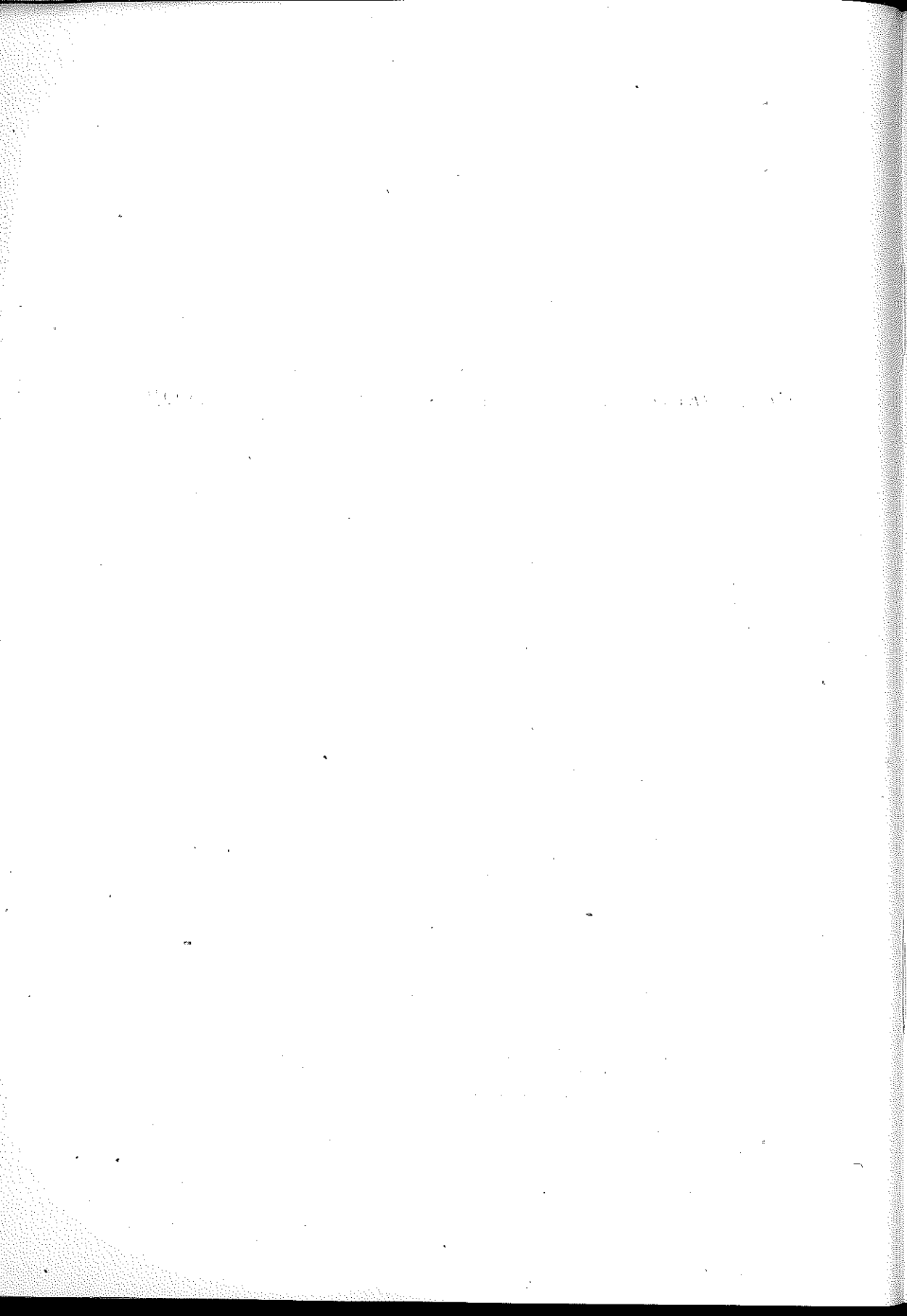


WŁADYSŁAW BOGUSZ

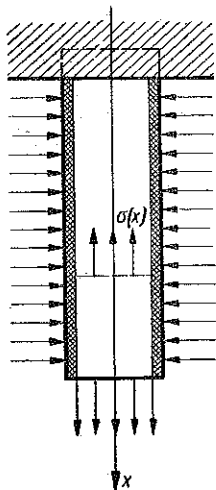
WPLYW NAPREŻEŃ WŁASNYCH  
NA DRGANIA SPRĘŻYSTE PRĘTÓW O STAŁYM PRZEKROJU

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
XCI

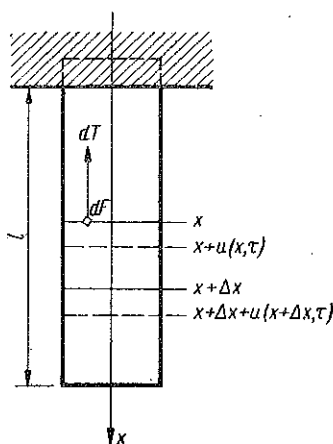


Przypuśćmy, że na pręt (rys. 1) działają dwa układy sił powierzchniowych. Układ sił działających pionowo powoduje np. wydłużenie pręta, zaś układ poziomy zwięźenie przekroju.

