

JÓZEF WIĘCKOWSKI

O ZJAWISKU REZONANSU  
DLA PÓLOGRANICZONYCH BELEK SPRĘŻYSTYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXXXI

1. Układy sprężyste nieograniczone o ciągłym rozkładzie mas wykazują podczas drgań wiele ciekawych własności, zupełnie odmiennych od własności układów sprężystych ograniczonych. Różnica wynika stąd, że w układach sprężystych nieograniczonych pojawiają się oprócz stojących fal naprężeń fale naprężeń ruchome, poruszające się od miejsca wymuszenia i rozprawdzające energię mechaniczną na elementy takiego układu. Powstaje wtedy interesujące zjawisko tłumienia falami naprężeń. Najprostsze zagadnienia tego rodzaju omówiono w pracy [5]. Okazuje się jednak, że również układy sprężyste ograniczone mogą posiadać w pewnych warunkach wyżej wspomniane własności. Trzeba jednakże uwzględnić w obliczeniach rzeczywiste własności materiału, w szczególności tłumienie materiałowe i ograniczyć się do dostatecznie dużych częstości drgań, [6].

W niniejszej pracy zajmiemy się zbadaniem zjawiska rezonansu kilku prostych układów sprężystych, jakie tworzą belki proste półograniczone. Pominiemy przy tym siły tłumienia wewnętrznego (materiałowego) oraz siły tłumienia zewnętrznego (tarcie na podporach, na powierzchni otaczającego ośrodka itp.).

Układy nasze sprowadzają się we wszystkich przypadkach do belek prostych, półograniczonych, pokrywających się z osią  $x$ . Rozróżnimy w tych belkach następujące części składowe:

(a) część belki od końca swobodnego lub zamocowanego do miejsca przyłożenia siły lub momentu wymuszającego drgania będziemy nazywali *rezonatorem*;

(b) punkt (przekrój) przyłożenia siły lub momentu wymuszającego drgania będziemy nazywali *miejscem wymuszenia*;

(c) część belki od miejsca wymuszenia do nieskończoności będziemy nazywali *upustem*;

(d) miejsce wymuszenia będziemy traktowali jako punkt (przekrój) wspólny należący zarówno do upustu jak i do rezonatora.

Rozpatrzmy drgania wymuszone pod działaniem siły lub momentu zmiennych harmonicznie lub drgania harmoniczne wymuszone kinematycznie w jednym z przekrojów belki. Amplitudę siły lub momentu wymuszającego przyjmiemy za stałą, niezależną od częstości. Zbadamy wy-

łącznie stan ustalony przy zerowych warunkach początkowych ruchu. (Początkowa energia mechaniczna równa się zeru).

Będziemy mówili, że w danym przekroju belki o odciętej  $x$  występuje zjawisko rezonansu amplitudy ugięcia, kąta ugięcia lub przemieszczenia podłużnego, jeżeli te wielkości jako funkcje częstości drgań  $\omega$  osiągają maksimum, gdy  $\omega \in (0, \infty)$ . Zwykle będziemy poszukiwali maksimum tzw. «współczynnika uwielokrotnienia», tzn. ilorazu amplitudy przez przyjętą wielkość porównawczą niezależną od częstości drgań wymuszonych.

Nieco odmiennie określimy rezonans dla rezonatora lub upustu, tzn. w pewnym przedziale. Będziemy mówili, że w upuście lub w rezonatorze zachodzi rezonans, jeżeli w przedziale określającym rezonator lub upust będzie zachodziło maksimum największego współczynnika uwielokrotnienia rozpatrywanego jako funkcja częstości drgań  $\omega$ , gdy  $\omega \in (0, \infty)$ .

Aby uniknąć żmudnych rachunków, ograniczymy się do prostych belek jednorodnych o stałej sztywności zginania  $EJ$  i stałym przekroju. Przy drganiach giętnych posłużymy się modelami Naviera i Rayleigha, aby zbadać wpływ bezwładności obrotowej przekrojów tak istotny przy wysokich częstościach drgań. Przy drganiach skrętnych rozpatrzemy tylko przypadki belek o przekrojach kołowo symetrycznych. Omówimy kolejno drgania giętne podłużne i skrętne.

2. Równanie drgań giętnych belki pryzmatycznej, uwzględniające wpływ bezwładności obrotowej przekrojów, można przedstawić w następującej postaci:

$$(2.1) \quad a^2 i_z^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - i_z^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $a$  jest prędkością rozchodzenia się fal podłużnych w belce.

Zajmiemy się drganiami wymuszonymi, harmonicznymi z częstością  $\omega$  w stanie ustalonym. Rozwiązanie równania (2.1) można wtedy przedstawić w postaci

$$(2.2) \quad y = y_0(x) e^{i\omega t}.$$

Zakładając, że rozważana belka pokrywa się z osią  $x$  dla  $x \geq 0$  i że miejsce wymuszenia drgań znajduje się w przekroju  $x=0$ , otrzymujemy po uwzględnieniu warunków brzegowych przy  $x \rightarrow \infty$  następujące rozwiązanie dla funkcji  $y_0(x)$ :

$$(2.3) \quad y_0(x) = C_1 e^{-\delta_1 x} + C_2 e^{-i\delta_2 x},$$

gdzie

$$(2.4.1) \quad \delta_1 = \sqrt{-\frac{\omega^2}{2a^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4a^4} + \frac{\omega^2}{i_z^2 a^2}}},$$

$$(2.4.2) \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{2a^2} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4a^4} + \frac{\omega^2}{i_z^2 a^2}}}.$$

Założmy następujące wymuszenie kinematyczne drgań dla  $x=0$ :

$$(2.5.1) \quad y(0, t) = B e^{i\omega t},$$

$$(2.5.2) \quad y'(0, t) = 0.$$

Wyznaczając stałe  $C_1$  i  $C_2$  z powyższych warunków i obliczając reakcję belki w miejscu wymuszenia otrzymamy

$$(2.6) \quad R = -[\lambda_{1,R} \dot{y} + \kappa_{1,R} \ddot{y}]_{x=0},$$

gdzie  $\lambda_{1,R}$  jest współczynnikiem tłumienia, a  $\kappa_{1,R}$  masą zredukowaną belki półograniczonej.

Wprowadzając oznaczenia:

$$(2.7.1) \quad \lambda_{1,\infty} = A \sqrt{\rho E},$$

$$(2.7.2) \quad \kappa_{1,\infty} = \rho A i_z,$$

$$(2.7.3) \quad \xi = \frac{\omega i_z}{a},$$

otrzymamy po kilku przekształceniach wzory:

$$(2.8.1) \quad \frac{\lambda_{1,R}}{\lambda_{1,\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\xi^2}}}},$$

$$(2.8.2) \quad \frac{\kappa_{1,R}}{\kappa_{1,\infty}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\xi^2}}}.$$

We wzorach powyższych  $A$  oznacza pole przekroju oraz  $\rho$  gęstość. Pomijając wpływ bezwładności obrotowej przez odrzucenie drugiego wyrazu w równaniu (2.1) otrzymamy

$$(2.9.1) \quad \frac{\lambda_{1,N}}{\lambda_{1,\infty}} = \sqrt{\xi},$$

$$(2.9.2) \quad \frac{\kappa_{1,N}}{\kappa_{1,\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Podobnie można wyliczyć współczynnik tłumienia i zredukowany moment bezwładności dla następującego sposobu kinematycznego wymuszenia drgań:

$$(2.10.1) \quad y(0, t) = 0,$$

$$(2.10.2) \quad y'(0, t) = D e^{i\omega t}.$$

Moment reakcyjny w miejscu wymuszenia można wtedy przedstawić w postaci

$$(2.11) \quad M = -[\lambda_{2,R} \dot{y}' + \kappa_{2,R} \ddot{y}']_{x=0},$$

gdzie  $\lambda_{2,R}$  oznacza współczynnik tłumienia, a  $\kappa_{2,R}$  zredukowany moment bezwładności belki półograniczonej.

