie to charakteryzuje się nieprostoliniowym rozkładem naprężeń σ_z z tendencją do koncentracji w narożach.

Interesujące jest porównanie wyników według (3.31) i (3.32) jak również według rozwiązania podanego w [6], które dla rozpatrywanego przypadku obciążenia przy $E/G = 2,6$ i $\nu = 0,3$ można zapisać w postaci

$$(3.38) \quad \sigma_{max} = 1,27 \frac{M_s}{(a+b)\delta} \left(\frac{a}{b} - 1 \right).$$

Stosunek maksymalnych naprężeń (w narożu) według (3.31), (3.32) i (3.38) wynosi kolejno: dla $a = 2b$ 0,117 : 0,350 : 0,141, dla $a = 4b$ — 0,105 : 0,175 : 0,152, a dla $a = 8b$ — 0,068 : 0,0875 : 0,143 (we wszystkich przypadkach przyjąć należy czynnik $M_s/b^2\delta$). Należy zauważyć, że dla $a = b$ zarówno według (3.31) jak i według (3.38) mamy $\sigma_{max} = 0$, podczas gdy według (3.32) przy $a \rightarrow b$ mamy $\sigma_{max} \rightarrow 0,698 M_s/b^2\delta$.

Koncentracji naprężeń w narożach przypisuje się jednak charakter drugorzędny, podobnie jak koncentracji naprężeń przy otworach.

4. Zastosowania teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym nieodkształcalnym

4.1. Uogólnienie rozwiązania na przypadek przekroju otwarto-zamkniętego. W konstrukcjach mostowych i hydrotechnicznych spotykamy się często z przekrojami otwarto-zamkniętymi.

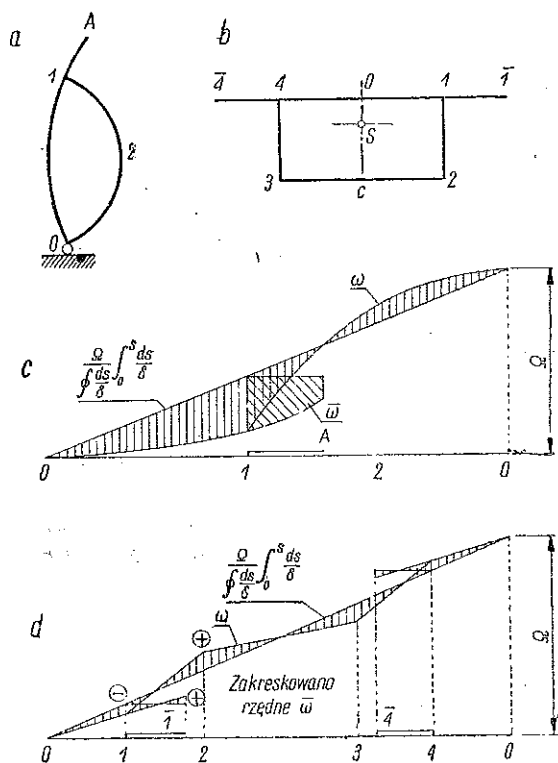
Przedstawioną w poprzednich punktach teorię techniczną skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym można po pewnym zmodyfikowaniu zastosować również do prętów o przekroju otwarto-zamkniętym.

Rozpatrzymy dwa przekroje otwarto-zamknięte przedstawione na rys. 18a i 18b. Przekrój a ma narzuconą oś obrotu w punkcie O , natomiast przekrój b ma nieskrępowaną oś obrotu, tzn. przypadającą w osi ściania S .

W przypadku czystego skręcania przekroje ulegają, jak wiadomo, deplanacji. Dla przesunięć u w kierunku podłużnym stosuje się nadal wzór (3.4). Zauważmy jednak od razu, że naprężenia styczne i związane z nimi odkształcenia kątowe występują jedynie w części zamkniętej. Ponieważ we wzorze (3.4) [który wyprowadza się na podstawie zależności (3.17) z warunku zgodności przesunięć u w punkcie początkowym po zsumowaniu elementarnych przesunięć na całym obwodzie zamkniętym] drugi

składnik w nawiasie pochodzi od odkształceń kątowych, to składnik ten będzie zmienny jedynie w części zamkniętej.

Na rysunku 18c przedstawione są wykresy ω i $\left(\Omega/\int \frac{ds}{\delta}\right) \int_0^s \frac{ds}{\delta}$ dla przekroju *a*. Wykres $\omega = \int_0^s h ds$ przedstawiający tylko geometryczną zależność przesunięcia *u* od obrotu (tzn. bez uwzględnienia odkształceń kątowych $\gamma = \tau/G$) odnosi się do całego przekroju. Wykres $\left(\Omega/\int \frac{ds}{\delta}\right) \int_0^s \frac{ds}{\delta}$ w części zamkniętej wzrasta przy $\delta = \text{const}$ liniowo. Dla części otwartej 1-A przybiera on wartość stałą, równą rzędnej tego wykresu w węźle 1,



Rys. 18

co oznacza, że część wspornikowa jako całość wykonuje dodatkowe przemieszczenie $\left(\Omega/\int \frac{ds}{\delta}\right) \int_{0-1} \frac{ds}{\delta}$, będące sumą odkształceń postaciowych w części zamkniętej 0-1, która łączy część wspornikową ze środkiem obrotu. Wypadkowy wykres $\bar{\omega}_0$ względem punktu O został na rys. 18c zakre-

skowany. (Wykres ten ma wartość zerową $\bar{\omega}_0$ w punkcie O i nie spełnia jeszcze warunku $\int_A \bar{\omega} dA = 0$ w przypadku swobody przesuwu wzdłuż osi O).

Odpowiednie wykresy dla przekroju b przedstawione są na rys. 18d.

W przypadku skręcania skrepowanego stosujemy nadal zależności (3.8) i (3.9) pomiędzy u , $\bar{\omega}$ i σ_ω ; w myśl warunków równowagi (3.10) stosować będziemy również równania określające położenie środka ścinania i rzędną $\bar{\omega}$ w punkcie początkowym.

Przy wyprowadzaniu wzoru (3.15) wykorzystany był warunek równowagi dla naprężeń normalnych i stycznych, równanie (3.14), oraz równość zewnętrznego i wewnętrznego momentu skręcającego. Ponieważ w części otwartej występuje naprężenie normalne σ_ω , wystąpią tam również naprężenia styczne τ_ω , a zatem zarówno w (3.16), jak i w (3.16.1) całka odnosi się do całego przekroju.

Należy zwrócić uwagę na znaki przy określaniu S_ω^- według (3.16.1). Wyobraźmy sobie, że pola powierzchni $\bar{\omega}$ zostały zastąpione naprężeniami normalnymi σ_ω (rys. 19a i 19b). Wykres S_ω^- reprezentuje wówczas zgodnie z (3.15) i (3.16) odpowiednie naprężenie styczne $\tau_{\omega_1} = -B'S_\omega^-/J_\omega \delta$ przy założeniu rozcięcia w punkcie początkowym ($\tau_{\omega_1} = 0$ w punkcie O). Zastępując naprężenia normalne siłami wypadkowymi nie trudno z warunków równowagi poszczególnych części (rys. 19c) wyznaczyć kierunek działania naprężeń stycznych. Tym samym można określić znak wycinkowych momentów statycznych S_ω^- , pamiętając, że dodatnie naprężenia styczne (w części zamkniętej) działają na przekrój w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 19d).

Cofnijmy się jeszcze do definicji bimomentu [równanie (3.12)] oraz do określenia wycinkowego momentu bezwładności według (3.11). Określone tam wielkości B i J_ω^- występują we wzorze (3.15) na naprężenie styczne τ_ω . Jednakże właściwego określenia wycinkowego momentu bezwładności, a co za tym idzie — również bimomentu, należy szukać w równaniu (3.19), przedstawiającym warunek zgodności odkształceń w punkcie początkowym (po zsumowaniu elementarnych odkształceń postaciowych w części zamkniętej).

Przy wyprowadzaniu równania (3.19) wykorzystuje się wzór (3.18). Słuszność tego ostatniego można wykazać całkowaniem przez części przy uwzględnieniu związku (por. [10], s. 68)

$$(4.1) \quad d\bar{S}_\omega^- = \bar{\omega} ds,$$

który jest słuszny dla obwodu zamkniętego nie posiadającego części otwartych. W przypadku przekrojów otwarto-zamkniętych w punkcie styku części otwartej z częścią zamkniętą występuje skok wykresu \bar{S}_ω^- w obwodzie zamkniętym (rys. 19d) i zależność różniczkowa (4.1) do tego punktu

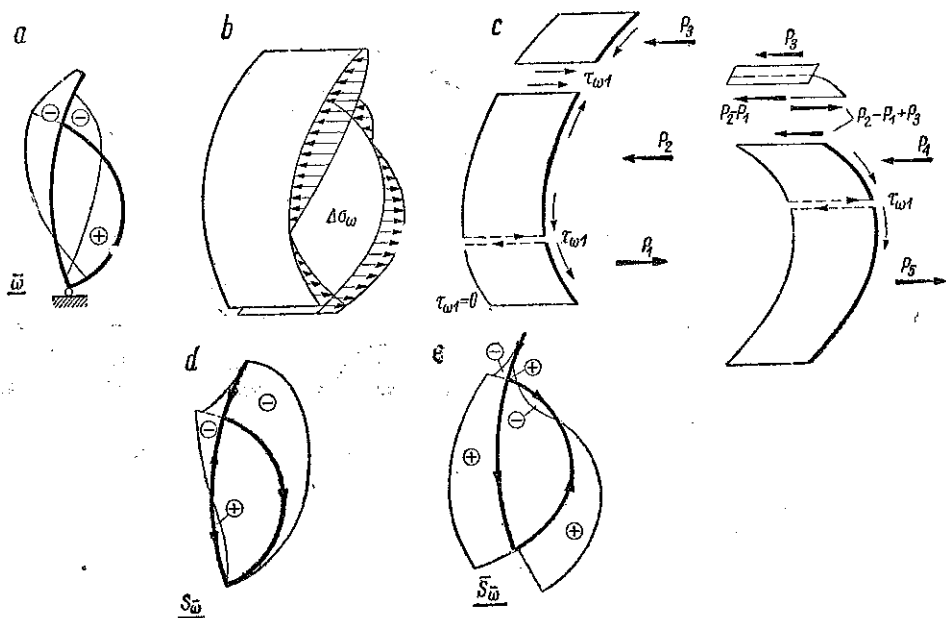
nie stosuje się. Jej ważność, a tym samym ważność zależności analogicznej do (3.18), można jednak zachować również dla przekroju otwarto-zamkniętego, jeżeli uczyni się następujące założenie:

Wartość skoku na wykresie \bar{S}_ω w węźle styku obu części $\Delta \bar{S}_\omega = \int_{(i) \text{ otw.}} \bar{\omega} dA$

można rozłożyć na pewien pomocniczy odcinek przekroju zamkniętego Δs_i wprowadzony do tego obwodu w węźle styku (części zamkniętej z otwartą). Pole tego odcinka przekroju ma wartość $\bar{\omega}_i$ przypadającą z wykresu $\bar{\omega}$ na węzeł styku i . Jeżeli pomocniczy odcinek ma w przekroju zamkniętym zapewnić taki sam wykres \bar{S}_ω , jaki występuje w części zamkniętej przekroju otwarto-zamkniętego, jego powierzchnia $A_i = \Delta s_i \delta_i$ (gdzie δ_i jest grubością zastępczą) musi spełniać warunek

$$(4.2) \quad \Delta_i \bar{\omega}_i = \int_{(i) \text{ otw.}} \bar{\omega} dA \equiv \Delta \bar{S}_\omega$$

Tutaj przy dowolnie małej długości Δs_i otrzymujemy grubość zastępczą $\delta_i = A_i / \Delta s_i = \Delta S_{i \text{ otw.}} (\bar{\omega}_i \Delta s_i)$.



Rys. 19

Należy prześledzić tok wyprowadzenia wzoru (3.18) dla przypadku przekroju otwarto-zamkniętego. Wartość

$$(4.3) \quad \int \frac{ds}{\delta} \oint \bar{S}_\omega \frac{ds}{\delta}$$

występująca w równaniu (3.19) [por. (3.18)] określającym warunek zgodności odkształceń w punkcie wyjściowym 0 — po zsumowaniu elementarnych wpływów na całym obwodzie zamkniętym — może być określona również dla wprowadzonego wyżej zastępczego przekroju zamkniętego. Zauważmy bowiem, że przy dowolnie małych Δs_i ilorazy $\Delta s_i/\delta_i$ znikają i nie dają żadnych składników w całkach $\oint \frac{ds}{\delta}$ czy też $\oint \bar{S}_\omega \frac{ds}{\delta}$ (wskaznik f przy całkach oznacza, że obliczane są one dla przekroju pomocniczego). Odkształcenia w pomocniczym przekroju zamkniętym są zatem identyczne do odkształceń rzeczywistych w przekroju otwarto-zamkniętym.

Całkę występującą w (4.3) w liczniku rozbijamy na dwie całki zgodnie z (3.16):

$$\oint_f \bar{S}_\omega \frac{ds}{\delta} = \oint_f S_\omega \frac{ds}{\delta} - \frac{1}{\Omega} \oint_f \left(\int_A S_\omega h ds \right) \frac{ds}{\delta} = I_1 + I_2,$$

przy czym należy zauważyć, że w I_2 całka w nawiasie odnosi się do całego przekroju, ponieważ otrzymana ona została z warunku $\int_A Th ds = 0$, w którym całkowanie obejmuje cały przekrój.

Stosując całkowanie przez części mamy

$$I_1 = S_\omega \left(\int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) \Big|_0^0 - \int_f \left(\int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) dS_\omega = 0 - \int_f \left(\int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) \bar{\omega} dA.$$

W całce I_2 zastosujemy również całkowanie przez części rozbijając uprzednio całkę \int_A na całkę po obwodzie zamkniętym \oint i całki dla części otwartych $\int_{(i) otw}$:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{\Omega} \oint_f \left[\oint_f S_\omega d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{(i) otw} S_\omega d\omega \right] \frac{ds}{\delta} = -\frac{1}{\Omega} \oint_f \left\{ \left[S_\omega \omega \right]_0^0 - \oint_f \omega dS_\omega \right\} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \left[S_\omega \omega \right]_{0_i}^{s_i} - \int_{(i) otw} \omega dS_\omega \right\} \frac{ds}{\delta} = \\ &= \frac{1}{\Omega} \oint_f \frac{ds}{\delta} \left\{ \oint_f \omega \bar{\omega} dA - \sum_{i=1}^n \left[\Delta S_{\omega_i} \omega_i + \int_{(i) otw} \omega \bar{\omega} dA \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wyrazimy ω za pomocą (3.5) przez $\bar{\omega}$:

$$I_2 = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{ds}{\delta} \left[\oint \bar{\omega}^2 dA + \oint \bar{\omega} \left(\frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) dA - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \Delta S_{\omega_i} \omega_i + \sum_{i=1}^n \int_{(i)otw} \bar{\omega}^2 dA + \sum_{i=1}^n \int_{(i)otw} \bar{\omega} \left(\frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) dA \right].$$

Wyrażenie to po zredukowaniu przybierze postać

$$(4.4) \quad I_2 = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{ds}{\delta} \left[\oint \bar{\omega}^2 dA + \sum_{i=1}^n \int_{(i)otw} \bar{\omega}^2 dA - \sum_{i=1}^n \Delta \bar{S}_{\omega_i} \omega_i \right] + \\ + \oint \left(\int_0^s \frac{ds}{\delta} \right) \bar{\omega} dA + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{s_i} \frac{ds}{\delta} \int_{(i)otw} \bar{\omega} dA \right).$$

Wyrażenie (4.4) odnosi się oczywiście do przekroju zastępczego, w którym w każdym węźle i mamy dodatkową powierzchnię

$$A_i = \frac{\int_{(i)otw} \bar{\omega} dA}{\bar{\omega}_i} = \frac{\Delta \bar{S}_{\omega_i}}{\bar{\omega}_i},$$

gdzie $\Delta \bar{S}_{\omega_i} = \Delta S_{\omega_i}$.