Niech układ poziomy wywoła odkształcenia plastyczne w warstwach powierzchniowych.



Rys. 1



Rys. 2

Jeżeli usuniemy układ sił pionowych, naprężenia, które zostały wywołane, nie znikną nawet w przypadku, gdy nie przekraczają granicy sprężystości. W warstwach powierzchniowych, w których powstały odkształcenia plastyczne, nastąpi ściskanie, zaś w głębi przekroju pręta pozostaną pewne naprężenia, które nazywamy naprężeniami własnymi. Chcąc usunąć tak wprowadzone naprężenia własne należy zdjąć warstwę powierzchniową, w której nastąpiły odkształcenia plastyczne. Jest to jeden ze znanych sposobów badania naprężeń własnych. Praca niniejsza ma na celu omówienie możliwości badania naprężeń własnych przez obserwację i pomiar pewnych wielkości w czasie drgań.

Rozważymy drgania podłużne pręta o przekroju stałym (rys. 2). Analogicznie można jednak zastosować opisaną metodę do drgań giętych lub skrętnych.

W odległości  $x$  na osi pręta wycinamy element o długości  $\Delta x$ . Końce tego elementu określone są współrzędnymi  $x$  i  $x + \Delta x$ . W czasie drgań współrzędne te zmieniają się odpowiednio przyjmując wartości  $x + u(x, t)$ ,  $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$ , gdzie funkcja  $u(x, t)$  określa przesunięcie punktów na osi  $x$  w czasie drgań. Wydłużenie względne elementu wynosi

$$(1) \quad \varepsilon(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}.$$

Jeżeli długość  $\Delta x$  dąży do zera, prawa strona (1) dąży do pochodnej funkcji  $u$  względem  $x$ . W takim razie wydłużenie względne wyraża się wzorem

$$(2) \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Przyjmujemy założenie, że naprężenia powstałe przy wydłużeniu  $\varepsilon(x, t)$  są proporcjonalne do wydłużenia. Współczynnik proporcjonalności zależeć będzie w ogólnym przypadku od  $x$  i od wydłużenia  $\varepsilon$ . W przypadku dużych naprężeń własnych będzie on zmienny również wzdłuż przekroju pręta. Oznaczmy ten współczynnik przez  $k(x, y, z, \partial u / \partial x)$ . Na elementarnej powierzchni  $dF$  elementu będzie działać siła

$$(3) \quad dT = k\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x} dF.$$

Wypadkowa tych sił na powierzchni  $F$  elementu wynosi

$$(4) \quad T = \frac{\partial u}{\partial x} \int_F k\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dF.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(5) \quad f\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_F k\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dF.$$

Przy oznaczeniu (5) siła sprężysta działająca na powierzchni elementu wyraża się wzorem

$$(6) \quad T\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

W równaniu ruchu uwzględnimy siłę sprężystą i siłę bezwładności, pominiemy zaś opór wewnętrzny i opór zewnętrzny. Równanie drgań własnych jest następujące:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x}(T) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość.

Po podstawieniu za  $T$  wyrażenia (6) otrzymamy

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \left( x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Założmy, że funkcja  $f(x, \partial u/\partial x)$  da się rozwinąć na szereg potęgowy względem zmiennej  $\partial u/\partial x$ . Oznaczmy  $\partial u/\partial x = v$

$$(9) \quad f(x, v) = f(x, 0) + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial v} v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, 0)}{\partial v^2} v^2 + \dots$$

Ograniczmy się do rozpatrywania drgań małych i przyjmiemy w pierwszym przybliżeniu funkcję  $f(x, v)$  w postaci

$$(10) \quad f \left( x, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) + g(x) \frac{\partial u}{\partial x},$$

gdzie  $\partial f/\partial v = g(x)$ .

Po podstawieniu (10) do równania (8) otrzymamy równanie

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(x) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

W przypadku pręta o materiale jednorodnym współczynnik  $k$  we wzorze (3) a zatem i funkcja  $f(x, \partial u/\partial x)$  [wzór (10)] nie zależą od  $x$ .