Wprowadzając oznaczenia

$$(2.12.1) \quad \lambda_{2,\infty} = Ai_z^2 \sqrt{\rho E},$$

$$(2.12.2) \quad \kappa_{2,\infty} = A \rho i_z^2,$$

$$(2.12.3) \quad \xi = \frac{\omega i_z}{a}$$

otrzymamy po wykonaniu przekształceń

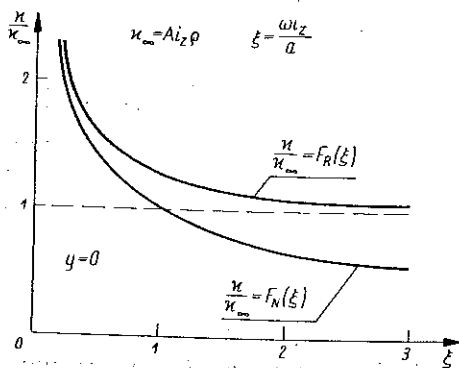
$$(2.13.1) \quad \frac{\lambda_{2,R}}{\lambda_{2,\infty}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\xi^2}}},$$

$$(2.13.2) \quad \frac{\kappa_{2,R}}{\kappa_{2,\infty}} = \frac{1}{\xi^2 \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\xi^2}}}},$$

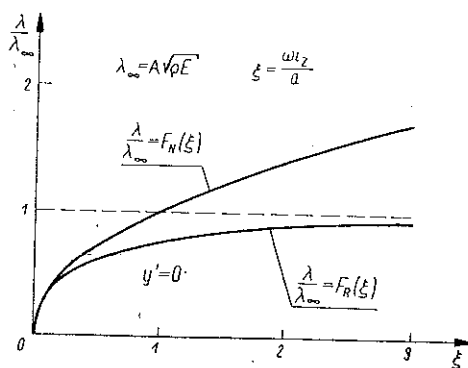
a po pominięciu wpływu bezwładności obrotowej

$$(2.14.1) \quad \frac{\lambda_{2,N}}{\lambda_{2,\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}},$$

$$(2.14.2) \quad \frac{\kappa_{2,N}}{\kappa_{2,\infty}} = \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Na rysunkach 1 i 2 wykreślono krzywe według równań (2.8.1), (2.8.2), (2.9.1) i (2.9.2), natomiast na rys. 3 i 4 według równań (2.13.1), (2.13.2), (2.14.1) i (2.14.2).

Jak widać z porównania krzywych dla belek według modelu Naviera i modelu Rayleigha dla małych wartości  $\xi$  można napisać

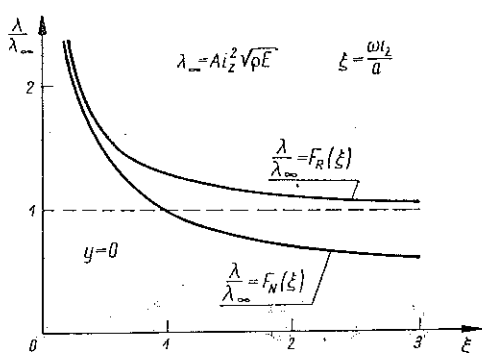
$$(2.15) \quad \lambda_{1,N} \approx \lambda_{1,R}, \quad \lambda_{2,N} \approx \lambda_{2,R}, \quad \kappa_{1,N} \approx \kappa_{1,R}, \quad \kappa_{2,N} \approx \kappa_{2,R},$$

natomiast dla dużych wartości  $\xi$  wpływ bezwładności obrotowej przekrojów znacznie rośnie i nie da się pominąć. Dla wartości granicznych

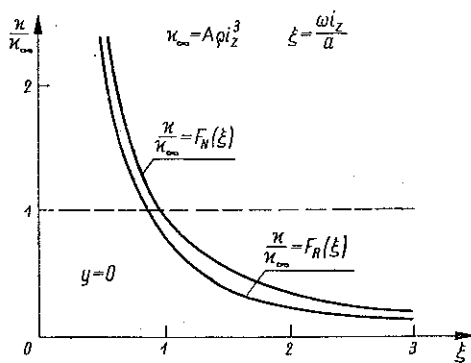
$\lambda_{1,N}, \lambda_{2,N}, \kappa_{1,N}, \kappa_{2,N}, \lambda_{1,R}, \lambda_{2,R}, \kappa_{1,R}$  i  $\kappa_{2,R}$  przy  $\xi \rightarrow \infty$  otrzymujemy z (2.8), (2.9), (2.13) i (2.14) następujące zależności:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lambda_{1,N} = \infty, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lambda_{1,R} = \lambda_{1,\infty}, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \kappa_{1,N} = 0, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} \kappa_{1,R} = \kappa_{1,\infty}, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lambda_{2,N} = 0, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} \lambda_{2,R} = \lambda_{2,\infty}, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \kappa_{2,N} = 0, & \lim_{\xi \rightarrow \infty} \kappa_{2,R} = 0. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy zatem pełną charakterystykę sił reakcyjnych upustu przy drganiach giętych dla rozmaitych sposobów kinematycznego wymuszenia drgań. Jednakże otrzymane współczynniki  $\lambda$  i  $\kappa$  nie są zależne od amplitudy drgań, zatem odnoszą się również w przypadku ogólniejszym wymuszenia drgań siłą harmonicznie zmienną w czasie lub tak samo zmiennym w czasie momentem. Oczywiście amplituda siły wymuszającej lub momentu wymuszającego drgania nie musi być stała i może zmieniać się wraz z częstością drgań  $\omega$ , jak to ma miejsce np. przy drganiach wymuszonych działaniem niewyważonych wirujących mas.



Rys. 3



Rys. 4

Warto zaznaczyć, że dla powyższych przypadków upust nie ma ugięcia statycznego i dlatego w równaniach (2.6) i (2.11) nie występują składniki proporcjonalne do ugięcia lub do kąta ugięcia w przekroju  $x=0$ .

3. Wyznamy teraz charakterystykę sił reakcyjnych rezonatora dla belek według modelu Naviera i Rayleigha dla przypadków przedstawionych na tablicy 1, na której punkt B oznacza miejsce kinematycznego wymuszenia drgań.

Podobnie jak dla upustu zajmiemy się najprostszym przypadkiem rezonatora prostoliniowego o stałej sztywności zginania  $EJ$ , stałej gęstości materiału  $\rho$  i stałym przekroju, którego pole wynosi  $A$ . Rozpatrzmy drgania wymuszone kinematycznie w przekroju  $x=L$  harmonicznie zmiennie

w czasie z częstością  $\omega$  i ustalone. Ponieważ rezonator stanowi układ sprężysty, ograniczony zatem w stanie ustalonym, otrzymamy rozwiązania w postaci fal stojących, a nie ruchomych jak to otrzymujemy dla upustu. Zatem w ogólnych wzorach na siłę lub moment reakcyjny nie wystąpią składniki proporcjonalne do prędkości ruchu w miejscu wymuszenia. Ogólne równania do obliczenia siły lub momentu reakcyjnego w miejscu wymuszenia będą:

$$(3.1.1) \quad R = - [\chi_1 \dot{y} - \kappa_1 \ddot{y}]_{x=L},$$

$$(3.1.2) \quad M = - [\chi_2 \dot{y}' - \kappa_2 \ddot{y}']_{x=L},$$

gdzie  $\chi_1$  i  $\chi_2$  oznaczają współczynniki sprężystości,  $\kappa_1$  masę zredukowaną rezonatora oraz  $\kappa_2$  zredukowany moment bezwładności rezonatora.

Oczywiście dla niektórych przypadków nie będzie sił reakcji zależnych wyłącznie od przemieszczenia czy kąta obrotu, jak np. dla przypadków przedstawionych na rys. 2 i 3 w tablicy 1, gdzie  $\chi_1 = 0$ , lub dla przypadków przedstawionych na rys. 6 w tablicy 1, gdzie  $\chi_2 = 0$ , gdyż ugięcie statyczne dla tych przypadków nie istnieje.

Rachunek jest tutaj bardzo prosty i powszechnie znany, ograniczymy się zatem do podania funkcji normalnych dla belki Naviera i belki Rayleigha i zestawienia odpowiednich równań do wyznaczenia  $\chi$  i  $\kappa$ . Dzięki wprowadzeniu funkcji normalnych będziemy mogli uzyskać jednolite równania dla obydwu przypadków.