Dla tej dodatkowej powierzchni należy również obliczyć wartość $\bar{\omega}_i^2 A_i$ zawartą w pierwszej całce \oint w wyrażeniu (4.4), a zatem dla układu rzeczywistego mamy

$$(4.5) \quad \oint \bar{\omega}^2 dA = \oint \bar{\omega}^2 dA + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i^2 A_i = \oint \bar{\omega}^2 dA + \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \Delta S_{\omega_i}.$$

Suma całek I_1 i I_2 po zredukowaniu wyrazów identycznych i uwzględnieniu zależności (4.5) przybiera postać

$$(4.6) \quad I = I_1 + I_2 = \frac{1}{\Omega} \oint \frac{ds}{\delta} \left(\oint \bar{\omega}^2 dA + \sum_{i=1}^n \int_{(i)otw} \bar{\omega}^2 dA \right) + \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{\Omega} \oint \frac{ds}{\delta} (\bar{\omega}_i - \omega_i) + \int_0^{s_i} \frac{ds}{\delta} \right] \Delta S_{\omega_i} \right\}.$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie kwadratowym w równaniu (4.6) jest wobec zależności

$$\bar{\omega}_i = \omega_i - \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^{s_i} \frac{ds}{\delta}$$

równe zero, a zatem drugi wyraz tego równania odpada. Jeżeli ponadto dla wyrażenia zawartego w nawiasie zwykłym pierwszego wyrazu przyjmujemy skrócone oznaczenie

$$(4.7) \quad J_{\bar{\omega}} = \int_A \bar{\omega}^2 dA = \oint \bar{\omega}^2 dA + \sum_{n=1}^n \int_{(i)otw} \bar{\omega}^2 dA,$$

otrzymamy dla I wartość $\frac{1}{\Omega} \oint \frac{ds}{\delta} J_{\bar{\omega}}$ i ostatecznie

$$(4.7.1) \quad \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \oint S_{\bar{\omega}} \frac{ds}{\delta} = J_{\bar{\omega}},$$

gdzie $J_{\bar{\omega}}$ określone jest przez wzór (4.7).

A zatem w przypadku pręta o przekroju otwarto-zamkniętym przy obliczaniu $J_{\bar{\omega}}$ należy uwzględnić wykres zredukowanych pól powierzchni wycinkowych zarówno w części zamkniętej jak i w części otwartej, mimo że wielkość ta została wyprowadzona na podstawie całkowania odkształceń tylko po obwodzie zamkniętym.

Wartość (4.7) należy podstawić w równaniach różniczkowych (3.19) i (3.22) w przypadku przekroju otwarto-zamkniętego. Ponieważ przy przejściu z (3.22) do (3.24) wykorzystano zależność $\dot{B} = -E J_{\bar{\omega}} \beta''$, tym samym określone zostają dla przekroju otwarto-zamkniętego odpowiednio zmodyfikowane związki (3.11) i (3.12) — przyjęte właściwie w sposób dowolny na początku przy definiowaniu naprężeń normalnych σ_{ω} .

Ponieważ wprowadzając pomocniczy odcinek profilu możemy przyjąć dowolnie małą jego długość Δs_i , iloraz $\Delta s_i / \delta_i$ dochodzący do całki $\oint ds / \delta$, w mianowniku wyrażenia określającego moment bezwładności czystego skręcania J_d jest dowolnie mały, tzn. znika. Wartość J_d oblicza się zatem jak dla zwykłego przekroju zamkniętego.

Pozostaje do określenia wielkość J_h , którą wprowadza się w równaniu równowagi, odpowiadającym równaniu (3.21) dla pręta o przekroju zamkniętym. W wyrażeniu wyjściowym $\tau = G(\partial u / \partial s + \partial v / \partial z)$ występuje pochodna przesunięcia $u = -\beta' \bar{\omega}$. Przy uwzględnieniu (3.5) otrzymuje się dla niej wyrażenie

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -\beta' \left(h - \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \frac{1}{\delta} \right).$$

Należy jednak zauważyć, że drugi wyraz w nawiasie tego wyrażenia ma wartość różną od zera tylko dla części zamkniętej, w której występują odkształcenia postaciowe przy czystym skręcaniu. Dla części wspor-

nikowej składnik ten znika. Składnik pierwszy natomiast wyraża geometryczny wpływ skrócenia na przesunięcie u i występuje w obu częściach przekroju. A zatem w równaniu analogicznym do (3.21) wielkość

$$J_k = \int_A h^2 dA$$

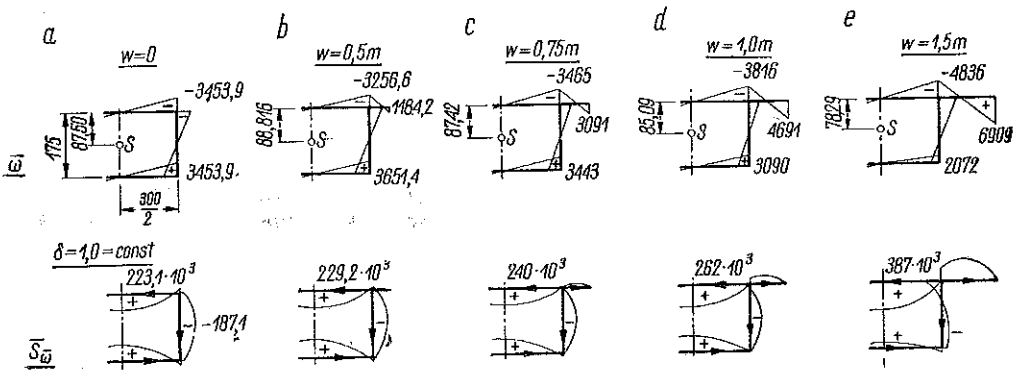
odnosi się do całego przekroju, zaś występująca tam wielkość

$$J_d = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$$

jest identyczna z momentem bezwładności czystego skręcania.

Podane tutaj reguły opierają się na tym, że założenia leżące u podstawy technicznej teorii skręcania prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym można przyjąć również dla przekrojów otwarto-zamkniętych.

4.2. Charakterystyki przekrojów mostowych i poprzeczne linie wpływowe naprężeń normalnych. Na rysunkach 20a-20e przedstawione zostały wykresy pól zredukowanych powierzchni wycinkowych \bar{w} i zredukowanych momentów statycznych $\bar{S}_{\bar{w}}$ dla przekroju mostowego zamkniętego i kilku przekrojów otwarto-zamkniętych o tych samych wymiarach części zam-

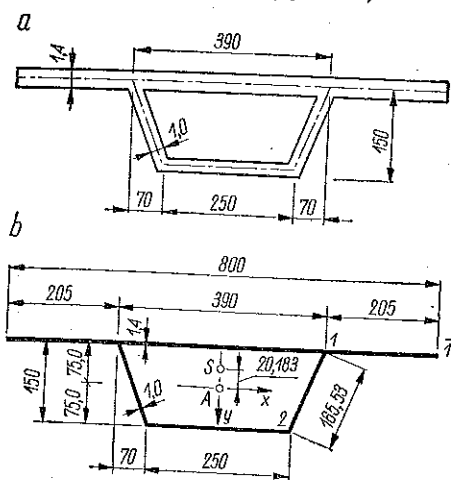


w = wysięg wspornikowej części przekroju

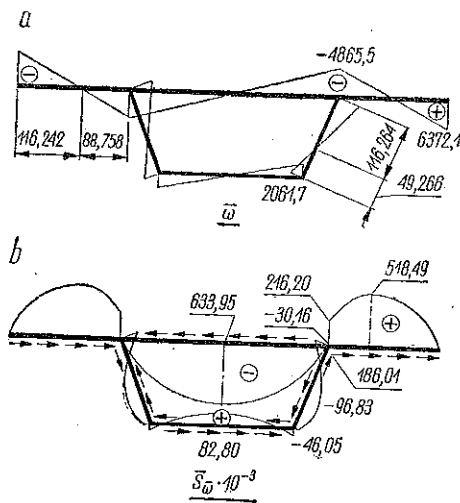
$J_{\bar{w}} = 37,78 \cdot 10^8$	$J_{\bar{w}} = 40,71 \cdot 10^8$	$J_{\bar{w}} = 43,20 \cdot 10^8$	$J_{\bar{w}} = 50,90 \cdot 10^8$	$J_{\bar{w}} = 64,07 \cdot 10^8$
$J_d = 11,605 \cdot 10^6$	$J_d = 11,605 \cdot 10^6$	$J_d = 11,605 \cdot 10^6$	$J_d = 11,605 \cdot 10^6$	$J_d = 11,605 \cdot 10^6$
$J_k = 12,469 \cdot 10^6$	$J_k = 13,258 \cdot 10^6$	$J_k = 13,61 \cdot 10^6$	$J_k = 13,92 \cdot 10^6$	$J_k = 14,34 \cdot 10^6$
$\mu = 0,06925$	$\mu = 0,125$	$\mu = 0,1476$	$\mu = 0,165$	$\mu = 0,190$
$k = 0,00905$	$k = 0,0417$	$k = 0,0423$	$k = 0,0421$	$k = 0,0415$
$J_x = 5,487 \cdot 10^6$	$J_x = 6,177 \cdot 10^6$	$J_x = 6,473 \cdot 10^6$	$J_x = 6,750 \cdot 10^6$	$J_x = 7,42 \cdot 10^6$
$e_g = e_d = 87,50$	$e_g = 79,1 \quad e_d = 95,9$	$e_g = 75,5 \quad e_d = 99,5$	$e_g = 72,2 \quad e_d = 102,8$	$e_g = 66,5 \quad e_d = 108,5$

Rys. 20

kniętej. Na rysunku 22 przedstawione są te same wykresy dla przekroju o większych wysięgach części wspornikowych i trapezowym kształcie części skrzynekowej (rys. 21).



Rys. 21

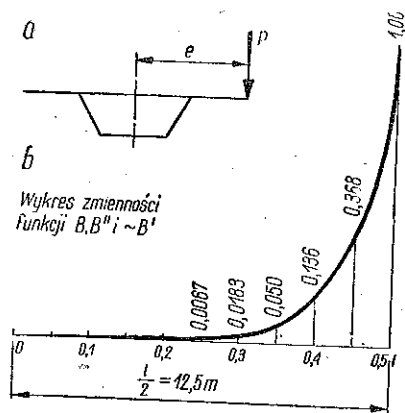


Rys. 22

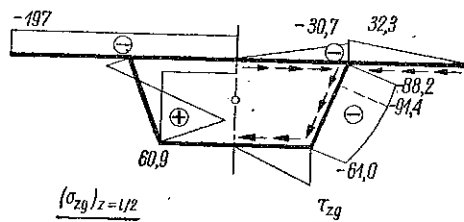
Jak widać, wykres $\bar{\omega}$ w części wspornikowej zmienia znak, co oznacza, że również naprężenia normalne od skręcania σ_{ω} będą w tej części zmieniały znak.

Przykład. Dla przekroju pokazanego na rys. 21 obliczono naprężenia wywołane obciążeniem siłą skupioną $P = 50$ t, działającą w przekroju środkowym przy mimośrodku $e = 4$ m (rys. 23). Rozpiętość przęsła swobodnie podpartego wynosi $l = 25$ m.

Na rysunku 24 pokazane są naprężenia normalne σ_{zg} i styczne τ_{zg} od



Rys. 23



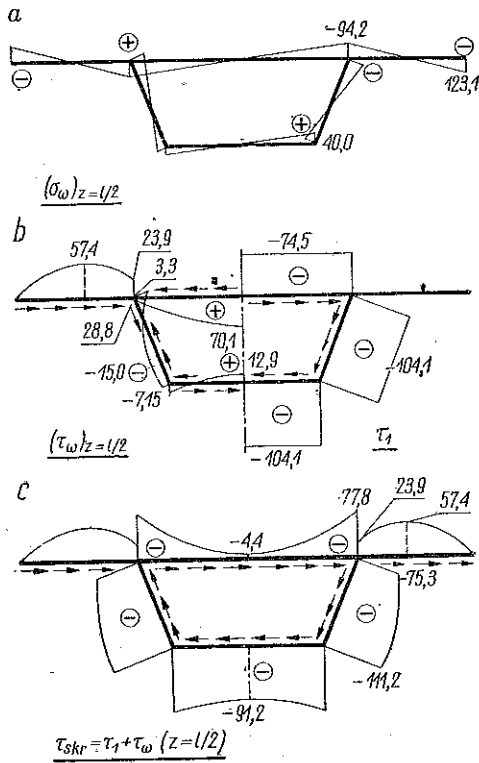
Rys. 24

samego zginania (tzn. w przypadku obciążenia działającego na osi mostu), na rys. 25 przedstawiony jest przebieg naprężeń wywołanych momentem skręcającym $M_s = Pe$, a mianowicie wartości σ_{ω} (rys. 25a), τ_{ω} i τ_1 (rys.

25b) jak również suma tych ostatnich $\tau_{skr} = \tau_1 + \tau_\omega$ (rys. 25c). Całkowite naprężenia od zginania i skręcania $\sigma = \sigma_{zg} + \sigma_\omega$ i $\tau = \tau_{zg} + \tau_{skr}$ przedstawia rys. 26a i 26b⁵.

Należy tutaj jeszcze raz zwrócić uwagę na to, że otrzymane wyniki opierają się na założeniu, że konstrukcja jest usztywniona dostatecznie gęsto niepodatnymi przeponami obejmującymi cały przekrój z częściami wspornikowymi włącznie. Na przepony te działa samozrównoważony układ sił (rys. 26c), pod wpływem którego przepony nie powinny się odkształcić.

W konstrukcjach mostowych o przekroju zamkniętym górna ścianka stanowiąca składową część jezdni z reguły jest wzmocniona żebrami podłużnymi zwiększającymi pole przekroju. Dokładne obliczenie takiego przekroju przy dużej ilości żeber usztywniających (zwłaszcza żeber o przekroju zamkniętym) jest dosyć żmudne. Można jednak zadowolić się uproszczeniem polegającym na wprowadzeniu grubości zastępczej, odpowiednio większej od grubości rzeczywistej. W niniejszej pracy rozpatrywane są tylko przekroje bez żeber. Uzyskane wyniki jakościowo odnoszą się jednak również do przekrojów z żebrami.



Rys. 25

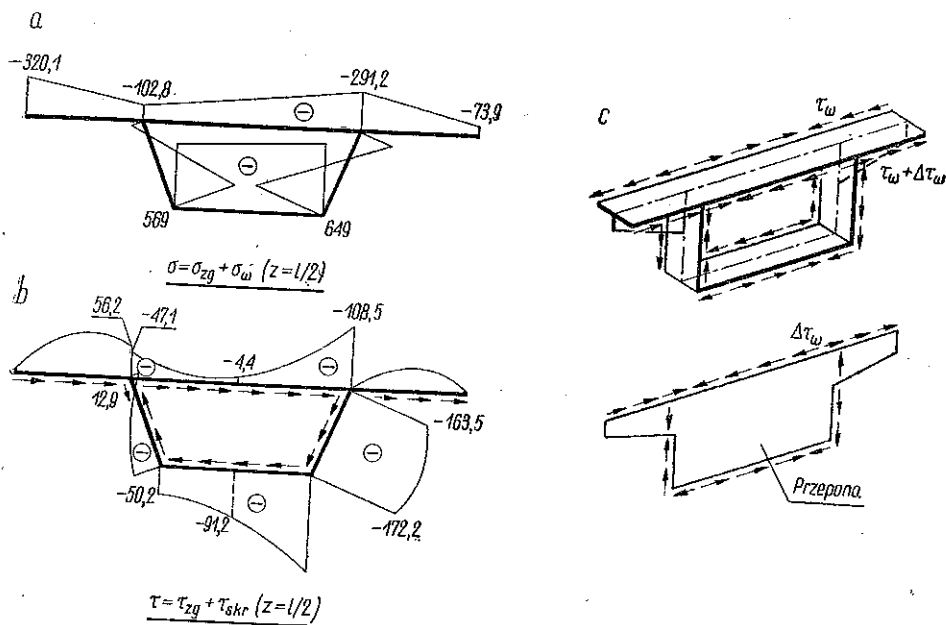
Na podstawie obliczonych charakterystyk można ocenić wielkości interesujących nas dodatkowych naprężeń normalnych σ_ω , wywołanych niesymetrycznym obciążeniem cienkościennej konstrukcji mostowej o przekroju zamkniętym. Stosunek naprężenia σ_ω do naprężenia σ_{zg} od samego zginania nazwiemy współczynnikiem przeciążenia.

Należy tutaj zauważyć, że przepony skrajne wraz z łożyskami zapewniają przeniesienie podporowych momentów skręcających nawet przy znacznym mimośrodku obciążenia użytkowego. Ciężar własny mostu bowiem powinien zazwyczaj wystarczać, ażeby zapobiec (z pewnym zapasem bezpieczeństwa) odrywaniu łożysk położonych po stronie nieobciążonej.

⁵ Pełny tok obliczenia podano w pracy [26].

Rozpatrzmy bliżej dwa przypadki obciążenia konstrukcji mostowej traktowanej jako pręt cienkościenny swobodnie podparty, na obu końcach pozbawiony swobody obrotu, lecz posiadający tam swobodę deplacji:

- 1) siła skupiona P działa w środku przęsła na mimośrodku e ,
- 2) obciążenie ciągłe p rozłożone wzdłuż linii na całej długości mostu działa względem osi podłużnej również na mimośrodku e (rys. 27a).



Rys. 26

W obu przypadkach obciążenie rozłożymy na dwa obciążenia składowe, a mianowicie na obciążenie osiowe, wywołujące zginanie pręta (rys. 27b) i obciążenie momentem skręcającym, skupionym lub ciągłym (rys. 27c).