Równanie (11) w tym przypadku ma postać:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \frac{\partial u}{\partial x} + g \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Siła sprężysta określona wzorem (6) ma postać:

$$(13) \quad T = f \frac{\partial u}{\partial x} + g \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Podstawimy za  $\partial u/\partial x$  wydłużenie względne  $\varepsilon$ ; otrzymamy

$$(14) \quad T = f\varepsilon + g\varepsilon^2.$$

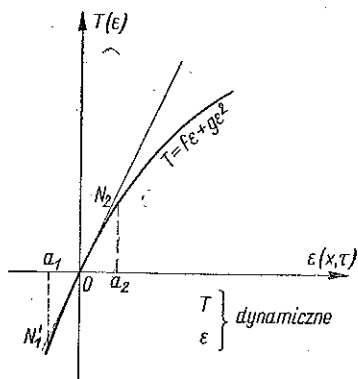
Wzór (14) przedstawia zależność między siłą sprężystą a wydłużeniem względnym w czasie drgań. Krzywą (14) nazwiemy charakterystyką dynamiczną w odróżnieniu od charakterystyki statycznej, przedstawiającej zależność siły sprężystej od wydłużenia przy rozciąganiu statycznym. Charakterystyka dynamiczna jest przy naszych założeniach parabolą (rys. 3). Krzywizna tej paraboli a więc i współczynniki  $f$  i  $g$  zależą od naprężeń własnych. Przypuśćmy, że naprężenia własne wynoszą  $\sigma_0$  (rys. 4).

W czasie drgań są wywołane dodatkowe naprężenia  $\pm \Delta\sigma$  i drgania odbywają się na odcinku  $a_1 a_2$ . Zależność między siłą sprężystą w czasie drgań a wydłużeniem przedstawia odcinek krzywej  $N_1 N_2$ .

Jeżeli  $\sigma_0$  leży na części prostoliniowej, zależność ta jest zbliżona do liniowej i współczynnik  $g$  jest bardzo mały lub równy zeru. Jeżeli nato-

miast  $\sigma_0$  leży na części krzywoliniowej, współczynnik  $g$  jest duży. Oczywiście, że współczynnik  $f$  przedstawiający tangens kąta stycznej do krzywej (rys. 3) również zmienia się przy przejściu  $\sigma_0$  z prostoliniowej części na krzywoliniową.

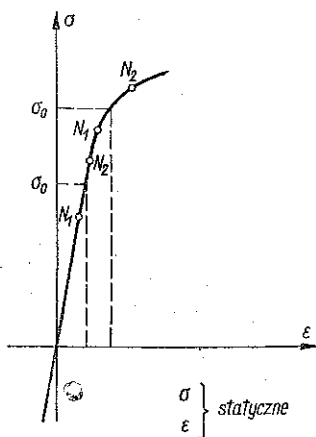
Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy współczynniki  $f$  i  $g$ . Na wykresie paraboli odcinamy część krzywej odpowiadającej zakresowi drgań przez



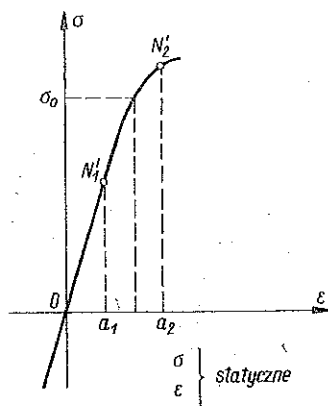
Rys. 3

odłożenie amplitudy na osi poziomej i przenosimy odcinek krzywej  $N_1'N_2'$  na wykres na rys. 5. Po odłożeniu odcinka  $N_1'N_2'$  na wykresie 5 możemy już określić naprężenia własne  $\sigma_0$ . Jeżeli odcinek  $N_1'N_2'$  jest zbliżony do prostoliniowego, odłożenie go na wykresie 5 jest możliwe wzdłuż całego odcinka prostoliniowego. W tym przypadku możemy jedynie w przybliżeniu określić naprężenia własne. Wynik można uzyskać lepszy, gdy powiększymy amplitudę drgań i w ten sposób rozszerzymy zakres drgań. Chcąc więc określić naprężenia własne należy wyznaczyć współczynniki

$f$  i  $g$ . Te współczynniki można wyznaczyć przez obserwację drgań pręta i pomiar takich wielkości, jak okres drgań, amplituda drgań i przesunięcie środka drgań. W tym celu należy rozwiązać równanie (6). Przy wyprowa-