Dla drgań harmoniczných belki według modelu Naviera funkcje normalne znane również dla tego przypadku pod nazwą funkcji Pragera są następujące:

$$(3.2.1) \quad S_R(x) = \frac{1}{2} (\text{ch } \delta_0 x + \cos \delta_0 x),$$

$$(3.2.2) \quad T_N(x) = \frac{1}{2\delta_0} (\text{sh } \delta_0 x + \sin \delta_0 x),$$

$$(3.2.3) \quad U_N(x) = \frac{1}{2\delta_0^2} (\text{ch } \delta_0 x - \cos \delta_0 x),$$

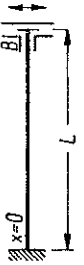


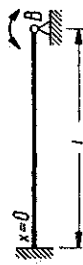

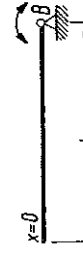
$$(3.2.4) \quad V_N(x) = \frac{1}{2\delta_0^3} (\text{sh } \delta_0 x - \sin \delta_0 x),$$

przy czym  $\delta_0$  obliczamy według równania (2.1) z pominięciem drugiego składnika. Dla drgań harmoniczných belki według modelu Rayleigha można z równania (2.1) wyznaczyć następujące funkcje normalne:

$$(3.3.1) \quad S_R(x) = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \text{ch } \delta_1 x + \frac{\delta_1^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \cos \delta_2 x,$$

$$(3.3.2) \quad T_R(x) = \frac{\delta_2^2}{\delta_1(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \text{sh } \delta_1 x + \frac{\delta_1^2}{\delta_2(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \sin \delta_2 x,$$

Tablica 1

Rezonator	Warunki brzegowe	%	%
1. 	$[y]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = y_0 \sin \omega t,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = 0$	$\frac{EJ}{12 L^3}$	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{V_k''''(L) U_k'(L) - V_k'(L) U_k''''(L)}{V_k(L) U_k'(L) - U_k(L) V_k'(L)} + \frac{12}{L^2} \right]$ <i>k/N, R</i>
2. 	$[y]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = y_0 \sin \omega t,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = 0$	0	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{V_k''''(L) T_k'(L) - V_k'(L) T_k''''(L)}{V_k(L) T_k'(L) - V_k'(L) T_k(L)} \right]$ <i>k/N, R</i>
3. 	$\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = y_0 \sin \omega t,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = 0$	0	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{T_k''''(L) S_k'(L) - T_k'(L) S_k''''(L)}{T_k(L) S_k'(L) - S_k(L) T_k'(L)} \right]$ <i>k/N, R</i>
4. 	$[y]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = 0,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = y_0' \sin \omega t$	$\frac{EJ}{4 L}$	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{U_k''(L) V_k'(L) - V_k''(L) U_k(L)}{V_k'(L) U_k(L) - V_k(L) U_k'(L)} + \frac{4}{L} \right]$ <i>k/N, R</i>
5. 	$[y]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = 0,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = y_0' \sin \omega t$	$\frac{EJ}{3 L}$	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{T_k''(L) V_k'(L) - V_k''(L) T_k(L)}{V_k'(L) T_k(L) - T_k'(L) V_k(L)} + \frac{3}{L} \right]$ <i>k/N, R</i>
6. 	$\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0,$ $\left[ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right]_{x=0} = 0$ $[y]_{x=L} = 0,$ $\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=L} = y_0' \sin \omega t$	0	$\frac{EJ}{\omega^2} \left[ \frac{S_k''(L) T_k(L) - S_k(L) T_k''(L)}{S_k(L) T_k'(L) - S_k'(L) T_k(L)} \right]$ <i>k/N, R</i>



$$(3.3.3) \quad U_R(x) = \frac{1}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \operatorname{ch} \delta_1 x - \frac{1}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \cos \delta_2 x,$$

$$(3.3.4) \quad V_R(x) = \frac{1}{\delta_1(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \operatorname{sh} \delta_1 x - \frac{1}{\delta_2(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \sin \delta_2 x,$$

gdzie  $\delta_1$  i  $\delta_2$  obliczamy z równań (2.4.1) i (2.4.2).

Równania do wyznaczenia  $\chi$  i  $\varkappa$  wraz z warunkami brzegowymi zestawiono w tablicy 1.

Otrzymaliśmy zatem pełną charakterystykę sił reakcyjnych rezonatora dla rozmaitych sposobów kinematycznego wymuszenia drgań i rozmaitych sposobów podparcia rezonatora. Obliczone współczynniki  $\varkappa$  i  $\chi$  nie zależą zupełnie od amplitudy drgań, zatem podobnie jak dla upustu są słuszne w przypadku ogólniejszym wymuszenia drgań harmonicznymi zmienną siłą lub momentem o amplitudzie stałej lub zależnej od częstości. Możemy zatem wykorzystać otrzymane wartości  $\chi$  i  $\varkappa$  do zbadania zjawiska rezonansu w najprostszych nieograniczonych belkach sprężystych.

Masy zredukowane  $\varkappa$ , obliczane według wzorów zamieszczonych w tablicy 1, osiągają dla odpowiednio dobranych parametrów rezonatora i częstości drgań wartości nieskończenie wielkie. Przypadki te odpowiadają rezonansowi rezonatora przy kinematycznym wymuszeniu drgań o stałej amplitudzie w miejscu wymuszenia. Jak wiadomo, stan ustalony ruchu w takich przypadkach nie istnieje, jeżeli w układzie nie występują siły tłumienia odpowiedniego rodzaju. Energia kinetyczna rezonatora osiąga w przypadku rezonansu wartości nieskończenie wielkie, zatem ponieważ  $\varkappa$  jest masą rezonatora zredukowaną do prędkości wymuszenia, która jest skończona,  $\varkappa$  dla przypadku rezonansu musi być nieskończenie wielkie.

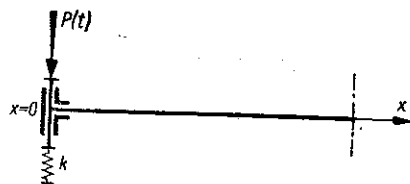
Warto również zwrócić uwagę na to, że  $\varkappa$  i  $\chi$  są zależne od warunków brzegowych dla rezonatora.

4. Rozpatrzmy dwa proste przypadki drgań wymuszonych belek przedstawionych na rys. 5 i 6, podpartych w miejscu wymuszenia elementami sprężystymi, których masę można pominąć. Zbadamy najpierw drgania wymuszone obydwu belek dla modelu Naviera, a następnie dla modelu Rayleigha.

Przyjmując, że mamy drgania harmoniczne, ustalone, łatwo napisać równanie do wyznaczenia siły reakcji  $R$  upustu i sprężystego podparcia w miejscu wymuszenia według schematu na rys. 5:

$$(4.1) \quad R = -[\chi_1 \ddot{y} + \lambda_{1,N} \dot{y} + \varkappa_{1,N} \ddot{y}]_{x=0},$$

gdzie  $\chi_1 = k$ , natomiast  $\lambda_{1,N}$  i  $\varkappa_{1,N}$  obliczamy ze wzorów (2.9).



Rys. 5

Ponieważ podczas drgań musi zachodzić równowaga pomiędzy reakcją upustu i sprężystego podparcia w miejscu wymuszenia oraz siłą wymuszającą, możemy napisać, że

$$(4.2) \quad R + P_0 \sin \omega t = 0,$$

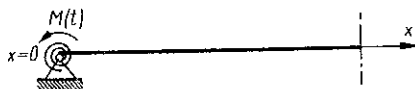
skąd po wstawieniu  $R$  z (4.1) otrzymujemy równanie drgań wymuszonych w miejscu wymuszenia:

$$(4.3) \quad [\kappa_{1,N} \ddot{y} + \lambda_{1,N} \dot{y} + \chi_1 y]_{x=0} = P_0 \sin \omega t.$$

Powyższe równanie jest warunkiem brzegowym dla upustu w punkcie  $x=0$ . Oczywiście nie można badać za pomocą tego równania drgań swobodnych dla  $x=0$  przy niezerowych warunkach początkowych, gdyż drgania te nie będą harmoniczne.

Wprowadzając częstość porównawczą:

$$(4.4.1) \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{\kappa_{1,\infty}}},$$



Rys. 6

ugięcie statyczne porównawcze w miejscu wymuszenia

$$(4.4.2) \quad y_{st} = \frac{P_0}{k}$$

oraz parametr bezwymiarowy

$$(4.4.3) \quad B = \sqrt[4]{\frac{EA}{k i_z}}$$

i bezwymiarową częstość drgań

$$(4.4.4) \quad \mu = \frac{\omega}{\alpha_0},$$

otrzymamy następujący wzór do obliczenia współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego w miejscu wymuszenia:

$$(4.5) \quad v = \frac{1}{\sqrt{1 - 2B\mu^{3/2} + 2B^2\mu^3}}.$$

Łatwo wykazać, że funkcja  $v=f(\mu)$  posiada przy stałym  $B$  tylko jedno maksimum dla następującej wartości  $\mu = \mu_{rez}$ :

$$(4.6) \quad \mu_{rez} = \frac{1}{\sqrt[3]{4B^2}}.$$

Podstawiając tę wartość  $\mu$  do równania (4.5) otrzymujemy

$$(4.7) \quad v_{rez} = \sqrt{2}.$$

Zatem maksymalna wartość współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego jest dla tego przypadku stała, niezależna od wartości parametru  $B$ . Z równań (4.4.3) i (4.6) wnioskujemy, że gdy przy zachowaniu sta-

tego przekroju belki będziemy zwiększali moment bezwładności przekroju i sztywność podparcia, częstość rezonansowa będzie szybko rosła.