W pierwszym przypadku obciążenia (siłą P) mamy

$$M_x = \frac{Pl}{4}$$

i według (3.25/1)

$$B_{max} = \frac{\mu Pe}{2k} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2}.$$

Odpowiednie naprężenia normalne wynoszą

$$(4.8) \quad \sigma_{zg} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{Pl}{4J_x} y$$

oraz

$$(4.9) \quad \sigma_{\omega} = \frac{B_{max}}{J_{\omega}} \bar{\omega} = \frac{\mu P e}{2k J_x} \bar{\omega} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2}.$$

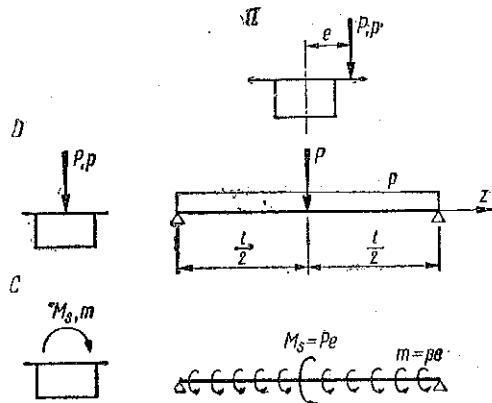
Dla wybranych punktów przekroju wyznaczmy stosunek naprężenia dodatkowego σ_{ω} do naprężenia σ_{zg} . Dzieląc (4.9) przez (4.8) otrzymujemy współczynnik przeciążenia dla obciążenia skupionego:

$$(4.10) \quad \eta_p = \frac{\sigma_{\omega}}{\sigma_{zg}} = \frac{2\mu J_x \bar{\omega} e}{k J_{\omega} l y} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2}.$$

Jak łatwo przekonać się na podstawie charakterystyk podanych na rys. 20a-20e, wartość k może wahać się w granicach 0,0075-0,0125 cm^{-1} (przy tej samej grubości ścianki wartości k będą dla przekrojów większych mniejsze, natomiast dla profili mniejszych — odpowiednio większe). Przyjmując za realne długości ustroju swobodnie podpartego o rozpatrywanych poniżej przekrojach wartości $l = 20-40$ m, otrzymamy wartości $kl/2$ wahające się od 7,5 do 25, dla których można śmiało przyjąć $\operatorname{tgh} kl/2 \approx 1$.

Uwzględniając powyższe i podstawiając do (4.10) k według (3.23) otrzymujemy dla przekroju stałego ($E/G = 2,6$)

$$(4.10.1) \quad \eta_p = 3,22 \sqrt{\mu} \frac{J_x}{\sqrt{J_{\omega} J_d}} \frac{e \bar{\omega}}{l y}.$$



Rys. 27

Podobnie dla drugiego obciążenia, tzn. dla obciążenia ciągłego p , mamy w punkcie $z = l/2$

$$(4.11) \quad \sigma_{zg} = \frac{pl^2}{8J_x} y$$

oraz przy uwzględnieniu (3.26/1)

$$(4.12) \quad \sigma_{\omega} = \frac{\mu p e}{k^2 J_{\omega}} \bar{\omega} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{kl}{2}} \right).$$

Tutaj dla dużych $kl/2$ wyraz drugi w nawiasie zmierza do zera i może być pominięty. Dzieląc (4.12) przez (4.11) i podstawiając k^2 według (3.23) otrzymujemy dla stali następujący współczynnik przeciążenia dla obciążenia ciągłego:

$$(4.13) \quad \eta_p = 20,8 \frac{J_x}{J_d} \frac{e \bar{\omega}}{l^2 y}.$$

Zbadajmy wartości współczynnika przeciążenia dla przekroju prostokątnego ab o stałej grubości ścianek δ . Wykorzystamy wielkości $\bar{\omega}$, J_{ω} , J_d i μ podane we wzorze (3.30). Poza tym mamy

$$(4.14) \quad J_x = \frac{(3a+b)b^2\delta}{6}, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Dla pierwszego przypadku obciążenia naprężenie σ_{ω} podane jest w (3.31). Przy $\text{tgh } kl/2 \approx 1$ mamy stąd

$$(4.15) \quad \sigma_{\omega} = 0,698 \frac{M}{abd} \frac{a-b}{a+b}.$$

Z kolei naprężenie od zginania przy uwzględnieniu (4.14) wynosi

$$(4.16) \quad \sigma_{zg} = \frac{3}{4} \frac{Pl}{(3a+b)b\delta}.$$

A zatem po podzieleniu (4.15) przez (4.16) otrzymujemy

$$(4.17) \quad \eta_p = 0,930 \frac{(3a+b)(a-b)}{(a+b)a} \frac{e}{l}.$$

Dla drugiego natomiast przypadku obciążenia na podstawie (3.36) przy $1/\text{ch } kl/2 \approx 0$ mamy

$$(4.18) \quad \sigma_{\omega} \approx 0,325 \frac{pe}{abd} (a-b).$$

Ponieważ w tym przypadku mamy

$$(4.19) \quad \sigma_{zg} = \frac{3}{8} \frac{pl^2}{(3a+b)b\delta},$$

to po podzieleniu (4.18) przez (4.19) otrzymujemy

$$(4.20) \quad \eta_p = 0,865 \frac{(3a+b)(a-b)}{a} \frac{e}{l^2}.$$

Interesującą rzeczą będzie porównanie obliczonych wartości η_p i η_p . Ich iloraz wskazuje, w jakim stosunku pozostają do siebie naprężenia normalne od skręcania dla dwóch różnych przypadków obciążenia przy jednakowym maksymalnym naprężeniu od zginania. Dzieląc (4.20) przez (4.17) mamy

$$\frac{\eta_p}{\eta_p} = 0,93 \frac{a+b}{l}.$$

Jednakowe naprężenia dodatkowe wystąpią zatem przy $a+b$ bliskim l . Ponieważ jednak długość l z reguły jest kilkakrotnie większa od $a+b$, dodatkowe naprężenia normalne przy obciążeniu ciągłym są kilkakrotnie mniejsze niż przy obciążeniu skupionym (przy tym samym mimośrodzie działania).

Należy również wspomnieć o przekrojach otwartych. W konstrukcjach mostowych stalowych przekroje otwarte charakteryzują się stosunkowo małym momentem bezwładności czystego skręcania $J_d = \frac{1}{3} \sum a \delta^3$, tak że współczynnik zanikania w rozpatrywanych przykładach przekrojów otwartych waha się około liczby 10^{-4} . Przy $l = 25$ m wartość $kl/2$ wynosi 0,125 i jest znacznie mniejsza od jedności. Maksymalny bimoment dostatecznie dokładnie określony jest wówczas wzorem

$$(4.21) \quad B_{max} = \frac{Pel}{4},$$

tak że przy uwzględnieniu (4.8) i zależności analogicznej do (4.9) otrzymamy dla obciążenia skupionego

$$(4.22) \quad \eta_p = \frac{J_x}{J_\omega} \frac{e\omega}{y}.$$

Ponieważ dla obciążenia ciągłego z analogicznych rozważań otrzymujemy

$$B_{max} = \frac{pel^2}{8},$$

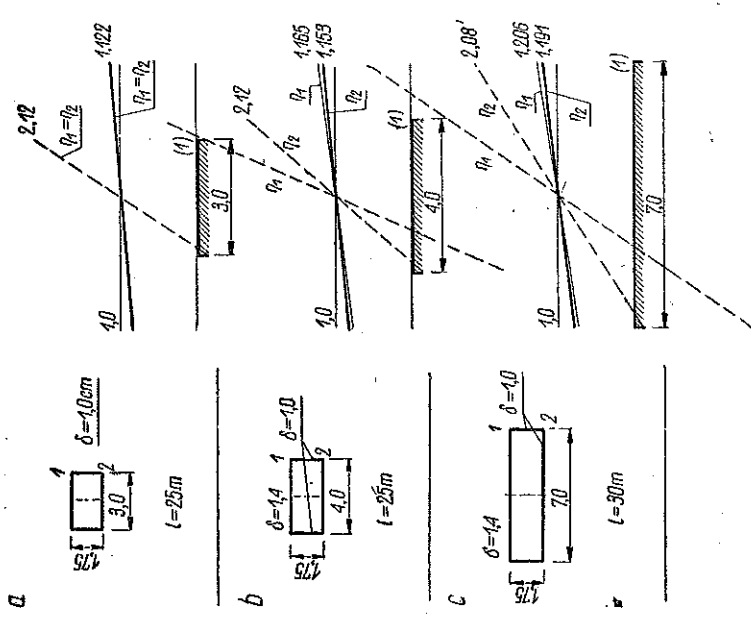
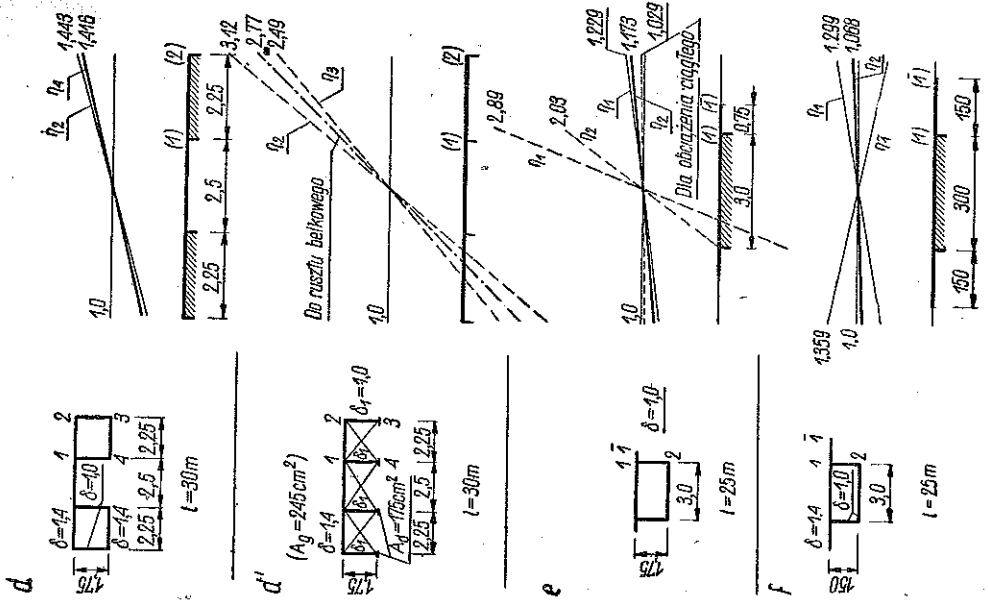
przeto wartość współczynnika przeciążenia dla obciążenia ciągłego przy σ_{zg} według (4.11) jest identyczna z (4.22).

Otrzymane zależności można poglądowo przedstawić za pomocą poprzecznych linii wpływowych. Rzędne $(\sigma_{zg} + \sigma_\omega)/\sigma_{zg} = 1 + \eta_p$ będące funkcją mimośrodę e naniesione są na rys. 28 dla sześciu różnych przekrojów zamkniętych i otwarto-zamkniętych. Rozpatrywany jest niekorzystny przypadek obciążenia siłą skupioną w środku przęsła.

Dla porównania w przykładach *a-e* linią kreskowaną naniesiono poprzeczne linie wpływowe naprężeń normalnych dla odpowiednich przekrojów dołem otwartych. Te ostatnie posiadają ten sam moment bezwładności J_x i odległości $e_{g,d}$ co odpowiednie przekroje zamknięte. Zgodność tę otrzymano przez zastąpienie ścianki dolnej porównywanego przekroju zamkniętego przez dwa dolne pasy przekroju otwartego (na rys. 29 przedstawiony jest przekrój otwarty, odpowiadający przekrojowi *c* z rys. 20).

Z porównania przebiegu linii wpływowych dla przekrojów zamkniętych i otwartych (odnoszących się do odpowiednich punktów przekroju) widać wyraźnie korzystne działanie przekroju zamkniętego: nawet przy niekorzystnym obciążeniu na skrajnym mimośrodku $e = 3,5$ m wielkości dodatkowych naprężeń normalnych w rozpatrzonych przekrojach zamkniętych nie przekraczają 20%.

Ciekawe jest porównanie przekroju, który jest zamknięty od dołu na całej szerokości mostu (przekrój *c*), z przekrojem otwarto-zamkniętym,



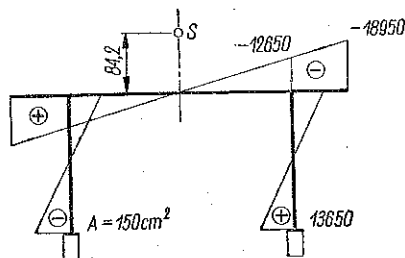
{316}

Rys. 28

w którym części zamknięte występują zewnątrz, a środkowa partia przekroju jest od dołu otwarta (przekrój d). Dodatkowe naprężenie normalne w przekroju pierwszym jest około dwukrotnie mniejsze aniżeli w przekroju drugim. Mniejsze będą również naprężenia styczne τ_1 i τ_0 .

W przekrojach otwarto-zamkniętych ze wspornikami można zauważyć znaczne rzędne η_p dla punktów 1 i 1 ścianki górnej, zwłaszcza przy dużym wysięgu wspornika (przekrój f). Wprawdzie w przypadku tym współczynnik $1 + \eta_p$ osiąga wartości dochodzące do 1,36, jednakże ten duży wzrost (36%) jest o tyle niemiernorodajny, że naprężenia normalne od zginania we włóknach górnych, z którymi się one sumują, są w tym przypadku przeszło dwukrotnie mniejsze niż we włóknach dolnych.

Ponieważ od ciężaru własnego i symetrycznej części obciążenia użytkowego największe naprężenia normalne w ustroju jedoprześłowym z reguły występują we włóknach dolnych (grubsza blacha ortotropowej płyty jezdni wraz z żebrami podłużnymi stanowi większy przekrój aniżeli ścianka dolna



Rys. 29

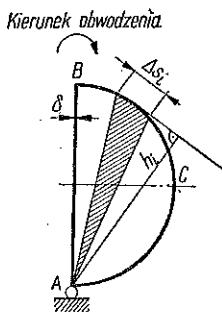
i przesuwają oś obojętną ku górze), największych wypadkowych naprężeń $\sigma_{zg} + \sigma_\omega$ można z reguły spodziewać się we włóknach dolnych. Należy jednak mieć to na uwadze, że blachy górne otrzymują dodatkowe naprężenia σ pochodzące od współpracy w płycie ortotropowej jezdni.

Należy również zauważyć, że przyjęte obciążenie na skrajnym mimośrodku jest wyjątkowo niekorzystne. Obliczone dla tego położenia obciążenia wartości η_p nie określają jeszcze rzeczywistego przeciążenia konstrukcji mostowych, związanego ze skręcaniem. Należałoby przyjęcie rozmieszczenie obciążenia użytkowego zgodnie z odpowiednimi normami i wówczas okazałoby się, że wypadkowa P tego obciążenia (przypadająca na przekrój środkowy) przesuwa się z położenia skrajnego w kierunku osi mostu; ponadto obciążenie ciągłe p , które należy jeszcze umieścić wzdłuż mostu, powoduje stosunkowo mniejszy wzrost naprężeń normalnych σ_ω . Tak więc ostateczny procentowy wzrost naprężeń normalnych spowodowany skręcaniem będzie mniejszy od podanych powyżej wartości ekstremalnych.

Przedstawione zależności dotyczyły przekrojów stalowych.

4.3. Konstrukcje z narzuconą osią obrotu (kłapy soczewkowate). Numeryczno-wykreslny sposób wyznaczania charakterystyk przekroju. Zajmiemy się obliczaniem charakterystyk przekroju o konturze krzywoliniowym metodą numeryczno-wykreslną.

Wiele spośród konstrukcji zamknięć przedstawionych w punkcie 2.2 charakteryzuje się krzywoliniowym konturem przekroju, np. klapy soczewkowate. Obliczenie charakterystyk takich przekrojów najprościej dokonać sposobem numeryczno-wykreslnym. Tok postępowania objaśnimy na przykładzie przekroju przedstawionego na rys. 30. Narzucona oś obrotu przechodzi przez punkt A.



Rys. 30

Obliczamy wartości $\omega_A = \int_0^s h \delta ds$ względem biegunu A. Możemy je obliczyć sumując elementarne iloczyny $h_i \delta \Delta s_i$ (rys. 30) zaczynając od punktu A. Można również nanieść kontur przekroju na papierze milimetrowym i obliczyć podwójne pola wycinka ograniczonego konturem zewnętrznym i odpowiednimi promieniami wodzącymi.