Rys. 4



Rys. 5

dzeniu równania (6) pominięto opór wewnętrzny, co jest równoznaczne z pominięciem wpływu pętli histerezy na charakterystykę dynamiczną. Kształt pętli histerezy zależy od tego, w jakim zakresie odbywają się drga-

nia. Jeżeli drgania odbywają się na prostoliniowej części wykresu statycznego, oś pętli jest prostoliniowa, jeżeli zaś na części krzywoliniowej, oś jest krzywoliniowa. Pole pętli zależy od amplitudy drgań. Zakładając, że amplitudy są małe, możemy pominąć pole pętli, a tym samym opór wewnętrzny i zwrócić uwagę jedynie na kształt osi pętli i położenie jej na wykresie charakterystyki statycznej. Współczynniki  $f$  i  $g$  pozwalają określić kształt osi pętli i jej położenie na wykresie 5.

Równanie (6) jest nieliniowym równaniem o współczynnikach stałych. Rozwiążemy to równanie metodą kolejnych przybliżeń przy założeniu, że współczynnik  $g$  przy wyrazie nieliniowym jest mały. W równaniu (12) przenosimy wyraz nieliniowy na stronę prawą i przedstawiamy współczynnik  $g$  w postaci  $g = \mu\lambda$ , gdzie  $\mu > 0$  jest małym parametrem:

$$(13.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ f \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mu\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Wprowadźmy zmianę zmiennej:

$$(14.1) \quad \tau = \omega t.$$

Równanie (13.1) przyjmie postać

$$(15) \quad f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega^2 \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -\mu\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Warunki brzegowe i początkowe w rozpatrywanym przypadku są następujące:

$$(16) \quad u(0, \tau) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=l} = 0,$$

$$(17) \quad u(l, 0) = a, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} = 0,$$

gdzie  $a$  oznacza wychylenie początkowe wolnego końca pręta.

Rozwiązania równania (15) szukamy w postaci szeregu

$$(18) \quad u(x, \tau) = \varphi(x) \cos \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{\nu} u_{\nu}(x, \tau).$$

Z warunków brzegowych (16) wynikają warunki dla funkcji  $\varphi(x)$  i  $u_{\nu}(x, \tau)$ :

$$(19) \quad \varphi(0) = 0, \quad \left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=l} = 0, \quad u_{\nu}(0, \tau) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x} \right]_{x=l} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Z warunków początkowych (17) otrzymamy dodatkowo:

$$(20) \quad \varphi(l) = a, \quad u_{\nu}(l, 0) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u_{\nu}}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Częstość  $\omega$  oraz współczynniki  $f$  i  $\lambda$  przedstawimy również w postaci szeregów

$$(21) \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu \omega_\nu^2, \quad f = f_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu f_\nu, \quad \lambda = \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu \lambda_\nu.$$

Po podstawieniu szeregów (18) i (21) do równania (15) otrzymamy równanie:

$$(22) \quad \left[ f_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu f_\nu \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \varphi(x) \cos \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu u_\nu(x, \tau) \right] - \varrho F \left[ \omega_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu \omega_\nu^2 \right] \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \varphi(x) \cos \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu u_\nu \right] = \\ = -\mu \left[ \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu \lambda_\nu \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi(x) \cos \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu u_\nu(x, \tau) \right) \right]^2.$$

Porównujemy wyrazy przy  $\mu$  w tej samej potędze i otrzymujemy układ równań różniczkowych, z których wyliczamy kolejne przybliżenia:

przybliżenie zerowe

$$(23) \quad f_0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \omega_0^2 \varrho F \varphi(x) = 0,$$

pierwsze przybliżenie

$$(24) \quad f_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_0^2 \varrho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = \\ = -f_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau - \omega_1^2 \varrho F \varphi(x) \cos \tau - \lambda_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \cos \tau \right)^2,$$

drugie przybliżenie

$$(25) \quad f_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0^2 \varrho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} = -f_2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau - f_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_2^2 \varrho F \varphi(x) \cos \tau + \\ + \omega_1^2 \varrho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{d\varphi}{dx} \cos \tau \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{d\varphi}{dx} \cos \tau \right)^2.$$

Dalsze przybliżenia otrzymujemy analogicznie.

