

KAZIMIERZ BORSUK

METODA KOEPCKEGO-PAPKOWICZA
W ZASTOSOWANIU DO PŁYT ORTOTROPOWYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
XC

NOTICE TO THE PUBLIC

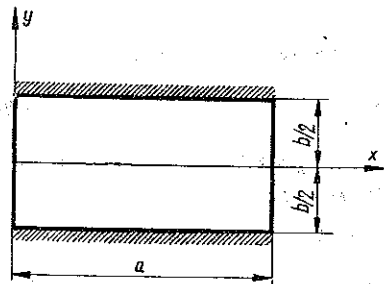
NOTICE TO THE PUBLIC

Poszukując rozwiązań zamkniętych (tj. wyrażonych za pomocą znanych funkcji) dla płyt prostokątnych o dwóch przeciwległych brzegach utwierdzonych Koepcke, [1] i [2], i Papkowicz, [3], uzyskali odpowiednie wyniki wyrażone przez układy funkcji biharmonicznych, spełniające warunki brzegowe na brzegach utwierdzonych. Spełnienie warunków brzegowych na pozostałych brzegach podpartych dowolnie otrzymali na drodze aproksymacji rozwiązania wyżej wspomnianego i całki szczególnej odpowiadającej danemu obciążeniu zewnętrznemu. Kiotwer, [4], rozszerzył zagadnienie na płyty o dwóch przeciwległych brzegach wolnych lub o jednym utwierdzonym i drugim wolnym. Zagadnieniem powyższym zajmowali się też Worch, [5], Grinberg, [6], i w czasach ostatnich Wegner, [7].

Myśl przewodnia metody wywodząca się od Tölkego, [8], i rozwinięta następnie przez Fadla, [9], polega na przedstawieniu wartości własnych równania przestępnego w postaci zespolonej.

Wszystkie wspomniane rozwiązania dotyczyły płyty izotropowej. Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie metody Koepckego i Papkowicza na płytę ortotropową. Zajęto się bliżej problemem wyznaczenia układów funkcji własnych równania jednorodnego quasi-biharmonicznego. Gdy wyznaczone zostaną te funkcje, sam tok postępowania przy rozwiązywaniu płyty ortotropowej nie będzie się różnił od metod podanych przez Koepckego i Papkowicza dla płyt izotropowych i dlatego w pracy niniejszej został pominięty.

1. Punktem wyjścia jest równanie różniczkowe jednorodne powierzchni ugięcia prostokątnej płyty ortotropowej o kierunku ortotropii zgodnych z przyjętymi osiami współrzędnych (rys. 1):



Rys. 1

$$(1.1) \quad D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Współczynniki w równaniu (1.1) określają znane wzory:

$$(1.2) \quad D_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{h^3}{12}, \quad 2H = D_x \nu_y + D_y \nu_x + 4C,$$

gdzie E_x i E_y są modułami sprężystości wzdłuż odpowiednich kierunków ortotropii, $C = G_0 h^3 / 12$, G_0 jest modułem odkształcenia postaciowego, ν_x i ν_y są współczynnikami Poissona, a h jest grubością płyty.

Wprowadzając oznaczenia $\varepsilon^4 = D_x / D_y$ i $\varrho = H / \sqrt{D_x D_y}$ równanie (1.1) przyjmuje postać

$$(1.3) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\varrho \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Wzdłuż brzegów płyty dla $y = \pm b/2$ są spełnione jednorodne warunki brzegowe

$$(1.4) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Przedstawmy ugięcie płyty w w postaci szeregu

$$(1.5) \quad w = \sum_k e^{s_k x} F_k(y).$$

Jak łatwo się przekonać, każdy wyraz szeregu (1.5) spełnia zarówno równanie quasi-biharmoniczne (1.3), jak i warunki brzegowe (1.4).

Podstawiając w do równania (1.3) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(1.6) \quad F_k^{IV}(y) + 2\varrho \varepsilon^2 s_k^2 F_k''(y) + \varepsilon^4 s_k^4 F_k(y) = 0.$$

Warunki brzegowe dla tego równania są następujące:

$$(1.7) \quad F_k\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0, \quad F_k'\left(\pm \frac{b}{2}\right) = 0.$$

Przechodząc z kolei do rozwiązania równania charakterystycznego

$$(1.8) \quad r^4 + 2\varrho \varepsilon^2 s_k^2 r^2 + \varepsilon^4 s_k^4 = 0,$$

otrzymujemy trzy różne rozwiązania dla trzech przypadków: $\varrho > 1$, $\varrho = 1$ oraz $\varrho < 1$.