Spostrzegamy z powyższych rozważań, że układ nieograniczony posiada zupełnie odmienne własności przy drganiach wymuszonych od układu ograniczonego. Zamiast przeliczalnego zbioru częstości rezonansowych, przy których dla sił harmonicznycch nie ma ruchu ustalonego, mamy tylko jedną częstość rezonansową, przy której współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego osiąga maksimum zawsze równe  $\sqrt{2}$ .

Analogiczne wyniki można otrzymać dla przypadku przedstawionego na rys. 6. Przyjmując, że moment wymuszający jest harmonicznie zmienny o częstości  $\omega$  i amplitudzie  $M_0$ , otrzymamy równanie

$$(4.8) \quad [\kappa_{2,N} \ddot{y}' + \lambda_{2,N} \dot{y}' + \chi_2 y']_{x=0} = M_0 \sin \omega t,$$

gdzie  $\kappa_{2,N}$  i  $\lambda_{2,N}$  należy podstawić zgodnie ze wzorami (2.14), natomiast  $\chi_2 = k$ . Symbol  $k$  oznacza tutaj współczynnik sprężystości sprężyny spiralnej.

Wprowadzając częstość porównawczą

$$(4.9.1) \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{\kappa_{2,\infty}}},$$

ugięcie statyczne porównawcze

$$(4.9.2) \quad y'_{st} = \frac{M_0}{k},$$

parametr bezwymiarowy

$$(4.9.3) \quad B = \left( \frac{EAi_z}{k} \right)^{3/4}$$

oraz bezwymiarową częstość drgań

$$(4.9.4) \quad \mu = \frac{\omega}{\alpha_0},$$

otrzymamy następujący wzór do wyznaczenia współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego  $\nu$  w miejscu wymuszenia:

$$(4.10) \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2B\mu^{1/2} + 2B^2\mu}}.$$

Tak jak w poprzednim przypadku istnieje tutaj tylko jedno maksimum funkcji  $\nu = f(\mu)$  przy stałym  $B$  dla następującej wartości  $\mu$ :

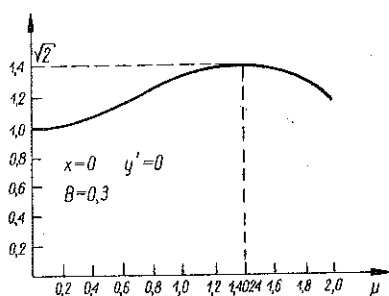
$$(4.11) \quad \mu_{rez} = \frac{1}{4B^2}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (4.10) otrzymamy po wykonaniu rachunków

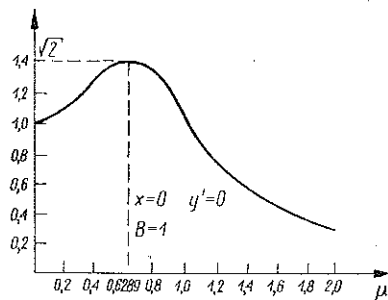
$$(4.12) \quad \nu_{rez} = \sqrt{2}.$$

Zatem i dla tego przypadku współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego jest stały, niezależny od parametru  $B$ , a ilość częstości rezonansowych układu redukuje się do jednej.

Na rysunkach 7-13 przedstawiono wykreślenie funkcje (4.5) i (4.10) dla kilku wartości parametru  $B$ . Wykresy potwierdzają wnioski z obliczeń przedstawionych wyżej.



Rys. 7

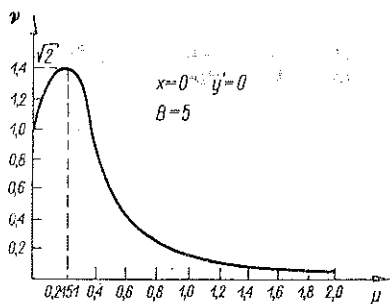


Rys. 8

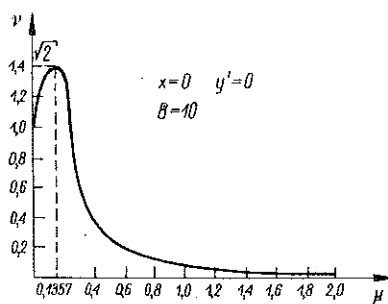
Dla obydwu przypadków otrzymujemy następujące wartości  $\nu$  przy  $\mu \rightarrow \infty$ :

$$(4.13) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \nu = 0.$$

Zanim przejdziemy do zbadania wpływu bezwładności obrotowej przekrojów w powyższych przypadkach drgań, poszukamy maksimum współczynnika  $\nu$  dla upustu.



Rys. 9



Rys. 10

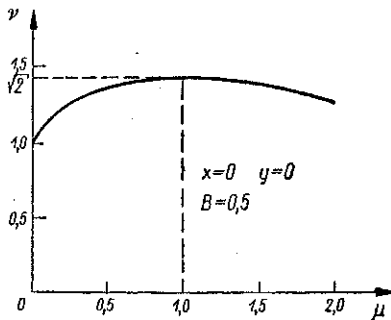
5. Aby wyznaczyć największe amplitudy drgań na upuście dla podanych poprzednio przypadków podparcia upustu w miejscu wymuszenia, trzeba wyznaczyć stałe  $C_1$  i  $C_2$  w rozwiązaniu ogólnym dla funkcji  $y_0(x)$  przedstawionym równaniem (2.3).

Przyjmując wartość stałej  $B$  w warunkach brzegowych (2.5)

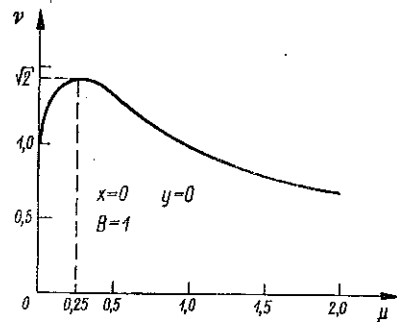
$$(5.1) \quad B = \nu y_{st},$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem uwielokrotnienia ugięcia statycznego w miejscu wymuszenia zgodnie ze wzorem (4.5), otrzymamy szczególne rozwiązanie dla funkcji  $y_0(x)$ :

$$(5.2) \quad y_0(x) = \frac{\nu y_{st}}{2} [(1-i)e^{-\delta_0 x} + (1+i)e^{-i\delta_0 x}].$$



Rys. 11



Rys. 12

Dzieląc amplitudę drgań w każdym punkcie upustu przez ugięcie statyczne pod działaniem amplitudy siły wymuszającej w miejscu wymuszenia otrzymamy współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego dla upustu  $\nu_u$  zależny od  $x$  i  $\omega$ :

$$(5.3.1) \quad \nu_u = \frac{|y_0(x)|}{y_{st}}$$

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy

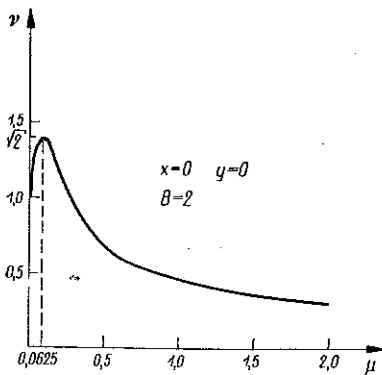
$$(5.3.2) \quad \nu_u = \frac{\nu}{2} \sqrt{2(e^{-2\delta_0 x} + 2e^{-\delta_0 x} \sin \delta_0 x + 1)}.$$

Graniczna wartość  $\nu_u$  przy  $x \rightarrow \infty$  wynosi

$$(5.4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \nu_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \nu.$$

Gdy  $\nu$  osiąga wartość największą, tzn. gdy w miejscu wymuszenia zachodzi rezonans, otrzymujemy zgodnie z równaniem (4.7)

$$(5.5) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \nu_{rez}}} \nu_u = 1.$$