Rozwiązanie równania (23) jest następujące:

$$\varphi(x) = M \cos \omega_0 \sqrt{\frac{\varrho F}{f_0}} x + N \sin \omega_0 \sqrt{\frac{\varrho F}{f_0}} x.$$

Z uwagi na warunki (19) mamy  $M=0$  oraz

$$\left[ \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=l} = N \omega_0 \sqrt{\frac{\varrho F}{f_0}} \cos \omega_0 \sqrt{\frac{\varrho F}{f_0}} l = 0,$$



a stąd

$$(26) \quad \omega_0 \sqrt{\frac{\rho F}{f_0}} l = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Równanie (26) określa częstotści własne. Przyjmijmy  $\omega_0$  za podstawową częstotść, tzn. we wzorze (26) wstawimy  $n=0$ . Z warunku (20) mamy  $\varphi(l) = N \sin \omega_0 \sqrt{\rho F / f_0} l = a$ . Ponieważ  $\sin \omega_0 \sqrt{\rho F / f_0} l = 1$ , to  $N = a$ .

Przybliżenie zerowe ma więc postać

$$(27) \quad u_0(x, \tau) = a \sin \omega_0 \sqrt{\frac{\rho F}{f_0}} x \cos \tau.$$

W celu rozwiązania pierwszego przybliżenia, tj. równania (24), pomnożymy całe równanie przez  $\varphi(x) \cos \tau$  i obliczymy całki obu stron w przedziałach  $[0, l]$  i  $[0, 2\pi]$ :

$$\int_0^l \left[ \int_0^{2\pi} \left( f_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_0^2 \rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \right) \varphi(x) \cos \tau d\tau \right] dx = \int_0^l \left[ \int_0^{2\pi} \left( -f_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau - \omega_1^2 \rho F \varphi(x) \cos \tau - \lambda_0 \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \cos \tau \right)^2 \right) \varphi(x) \cos \tau d\tau \right] dx.$$

Całkę po lewej stronie równania obliczamy przez części całkując względem  $x$ . Otrzymamy po lewej stronie zero. Po prawej stronie całka trzeciego wyrazu obliczona względem  $\tau$  jest zerem, a więc i całka dwóch pierwszych wyrazów musi również równać się zeru:

$$(28) \quad \int_0^l \left[ f_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \omega_1^2 \rho F \varphi(x) \right] \varphi(x) dx = 0.$$

Po obliczeniu tej całki otrzymamy

$$(29) \quad \frac{f_1}{f_0} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}.$$

W równaniu (24) odpadną wyrazy przy  $\cos \tau$ :

$$(30) \quad f_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_0^2 \rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = \lambda_0 a^2 \frac{\omega_0^3 \rho F \sqrt{\rho F}}{f_0 \sqrt{f_0}} \sin 2\omega_0 \sqrt{\frac{\rho F}{f_0}} x \cos^2 \tau.$$

Rozwiązaniem tego równania spełniającego warunki (19) i (20) jest funkcja

$$(31) \quad \begin{cases} u_1(x, \tau) = \frac{A}{2k} \left[ x - \frac{1}{2k} \sin 2kx - \frac{3l}{2} \sin kx \cos \tau - \frac{1}{2} (x \cos 2kx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2k} \sin 2kx) \cos 2\tau \right]; \\ A = \frac{\lambda_0 a^2 k^3}{2}, \quad k^2 = \frac{\omega_0^2 \rho F}{f_0}. \end{cases}$$

Drugie przybliżenie znajdziemy rozwiązując równanie (25). W celu ustalenia związku między  $f_2$  i  $\omega_2$  nie jest rzeczą konieczną rozwiązywanie równania. Wystarczy pomnożyć całe równanie przez  $\varphi(x) \cos \tau$  i całkować je w przedziale  $[0, l]$  i  $[0, 2\pi]$ . Otrzymamy wtedy równanie

$$(32) \quad \frac{f_2}{f_0} - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} + \frac{\lambda_0^2 a^2 \omega_0^2 \rho F}{2 f_0^2} = 0.$$

Określenie związku między  $\lambda_1$  a innymi parametrami wymaga rozwiązania równania (25). Rozwiązanie to ma postać:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} u_2(x, \tau) &= \frac{1}{f_0} [\Phi_0(x) + \Phi_1(x) \cos \tau + \Phi_2(x) \cos 2\tau + \Phi_3(x) \cos 3\tau], \\ \Phi_0(x) &= \int_0^x \left[ \int_0^u 2 A f_1 k \sin 2ku - \frac{\lambda_1}{2} \frac{d}{du} \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 du \right] dx, \\ \Phi_1(x) &= -\frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-u) \left\{ f_2 \frac{d^2 \varphi}{du^2} + \omega_2^2 \rho F \varphi(u) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_0 A \frac{d}{du} \left[ \frac{d\varphi}{du} (3 + 2 \cos 2ku - 2ku \sin 2ku) \right] \right\} du, \\ \Phi_2(x) &= \frac{A}{4k} \int_0^x \sin 2k(x-u) \left[ 4 f_1 k (\sin 2ku + ku \cos 2ku) + \right. \\ &\quad \left. + \rho F \omega_1^2 u \cos 2ku - \frac{\lambda_1}{A} \frac{d}{du} \left( \frac{d\varphi}{du} \right)^2 \right] du, \\ \Phi_3(x) &= -\frac{2 A \lambda_0}{3k} \int_0^x \sin 3k(x-u) \frac{d}{du} \left\{ \frac{d\varphi}{du} \left[ \frac{d}{du} (u \cos 2ku) \right] \right\} du. \end{aligned} \right.$$