Na kontur przekroju przedstawiony w rozwinięciu nanosimy wykres ω_A jak również wykres $-\left(\Omega / \oint \frac{ds}{\delta}\right) \int_0^s ds / \delta$ (rys. 31a). Wykres wypadkowy

$$\bar{\omega}_A = \omega_A - \frac{\Omega}{\oint \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta}$$

nie spełnia jeszcze warunku $\int_A \bar{\omega} dA = 0$ (przy stałej grubości ścianki powierzchnie dodatnie i ujemne na wykresie a powinny być sobie równe). Należy wyznaczyć stałą

$$C = -\frac{\int_A \bar{\omega}_A dA}{\Omega},$$

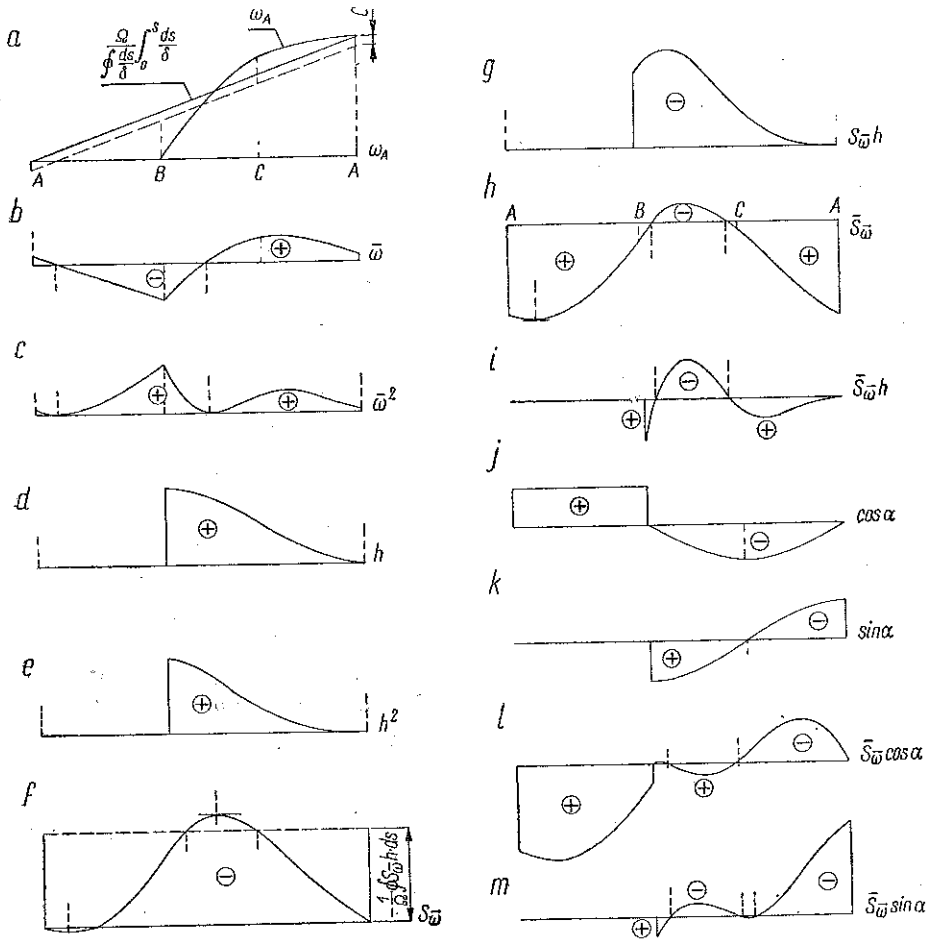
co oznacza po prostu znalezienie wartości, o którą należy przesunąć linię zamykającą na wykresie a, ażeby powierzchnie dodatnie i ujemne wyrównały się. W tym przykładzie stała jest dodatnia i linię zamykającą (linia kreskowana na rys. 31a) należy przesunąć w dół. Ostateczne wartości $\bar{\omega}$ są przedstawione na rys. 31b.

Obliczając kwadraty rzędnych wykresu b otrzymujemy wykres $\bar{\omega}^2$ (rys. 31c). Pole ograniczone wykresem $\bar{\omega}^2$ pomnożone przez odpowiednie grubości na odpowiednich odcinkach konturu (tutaj jest $\delta = \text{const}$) daje wycinkowy moment bezwładności

$$J_{\bar{\omega}} = \int_A \bar{\omega}^2 dA.$$

Do obliczenia momentu bezwładności czystego skręcania $J_d = \Omega^2 / \int ds / \delta$ należy uprzednio wyznaczyć podwojone pole powierzchni zawartej w konturze przekroju Ω . W celu obliczenia

$$J_k = \int_A h^2 \delta ds$$



Rys. 31

sporządzamy wykresy h i h^2 (rys. 31d i 31e). Powierzchnia ograniczona wykresem h^2 pomnożona przez odpowiednie grubości na odpowiednich odcinkach (tutaj $\delta = \text{const}$) daje poszukiwaną wartość J_k . Mając J_d i J_k znamy również $\mu = 1 - J_d/J_k$.

Z kolei przystępujemy do obliczenia wycinkowych momentów statycznych. Wykres

$$S_{\omega}^{-} = \int_0^s \bar{\omega} \delta ds$$

otrzymujemy przez obliczenie pola pod wykresem b , przy pomnożeniu rzędnych przez δ na odpowiednich odcinkach (rys. 31f). Wykres f powinien zamykać się rzędną zerową, $\int_A \bar{\omega} \delta ds = 0$. Ewentualne nieduże odchylenie należy rozrzucić na rzędne poprzedzające proporcjonalnie do $\int_0^s \delta ds$.

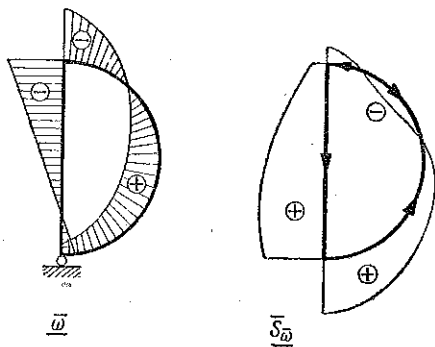
W celu obliczenia stałej $-(1/\Omega) \int_A S_{\omega}^{-} h ds$ sporządzamy wykres $S_{\omega}^{-} h$ (rys. 31g) będący iloczynem rzędnych wykresów d i f . Scałkowanie funkcji określonej przez otrzymany wykres i podzielenie rzędnych tego wykresu przez Ω określa poszukiwaną stałą. Krzywa na wykresie f przesunie się o otrzymaną wartość (w tym przykładzie dodatnią). Ostateczny wykres

$$\bar{S}_{\omega}^{-} = S_{\omega}^{-} - \frac{1}{\Omega} \int_A S_{\omega}^{-} h ds$$

przedstawiony jest na rys. 31h. Sprawdzianem poprawności sporządzonego wykresu jest nowy wykres $\bar{S}_{\omega}^{-} h$ (rys. 31i). Ponieważ spełniony ma być warunek

$$\int_A \bar{S}_{\omega}^{-} h ds = 0$$

(naprężenia styczne $\tau_{\omega} = (B'/J_{\omega}) \bar{S}_{\omega}^{-} / \delta$ dają moment wypadkowy równy zeru), powierzchnie dodatnie i ujemne wykresu i powinny być sobie równe. Dalszym sprawdzianem może być zależność (4.7.1), przy czym należy obliczyć tylko $\int \bar{S}_{\omega}^{-} \frac{ds}{\delta}$.



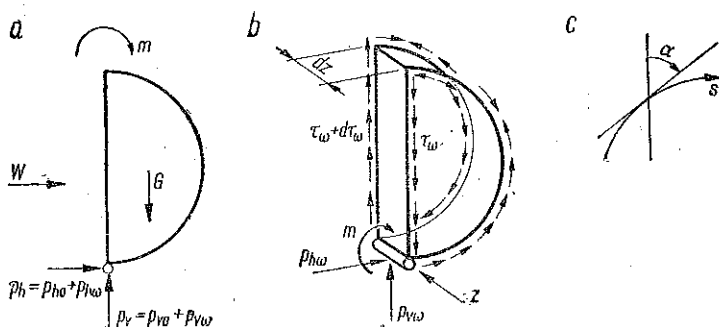
Rys. 32

Wykresy $\bar{\omega}$ i \bar{S}_{ω}^{-} przedstawione są również na konturze nierozwiniętym (rys. 32).

Przy skręcaniu z narzuconą osią obrotu występują reakcje wzdłuż osi obrotu (rys. 33a). Reakcje te pochodzą zarówno od obciążenia zewnętrznego, jak parcie wody, ciężar własny konstrukcji (oznaczymy je przez

p_{v0} i p_{h0}) jak i od skręcania przedstawiającego zagadnienie statycznie niewyznaczalne (reakcje $p_{v\omega}$ i $p_{h\omega}$). Poniżej zajmiemy się wyznaczeniem tych ostatnich.

Rozpatrzmy element pręta o długości dz (rys. 33b). W obu płaszczyznach ograniczających działają naprężenia styczne τ_ω lub $\tau_\omega + d\tau_\omega$ (naprężenia czystego skręcania τ_1 pomijamy, ponieważ, jak wiadomo, nie dają one składowych V czy H , równowagę natomiast całkowicie zewnętrzny moment skręcający M_z).



Rys. 33

Z warunku $\Sigma V = 0$ wynika przy uwzględnieniu wartości kąta zgodnie z rys. 33b następujące równanie:

$$\int_A \left(\frac{\partial \tau_\omega}{\partial z} dz \right) \cos \alpha dA + p_{v\omega} dz = 0,$$

a stąd

$$(4.23) \quad p_{v\omega} = - \int_A \tau'_\omega \cos \alpha dds.$$

Podobnie z warunku $\Sigma H = 0$ otrzymamy

$$(4.24) \quad p_{h\omega} = - \int_A \tau'_\omega \sin \alpha dds.$$

Przy wyznaczaniu naprężeń stosuje się nadal równania wyprowadzone w p. 3. Uwzględniając według (3.15)

$$(4.25) \quad \tau'_\omega = - \frac{B'' \bar{S}_\omega^-}{J_\omega^- \delta},$$

z (4.23) i (4.24) otrzymujemy

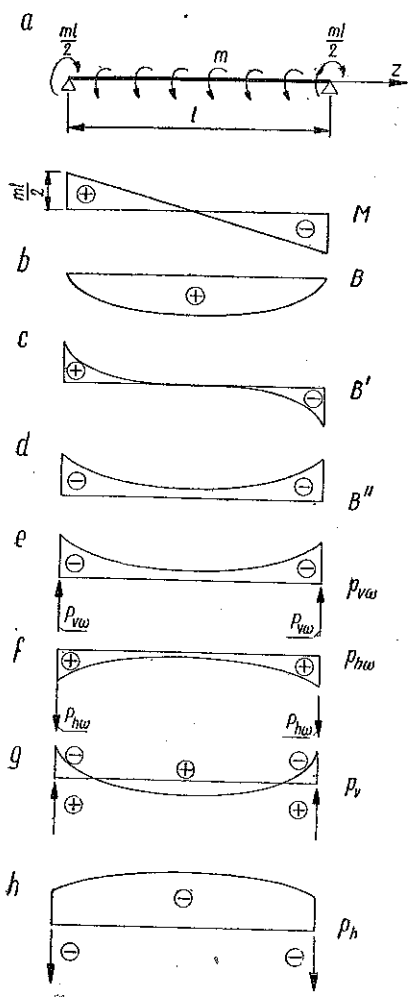
$$p_{v\omega} = \frac{B''}{J_\omega^-} \int_A \bar{S}_\omega^- \cos \alpha ds, \quad p_{h\omega} = \frac{B''}{J_\omega^-} \int_A \bar{S}_\omega^- \sin \alpha ds.$$

Zachodzi zatem konieczność wyznaczenia nowych charakterystyk przekroju:

$$(4.26) \quad \bar{\alpha} = \int_A \bar{S}_\omega^- \cos \alpha ds, \quad \bar{\beta} = \int_A \bar{S}_\omega^- \sin \alpha ds.$$

Na rysunkach 31l i 31m sporządzone zostały wykresy $\bar{S}_\omega \cos \alpha$ i $\bar{S}_\omega \sin \alpha$ (por. także rys. 31j i 31k). Scałkowanie ich daje poszukiwane wartości $\bar{\alpha}$ i $\bar{\beta}$.
Rozkład reakcji

$$(4.27) \quad p_{v\omega} = \frac{B''}{J_\omega} \bar{\alpha}, \quad p_{h\omega} = \frac{B''}{J_\omega} \bar{\beta}$$



Rys. 34

na długości pręta jest więc proporcjonalny do drugiej pochodnej bimomentu.

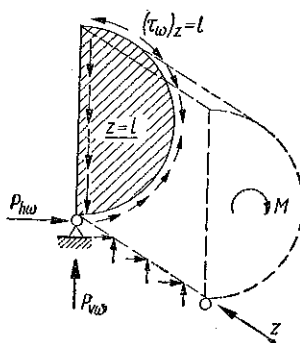
Dla pręta obustronnie podpartego i posiadającego na obu końcach możliwość deplanacji wielkość B'' jest określona przez (3.26/3) (rys. 34a-34d).

Wykresy $p_{v\omega}$ i $p_{h\omega}$ dla tego przypadku ($\bar{\alpha}$ dodatnie, $\bar{\beta}$ ujemne i B'' ujemne) przedstawione są na rys. 34e i 34f.

Dla uzyskania pełnego obrazu rozkładu reakcji należy jeszcze rozpatrzeć przepony skrajne, na które są przekazywane naprężenia

$$[\tau_\omega]_{z=0} = -\frac{B'_{z=0}}{J_\omega} \bar{S}_\omega,$$

$$[\tau_\omega]_{z=l} = -\frac{B'_{z=l}}{J_\omega} \bar{S}_\omega.$$



Rys. 35

Naprężenia $[\tau_\omega]_{z=l}$ działające na przepoń pokazane są na rys. 35. Ponieważ $B'_{z=l}$ jest ujemne (rys. 34c), to podany na rys. 35 kierunek jest rzeczywistym kierunkiem działania $[\tau_\omega]_{z=l}$ przy rozpatrywanym obciążeniu. Z przepon skrajnych naprężenia styczne przekazywane są na skrajny

zawias, gdzie wywołane zostają reakcje skupione $P_{v\omega}$ i $P_{h\omega}$ (rys. 35). Reakcje te wynoszą

$$(4.28) \quad \begin{cases} P_{v\omega} = \int_A [\tau_\omega]_{z=l} \cos \alpha \delta ds = -\frac{B'_{z=l} \bar{\alpha}}{J_\omega^-}, \\ P_{h\omega} = \int_A [\tau_\omega]_{z=l} \sin \alpha \delta ds = -\frac{B'_{z=l} \bar{\beta}}{J_\omega^-} \end{cases}$$

i są wobec ujemnej wartości $B'_{z=l}$ tego samego znaku co $\bar{\alpha}$ lub $\bar{\beta}$ (w danym przykładzie $P_{v\omega}$ zgodnie, zaś $P_{h\omega}$ przeciwnie do przedstawionych na rys. 35). Siły $P_{v\omega}$ i $P_{h\omega}$ równoważą całkowicie obliczone poprzednio reakcje ciągłe $p_{v\omega}$ i $p_{h\omega}$. Tak np. dla sił pionowych przy $B'_{z=l/2} = 0$ mamy

$$P_{v\omega} + \int_{l/2}^l p_{v\omega} dz = -\frac{\bar{\alpha} B'_{z=l}}{J_\omega^-} + \frac{\bar{\alpha}}{J_\omega^-} \int_{l/2}^l B'' dz = 0.$$

Podobna zależność dotyczy również sił poziomych.

Wypadkowe reakcje pionowe i poziome pochodzące od obciążenia zewnętrzznego i skręcania skrępowanego przedstawione są na rys. 34g i 34h (reakcje od pierwszego obciążenia przy ciągłym podparciu i równomiernym obciążeniu są stałe).

Należy jeszcze rozpatrzyć obciążenie przepon i zachowanie się odcinków między przeponami; związane ze stanem naprężeń σ_ω i τ_ω . Obciążenie przepon wywołane stanem naprężeń τ_1 w poniższych rozważaniach pomijamy.

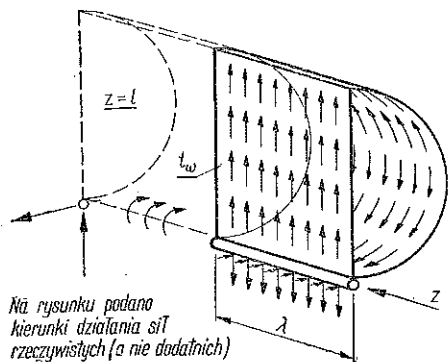
Jak już kilkakrotnie zaznaczono, teoria skręcania skrępowanego prętów cienkościennych opiera się na założeniu nieodkształcalnego przekroju. Założenie to przy profilu idealnie cienkościennym spełnione jest tylko wtedy, gdy przekroje pręta wzmocnione są przeponami rozłożonymi na długości pręta w sposób ciągły. Na przeponę mieszczącą się na długości dz przypada różnica sił τ_ω i $\tau_\omega + (\partial\tau_\omega/\partial z) dz$ (rys. 33), czyli na jednostkę długości kierunku z przypada siła

$$t_\omega = \delta \frac{\partial\tau_\omega}{\partial z} = -B'' \frac{\bar{S}_\omega^-}{J_\omega^-}.$$

Siły t_ω wraz z reakcjami $p_{v\omega}$ i $p_{h\omega}$ stanowią dla dowolnego elementu wyciętego przekrojami $z = \text{const}$ układ zrównoważony: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M_z = 0$.