Rys. 13

Zatem amplitudy drgań w nieskończoności nigdy nie przekraczają ugięcia statycznego w miejscu wymuszenia pod działaniem amplitudy siły wymuszającej. Aby odpowiedzieć na pytanie, gdzie znajduje się największa

wartość  $v_u$  na upuście, zmaiorujemy funkcję ujętą w nawiasy okrągłe pod pierwiastkiem równania (5.3.2) prostą funkcją wykładniczą w następujący sposób:

$$(5.6.1) \quad 0 \leq e^{-2\xi} + 2e^{-\xi} \sin \xi + 1 \leq (e^{-\xi} + 1)^2,$$

gdzie

$$(5.6.2) \quad \xi = \delta_0 x.$$

Oczywiście wartości  $v_u > v$  mogą znajdować się tylko w przedziale  $\xi$ , dla których  $\xi > 0$  oraz

$$(5.7) \quad e^{-\xi} + 1 > \sqrt{2}.$$

Rozwiązując tę nierówność względem  $\xi$  znajdujemy

$$(5.8) \quad 0 < \xi < \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Na rysunku 14 przedstawiono wykres funkcji

$$(5.9) \quad f(\xi) = e^{-2\xi} + 2e^{-\xi} \sin \xi + 1$$

w przedziale  $\langle 0, \ln(1 + \sqrt{2}) \rangle$ . Jak widać na wykresie funkcja  $f(\xi)$  jest w tym przedziale malejąca, zatem

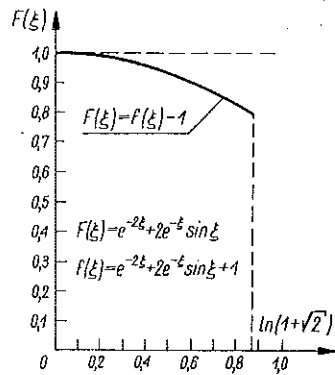
$$(5.10.1) \quad [v_u]_{max} = v$$

oraz

$$(5.10.2) \quad v_{u, rez} = v_{rex} = \sqrt{2}.$$

A więc i dla upustu mamy w tym przypadku tylko jeden rezonans dla bezwymiarowej częstości drgań  $\mu$ :

$$(5.11) \quad \mu_{rez} = \frac{1}{\sqrt{4B^2}}.$$



Rys. 14

Dla drugiego sposobu podparcia miejsca wymuszona (rys. 6) otrzymamy po wykonaniu szeregu rachunków maksymalną amplitudę na upuście w przekroju

$$(5.12) \quad x = 2,289 \delta_0^{-1},$$

której wartość można obliczyć ze wzoru

$$(5.13) \quad A_{max} = \frac{A_0}{\sqrt{\mu - 2B\mu^{3/4} + 2B^2\mu^2}},$$

gdzie  $B$  i  $\mu$  według (4.9.3) i (4.9.4), a stała  $A_0$  nie zależy od częstości. Łatwo wykazać, że  $A_{max}$  jest malejącą funkcją częstości drgań  $\omega$ , zatem rezonansu dla ugięć upustu nie ma. Dla kątów ugięcia natomiast rezonans

istnieje. Szereg rachunków prowadzi w tym przypadku do następujących wyników:

$$(5.14.1) \quad (v_n)_{max} = v,$$

$$(5.14.2) \quad v_{n, rez} = \sqrt{2},$$

$$(5.14.3) \quad \mu_{rez} = \frac{1}{4B^2}.$$

Zbadamy teraz wpływ bezwładności obrotowej przekrojów na zjawisko rezonansu w miejscu wymuszenia.

6. Współczynnik tłumienia i masa zredukowana wyrażają się teraz dla przypadków podparcia upustu jak na rys. 5 i 6 wzorami (2.8) i (2.13).

Prosty rachunek prowadzi do następującego równania dla współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego w miejscu wymuszenia dla przypadku przedstawionego na rys. 5:

$$(6.1) \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2B}{H} \mu^{3/2} + 2B^2 \left( \frac{1+H^4}{2H^2} \right) \mu^3}},$$

gdzie

$$(6.2.1) \quad \mu = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{\kappa_{1, \infty}}}},$$

$$(6.2.2) \quad B = \sqrt[4]{\frac{EA}{k i_z}},$$

a funkcja pomocnicza

$$(6.3) \quad H = \sqrt{\frac{\mu}{B^2} \left( \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{B^4}{\mu^2} - \frac{1}{2}} \right)}.$$

Chcąc otrzymać równanie nie uwzględniające wpływu bezwładności obrotowej przekrojów należy w równaniu (6.1) podstawić  $H = 1$ .

Łatwo wykazać, że

$$(6.4.1) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} H = 1,$$

$$(6.4.2) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} H = 0$$

oraz że  $H$  jest malejącą funkcją  $\mu$ . Zatem podobnie jak dla współczynników tłumienia i mas zredukowanych wpływ bezwładności obrotowej jest znaczny dopiero dla dużych częstości drgań.

Na rysunku 15 przedstawiono wykres funkcji

$$(6.5.1) \quad H = f(a),$$

gdzie

$$(6.5.2) \quad a = \frac{\mu}{B^2}.$$

Łatwo teraz ocenić wpływ bezwładności obrotowej przekrojów na zjawisko rezonansu i wielkość współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego  $\nu$  w miejscu wymuszenia. Wystarczy w tym celu oszacować wielkość parametru  $a$  dla  $\mu = \mu_{rez}$ . Rugując  $\mu$  z równań (6.5.2) i (5.11) otrzymujemy

$$(6.6) \quad a_{rez} = \frac{1}{\sqrt[3]{4B^8}}$$

oczywiście dla

$$(6.7.1) \quad 0 < a_{rez} \ll 1$$

wpływ bezwładności obrotowej przekrojów na zjawisko rezonansu jest niewielki, zatem krzywe na rys. 8-10 nie ulegną większej zmianie w otoczeniu punktu rezonansowego, natomiast dla

$$(6.7.2) \quad 1 \ll a_{rez}$$

wpływ będzie znaczny. Dla przypadku przedstawionego na rys. 7  $B = 0,3$ , zatem  $a_{rez} \gg 1$  i wykres ulegnie istotnej zmianie. Na rys. 16 porównano krzywe  $\nu = f(\mu)$  wykonane zgodnie z równaniem (6.1) i (4.5). Jak widać, wpływ bezwładności obrotowej na rezonans jest tutaj bardzo znaczny.

Rezonans dla belki Rayleigha jest przesunięty w kierunku niższych częstotliwości w stosunku do belki Naviera, a iloraz współczynników uwielokrotnienia ugięcia statycznego dla rezonansu wynosi

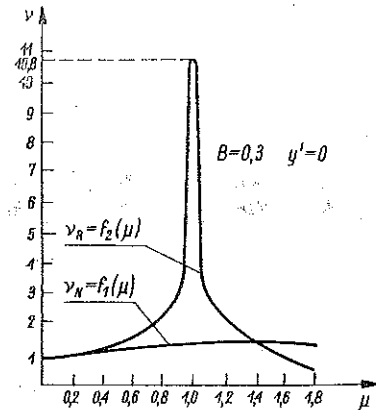
$$(6.8) \quad \frac{\nu_{R, rez}}{\nu_{N, rez}} \approx 8.$$

Zastanówmy się jeszcze nieco dokładniej nad interpretacją warunków (6.7), które można napisać dla parametru  $B$  w postaci

$$(6.9.1) \quad 1 \ll B,$$

zamiast (6.7.1) i

$$(6.9.2) \quad 0 < B \ll 1,$$

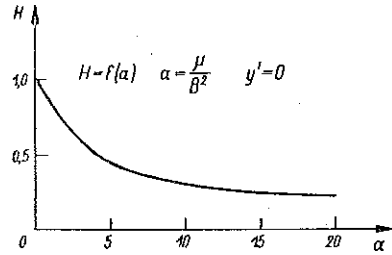


Rys. 16

zamiast (6.7.2). Ponieważ

$$(6.10) \quad B = \sqrt[4]{\frac{EA}{ki_z}},$$

zatem wpływ bezwładności obrotowej na zjawisko rezonansu jest znaczny w przypadku sztywnego podparcia ( $k$  duże) i belek o dużej sztywności zginania ( $i_z$  duże).



Rys. 15



Analogicznie do równania (6.1) można wyprowadzić równanie dla współczynnika uwielokrotnienia ugięcia statycznego  $\nu$  w miejscu wymuszenia uwzględniając wpływ bezwładności obrotowej przekrojów dla przypadku podparcia upustu przedstawionego na rys. 6. Otrzymamy wtedy po wykonaniu rachunków

$$(6.11) \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2HB\mu^{1.2} + 2\left(\frac{1+H^4}{2H^2}\right)B^2\mu}},$$

gdzie  $H$  oznacza funkcję pomocniczą (6.3). Dyskusja tego równania prowadzi do podobnych wyników.

Na rysunku 17 przedstawiono wykres funkcji  $\nu = f(\mu)$  dla  $B = 0,5$  (6.11) i porównano z wykresem funkcji (4.10).

Dla tego przypadku wpływ bezwładności obrotowej przekrojów jest znaczny dla belek o małej sztywności zginania ( $i_z$  małe) lub dla belek o dużej sztywności podparcia ( $k$  duże).