Przesunięcie środka drgań  $d_1$  wynosi

$$(34) \quad d_1 = \frac{\lambda_1 a^2 \omega_0^2 \rho F l}{4 f_0^2}.$$

Tak postępując możemy obliczyć dowolne przybliżenie. Na podstawie wzorów (26), (29) i (32) możemy obliczyć współczynnik  $f$ . Ze wzoru (26) otrzymujemy

$$f_0 = \frac{4 \omega_0^2 \rho F l}{\pi^2}.$$

Ze wzorów (29) i (32) mamy

$$f_1 = f_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}, \quad f_2 = f_0 \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} - \frac{\lambda_0^2 a^2 \omega_0^2 \rho F}{2 f_0}.$$

Współczynnik  $f$  określony wzorem (21) wynosi

$$(35) \quad f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 = \frac{4 \rho F l}{\pi^2} \left( \omega_0^2 + \mu \omega_1^2 + \mu^2 \omega_2^2 - \mu^2 \frac{\lambda_0^2 a^2 \pi^4}{8 \rho F l^2} \right).$$

Ze wzoru (35) widać, że współczynnik  $f$  zależy od częstości drgań i współczynnika  $\lambda_0$ . Częstość drgań według wzoru (21) wynosi przy drugim przybliżeniu  $\omega^2 = \omega_0^2 + \mu \omega_1^2 + \mu^2 \omega_2^2$ . Współczynnik  $\lambda_0$  jest pierwszym przybliżeniem współczynnika  $g$ . Wyznamy go w następujący sposób. Rozwiązanie równania drgań w pierwszym przybliżeniu ma postać

$$u(x, \tau) = \varphi(x) \cos \tau + \mu u_1(x, \tau).$$

Zbadajmy ruch końca pręta, tj. podstawmy  $x=l$ . Otrzymamy

$$u(l, \tau) = \mu \frac{Al}{2k} + \left( a - \mu \frac{3Al}{4k} \right) \cos \tau + \mu \frac{Al}{4k} \cos 2\tau.$$

Wyraz nie zawierający funkcji trygonometrycznej oznacza przesunięcie środka drgań od położenia równowagi. Oznaczmy to przesunięcie przez  $d$ . Otrzymamy wzór:

$$(36) \quad \mu \lambda_0 = d \frac{16l}{a^2 \pi^2}.$$

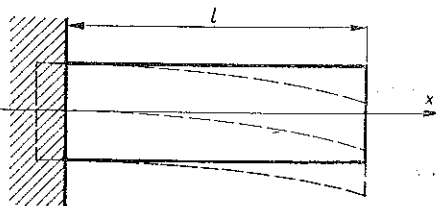
Jak wynika z otrzymanych wzorów (35) i (36) należy w czasie drgań zmierzyć:

- 1) okres drgań i wyliczyć częstość,
- 2) amplitudę drgań  $a$ ,
- 3) przesunięcie środka drgań  $d$ .

Ze zmierzonych wartości obliczymy ze wzoru (36)  $\mu \lambda_0$  i to jest pierwsze przybliżenie współczynnika  $g$ . Współczynnik  $f$  obliczymy ze wzoru (35).

W ten sposób wyznaczmy charakterystykę siły sprężystej występującej w czasie drgań.

Oszacowanie błędu, jaki popełniamy poprzestając na pewnej ilości przybliżeń, napotyka duże trudności. Możemy jedynie stwierdzić na podstawie ogólnej teorii równań nieliniowych, że szereg (18) jest jednostajnie zbieżny, zaś szeregi (21) są zbieżne. W szczególnych przypadkach przy danych liczbowych można oszacować błąd przez porównywanie wartości amplitud poszczególnych przybliżeń.



Rys. 6

Rozważmy drgania giętne.

Przyjmujemy założenie, że przekroje płaskie prostopadłe do osi pręta pozostają płaskimi w czasie ruchu. Równanie drgań pręta (rys. 6) przy

charakterystyce dynamicznej jak poprzednio parabolicznej oraz przy pominięciu oporu wewnętrznego jest następujące:

$$(37) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $f$  i  $g$  są stałe,  $\rho$  jest gęstością, zaś  $F$  oznacza przekrój.