Niech pierwiastki równania (1.8) wynoszą

$$(1.9) \quad r_{1,2k} = \pm i\beta_k, \quad r_{3,4k} = \pm i\lambda_k.$$

Wówczas dla $\varrho > 1$

$$(1.10) \quad \beta_k = s_k \varepsilon \sqrt{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}}, \quad \lambda_k = s_k \varepsilon \sqrt{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}},$$

dla $\varrho = 1$

$$(1.11) \quad \beta_k = \lambda_k = s_k \varepsilon$$

oraz dla $\varrho < 1$

$$(1.12) \quad \beta_k = \mu_{1k} + i\mu_{2k}, \quad \lambda_k = \mu_{1k} - i\mu_{2k},$$

gdzie

$$\mu_{12k} = s_k \varepsilon \sqrt{\frac{1 \pm \varrho}{2}}.$$

2. Rozwiązanie dla przypadku $\varrho > 1$. Całką ogólną równania (1.6) jest funkcja

$$(2.1) \quad F_k(y) = a_k \cos \beta_k y + b_k \sin \beta_k y + c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y.$$

Podstawiając $y = \pm b/2$ otrzymujemy

$$(2.2) \quad \begin{cases} F_k\left(\frac{b}{2}\right) = a_k \cos \varphi_k + b_k \sin \varphi_k + c_k \cos \psi_k + d_k \sin \psi_k = 0, \\ F_k\left(-\frac{b}{2}\right) = a_k \cos \varphi_k - b_k \sin \varphi_k + c_k \cos \psi_k - d_k \sin \psi_k = 0 \end{cases}$$

oraz

$$(2.3) \quad \begin{cases} F'_k\left(\frac{b}{2}\right) = -a_k \beta_k \sin \varphi_k + b_k \beta_k \cos \varphi_k - c_k \lambda_k \sin \psi_k + d_k \lambda_k \cos \psi_k = 0, \\ F'_k\left(-\frac{b}{2}\right) = a_k \beta_k \sin \varphi_k + b_k \beta_k \cos \varphi_k + c_k \lambda_k \sin \psi_k + d_k \lambda_k \cos \psi_k = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \varphi_k = \beta_k \frac{b}{2}, \quad \psi_k = \lambda_k \frac{b}{2}.$$

Jak łatwo zauważyć w powyższych równaniach wydzielić można część symetryczną i antysymetryczną.

2.1. Część symetryczna

$$(2.5) \quad \begin{cases} a_k \cos \varphi_k + c_k \cos \psi_k = 0, \\ a_k \beta_k \sin \varphi_k + c_k \lambda_k \sin \psi_k = 0 \end{cases}$$

posiada rozwiązanie różne od zera tylko wtedy, kiedy wyznacznik układu równa się zeru, czyli gdy

$$(2.6) \quad \lambda_k \sin \psi_k \cos \varphi_k = \beta_k \sin \varphi_k \cos \psi_k.$$

Równanie powyższe zapisać możemy w postaci równoważnej

$$(2.7) \quad \lambda_k \operatorname{tg} \psi_k = \beta_k \operatorname{tg} \varphi_k,$$

choć forma (2.6) nadaje się lepiej do dalszych rozważań. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.8) \quad \gamma_1 = \varepsilon \sqrt{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}}, \quad \gamma_2 = \varepsilon \sqrt{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}}, \quad \omega_k = \frac{s_k b}{2},$$

równanie (2.6) przyjmie postać

$$(2.9) \quad \gamma_1 \sin \gamma_1 \omega_k \cos \gamma_2 \omega_k = \gamma_2 \sin \gamma_2 \omega_k \cos \gamma_1 \omega_k.$$

Przyjmując dalej

$$(2.10) \quad \delta_1 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_1 - \gamma_2$$

otrzymamy po przekształceniach

$$(2.11) \quad \gamma_1 (\sin \delta_1 \omega_k + \sin \delta_2 \omega_k) = \gamma_2 (\sin \delta_1 \omega_k - \sin \delta_2 \omega_k).$$

Przedstawmy za F a d l e m, [6], ω_k w postaci zespolonej,

$$(2.12) \quad \omega_k = r_k + it_k,$$

i wstawmy tę liczbę do równania (2.11):

$$(2.13) \quad \gamma_1 [\sin \delta_1 (r_k + it_k) + \sin \delta_2 (r_k + it_k)] = \\ = \gamma_2 [\sin \delta_1 (r_k + it_k) - \sin \delta_2 (r_k + it_k)]$$