7. Rozpatrzmy podłużne drgania wymuszone rezonatora z upustem jak to przedstawiono na rys. 18 i 19. Ograniczymy się do najprostszego

przypadku drgań podłużnych, opisanego równaniem

$$(7.1.1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie

$$(7.1.2) \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

oznacza prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w belce.

Aby wyznaczyć charakterystykę sił reakcyjnych rezonatora i upustu, rozpatrzmy drgania wymuszone kinematycznie w przekroju  $x = 0$  przy zerowych warunkach początkowych (początkowa energia mechaniczna belki równa się zeru); drgania są ustalone, harmoniczne z częstością  $\omega$ .

Warunki brzegowe dla przypadku przedstawionego na rys. 18 będą dla rezonatora

$$(7.2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = -L,$$

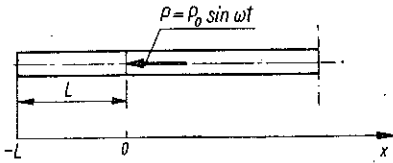
$$(7.2.2) \quad u = u_0 \sin \omega t, \quad x = 0,$$

a dla upustu

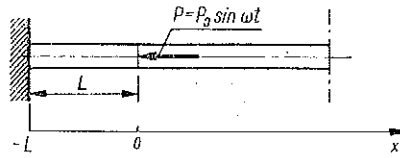
$$(7.3.1) \quad u = u_0 \sin \omega t, \quad x = 0,$$

$$(7.3.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u = 0.$$

Drugi z warunków brzegowych dla upustu można spełnić w stanie ustalonym tylko wtedy, gdy założymy istnienie fikcyjnego tłumienia w upuście (por. p. 5). Rzeczywiste rozwiązanie odpowiadające fali poruszającej się od miejsca wymuszenia otrzymamy obliczając rozwiązanie graniczne przy współczynniku fikcyjnego tłumienia zmierzającym do zera.



Rys. 18



Rys. 19

Po wykonaniu rachunków otrzymamy następujące rozwiązania dla funkcji  $u(x, t)$ :

dla rezonatora

$$(7.4) \quad u = u_0 \left( \cos \frac{\omega}{a} x - \operatorname{tg} \frac{\omega}{a} L \sin \frac{\omega}{a} x \right) \sin \omega t,$$

a dla upustu

$$(7.5) \quad u = -u_0 \sin \left( \frac{\omega}{a} x - \omega t \right).$$

Rozwiązania (7.4) i (7.5) tracą sens, gdy  $\cos \omega L/a \rightarrow 0$  przy stałej amplitudzie wymuszenia kinematycznego drgań  $u_0$ . Odpowiada to przypadkom rezonansu, gdy nie istnieje stan ustalony ruchu dla rezonatora. Jednakże, jak zobaczymy w dalszej części pracy, można tak dobrać  $u_0$  w zależności od  $\omega$ , aby istniała graniczna wartość dla (7.4) przy  $\cos \omega L/a \rightarrow 0$ . Z rozwiązań (7.4) i (7.5) wnioskujemy również, że podczas drgań wymuszonych, ustalonych na rezonatorze tworzy się fala stojąca, natomiast na upuście fala ruchoma poruszająca się od miejsca wymuszenia.

Reakcję w miejscu wymuszenia można przedstawić za pomocą wzoru

$$(7.6) \quad R = -[\lambda \dot{u}]_{x=0} - [x \ddot{u}]_{x=0},$$

gdzie

$$(7.7.1) \quad \lambda = A \sqrt{\rho E},$$

$$(7.7.2) \quad x = AL \rho \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}$$

oraz

$$(7.7.3) \quad \xi = \frac{\omega L}{a}.$$

Pierwszy składnik prawej strony równania (7.6) jest niezachowawczą reakcją upustu, natomiast drugi składnik jest zachowawczą reakcją rezonatora. W reakcji rezonatora nie ma składnika niezachowawczego, gdyż nie

występuje w nim fala ruchoma; natomiast w upuście nie ma składnika zachowawczego, gdyż nie występuje w nim fala stojąca. Charakterystyki sił reakcyjnych rezonatora i upustu są tutaj znacznie prostsze aniżeli dla przypadku drgań giętnych.

Oczywiście dla rezonatora (rys. 18) mamy

$$(7.8) \quad \chi = 0,$$

gdyż zamocowanie nie daje żadnej reakcji sprężystej przy statycznym obciążeniu rezonatora.

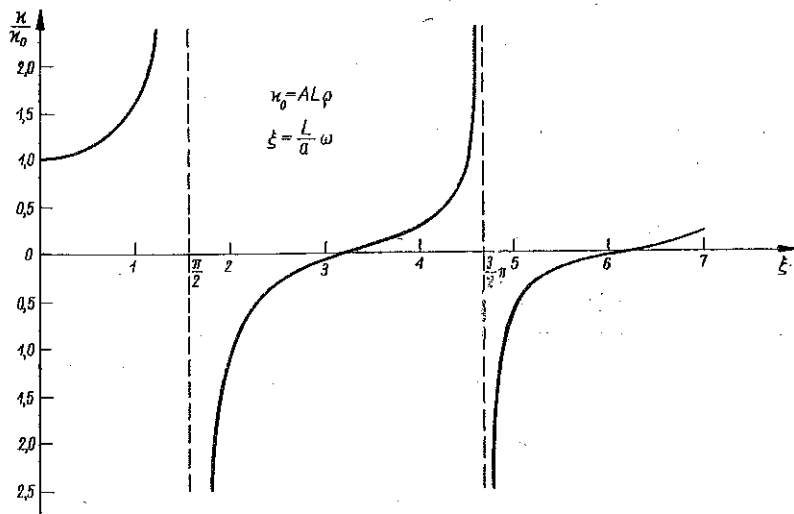
Masa zredukowana  $\kappa$  ma własność następującą:

$$(7.9) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \kappa = AL\rho,$$

tzn. równa się masie rezonatora dla bardzo małych częstotliwości  $\omega$ , a dla wartości  $\xi$  spełniających nierówność

$$(7.10) \quad \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi < \xi < n\pi$$

jest  $\kappa < 0$ , co wskazuje na zgodność siły reakcji rezonatora z kierunkiem przyspieszenia przekroju  $x=0$  dla pewnych przedziałów częstotliwości. Na rysunku 20 przedstawiono wykres  $\kappa = f(\xi)$  (7.7.2).



Rys. 20

Dla przypadku zamocowania rezonatora przedstawionego na rys. 19 warunki brzegowe są następujące:

dla rezonatora

$$(7.11.1) \quad u = 0, \quad x = -L,$$

$$(7.11.2) \quad u = u_0 \sin \omega t, \quad x = 0;$$

dla upustu

$$(7.12.1) \quad u = u_0 \sin \omega t, \quad x = 0,$$

$$(7.12.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u = 0.$$

Po wykonaniu podobnych obliczeń jak dla poprzedniego przypadku otrzymujemy tutaj na współczynniki  $\chi$ ,  $\lambda$  i  $\kappa$  wzory:

$$(7.13.1) \quad \chi = \frac{EA}{L},$$

$$(7.13.2) \quad \lambda = A \sqrt{\rho E},$$

$$(7.13.3) \quad \kappa = AL\rho \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{\operatorname{ctg} \xi}{\xi} \right),$$

gdzie

$$(7.14) \quad \xi = \frac{\omega L}{a}.$$

Masa zredukowana  $\kappa$  ma następującą wartość graniczną:

$$(7.15) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \kappa = \frac{1}{3} AL\rho,$$

tzn. równa się przy bardzo małych częstościach drgań jednej trzeciej masy rezonatora. Wartość ta odpowiada masie zredukowanej rezonatora przy założeniu statycznego rozkładu odkształceń podczas drgań. Na rysunku 21 przedstawiono wykres  $\kappa = f(\xi)$ , (7.13.3), gdzie również jak na rys. 20 powtarzają się okresowo przedziały, dla których  $\kappa < 0$ .

Posługując się otrzymanymi rozwiązaniami można również podać współczynniki sprężystości, tłumienia i masy zredukowane dla sił reakcyjnych rezonatora i upustu osobno. Zestawienie takie podano w tabelicy 2.

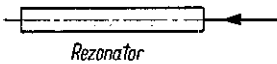

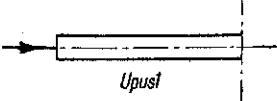
Dla drgań skrętnych prętów o przekroju kołowo-symetrycznym możemy od razu wypisać współczynniki sprężystości, tłumienia i zredukowane momenty bezwładności korzystając z analogii równań ruchu i warunków brzegowych dla obydwu przypadków.