Po wprowadzeniu zmiany zmiennej  $\tau = \omega t$  otrzymamy równanie

$$(38) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \omega^2 \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0.$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$(39) \quad \begin{cases} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 & \text{dla } x = l; \end{cases}$$

warunki początkowe:

$$(40) \quad u = a, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \text{dla } \tau = 0.$$

Zakładamy, że współczynnik przy wyrazie nieliniowym jest mały i przedstawimy go w postaci  $g = \mu\lambda$ , gdzie  $\mu > 0$  jest małym parametrem. Przenosimy wyraz nieliniowy na prawą stronę i otrzymamy równanie

$$(41) \quad f \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \omega^2 \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -\mu\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2.$$

Rozwiązania równania (41) szukamy w postaci szeregu

$$(42) \quad u(x, \tau) = \varphi(x) \cos \tau + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{\nu} u_{\nu}(x, \tau).$$

Współczynniki  $f$ ,  $\lambda$  i  $\omega^2$  przedstawimy w postaci szeregów

$$(43) \quad f = f_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{\nu} f_{\nu}, \quad \lambda = \lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{\nu} \lambda_{\nu}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^{\nu} \omega_{\nu}^2.$$

Po wstawieniu szeregów (42) i (43) do równania (41) i po porównaniu wyrazów przy tej samej potędze  $\mu$  otrzymamy układ równań określających kolejne przybliżenia:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \omega_0^2 \rho F \varphi(x) &= 0, \\ f_0 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \omega_0^2 \rho F \frac{\partial u_1}{\partial \tau^2} &= \\ &= -f_1 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \cos \tau + \rho F \omega_1^2 \varphi(x) \cos \tau - \lambda_0 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 \cos^2 \tau, \\ f_0 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \omega_0^2 \rho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} &= -f_2 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \cos \tau - f_1 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \rho F \omega_2^2 \varphi(x) \cos \tau - \\ &- \omega_1^2 \rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \lambda_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 2 \cos \tau \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) - \lambda_1 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 \cos^2 \tau. \end{aligned} \right.$$

Warunki brzegowe (39) są następujące:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{dla } x = 0; \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = 0 \quad \text{dla } x = l; \\ u_\nu(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0; \quad \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_\nu}{\partial x^3} = 0 \quad \text{dla } x = l \\ (\nu = 1, 2, 3). \end{aligned} \right.$$

Warunki początkowe (40) dają dodatkowe równości

$$(46) \quad \varphi(l) = a, \quad u_\nu(l, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial \tau} = 0 \quad \text{dla } \tau = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Rozwiązaniem pierwszego równania (44) jest funkcja

$$(47) \quad \varphi(x) = A [(\cos kx - \operatorname{ch} kx)(\cos kl + \operatorname{ch} kl) + \\ + (\sin kx - \operatorname{sh} kx)(\sin kl - \operatorname{sh} kl)], \\ k^2 = \frac{\omega_0^2 \rho F}{f_0}.$$

Stałą  $A$  wyznaczymy z warunku  $\varphi(l) = a$ :

$$(48) \quad A = \frac{a}{2 \sin kl \operatorname{sh} kl}.$$

Równanie częstości własnych jest następujące:

$$(49) \quad \cos kl \operatorname{ch} kl = -1.$$

Pierwiastki tego równania wynoszą 1,875; 4,694; 7,855 itd. Przyjmujemy  $\omega_0$  za podstawową częstość, tzn.

$$(50) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho F}{f_0}} l = 1,875.$$

Wzór (50) podaje związek między  $f_0$  i  $\omega_0$ . Związek między  $f_1$  i  $\omega_1^2$  można otrzymać nie rozwiązując drugiego równania (44). Wystarczy pomnożyć całe równanie przez  $\varphi(x) \cos \tau$  i scałkować w przedziałach  $[0, l]$  i  $[0, 2\pi]$ :

$$(51) \quad \int_0^l \left[ \int_0^{2\pi} \left( f_1 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \varphi(x) - \rho F \omega_1^2 \varphi^2(x) \right) \cos^2 \tau d\tau \right] dx = 0.$$

Po obliczeniu powyższej całki otrzymamy związek między  $f_1$  i  $\omega_1^2$ . Celem ustalenia pierwszego przybliżenia  $\lambda_0$  należy rozwiązać drugie równanie (44). Rozwiązanie tego równania ma postać

$$(52) \quad u_1(x, \tau) = -\frac{\lambda_0}{2} \int_0^x \left[ \int_0^u \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 ds \right] du + \Phi(x) \cos 2\tau,$$

gdzie  $\Phi(x)$  jest rozwiązaniem równania

$$(53) \quad f_0 \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - 4 \omega_0^2 \rho F \Phi(x) = -\frac{\lambda_0}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2.$$