Po przekształceniach i przyrównaniu oddzielnie części rzeczywistej i urojonej otrzymujemy ostatecznie równania pozwalające wyznaczyć r_k i t_k :

$$(2.14) \quad \begin{cases} \delta_2 \sin \delta_1 r_k \operatorname{ch} \delta_1 t_k = -\delta_1 \sin \delta_2 r_k \operatorname{ch} \delta_2 t_k, \\ \delta_2 \cos \delta_1 r_k \operatorname{sh} \delta_1 t_k = -\delta_1 \cos \delta_2 r_k \operatorname{sh} \delta_2 t_k. \end{cases}$$

2.2. Postępując analogicznie dla części antysymetrycznej

$$(2.15) \quad \begin{cases} b_k \sin \varphi_k + d_k \sin \psi_k = 0, \\ b_k \beta_k \cos \varphi_k + d_k \lambda_k \cos \psi_k = 0 \end{cases}$$

otrzymamy

$$(2.16) \quad \begin{cases} \delta_2 \sin \delta_1 r_k \operatorname{ch} \delta_1 t_k = \delta_1 \sin \delta_2 r_k \operatorname{ch} \delta_2 t_k, \\ \delta_2 \cos \delta_1 r_k \operatorname{sh} \delta_1 t_k = \delta_1 \cos \delta_2 r_k \operatorname{sh} \delta_2 t_k. \end{cases}$$

3. Rozwiązanie dla przypadku $\varrho = 1$. Przypadek ten sprowadza się do płyty izotropowej. Został on szczegółowo rozpatrzony przez K o e p c k e g o i P a p k o w i c z a, przytoczymy więc tylko wyniki. Funkcją rozwiązującą jest następująca funkcja:

$$(3.1) \quad F_k(y) = a_k \cos \beta_k y + b_k \sin \beta_k y + c_k \beta_k y \cos \beta_k y + d_k \beta_k y \sin \beta_k y.$$

Podstawiając [por. (2.12)]

$$\omega_k = r_k + it_k$$

otrzymujemy dla części symetrycznej

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sin 2r_k \operatorname{ch} 2t_k = -2r_k, \\ \cos 2r_k \operatorname{sh} 2t_k = -2t_k \end{cases}$$

oraz dla części antysymetrycznej

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sin 2r_k \operatorname{ch} 2t_k = 2r_k, \\ \cos 2r_k \operatorname{sh} 2t_k = 2t_k. \end{cases}$$

4. Rozwiązanie dla przypadku $\varrho < 1$. Funkcja rozwiązująca ma postać

$$(4.1) \quad F_k(y) = a_k \cos \mu_{1k} y \operatorname{ch} \mu_{2k} y + b_k \sin \mu_{1k} y \operatorname{ch} \mu_{2k} y + \\ + c_k \cos \mu_{1k} y \operatorname{sh} \mu_{2k} y + d_k \sin \mu_{1k} y \operatorname{sh} \mu_{2k} y.$$

Postępując podobnie jak w p. 2 łatwo znaleźć zależność dla części symetrycznej i antysymetrycznej na r_k i t_k . Do tych samych wyników dojść można wykorzystując rozwiązanie (2.14) i (2.17), mając równocześnie na uwadze zależności $\beta_k = \mu_{1k} + i\mu_{2k}$ oraz $\lambda_k = \mu_{1k} - i\mu_{2k}$ przedstawione w nieco innej postaci¹:

$$(4.2) \quad \beta_k = s_k(\vartheta_1 + i\vartheta_2), \quad \lambda_k = s_k(\vartheta_1 - i\vartheta_2),$$

gdzie $\vartheta_{1,2} = \varepsilon \sqrt{(1 \pm \varrho)/2}$.

Wykorzystując dalej wzory (2.10) otrzymamy po przekształceniu zależności:

4.1. dla części symetrycznej

$$(4.3) \quad \begin{cases} \vartheta_2 \sin 2\vartheta_1 r_k \operatorname{ch} 2\vartheta_1 t_k = -\vartheta_1 \operatorname{sh} 2\vartheta_2 r_k \cos 2\vartheta_2 t_k, \\ \vartheta_2 \cos 2\vartheta_1 r_k \operatorname{sh} 2\vartheta_1 t_k = -\vartheta_1 \operatorname{ch} 2\vartheta_2 r_k \sin 2\vartheta_2 t_k; \end{cases}$$

4.2. dla części antysymetrycznej

$$(4.4) \quad \begin{cases} \vartheta_2 \sin 2\vartheta_1 r_k \operatorname{ch} 2\vartheta_1 t_k = \vartheta_1 \operatorname{sh} 2\vartheta_2 r_k \cos 2\vartheta_2 t_k, \\ \vartheta_2 \cos 2\vartheta_1 r_k \operatorname{sh} 2\vartheta_1 t_k = \vartheta_1 \operatorname{ch} 2\vartheta_2 r_k \sin 2\vartheta_2 t_k. \end{cases}$$

Równania powyższe, jak również równanie (2.14) i (2.16) przechodzą w rozwiązanie dla płyty izotropowej, czyli dla $\varrho = 1$, jeśli przejdziemy z wielkościami ϑ_1 i ϑ_2 lub δ_1 i δ_2 do odpowiednich granic.