Otrzymaliśmy zatem pełną charakterystykę sił reakcyjnych rezonatora i upustu dla drgań podłużnych belek o stałym przekroju lub dla drgań skrętnych belek o przekroju kołowo-symetrycznym. Umożliwia to rozpatrzenie drgań wymuszonych, ustalonych rezonatora i upustu, które zanalizujemy w następnym punkcie pracy.

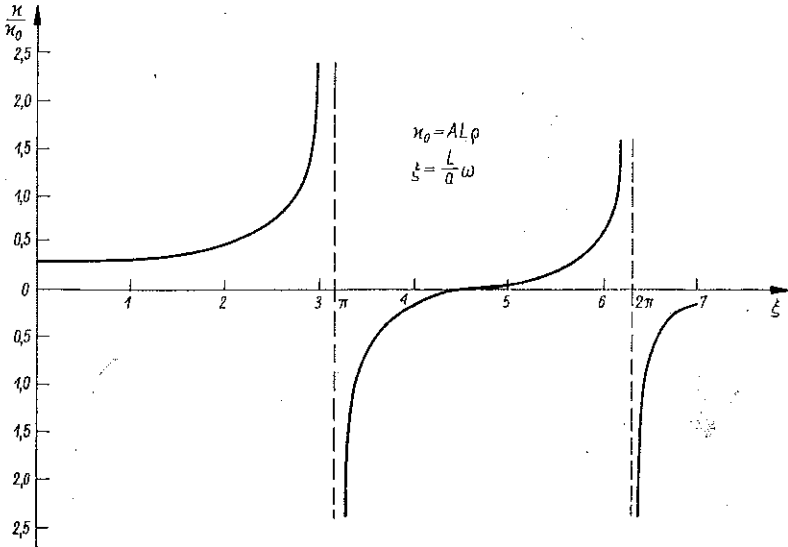
8. Rozpatrzmy przypadek przedstawiony na rys. 18. Ponieważ dla rezonatora nie istnieje ugięcie statyczne, przyjmiemy jako ugięcie statyczne porównawcze dla amplitudy drgań w miejscu wymuszenia wielkość

$$(8.1) \quad u_{st} = \frac{P_0 L}{EA}.$$

Tablica 2

	$\gamma$	$\lambda$	$\alpha$
1.  Rezonator	0	0	$AL\varrho \frac{\text{tg } \xi}{\xi}$
2.  Rezonator	$\frac{EA}{L}$	0	$AL\varrho \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{\text{ctg } \xi}{\xi} \right)$
3.  Upust	0	$A\sqrt{\varrho E}$	0

Jest to ugięcie statyczne rezonatora w miejscu wymuszenia pod działaniem amplitudy siły wymuszającej  $P_0$  w przypadku zamocowania rezonatora przedstawionego na rys. 19.



Rys. 21

Zakładając, że siła wymuszająca posiada niezależną od częstości amplitudę i jest harmoniczna oraz rozpatrując drgania wymuszone w stanie ustalonym przy zerowych warunkach początkowych (początkowa energia

mechaniczna rezonatora i upustu równa zero) możemy wykorzystać w obliczeniach wyniki poprzedniego punktu pracy. Obliczając reakcję w miejscu wymuszenia jako różnicę jednostronnych granic siły podłużnej w rezonatorze i upuście łatwo wyznaczymy współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego w miejscu wymuszenia  $\nu$ , który będzie funkcją częstości. Rachunek, którego tutaj nie przytaczamy, prowadzi do następującego wyniku:

$$(8.2.1) \quad \nu = \frac{|\cos \xi|}{\xi},$$

gdzie

$$(8.2.2) \quad \xi = \frac{\omega L}{a}.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że rozwiązanie (7.4) posiada ciągłą funkcję graniczną przy  $\cos \omega L/a \rightarrow 0$ , tzn. gdy zbliżamy się do częstości odpowiadających częstościom drgań własnych rezonatora swobodnego.

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji  $\nu = f(\xi)$  ma postać

$$(8.3) \quad \xi \operatorname{tg} \xi = -1.$$

Przybliżone wartości pierwiastków tego równania dla  $\xi > 0$  wynoszą

$$(8.4) \quad \xi \approx \frac{n\pi}{2} + \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{4} - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty),$$

a przybliżone wartości  $\nu$  dla kolejnych rezonansów [warunek (8.3) wyznacza tylko maksima funkcji  $\nu = f(\xi)$ ]

$$(8.5) \quad \nu_{rez} = \frac{n\pi}{2} - \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{4} - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

Z równania (7.4) łatwo wyliczyć współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego na rezonatorze porównując amplitudę drgań w każdym punkcie rezonatora z ugięciem statycznym (8.1). Otrzymamy wtedy

$$(8.6.1) \quad \nu_r = \frac{|\cos [\xi(1 + \zeta)]|}{\xi},$$

gdzie

$$(8.6.2) \quad \zeta = \frac{x}{L}.$$

Ponieważ

$$(8.6.3) \quad -1 \leq \zeta \leq 0,$$

zatem

$$(8.7) \quad \nu_{r, \max} = \frac{1}{\xi}.$$

Funkcja (8.7) jest malejącą funkcją  $\xi$ , zatem rezonansu dla rezonatora nie ma.

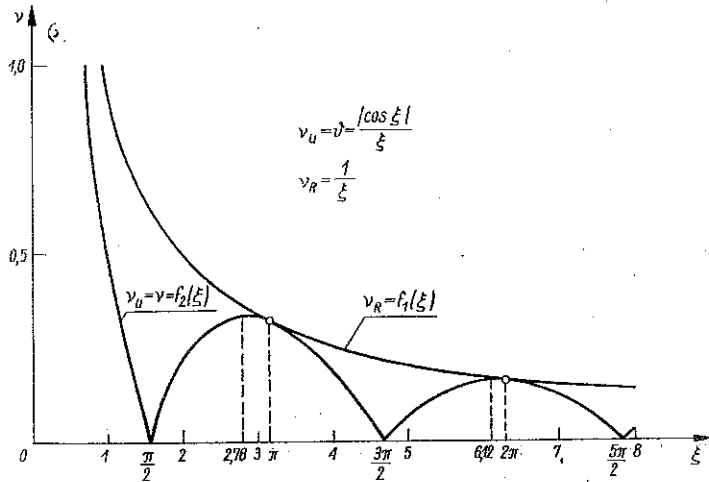
Na rysunku 22 wykreślono krzywe (8.2.1) i (8.7) potwierdzające otrzymane wyniki.

Łatwo się przekonać, że równanie (8.2.1) określa jednocześnie współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego dla upustu, gdyż zgodnie z równaniem (7.5) amplituda drgań w każdym punkcie upustu jest równa amplitudzie drgań w miejscu wymuszenia. Możemy więc napisać

$$(8.8.1) \quad v_u = \frac{|\cos \xi|}{\xi},$$

$$(8.8.2) \quad \xi_{rez} = \frac{n\pi}{2} + \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

$$(8.8.3) \quad v_{u, rez} = \frac{n\pi}{2} - \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{4} - 1} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty).$$



Rys. 22

Ciekawe zjawisko występuje dla częstości równych częstościom drgań własnych rezonatora swobodnego, tzn. dla

$$(8.9) \quad \xi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Podstawiając (8.9) do równania (8.8.1) otrzymamy

$$(8.10) \quad v = 0.$$

A więc przez upust nie przepływa wtedy energia mechaniczna. W miejscu wymuszenia tworzy się tzw. korek dynamiczny. Jednakże rezonator

ma wtedy ograniczone amplitudy i zgodnie z (8.6.1) współczynnik uwielokrotnienia ugięcia statycznego  $\nu_r$  dla rezonatora wynosi

$$(8.11) \quad \nu_r = \frac{\left| \sin \left[ \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \xi \right] \right|}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

$\nu_{r, \max}$  otrzymujemy np. dla  $\xi = -1$ , a jego wartość wynosi

$$(8.12) \quad \nu_{r, \max} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty).$$

Moc średnią przenoszoną przez przekrój upustu można obliczyć za pomocą następującego wzoru:

$$(8.13) \quad N_{sr} = \frac{P_0^2}{A \sqrt{\rho E}} \cos^2 \xi.$$

Maksimum mocy zachodzi dla

$$(8.14.1) \quad \xi = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

i wynosi

$$(8.14.2) \quad N_{sr, \max} = \frac{P_0^2}{A \sqrt{\rho E}}.$$

Porównując (8.14.1) z (8.8.2) widzimy, że maksimum mocy jest przesunięte w stosunku do rezonansu w kierunku dodatnich  $\xi$  o wielkość

$$(8.15) \quad \Delta \xi_n = \frac{n\pi}{4} - \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{2} - 1}.$$