W rzeczywistej konstrukcji przepony dawane są w pewnych odstępach. W przedziałach między przeponami siły t_ω muszą być przejęte przez samą powłokę (poszycie) i przekazane na najbliższe przepony za pomocą sił błonowych (rys. 36); powstają zatem dodatkowe siły normalne $n_\varphi = \delta\sigma_\varphi$,

$n_z = \delta\sigma_z$ i styczne $n_{\varphi z} = \delta\tau_{\varphi z}$. W ogólnym zgięciowym stanie naprężenia wystąpią ponadto momenty m_{φ} działające w kierunku obwodowym, momenty m_z działające w kierunku podłużnym i momenty skręcające $m_{z\varphi}$. Większe

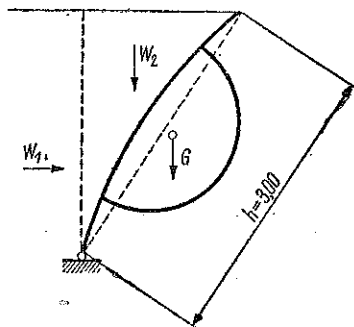


Rys. 36

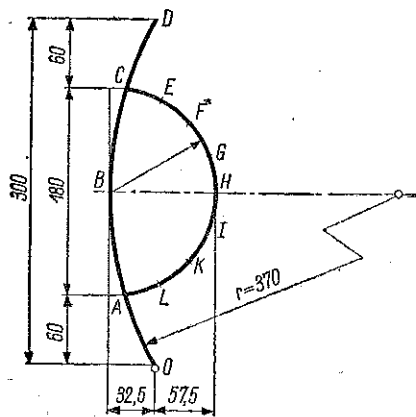
wartości m_{φ} mogłyby wystąpić przy bardzo dużym rozstawie przepon. (Momenty m_{φ} od obciążenia siłami t_{ω} jak od innego obciążenia można by wyznaczyć np. metodą tarczownicy wpisanej; metoda ta jest z reguły stosowana do obliczenia powłok walcowych o konturze krzywoliniowej). W praktyce przepony daje się jednak w takich odstępach, że powłoki, o których mowa, należą do powłok krótkich (ewentualnie średnich), w których wpływ zgięciowego stanu

naprężenia jest mniejszy. Ponadto należy zauważyć, że przy obciążeniu równomiernie rozłożonym bimotoenty i ich pochodne są mniejsze niż przy obciążeniu skupionym — mniejsze będą również siły t_{ω} .

Przepony w konstrukcjach cienkościennych są, jak widać, nieodzowne. Z drugiej jednak strony przy dostatecznie gęstym ich rozstawie pominięcie składowych zgięciowego stanu naprężenia wywołanych skręcaniem można uznać za dopuszczalne.



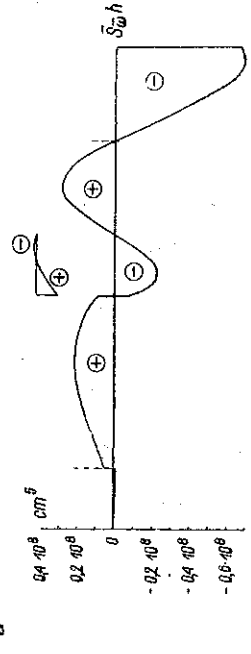
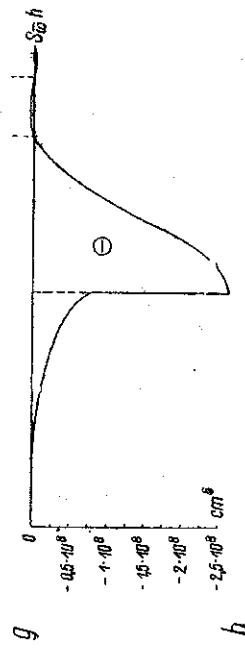
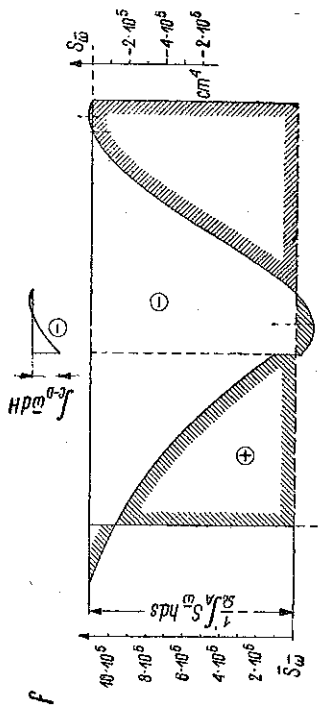
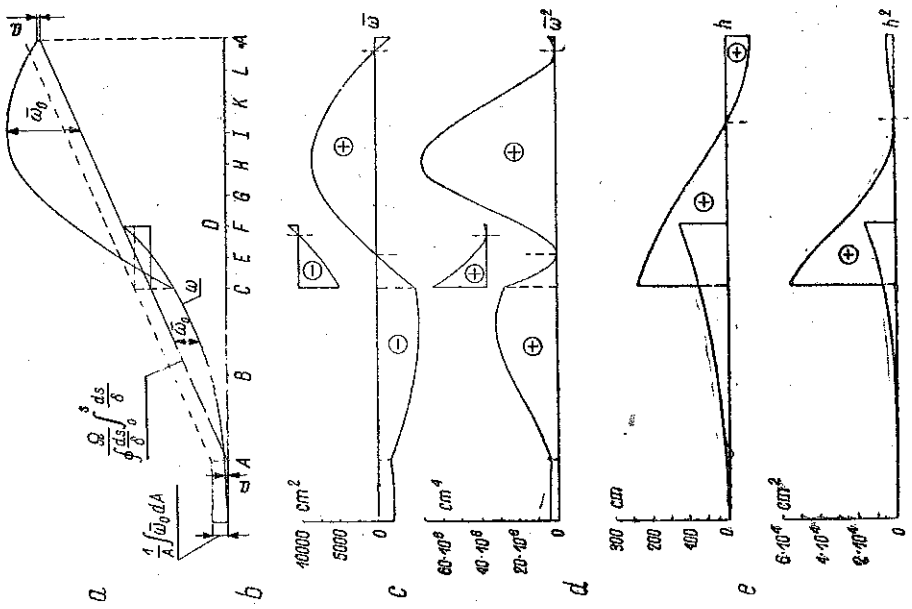
Rys. 37



Rys. 38

Przepony pośrednie obciążone są siłami T_{ω} , które przy dostatecznie gęsto rozmieszczonych przeponach można w przybliżeniu określić wzorem

$$T_{\omega} = -\frac{\bar{S}_{\omega}}{J_{\omega}} \frac{\lambda}{6} (B''_{r-1} + 4B''_r + B''_{r+1}),$$



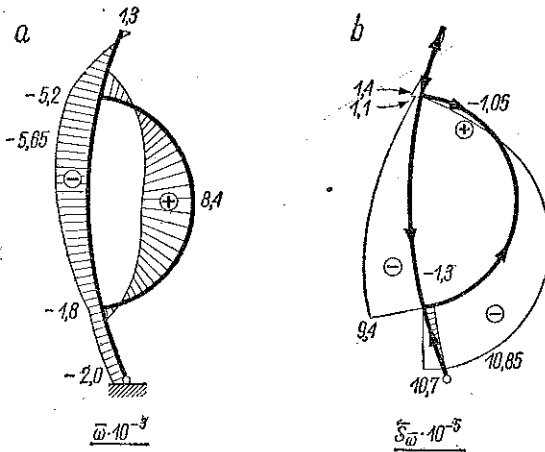
gdzie wskaźnikami $r-1$, r , $r+1$ oznaczono trzy kolejne przepony, dla których należy wziąć wartość B'' , zaś λ jest odległością przepon. Kierunek działania sił T_ω jest odwrotny niż w przeponach skrajnych.

Wreszcie należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że podparcie wzdłuż osi obrotu pod względem konstrukcyjnym nie jest ciągle; przeguby (zawiasy) umieszczone są w pewnych punktach pod przeponami. A zatem

również reakcje $p_{v\omega}$ i $p_{h\omega}$ zostaną w rzeczywistości zastąpione siłami skupionymi.

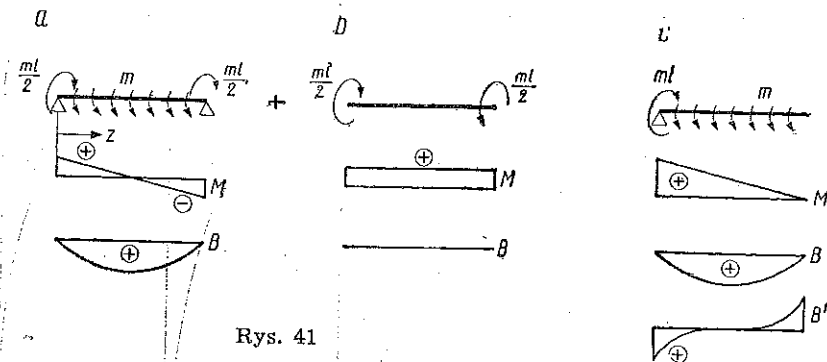
Przykład. Dla kłapy soczewkowatej przedstawionej na rys. 37 należy obliczyć naprężenia τ_1 , σ_ω i τ_ω wywołane skrećaniem przy jednostronnym napędzie kłapy. Długość l wynosi 20 m, $m = 4,78$ tm/m.

Wykresy funkcji koniecznych do określenia charakterystyk przekroju przedstawione są na rys. 39 i 40 (por. oznaczenia na rys. 38).



Rys. 40

Wartości bimomentów i ich pochodnych są w tym przypadku takie same jak w przypadku obustronnego zamocowania dla uniemożliwienia obrotu. Przypadek obciążenia przedstawiony na rys. 41c można bowiem



Rys. 41

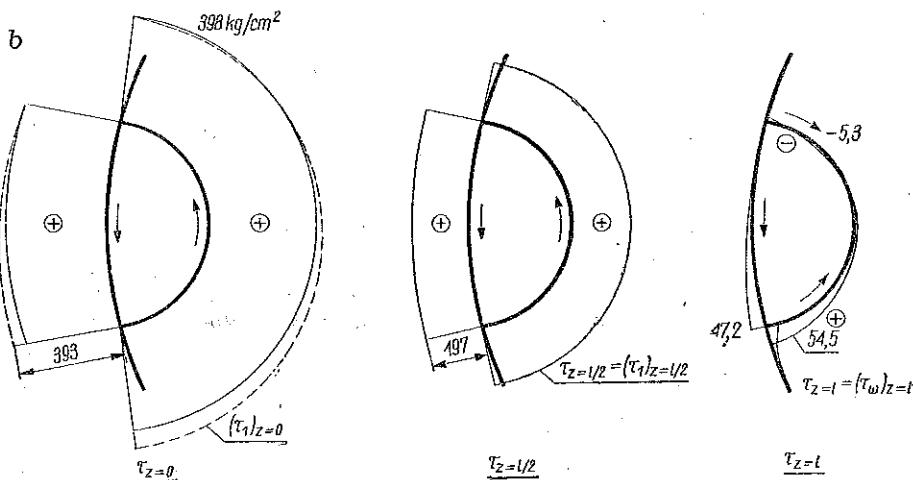
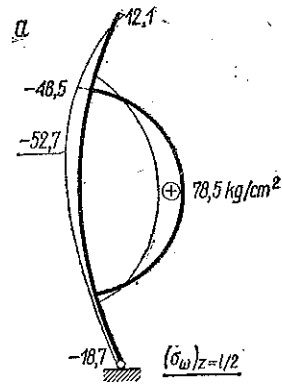
przedstawić jako sumę dwóch obciążeń a i b , z których drugie przedstawia przypadek czystego skrećania — wolny od naprężeń normalnych. Funkcje B , B' i B'' są zatem określone równaniami (3.26).

Rozkład naprężeń normalnych w przekroju środkowym pokazany jest na rys. 42a. Na rysunku 42b przedstawione są wykresy naprężeń stycznych $\tau = \tau_1 + \tau_\omega$ w przekrojach $z=0$, $z=l/2$ i $z=l$.

W powyższych obliczeniach przeprowadzonych dla grubości ścianki $\delta = 10$ mm należało właściwie od grubości ścianki odliczyć około 2 mm z uwagi na możliwość osłabienia przekroju wskutek korozji. Wszystkie podane naprężenia wzrosną wówczas o 25%.

Naprężenia normalne σ_ω i naprężenia styczne τ_ω są, ogólnie biorąc, wielkościami tego samego rzędu co naprężenia styczne czystego skręcania τ_1 . W tym przykładzie przy rozpiętości $l = 20$ m są one jednak około pięciokrotnie mniejsze od tych ostatnich. Przy mniejszych rozpiętościach różnice są stosunkowo mniejsze, ponieważ naprężenia σ_ω i τ_ω ulegną tylko niewielkiemu zmniejszeniu się, podczas gdy naprężenia τ_1 maleją proporcjonalnie do rozpiętości.

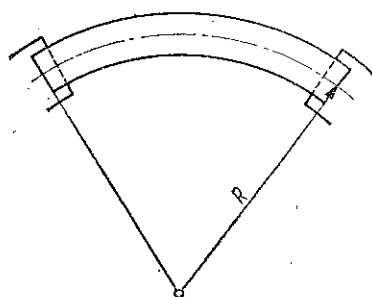
Jak wynika z przytoczonego przykładu naprężenia wywołane skręcaniem są dosyć niskie. Rozwiązanie konstrukcyjne polegające na wykorzystaniu dużej sztywności skrętnej przekroju zamkniętego jest zatem korzystne.



Rys. 42

4.4. Pręty zakrzywione o przekroju zamkniętym bisymetrycznym. W budownictwie mostowym znajdują zastosowanie mosty zakrzywione o przekroju zamkniętym (rys. 43). Chodzi tu przede wszystkim o mosty żelbetowe sprężone. W mostach stalowych konstrukcja zakrzywiona może składać się z zakrzywionych pionowych belek pełnościennych i dwóch poziomych wykratowań w płaszczyźnie górnej i dolnej. Niezmienność kształtu przekroju zapewniają dostatecznie gęsto rozmieszczone przepony (rys. 44).

W celu wyprowadzenia równań różniczkowych zagadnienia skręcania pręta zakrzywionego rozpatrzmy element pręta cienkościennego, zakrzywionego w planie (rys. 45). W przekrojach prostopadłych do osi zakrzywionej według koła o promieniu R działają: moment zginający M_x i odpowiednia siła tnąca Q_y oraz moment skręcający M_z i bimoment B_z (na rys. 45 bimomentów nie oznaczono). Na element działa ponadto obciążenie $q_y dz$ i moment $m_z dz$.



Rys. 43

Warunek równowagi momentów względem osi ścinania daje równanie (rys. 46)

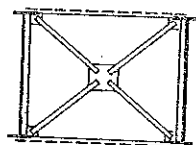
$$(4.29) \quad M'_x + \frac{M_z}{R} + m_z = 0.$$

Podobnie z warunku równowagi momentów względem osi x wypływa drugie równanie, które po zróżniczkowaniu względem z i wprowadzeniu zależności

$$Q'_y + q_y = 0$$

przybiera postać

$$(4.30) \quad M''_x - \frac{M'_z}{R} + q_y = 0.$$

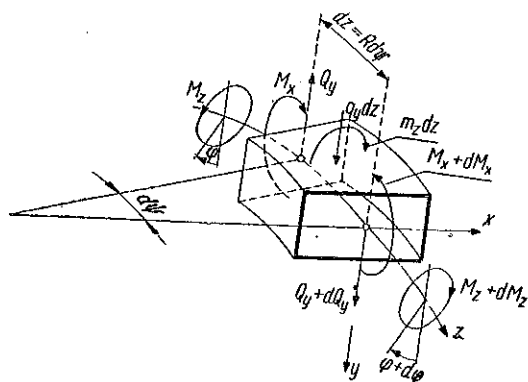


Rys. 44

Z kolei rozpatrzmy zależności geometryczne. Odkształcenie elementu charakteryzuje się przesunięciem pionowym v i obrotem φ (dodatni liczony zgodnie z ruchem wskazówek zegara).

Między momentem M_x i przemieszczeniami v i φ istnieje zależność

$$(4.31) \quad M_x = -EJ_x \left(v'' + \frac{\varphi}{R} \right).$$



Rys. 45

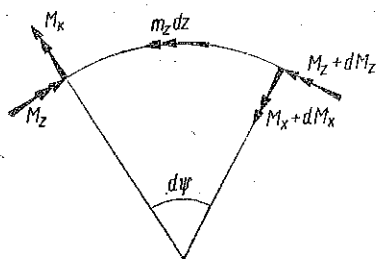
W wyrażeniu tym objaśnienia wymaga drugi składnik w nawiasie. Przy skręceniu elementu górna część przekroju (rys. 47a) przemieszcza się w prawo, natomiast dolna przemieszcza

się w lewo. Wskutek zakrzywienia osi belki związane są z tym wydłużenia i skrócenia włókien $\pm \varphi y/R$ oraz naprężenia $\sigma_z = \pm E\varphi y/R$. Naprężenia te dają moment względem osi x równy

$$\int \sigma_z y dA = EJ_x \frac{\varphi}{R}.$$

Między momentem M_z i przemieszczeniami φ i v zachodzi związek (według przybliżonej teorii skręcania prętów cienkościennych)

$$(4.32) \quad M_z = -EJ_{\omega} \left(\varphi''' - \frac{v'''}{R} \right) + GJ_d \left(\varphi' - \frac{v'}{R} \right).$$



Rys. 46

Tutaj należy zauważyć, że przy odkształceniu (rys. 47b) charakteryzującym się kątami $\varphi = v/R$ oraz $\varphi + d\varphi = (v + dv)/R$ osie x obu przekrojów ograniczających element leżą w jednej płaszczyźnie, tzn. nie ulegają wzajemnemu skręceniu. Stąd wynika, że z takim odkształceniem nie jest związany żaden moment M_z .