¹ Por. pracę np. J. Mossakowskiego, [10].

5. Pierwiastki równań przestępnych na r_k i t_k dadzą się obliczyć stosując np. metodę Newtona do równań z dwiema niewiadomymi. O ile w przypadku izotropii pierwiastki nie zależą od żadnych dodatkowych parametrów, w przypadkach $\varrho \geq 1$ dla odpowiednich wartości parametrów ϱ i ε istnieją oddzielne grupy pierwiastków. Jako przykład podano 3 pierwsze wartości pierwiastków równań (2.14) i (2.16) dla $\varrho = 1,1$ i $\varepsilon = 2$ (tabl. 1).

Tablica 1

Pierwiastki równania (2.14)		Pierwiastki równania (2.16)	
$r_1 = 3,870$	$t_1 = 1,131$	$r_1 = 2,151$	$t_1 = 1,053$
$r_2 = 6,615$	$t^2 = 0,000$	$r_2 = 5,615$	$t_2 = 0,918$
$r_3 = 8,131$	$t_3 = 0,834$	$r_3 = 7,332$	$t_3 = 0,000$

Znajomość pierwiastków pozwala wyznaczyć odpowiednie funkcje biharmoniczne (1.5). Jak już zaznaczyliśmy, dalsze postępowanie przy obliczeniu płyt nie różni się niczym od sposobu podanego przez autorów wymienionych na wstępie.

Literatura cytowana w tekście

- [1] W. Коерске, *Über das Randwertproblem an rechteckigen Platten*, Borna-Lipsk 1940.
- [2] W. Коерске, *Zur Ermittlung der Einflussflächen und innerem Kräfteumfangsgelagerter Rechteckplatten*, Ing.-Arch., t. 17, 1950.
- [3] П. Ф. Папкович, *Строительная механика корабля*, cz. 2, Leningrad 1941.
- [4] К. А. Китовер, *Изгиб тонких прямоугольных плит*, Сб. Расчет пространственных конструкций, 2, Moskwa 1951.
- [5] G. Worch, *Beitrag zur Berechnung der allseitig eingespannten Rechteckplatte*, Forschungshette Geb. Stahlb. 6 (1943).
- [6] Г. А. Гринберг, *О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях*, Прикл. Мат. Мех., 17, 1953.
- [7] U. Wegner, *Berechnung von teilweise eingespannten rechteckigen Platten bei Vorgabe von Randmomenten*, Zeitschr. Ang. Math. Mech., t. 36, 9-10 (1956).
- [8] F. Tölke, *Wasserkraftanlagen*, Handbibl. Bauing., Berlin 1938.
- [9] J. Fadle, *Die Selbstspannungs — Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe*, Ing.-Arch., t. 9, 1940.
- [10] J. Mossakowski, *Osobliwe rozwiązania w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos. 3 (1954).
- [11] C. Runge, H. König, *Numerisches Rechnen*, Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, t. 11, Berlin 1935.

Резюме

МЕТОД КЕПКЕ-ПАПКОВИЧА В ПРИМЕНЕНИИ К ОРТОТРОПНЫМ ПЛАСТИНКАМ

Решение Кепке-Папковича, полученное для изотропных пластинок, заземленных вдоль противоположных краев можно легко распространить на аналогичные ортотропные пластинки. В зависимости от значений $\rho \geq 1$ уравнения (1.6) были получены соответствующие трансцендентные уравнения.

Приводятся числовые значения корней r_k и t_k для заданных $\rho = 1,1$ и $\varepsilon = 2,0$.

Summary

APPLICATION OF THE KOEPCKE-PAPKOVITCH METHOD TO ORTHOTROPIC PLATES

The solution obtained by Koepecke and Papkovitch for isotropic plates clamped along two opposite edges can easily be generalized to analogous orthotropic plates.

Depending on the value $\rho \geq 1$ of the Eq. (1.6), transcendental equations are obtained. The numerical values of the roots r_k and t_k are given for $\rho = 1,1$ and $\varepsilon = 2,0$.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1957 r.