Obliczymy jeszcze, jakie ilości energii mechanicznej znajdują się w rezonatorze, gdy w miejscu wymuszenia tworzy się korek dynamiczny. W tym celu obliczymy energię sprężystą rezonatora w skrajnym położeniu. Prosty rachunek prowadzi do wzoru:

$$(8.16.1) \quad V = V_0 \left( 1 - \frac{\sin 2\xi}{2\xi} \right),$$

gdzie

$$(8.16.2) \quad V_0 = \frac{1}{4} \frac{P_0^2 L}{EA}$$

jest połową energii sprężystej rezonatora przy statycznym obciążeniu amplitudą siły wymuszającej. Korek dynamiczny w miejscu wymuszenia powstaje, gdy  $\xi$  osiąga wartości

$$(8.17) \quad \xi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty);$$



wtedy w rezonatorze jest zamknięta skończona ilość energii mechanicznej. Siła wymuszająca nie wykonuje pracy i energia odkształcenia sprężystego w skrajnym położeniu rezonatora jest równa całkowitej energii mechanicznej  $W$ . Możemy zatem napisać, że w tym przypadku

$$(8.18) \quad V = V_0 = W = \frac{1}{4} \frac{P_0^2 L}{EA}.$$

Dla przypadku zamocowania rezonatora przedstawionego na rys. 19 otrzymujemy po wykonaniu podobnych rachunków następujące wzory do obliczenia współczynników uwielokrotnienia ugięcia statycznego:

$$(8.19) \quad \nu = \frac{|\sin \xi|}{\xi},$$

$$(8.20) \quad \nu_{r, \max} = \begin{cases} \frac{|\sin \xi|}{\xi}, & \text{jeśli } 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{\xi}, & \text{jeśli } \frac{\pi}{2} \leq \xi; \end{cases}$$

$$(8.21) \quad \nu_u = \frac{|\sin \xi|}{\xi}.$$

Wykresy powyższych funkcji przedstawiono na rys. 23.

Tutaj także występuje zjawisko korka dynamicznego dla częstości odpowiadających częstościom drgań własnych rezonatora. Łatwo się przekonać, że dla tych przypadków w rezonatorze jest zamknięta energia mechaniczna, której wielkość można obliczyć ze wzoru (8.18).

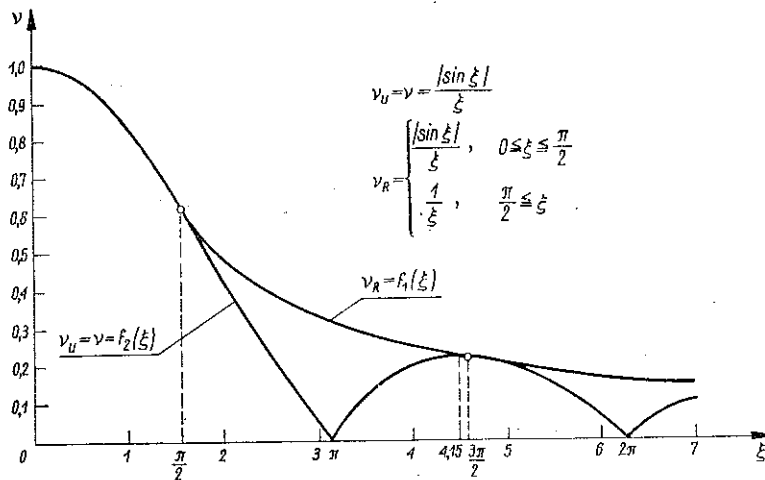
Otrzymane wyniki dla drgań wymuszonych podłużnych można uogólnić na przypadek drgań skrętnych rezonatora i upustu korzystając ze znanej analogii równań ruchu i warunków brzegowych.

9. Podane wyżej opisy zjawisk drgań wymuszonych nie są wyczerpujące nawet dla rozważanych najprostszych przypadków wymuszenia i modeli belek. Np. przy drganiach belek pominięto wpływ sił tnących, które niewątpliwie są ważne w dużej ilości przypadków i mogą znacznie zmienić obraz zjawiska, [5]. Szczegółową analizę wpływu sił tnących na zjawisko rezonansu podamy w osobnej pracy.

Podobnie zwięzono opis drgań skrętnych wyłącznie do belek o przekrojach kołowo-symetrycznych jako najważniejszych w zastosowaniach. Tutaj nasuwa się od razu dalsze rozwinięcie tematu: obliczenie drgań wymuszonych długiego wału okrętowego z uwzględnieniem tłumienia hydromechanicznego śruby, [4], oraz zbadanie drgań wymuszonych belek o innych kształtach przekroju, w szczególności belek cienkościennych.

Szczególnie ciekawe jest zjawisko korka dynamicznego omówione w 8 p. pracy, polegające na nieprzepuszczeniu energii mechanicznej przez

miejsce wymuszenia i zamknięciu określonej ilości energii w rezonatorze przy wyróżnianych częstościach drgań tworzących ciąg nieskończony. Należy tutaj od razu związać z pracami J. Naleszkiewicza o kwantyzacji zjawisk niestateczności sprężystej i poziomach energetycznych w dynamice belek sprężystych, [1], [2], [3]. W następnych pracach poświęconych zagadnieniom stateczności ruchu belek prostych i układów



Rys. 23

prętowych nieograniczonych przy drganiach wymuszonych rozpatrzymy zjawiska drgań z tego punktu widzenia. Należy tutaj przypomnieć, że wyniki otrzymane dla nieograniczonych układów prętowych będzie można stosować do układów ograniczonych pod warunkiem ustalenia kryteriów stosowalności zależnych od tłumienia materiałowego, wymiarów układu ograniczonego i częstości drgań.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] J. Naleszkiewicz, *Kwantyzacja zjawisk niestateczności sprężystej* (I), Arch. Mech. stos., 1, 6 (1954).
- [2] J. Naleszkiewicz, *Kwantyzacja zjawisk niestateczności sprężystej* (II), Arch. Mech. stos., 2, 6 (1954).
- [3] J. Naleszkiewicz, *Energy Levels in Dynamics of Elastic Systems*, Arch. Mech. stos., 4, 8 (1956).
- [4] J. Więckowski, *Tłumienie falami naprężeń w belkach sprężystych*, Rozpr. inżyn. 3, 6 (1958).
- [5] J. Więckowski, *Równania drgań giętnych kadłuba statku*, Bibl. Mech. stos., PWN Warszawa 1957.
- [6] J. Więckowski, *The Influence of the Material Damping on Non-Conservative Reactions of Elastic Beams During Torsional and Longitudinal Vibration*, Arch. Mech. stos., 4, 10 (1958).

## Резюме

### ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ВАЛОК

В работе дается анализ вынужденных гармонических, стационарных колебаний при нулевых начальных условиях (полная механическая энергия в первоначальный момент равняется нулю) для полубесконечных упругих балок с одной точкой вынуждения при изгибных, продольных и крутильных колебаниях.

Определяются характеристики сил реакции при различном положении силы или вынужденного момента, сводящиеся к трем коэффициентам а именно к:

- (1) коэффициенту пропорциональности для сил пропорциональных к перемещениям,
- (2) коэффициенту пропорциональности для сил пропорциональных к скорости,
- (3) коэффициенту пропорциональности для сил пропорциональных к ускорению.

Указывается на совершенно различные свойства полубесконечных балок при резонансе по сравнению с ограниченными балками и описывается явление динамической пробки, состоящее в не пропускании механической энергии через точку вынуждения при определенных частотах вынужденных колебаний, создающих бесконечный ряд.

В заключение обсуждается дальнейшая тематика работ.

## Summary

### THE PHENOMENON OF RESONANCE IN SEMI-INFINITE ELASTIC BEAMS

An analysis of forced harmonic steady-state vibration is presented with zero initial conditions (the total mechanical energy equal to zero at the initial moment for semi-infinite elastic beams with single point of action of the external force and for longitudinal and torsional vibration).

The characteristics of the reaction forces are determined for various locations of the external force or moment. These characteristics reduce to three coefficients:

the coefficient of proportionality of forces proportional to the displacement,

the coefficient of proportionality of forces proportional to the velocity,

the coefficient of proportionality of forces proportional to the acceleration.

It is shown that the resonance properties of semi-infinite beams are entirely different from those of finite beams. The phenomenon of dynamic obstacle is described, consisting in that the mechanical energy does not pass across the point where the external force acts for certain frequencies of forced vibration which constitute an infinite sequence.

The topics of papers to come are discussed.