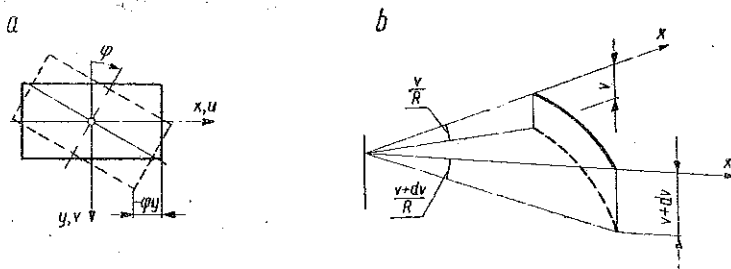
Po podstawieniu (4.31) i (4.32) do równań (4.29) i (4.30) otrzymamy dwa równania różniczkowe zagadnienia:

$$(4.33) \quad \begin{cases} -EJ_{\omega} \varphi^{IV} + GJ_d \varphi'' - \frac{EJ_x}{R^2} \varphi + \frac{EJ_{\omega}}{R} v^{IV} - \frac{GJ_d + EJ_x}{R} v'' + m_z = 0, \\ -\left(EJ_y + \frac{EJ_{\omega}}{R^2} \right) v^{IV} + \frac{GJ_d}{R^2} v'' + \frac{EJ_{\omega}}{R} \varphi^{IV} - \frac{GJ_d + EJ_x}{R} \varphi'' + q_y = 0. \end{cases}$$

Są to pełne równania różniczkowe skręcania skrępowanego pręta cienkościennego o przekroju zamkniętym. Są one ściśle dla przekroju otwartego, bowiem przy wyprowadzaniu ich przyjęto zależność

$$B_z = -EJ_{\omega} \varphi'',$$

odnoszącą się do przekroju otwartego; dla przekroju zamkniętego można je traktować jako przybliżenie (por. punkt 3.2).



Rys. 47

W przekrojach zamkniętych sztywność wycinkowa ma mniejszy wpływ na wielkość odkształceń, tak że przy obliczaniu tych ostatnich w równaniach (4.33) można pominąć wyrazy zawierające J_{ω} .

Rozwiązanie równań (4.33) nie przedstawia większych trudności w przypadku swobodnego podparcia obu końców i obciążenia q_y i m_z zmienia-

jącego się na długości $l = R\psi_0$ mostu według sinusoidy i swobodnego podparcia na podporach:

$$(4.34) \quad q_y = q_0 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad m_z = m_0 \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Rozwiązanie φ i v przyjmujemy wówczas również w postaci funkcji spełniającej warunki brzegowe $\varphi = \varphi'' = 0$ dla $z = 0$ i $z = l$:

$$(4.35) \quad \varphi = A_1 \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad v = A_2 \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Po podstawieniu (4.35) i (4.34) do (4.33) otrzymamy po skróceniu przez $-\sin n\pi z/l$.

$$(4.36) \quad \begin{cases} \left(EJ_{\omega}^{-} \lambda_n^4 + GJ_d \lambda_n^2 + \frac{EJ_x}{R^2} \right) A_1 - \left(\frac{EJ_{\omega}^{-}}{R} \lambda_n^4 + \frac{GJ_d + EJ_x}{R} \lambda_n^2 \right) A_2 = m_0, \\ - \left(\frac{EJ_{\omega}^{-}}{R} \lambda_n^4 + \frac{GJ_d + EJ_x}{R} \lambda_n^2 \right) A_1 + \left[\left(EJ_x + \frac{EJ_{\omega}^{-}}{R^2} \right) \lambda_n^4 + \frac{GJ_d}{R^2} \lambda_n^2 \right] A_2 = q_0, \end{cases}$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Wprowadzając oznaczenia sztywności zastępczych

$$(4.37) \quad \alpha = C + \frac{B}{R^2 \lambda_n^2}, \quad \beta = C + B, \quad \gamma = C + BR^2 \lambda_n^2,$$

gdzie

$$(4.38) \quad B = EJ_x, \quad C = GJ_d + EJ_{\omega}^{-} \lambda_n^2,$$

równania (4.36) sprowadzić można do postaci

$$\alpha A_1 - \frac{\beta}{R} A_2 = \frac{m_0}{\lambda_n^2}, \quad -\frac{\beta}{R} A_1 + \frac{\gamma}{R^2} A_2 = \frac{q_0}{\lambda_n^2}.$$

Stąd mamy

$$(4.39) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\gamma m_0 + \beta R q_0}{\lambda_n^2 (\alpha \gamma - \beta^2)} = \frac{\gamma m_0 + \beta R q_0}{\lambda_n^2 BC (R \lambda_n - 1/R \lambda_n)^2}, \\ A_2 = \frac{\beta m_0 + \alpha R q_0}{\lambda_n^2 (\alpha \gamma - \beta^2)} R = \frac{(\beta m_0 + \alpha R q_0) R}{\lambda_n^2 BC (R \lambda_n - 1/R \lambda_n)^2}. \end{cases}$$

Mając maksymalne wartości $\varphi_{max} = A_1$ i $v_{max} = A_2$ możemy według (4.31) obliczyć

$$(4.40) \quad \begin{aligned} M_x &= -EJ_x \left(v'' + \frac{\varphi}{R} \right) = -B \left(-A_2 \lambda_n^2 + \frac{A_1}{R} \right) \sin \lambda_n z = \\ &= \frac{1}{C (R \lambda_n - 1/R \lambda_n)^2} \left[\left(\beta R - \frac{\gamma}{R \lambda_n^2} \right) m_0 + \left(\alpha R^2 - \frac{\beta}{\lambda_n^2} \right) q_0 \right] \sin \frac{n\pi z}{l}. \end{aligned}$$

Uwzględniając przy obliczaniu M_z według (4.32) zależności

$$\varphi''' = -\varphi' \lambda_n^2 \quad \text{i} \quad v''' = -v' \lambda_n^2,$$

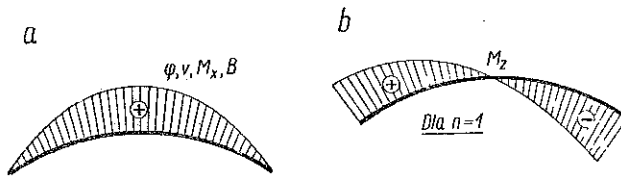
a ponadto wprowadzając C według (4.38) mamy

$$(4.41) \quad M_z = GJ_d \left(\varphi' - \frac{v'}{R} \right) - EJ_{\omega} \left(\varphi''' - \frac{v'''}{R} \right) = \\ = C \lambda_n \left(A_1 - \frac{A_2}{R} \right) \cos \lambda_n z = \frac{1}{\lambda_n B (R \lambda_n - 1/R \lambda_n)^2} [(\gamma - \beta) m_0 + (\beta - a) R q_0] \cos \frac{n\pi z}{l}$$

i wreszcie wyrażenie dla bimomentu

$$(4.42) \quad B = -EJ_{\omega} \varphi'' = EJ_{\omega} A_1 \lambda_n^2 \sin \lambda_n z = \frac{EJ_{\omega}}{\alpha \gamma - \beta^2} (\gamma m_0 - \beta R q_0) \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Jak widać, momenty skręcające i bimomenty w belkach zakrzywionych wywołane zostają również wówczas, gdy obciążenie przechodzi przez (zakrzywioną) oś ścinania.



Rys. 48

Jeżeli w równaniach (4.33) pominiemy sztywności wycinkowe EJ_{ω} , to wzory końcowe dla momentów zginających (4.40) i skręcających (4.41) nie ulegną zmianie — należy w nich jedynie przyjmować $C = GJ_d$ zamiast ogólnego wyrażenia według (4.38/2).

Jak wynika ze wzorów wycinkowych, przemieszczenia φ i v a także momenty zginające i bimomenty przebiegają według sinusoidy (rys. 48) z maksymalną wartością w środku przęsła, natomiast momenty skręcające zmieniają się według cosinusoidy z maksymalnymi wartościami na podporach.

Inne przypadki obciążenia można rozwiązać rozkładając funkcje określające obciążenie w szereg Fouriera. Przy obciążeniu symetrycznym będzie on zawierał tylko składniki z funkcją sinus, dla obciążenia antysymetrycznego wystąpią jedynie wyrazy z funkcją cosinus. Dla obciążenia równomiernie rozłożonego można zadowolić się już trzema wyrazami szeregu:

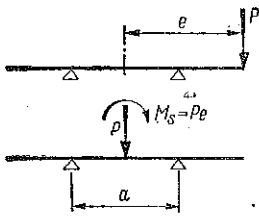
$$(4.43) \quad q(z) = \frac{4q}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (n=1, 3, 5),$$

gdzie q oznacza wartość obciążenia równomiernie rozłożonego.

Bardziej złożone jest zagadnienie skręcania ustroju nośnego złożonego z belki prostej o przekroju skrzynkowym i wzmacniającego ją w płaszczyźnie pionowej elementu zakrzywionego w postaci pojedynczego łuku, połączonego z belką za pomocą sztywnych wieszaków i poddanego działaniu sił normalnych. Przy jednostronnym obciążeniu belki otrzymujemy tu zagadnienie nieliniowe (teoria II rzędu), [24].

5. Skręcanie dźwigarów skrzynkowych o przekroju odkształcalnym

5.1. Wyprowadzenie równania różniczkowego według teorii przybliżonej dla pręta obciążonego między przeponami. W poniższych rozważaniach czyni się założenie, że pręt posiada przepony w stosunkowo dużych odstępach, a w szczególnym przypadku, który rozpatrzemy najpierw, jedynie przepony w przekrojach skrajnych. Za pośrednictwem przepon skrajnych momenty skręcające przekazywane są na podpory. Przy wyznaczaniu dodatkowych naprężeń normalnych wywołanych zmianą kształtu przekroju pomija się wpływ odkształceń postaciowych w płaszczyznach poszczególnych ścianek, co odpowiada np. pominięciu wpływu sił tnących przy obliczaniu ugięcia w zginanych belkach (choć stopień dopuszczalności takiego założenia w obu przypadkach może być różny).



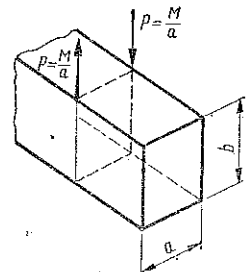
Rys. 49

Istotną rolę gra w rozpatrywanym przypadku sposób obciążenia elementu na skręcanie. Dowolne obciążenie poprzeczne można, jak wiadomo, rozłożyć na obciążenie poprzeczne działające w osi (ścianania) i moment skręcający (rys. 49). Nie jest

jednak obojętne, czy moment zostaje wprowadzony za pomocą pary sił działających na ścianki pionowe, czy też poziome. W mostach np. obciążenie działa na jezdnię i przenosi się za pośrednictwem płyty jezdni lub poprzecznie na ścianki pionowe (rys. 50). Obciążenie to (rys. 51a) można rozłożyć na dwa następujące składowe przypadki obciążenia:

1) obciążenie momentem skręcającym M_s , przy założeniu, że działa on na element za pośrednictwem niepodatnej przepony (rys. 51b); otrzymuje się wówczas przypadek obciążenia zbliżony do rozpatrywanego w p. 3.3;

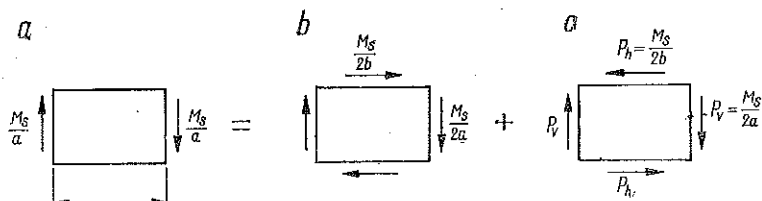
2) obciążenie zniekształcające według rys. 51c, którego wypadkowy moment skręcający jest równy zeru.



Rys. 50

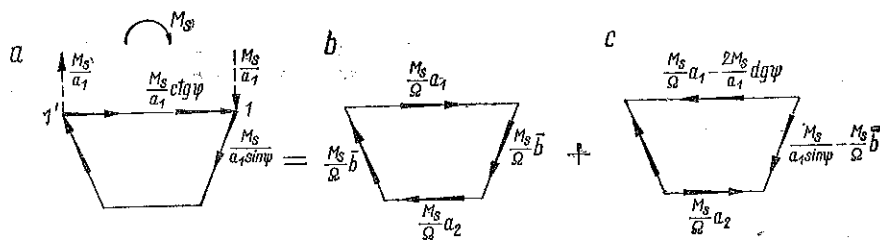
Dla przekroju monosymetrycznego trapezowego odpowiednie obciążenia przedstawione są na rys. 52. Interesuje nas jedynie antysymetryczna część obciążenia zewnętrznego, którą można zastąpić parą sił $\pm M_s/a_1$,

działających w węzłach 1 i 1' ścianki górnej (w przypadku mostu—jezdni), rys. 52a. Siły te rozkładają się na kierunek poziomy i skośny dając obciążenie działające w płaszczyznach ścianek. Obciążenie to można rozłożyć na obciążenie czystego skręcania (rys. 52b) i obciążenie samozrównoważone, wywołujące zniekształcenie przekroju (rys. 52c). Warunek $\Sigma Y = 0$ jest spełniony dzięki antysymetrii obciążenia względem osi pionowej y . Łatwo sprawdzić, że spełniony jest również warunek $\Sigma X = 0$.



Rys. 51

Pierwszy przypadek obciążenia (momentem skręcającym M_s) można rozwiązać metodą podaną w p. 3. Nie będzie co prawda spełniony warunek, że przepony powinny być rozmieszczone w sposób ciągły (lub przynajmniej dostatecznie gęsto) i trzeba liczyć się również w tym przypadku z pewnym zniekształceniem przekroju między przeponami, mimo że nie działa tam obciążenie zewnętrzne. Okazuje się jednak (por. wyniki uzyskane w pracy [22] dla szczególnego przypadku pręta i jego obciążenia), że naprężenia σ_z są wówczas mniejsze (kosztem wzrostu zniekształcenia przekroju), tak że taki sposób obliczenia daje dla naprężeń σ_z pewien zapas pewności.



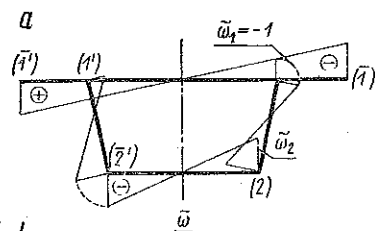
Rys. 52

W przekrojach o dużej grubości ścianki (np. przekroje żelbetowe) dzięki dużej sztywności poprzecznej przekroju różnice między naprężeniami obliczonymi przy założeniu nieodkształcalnego przekroju czy też przy uwzględnieniu odkształcenia przekroju poza przekrojem obciążonym są niewielkie.

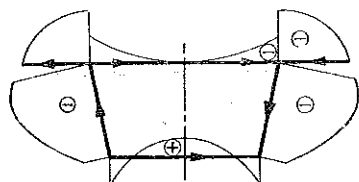
Z drugiej strony w przekrojach o bardzo cienkich ściankach w omawianym przypadku obciążenia działającego poprzez niepodatną przeponę

otrzymuje się nie tylko mniejsze naprężenia w przekroju obciążonym, lecz także odmienny przebieg naprężeń σ_z w kierunku podłużnym. Naprężenia te bowiem zanikają ku podporom wolniej, a w skrajnym przypadku przegubowego połączenia poszczególnych ścianek wzdłuż krawędzi przekroju zamkniętego — maleją liniowo do zerowych wartości na podporach. Wówczas jednak, jak już wspomniano, wzrasta odkształcalność przekroju. Naprężenia w przekroju obciążonym są przy tym mniejsze dla większych długości pręta.