Analogicznie jak przy drganiach podłużnych pręta pierwsza całka podwójna oznacza przesunięcie środka drgań dla  $x=l$ . Stąd też można obliczyć  $\lambda_0$ . Jeżeli przesunięcie środka drgań oznaczmy przez  $d$ , wówczas  $\lambda_0$  wyrazi się wzorem

$$(54) \quad \lambda_0 = -\frac{d}{\int_0^l \left[ \int_0^u \left( \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right] du}.$$

Wyznaczenie dalszych przybliżeń przebiega analogicznie jak przy drganiach podłużnych. Obliczenia w przypadku drgań giętych są bardziej skomplikowane niż przy drganiach podłużnych.

Powyższa analiza drgań podłużnych i giętych jest przeprowadzona przy pominięciu oporu wewnętrznego. W rzeczywistości opór wewnętrzny powoduje szybkie zanikanie ruchu i pomiar amplitudy jest utrudniony. Dlatego należy przyłożyć siłę wymuszającą o małej amplitudzie  $\mu\omega$  i częstości  $\omega$  w celu podtrzymania ruchu.

#### Literatura cytowana w tekście

[1] G. C. Pisarenko, *Drgania ustrojów sprężystych z uwzględnieniem rozpraszania energii w materiale*, Kijów 1955.

[2] I. W. Kudriawcew, *Wewnętrzne naprężenia jako zapas wytrzymałości w częściach maszyn*, Moskwa 1951.

- [3] S. W. Wonsowski, *Sprężystość i niesprężystość metali*, Moskwa 1954.  
 [4] I. A. Szaposznikow, *Mechaniczne badanie metali*, Moskwa 1951.  
 [5] W. W. Noworytow, *Podstawy nieliniowej teorii sprężystości*, Moskwa 1948.  
 [6] N. N. Bogolubow i A. Mitropolski, *Asymptotyczne metody w teorii drgań nieliniowych*, Moskwa 1955.

### Резюме

## ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В работе обсуждается метод определения собственных напряжений в стержнях постоянного сечения путем наблюдения колебания этих стержней.

В уравнении продольных колебаний стержня заземленного на одном конце выступает упругая сила, определенная зависимостью от удлинения. При параболической зависимости, упругая сила определяется двумя коэффициентами  $f$  и  $g$ . Анализ уравнения колебаний методом последовательных приближений показывает, что  $f$  и  $g$  можно определять измерением амплитуды и перемещения центра колебаний, а также измерением основной частоты. Таким образом, получаем динамическую зависимость упругой силы от удлинения. При малых амплитудах колебаний, полученную зависимость можно сравнить с зависимостью статической упругой силы от удлинения и определить в каком диапазоне напряжений возникают колебания.

При небольшом значении коэффициента  $g$  — динамическая зависимость близка линейной и колебания происходят в диапазоне напряжений ниже предела пропорциональности. При большом значении коэффициента  $g$  — напряжения превышают предел пропорциональности.

В работе приводится также анализ уравнения крутильных колебаний стержня заземленного на одном конце. В обоих случаях, т.е. при продольных и крутильных колебаниях не учитывается внутреннее сопротивление материала, что обосновывается предположением колебаний, обладающих малой амплитудой.

### Summary

## INFLUENCE OF INITIAL STRESSES ON VIBRATION OF BARS OF CONSTANT CROSS-SECTION

Discussion of a method for the determination of initial stress in bars of constant cross-section by means of vibration measurement. In the equation of longitudinal vibration of a beam with one end fixed, the

elastic force appears, depending on the elongation. If the dependency is parabolic, the elastic force is determined by two coefficients,  $f$  and  $g$ . An analysis of the vibration by means of successive approximations shows that the coefficients  $f$  and  $g$  may be determined by measuring the amplitude and the displacement of the vibration centre and the fundamental frequency. Thus, the dynamic relation between the elastic force and the elongation is obtained. With small amplitudes, the relation obtained may be compared with the statical relation between the elastic force and the elongation, and the range of stress of the vibration may be determined.

If the coefficient  $g$  is small, the dynamic dependency approaches the linear form, and vibration occurs in the range of stress below the limit of proportionality. The equation of flexural vibration of a bar with one end clamped is analyzed. In both cases, that is for longitudinal and flexural vibrations the internal drag of the material is disregarded, which is justified by the assumption of small amplitudes.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1957 r.*