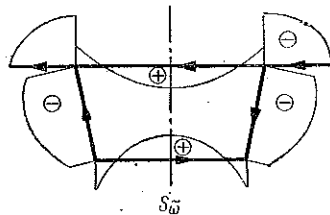
Najdalej idącym uproszczeniem będzie pominięcie zaburzenia wywołanego zmniejszeniem się deplanacji w miejscu przepony i przyjęcie, że mamy do czynienia z przypadkiem czystego skręcania, przy którym nie zachodzi zniekształcenie przekroju nawet w pręcie nie usztywnionym



b



c



Rys. 53

przeponami. Przy czystym skręcaniu bowiem nie ma przyrostu naprężeń stycznych w kierunku z , $(\partial\tau/\partial z)dz = 0$, a zatem na elementarne pasemko zamknięte o szerokości dz nie działa żadne obniżenie mogące zmienić geometryczny kształt przekroju.

Jeżeli pierwszy przypadek obciążenia obliczamy według p. 3 przy założeniu, że przepony są rozłożone na długości pręta w sposób ciągły i chcemy otrzymać dokładniejsze wyniki końcowe, to poprawkę do obliczenia można będzie wprowadzić w omówionym poniżej drugim etapie obliczenia (obciążenie zniekształcające). Obok obciążenia przedstawionego na rys. 52c, działającego w przekroju obciążonym, należy wówczas jako obciążenie zewnętrzne pręta wprowadzić jeszcze siły, które w pierwszym etapie obliczenia oddziałują na fikcyjne przepony pośrednie rozłożone w sposób ciągły i konieczne do zachowania niezmienności geometrycznego kształtu przekroju.

Poniżej zajmiemy się rozwiązaniem zadania w przypadku obciążenia zniekształcającego.

Naprężenia normalne w kierunku podłużnym przyjmujemy w postaci

$$(5.1) \quad \sigma = f\tilde{\omega},$$

gdzie $f = f(z)$ jest pewną funkcją zmiennej z , natomiast $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(s)$ przedstawia zmienność naprężeń po obwodzie s , przy czym dla dowolnego punk-

tu, np. dla punktu narożnego 1 na rys. 53a, przyjmuje się wartość jednostkową, $\tilde{\omega}_1 = -1$.

Ponieważ pomijamy odkształcenia postaciowe w płaszczyznach poszczególnych ścianek, to rozkład naprężeń normalnych będzie prostoliniowy — w częściach wspornikowych danej ścianki będzie on przedłużeniem wykresu ważnego dla części należącej do przekroju zamkniętego (por. punkty 1 i 1 na rys. 53a).

Wykres $\tilde{\omega}$ jest jednoznacznie określony warunkami statycznymi spełnionymi w każdym przekroju:

$$N_z = \int_A \sigma dA = 0, \quad M_x = \int_A \sigma y dA = 0, \quad M_y = \int_A \sigma x dA = 0.$$

Dla przekroju symetrycznego dwa pierwsze warunki są spełnione. Natomiast trzeci warunek, który można inaczej zapisać w postaci

$$(5.2) \quad \int_A \tilde{\omega} x dA = 0,$$

określa rzędną w drugim narożu przekroju, leżącym po tej samej stronie osi symetrii (punkt 2 na rys. 53a).

Związane z naprężeniami normalnymi σ siły styczne $T = \tau \delta$ określone są równaniami równowagi elementu $ds \times dz$ (rys. 14):

$$\frac{\partial T}{\partial s} + \delta \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0,$$

skąd po scałkowaniu mamy

$$T = T_0 + \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} \delta ds = T_0 - f' \int_0^s \tilde{\omega} \delta ds.$$

Po wprowadzeniu wielkości pomocniczej

$$(5.3) \quad S_{\tilde{\omega}} = \int_0^s \tilde{\omega} \delta dA$$

mamy również

$$(5.4) \quad T = T_0 - f' S_{\tilde{\omega}}.$$

Wartość T_0 otrzymamy z warunku $\Sigma M_z = 0$, przy czym należy uwzględnić naprężenia styczne w części zamkniętej i otwartej (stała T_0 odnosi się tylko do części zamkniętej):

$$\int_A T h ds = T_0 \int h ds - f' \int_A S_{\tilde{\omega}} h ds = 0.$$

Skąd wynika

$$(5.5) \quad T_0 = f' \frac{\int_A \bar{S}_\omega h ds}{\int h ds}$$

i według (5.4) przy $\int_A h ds = \Omega = 2ab$

$$(5.6) \quad \tau = \frac{T}{\delta} = -\frac{f'}{\delta} \left(\bar{S}_\omega - \frac{\int_A \bar{S}_\omega h ds}{\Omega} \right)$$

Po wprowadzeniu drugiej wielkości pomocniczej

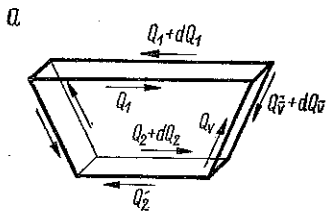
$$(5.7) \quad \bar{\bar{S}}_\omega = \bar{S}_\omega - \frac{\int_A \bar{S}_\omega h ds}{\Omega}$$

można naprężenia styczne (5.6) wyrazić w prostszej postaci

$$(5.8) \quad \tau = -f' \frac{\bar{\bar{S}}_\omega}{\delta}$$

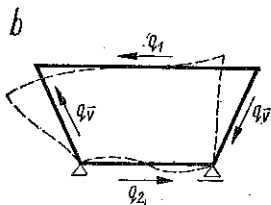
Wypadkowa naprężeń stycznych działających na danej ścianie daje siłę tnącą Q (rys. 54a). Dla ścianek skośnych mamy

$$(5.9) \quad Q_{\bar{v}} = \int_0^{\bar{b}} \tau \delta ds = -f' \int_0^{\bar{b}} \bar{\bar{S}}_\omega ds,$$



a dla ścianek poziomych odpowiednio

$$(5.10) \quad \begin{cases} Q_1 = -\int_0^{a_1} \tau \delta ds = f' \int_0^{a_1} \bar{\bar{S}}_\omega ds, \\ Q_2 = -\int_0^{a_2} \tau \delta ds = f' \int_0^{a_2} \bar{\bar{S}}_\omega ds. \end{cases}$$



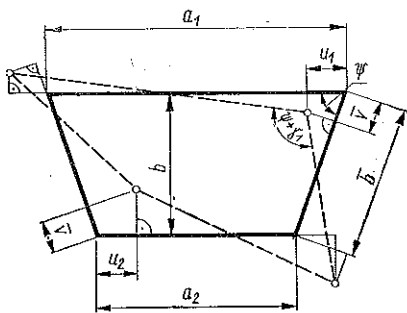
Rys. 54

Rozpatrzmy teraz siły działające na dowolny element przekroju zamkniętego o szerokości dz (rys. 54a). Na obwodzie tego elementu działa na jednostkę długości obwodu przyrost siły stycznej $dT = \delta(\partial\tau/\partial z) dz$, który

na poszczególnych ściankach daje obciążenie (rys. 54b) mierzone na jednostkę długości z . Obliczymy je przy uwzględnieniu (5.8):

$$(5.11) \quad \begin{cases} q_{\bar{v}} = \int_0^{\bar{b}} \frac{\partial\tau}{\partial z} \delta ds = -f'' \int_0^{\bar{b}} \bar{\bar{S}}_\omega ds, \\ q_1 = f'' \int_0^{a_1} \bar{\bar{S}}_\omega ds, \quad q_2 = f'' \int_0^{a_2} \bar{\bar{S}}_\omega ds. \end{cases}$$

Siły $q_{\bar{v}}$ oraz q_1 i q_2 będące w równowadze wywołują odkształcenie elementarnej ramy poprzecznej, które charakteryzuje się kątem γ zniekształcenia ramy (przyrost kąta zawartego między prostymi przechodzącymi



Rys. 55

przez rozpatrywany węzeł 1 i węzły sąsiednie — rys. 55). Ogólnie γ możemy przedstawić w postaci

$$(5.12) \quad \gamma = CWf'',$$

$$\text{czyli inaczej } \gamma'' = CWf^{IV},$$

gdzie CW jest miarą podatności elementarnej ramy, przy czym

$$(5.13) \quad W = b \int_0^{a_1} \bar{S}_{\bar{v}} ds$$

charakteryzuje rozkład sił stycznych na jednej ze ścian (w tym przypadku na ścianie górnej) i tym samym wobec jednoznaczności wykresu $\bar{S}_{\bar{v}}$ również w całym przekroju; natomiast stała C , zależna od wymiarów a_1 , a_2 i b oraz grubości δ , charakteryzuje podatność ramy poprzecznej.

Dla przekroju prostokątnego przy $a_1 = a_2$ otrzymamy odpowiednie wartości W_1 i C :

$$W = \frac{ab(a+b)\delta}{12}, \quad C = \frac{a+b}{24J},$$

gdzie $J = \delta^3/12$.

Z kolei ustalamy zależność między naprężeniami normalnymi i kątem γ . Wprowadzając przesunięcia u_1 i u_2 w płaszczyźnie ścianki górnej lub dolnej oraz przesunięcia \bar{v} w płaszczyznach ścianek skośnych, mamy zależności (rys. 55)

$$(5.14) \quad \begin{cases} \bar{v}'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{Eb} = \frac{f}{Eb} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2), \\ u_1'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{Ea_1} = \frac{f}{Ea_1} 2\tilde{\omega}_1, \\ u_2'' = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{Ea_2} = -\frac{f}{Ea_2} 2\tilde{\omega}_2. \end{cases}$$

Z rysunku 55 można dalej odczytać wartość przyrostu kąta ψ w węźle 1:

$$(5.15) \quad \gamma = \Delta\psi = \frac{2}{a_1} \left(\frac{\bar{v}}{\sin \psi} - u_1 \operatorname{ctg} \psi \right) + \frac{1}{b} \left[\left(\frac{u_1}{\sin \psi} - \bar{v} \operatorname{ctg} \psi \right) + \left(\frac{u_2}{\sin \psi} + \bar{v} \operatorname{ctg} \psi \right) \right].$$

Po zróżniczkowaniu, uwzględnieniu (5.14) i podstawieniu $b = \bar{b} \sin \psi$ otrzymamy z (5.15)

$$(5.16) \quad \gamma'' = \frac{4f}{Eb} \left[\frac{\tilde{\omega}_1}{a_1} \left(1 - \frac{b}{a_1} \operatorname{ctg} \psi \right) - \frac{\tilde{\omega}_2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right],$$

co krócej można zapisać w postaci

$$(5.17) \quad \gamma'' = -\frac{4\omega}{E} f,$$

gdzie

$$\omega = -\frac{1}{b} \left[\frac{\tilde{\omega}_1}{a_1} \left(1 - \frac{b}{a_1} \operatorname{ctg} \psi \right) - \frac{\tilde{\omega}_2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right].$$

W szczególnym przypadku przekroju prostokątnego o stałej grubości ścianki δ mamy

$$\omega = \frac{1}{ab} (\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1) = \frac{2}{ab},$$

Porównując (5.12) i (5.17) dochodzimy do równania

$$(5.18) \quad f^{IV} + \frac{4\omega}{WC} f = 0.$$

Jak można sprawdzić, drugi składnik jest dodatni, a zatem po wprowadzeniu dodatniej wielkości

$$(5.19) \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\omega}{WC}}$$

określonej jako współczynnik zanikania, równanie (5.18) przybiera postać

$$(5.20) \quad f^{IV} + 4\alpha^4 f = 0.$$

Przedstawione tu zagadnienie było już (dla przekroju prostokątnego) rozpatrywane w nieco innym ujęciu, [25].

5.2. Rozwiązanie równania różniczkowego. Układ zastępczy. Ogólne rozwiązanie równania (5.20) można przedstawić w postaci

$$(5.21) \quad f = e^{-\alpha z} (A \cos \alpha z + B \sin \alpha z) + e^{\alpha z} (\bar{A} \cos \alpha z + \bar{B} \sin \alpha z).$$

Ograniczymy się do rozwiązania dla pręta o nieskończonej długości obciążonego w punkcie $z = 0$ siłami $P_{\bar{v}}$, P_1 i P_2 zgodnie z rys. 52:

$$f = e^{-\alpha z} (A \cos \alpha z + B \sin \alpha z),$$

$$f' = \alpha e^{-\alpha z} [(-A + B) \cos \alpha z - (A + B) \sin \alpha z],$$

$$f'' = 2\alpha^2 e^{-\alpha z} (-B \cos \alpha z + A \sin \alpha z).$$

Przy uwzględnieniu (5.14/1) i (5.21/1) mamy dalej

$$(5.22) \quad \begin{cases} \bar{v} = -\frac{1}{2a^2} \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2}{Eb} e^{-az} (-B \cos az + A \sin az), \\ \bar{v}' = -\frac{1}{2a} \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2}{Eb} e^{-az} [(A+B) \cos az + (-A+B) \sin az]. \end{cases}$$

Ponieważ w miejscu działania obciążenia, $z=0$, mamy $\bar{v}'=0$, z (5.22/2) otrzymujemy $A=-B$. Z kolei równoważąc w punkcie $z=0$ siły wewnętrzne i obciążenie zewnętrzne na jednej ze ścian, np. na ściance górnej, i uwzględniając (5.10/1) i (5.13) otrzymuje się zależność

$$\frac{1}{2} P_1 = \frac{M_s}{2} \left(\frac{a_1}{\Omega} - \frac{2}{a_1} \operatorname{ctg} \psi \right) = -[Q_1]_{z=0} = -\frac{W}{b} [f']_{z=0} = \frac{W}{b} 2aA,$$

skąd wynika

$$(5.23) \quad A = \frac{M_s}{4aW} b \left(\frac{a_1}{\Omega} - \frac{2}{a_1} \operatorname{ctg} \psi \right).$$

W szczególnym przypadku przekroju prostokątnego, gdy $a_1 = a_2$ oraz $\psi = \pi/2$, otrzymujemy

$$A = \frac{M_s}{8aW}$$

i po uwzględnieniu $B = -A$ otrzymujemy z (5.21) i (5.22) dla tego przekroju

$$(5.24) \quad \begin{cases} f = \frac{M_s}{8aW} e^{-az} (\cos az - \sin az), & f' = -\frac{M_s}{4W} e^{-az} \cos az, \\ f'' = \frac{M_s a}{4W} e^{-az} (\cos az + \sin az), \\ \bar{v} = \frac{M_s}{8a^3 W} e^{-az} (\cos az + \sin az), & \bar{v}' = -\frac{M_s}{4a^2 W} e^{-az} \sin az. \end{cases}$$

Z (5.24/1) i (5.24/4) obliczyć można maksymalne naprężenie σ_1 w punkcie 1 i ugięcie v w przekroju $z=0$:

$$[\sigma_1]_{z=0} = \frac{M_s}{8aW}, \quad [v]_{z=0} = \frac{M_s}{8EWb\alpha^3}.$$

Przebieg wykresów σ_1 i v jako funkcji z przedstawiony jest na rys. 56a.

Całkowite przesunięcie $v_{\text{całk}}$ będzie składało się z przesunięcia v_0 obliczonego dla pręta obciążonego momentem skręcającym i posiadającego przepońę w miejscu obciążenia oraz z obliczonego powyżej przesunięcia v . Wykres ogólny pokazany jest na rys. 56b.

Równanie różniczkowe (5.20) jest analogiczne do równania belki na sprężystym podłożu. To ostatnie znane jest w postaci

$$(5.25) \quad y^{IV} + \frac{4}{L^4} y = 0,$$

gdzie y oznacza ugięcie, zaś L pewną długość zastępczą, odpowiadającą wartości $1/a$ w rozpatrywanym tu zagadnieniu.

Jeżeli równanie (5.25) zróżniczkujemy dwukrotnie względem z i uwzględnimy dobrze znaną zależność

$$(5.26) \quad y'' = -\frac{M}{EJ},$$

otrzymamy

$$(5.27) \quad M^{IV} - \frac{4}{L^4} M = 0.$$

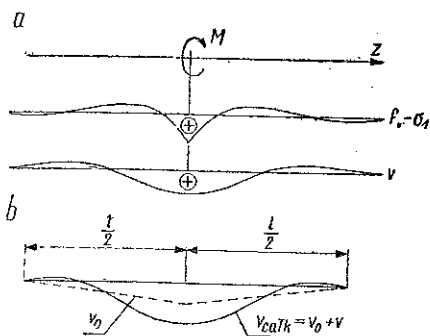
Ta postać równania belki na sprężystym podłożu pozwala wyciągnąć praktycznie ważne wnioski co do analogii rozpatrywanego zagadnienia do

znanych rozwiązań w przypadku belki na sprężystym podłożu. Z porównania (5.17) i (5.20) odpowiednio z równaniami (5.26) i (5.27) można wywnioskować, że funkcja naprężeń $f(z)$ odpowiada wielkości $M(z)$ w przypadku belki, natomiast odkształcenie γ ugięciu y .

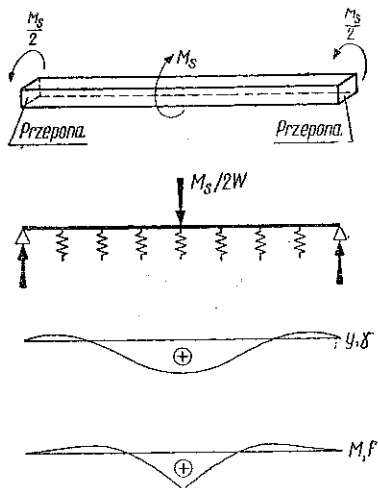
A zatem wyznaczenie funkcji naprężeń $f(z)$ można zastąpić znalezieniem funkcji momentu $M(z)$ w odpowiednim zagadnieniu belki na sprężystym podłożu, jeżeli długość L w tym ostatnim zastąpiona zostanie przez $1/a$ natomiast obciążenie P — jak to wynika z porównania warunków równowagi w punkcie $z = 0$ — przez wielkość

$$\frac{M_s}{W} b \left(\frac{a_1}{\Omega} - \frac{2}{a_1} \operatorname{ctg} \psi \right)$$

(w szczególnym przypadku przekroju prostokątnego — przez $M/2W$). Z rozpatrzenia warunków brzegowych wynika dalej, że przekrojom, w których umieszczone są przepony ($\gamma = 0$), odpowiadają niepodatne podpory w belce na sprężystym podłożu. Na rysunku 57 przedstawiony jest odpowiedni schemat zastępczy belki na sprężystym podłożu dla przypadku obciążenia



Rys. 56

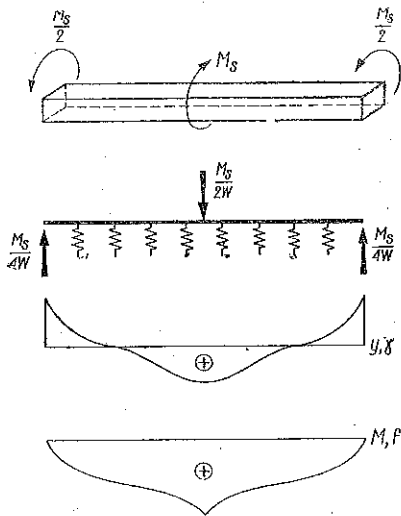


Rys. 57

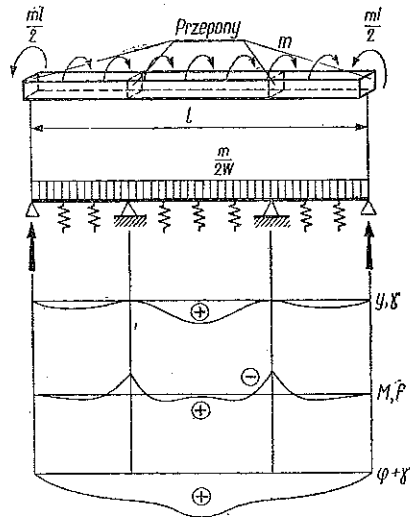
pręta momentem skręcającym, skupionym w środku przęsła, przy czym przepony są tylko w przekrojach skrajnych. Obciążenie zastępcze podano dla przekroju prostokątnego. Dla pręta nieusztynwionego przeponami również w przekrojach skrajnych odpowiedni schemat zastępczy przedstawiony jest na rys. 58.

Układ zastępczy dla pręta z przeponami w przęsle i na podporach, obciążonego momentem równomiernie rozłożonym, pokazany jest na rys. 59.

Jak wynika z (5.19), współczynnik zanikania a jest proporcjonalny do $\sqrt{\delta}$ (czynnik CW pod pierwiastkiem jest proporcjonalny do δ^2) w odróżnieniu od współczynnika zanikania k w przypadku przekrojów nieodkształcalnych, który nie zależy od δ , por. (3.23).



Rys. 58



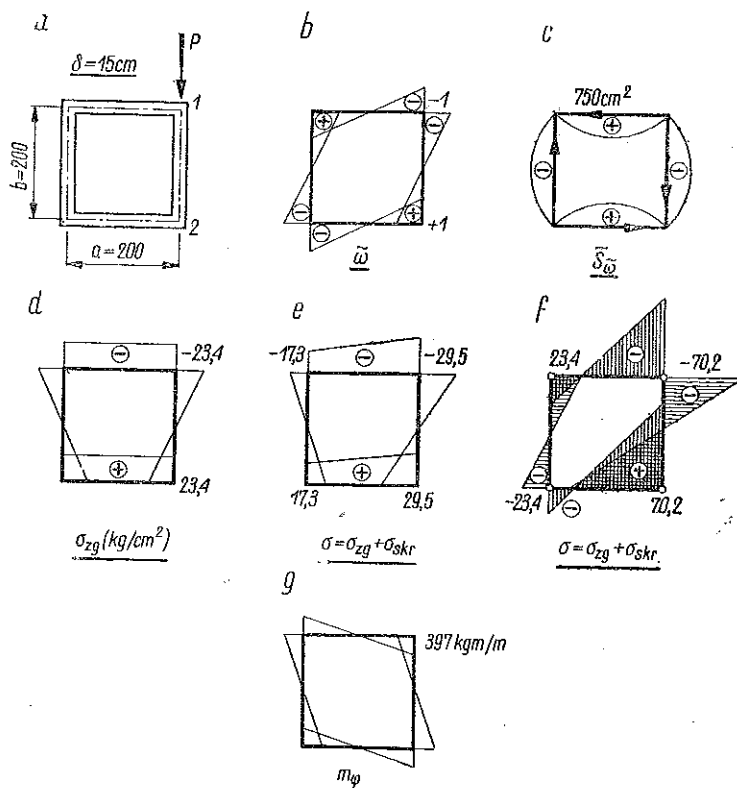
Rys. 59

Przy wyprowadzaniu równania (5.20) nie uwzględniono odkształceń postaciowych w płaszczyznach poszczególnych ścianek. Uwzględnienie ich prowadzi do równania, które różni się od (5.20) występowaniem wyrazu zawierającego f'' . W zagadnieniu belki na sprężystym podłożu odpowiednie równanie otrzymałoby się uwzględniając wpływ sił tnących na ugięcie belki.

W praktycznie ważnych przypadkach, gdy $L = 1/a$ jest większe od wysokości elementu, wpływ ten można pominać.

Przykład. Dla przekroju kwadratowego o stałej grubości ścianki obliczone zostały naprężenia normalne dla przypadku obciążenia siłą skupioną, działającą w środku rozpiętości i przyłożoną do ścianki pionowej (rys. 60a). Dane: $l = 30$ m, $P = 25$ t, $a = b = 2$ m, $\delta = 15$ cm. Wykres $\tilde{\omega}$ i \tilde{S}_0 pokazany jest na rys. 60b i 60c.

Naprężenia normalne pochodzące od zginania obciążeniem działającym w osi przedstawione są na rys. 60d. Naprężenia te są zarazem naprężeniami normalnymi przy obciążeniu mimośrodowym w przypadku, kiedy w przekroju obciążonym dana jest niepodatna przepona podobnie jak w przekrojach skrajnych. Przekrój kwadratowy bowiem zarówno przy skręcaniu swobodnym jak i przy skrępowanym nie ulega deplanacji.



Rys. 60

Na rysunku 60e podany jest rozkład naprężeń dla przypadku, kiedy w przekroju obciążonym nie ma przepony. (Odpowiedni wykres m_φ w $l/2$ podaje rys. 60g). Na rysunku 60f dla porównania pokazano wykres σ_z w układzie, w którym poszczególne ścianki połączone są w sposób przegubowy⁶.

Jak widać, sztywność poprzeczna przekroju wpływa bardzo korzystnie na rozkład naprężeń normalnych przy obciążeniu jednostronnym. Długość $L=1/a$ wynosi w tym przykładzie 392 cm, pominięcie odkształceń postaciowych w płaszczyznach poszczególnych ścianek w równaniu (5.20) jest zatem dla tego przykładu i innych podobnych dopuszczalne.

⁶ Pełny tok obliczenia podano w pracy [26].

Literatura cyfowana w tekście

- [1] E. Reissner, Zeitschr. Flugtechnik und Motorluftfahrt, 1926, s. 389 oraz 1927, s. 153.
- [2] H. Ebner, Zeitschr. Math., Dec. 1933.
- [3] A. Grzędzielski, Sprawozdania Instytutu Badawczego Lotnictwa, Warszawa 1934, s. 5.
- [4] J. Naleszkiewicz, Wytrzymałość konstrukcji lotniczych, PZWS, Wrocław 1950.
- [5] С. Н. Кан и Ю. Г. Пановко, *Элементы строительной механики тонкостенных конструкций*, Оборонгиз, Moskwa 1952.
- [6] T. Kármán a. W. Chien, *Torsion with Variable Twist*, Journ. Aeron. Sci., 1946, s. 523.
- [7] W. Flügge u. K. Marguerre, *Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben*, Ing.-Arch. 1950, s. 23.
- [8] И. А. Лашманова и В. В. Новожилов, *Стесненное кручение труб*. Ученые записки Л. Г. И. — Механика, Издат. Ленингр. Унив., 217 (1957), s. 254.
- [9] А. А. Уманский, *Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций*, Оборонгиз, Moskwa 1939. *О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета*, Техн. возд. флота 12 (1940).
- [10] И. В. Урбан, *Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций*, Трансжелдориздат, Moskwa 1955.
- [11] F. W. Bornscheuer, *Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt*, Stahlbau 12 (1952), 2 (1953).
- [12] St. Timoshenko, *Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Cross Section*, Journ. of the Franklin Inst. 1945; por. także tegoż autora: *Устойчивость упругих систем*, Гос. Издат. Техн.-теор. Лит. Moskwa 1955, s. 502.
- [13] S. U. Benscotter, *A Theory of Torsion Bending of Multicell Beams*, Journ. Appl. Mech., 1954, s. 25.
- [14] F. Schleicher, *Taschenbuch für Bauingenieure, rodz. Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Stahlbrückenbaues* (oprac. F. Stüssi), t. 1, Berlin 1955, s. 905.
- [15] F. Leonhardt, *Die neue Strassenbrücke über den Rhein von Köln nach Deutz*, Bautechnik 1949, s. 194, 269, 332.
- [16] K. Schächterle, *Wiederaufbau der Rheinbrücke Düsseldorf-Neuss*, Bauing. 1952, s. 1.
- [17] H. Bay, *Entwicklungsfragen des Stahlbetonbaues*, Beton- u. Stahlbetonbau 4 (1957).
- [18] W. Haupt u. H. J. Kleinschmidt, *Die erste Ausführung einer Mittelträgerbrücke*, Stahlbau 1955, s. 1.
- [19] E. Beyer u. F. Tussing, *Nordbrücke Düsseldorf — Projektbearbeitung im Wettbewerb für eine weitere Überbrückung des Rheins*, Stahlbau 1955, s. 79.
- [20] K. Fritsch, *Der Wiederaufbau der Jungbuschbrücke in Mannheim*, Stahlbau 9 (1957).
- [21] K. Schüssler u. F. Braun, *Wettbewerb 1954 zum Bau einer Rheinbrücke oder eines Tunnels in Köln im Zuge Klappergasse-Gotenring*, Stahlbau 8-10 (1957).

[22] С. Д. Пономарев и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. 1. Особенности расчета тонкостенных профилей на прочность и жесткость (В. И. Бидерман), Гос. Научно-техн. Издат. Машиностроит. Лит., Moskwa 1956, s. 432.

[23] C. F. Kollbrunner, *Hydraulic Steel Gates*, Proc. of Res. a. Constr. on Steel-Eng. (publ. by C. Zschokke Ltd.), 13 (1950) — *Modernier Stahlwasserbau (Schützen) und Bau von Stahlfundamenten für Turbogruppen*, Mitt. über Forschg. u. Konstr. im Stahlbau 20 (1956).

[24] R. Dąbrowski, *Stateczność mostu jednodźwigarowego*, Rozpr. Inżyn. 4 (1957).

[25] P. Müller, *Torsion von Kastenträgern mit elastisch verformbarem Querschnitt*, Schweiz. Bauztg. 1953, s. 673.

[26] R. Dąbrowski, *Skrećanie mostowych i hydrotechnicznych konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym*, Skrypt wyd. Polít. Gdańskiej, 1958.

Резюме

КРУЧЕНИЕ МОСТОВЫХ И ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЗАМКНУТОГО СЕЧЕНИЯ

В первом разделе, а также во втором представлены виды тонкостенных конструкций замкнутого сечения, применяемые в качестве несущих систем мостов или же в качестве различного рода затворов, встречаемых в гидротехническом строительстве.

В третьем разделе, в качестве исходного пункта для дальнейших рассуждений даются по кратце уравнения технической теории кручения тонкостенных стержней замкнутого сечения в форме уточненной по Уманскому. Эта теория основывается на предположении, что геометрическая форма сечения при кручении не изменяется, а продольные нормальные напряжения возникающие вследствие стесненной деформации имеют форму сродственную продольным перемещениям, выступающим в сечении при свободном кручении. На ряду с углом кручения ϕ в уравнениях вводится также некоторая функция деформации β [ср. ур. (3.9)].

В четвертом разделе представленное раньше решение обобщается на открыто-замкнутые сечения, ибо такие именно сечения чаще всего выступают в мостовых и гидротехнических конструкциях. Затем, для ряда мостовых сечений (замкнутых, открыто-замкнутых равно как и открытых) даются поперечные линии влияния нормальных напряжений в определенных точках сечения для случая нагрузки моста сосредоточенной силой в середине пролета при переменном эксцентриситете ее действия. На величину нормальных напряжений складывается влияние изгиба и кручения. Линии влияния отображают положительное действие замкнутого сечения, которое (при достаточно густо расположенных диафрагмах) позволяет перенести поперечную

нагрузку действующую на значительном эксцентриситете при относительно небольшом росте нормальных напряжений.

В следующем пункте четвертого раздела дается нумерически-графический способ определения величин, выступающих в теории стесненного кручения (при предположении недеформируемых сечений) для случая кручения линзовидного затвора, характеризующегося принудительной осью кручения.

Наконец в последнем пункте этого раздела, на основании уравнений равновесия и представленных раньше зависимостей выводятся дифференциальные уравнения кручения закрученного моста бисимметрического сечения, при упрощающем предположении тождественности функции деформации и угла кручения.

В пятом разделе обсуждается учет влияния деформации сечения при стесненном кручении; эта деформация происходит в случае когда диафрагмы размещаются в больших интервалах (или только на опорах либо в случае отсутствия диафрагм), а нагрузка может действовать также в сечениях между диафрагмами. Решение имеет приближенный характер, так как при определении нормальных напряжений вследствие так наз. деформирующей нагрузки (самоуравновешенная система касательных сил действующих на сечение) пренебрегается влиянием деформации сдвига в плоскостях отдельных стенок. Уравнение проблемы проявляет аналогию с уравнением балки на упругом основании, а его решение может быть сведено к решению этого последнего, при введении эквивалентной системы с соответствующими краевыми условиями.

Теоретические рассуждения настоящей работы касаются несущих систем постоянного сечения по всей их длине.

Summary

THE TORSION OF THIN-WALLED BRIDGE AND HYDRAULIC STRUCTURES WITH CLOSED CROSS-SECTIONS

In the first (introductory) and second sections, types of thin-walled structures of closed cross-sections are described as applied to bridge or water gate structures.

In the third article, the equations of the engineer's theory of torsion of thin-walled bars with closed cross-sections are, as a point of departure for the subsequent considerations, described briefly in the more accurate form proposed by U m a n s k y. This theory is based on the assumption that the geometric form of the cross-section does not change during torsion and that the longitudinal normal stresses due to the fact that the warping is not free are in a form similar to that of the longitudinal dis-

placements appearing for free warping. Besides the angle of torsion φ , a certain warping function β is introduced, see the Eq. (3.9).

In the fourth section, the above solution is generalized to cross-sections of the open-closed type which are the most frequent in bridge and hydraulic structures. Next, for a series of bridge cross-sections (closed, open and open-closed), transversal influence lines are represented for normal stresses at certain specific points of the cross-section in the case of a concentrated force acting at the middle section of the span, with variable eccentricity. The normal stresses are due to bending and torsion. The influence lines illustrate the advantages of a closed cross-section which enables the structure to carry transversal loads of considerable eccentricity and, if rigid diaphragms are spaced sufficiently closely, with relatively small increase of normal stresses.

In the next part of the fourth section, a numerical-graphical method for determining the quantities appearing in the theory of hampered torsion (assuming undeformable cross-sections) is presented in the case of torsion of a lens shaped flap where the axis of torsion is given beforehand.

In the last part of this section, the equilibrium equations and the relations presented above are used to derive differential equations of torsion of a curved bridge of bisymmetric cross-section with the simplifying assumption that the functions representing the warping and the angle of twist are identical.

The fifth section is devoted to the influence of deformation of the cross-section for hampered torsion. This deformation occurs in the case where the distances between diaphragms are considerable (or where the diaphragms are arranged over the supports only or are not present at all) and the load may act between diaphragms. The solution is of an approximate character. This is because during the calculation of the normal stress due to the so-called deforming load (a self-equilibrating system of shear forces acting in a cross-section), the influence of shearing strain in the plane of each wall is disregarded. The equation of the problem shows an analogy to that of a beam resting on an elastic foundation, and the solution may be reduced to that of the latter after introducing a substitute system with suitable boundary conditions.

Theoretical considerations of this paper refer to load carrying structures with constant cross-section over the entire length.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1958 r.