

PIOTR WILDE

PŁYTA ORTOTROPOWA Z CIENKOŚCIENNYMI ŻEBRAMI  
NIESYMETRYCZNYMI

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CXXVII

## SPIS TREŚCI

1. Reakcje żeber przy poszczególnych stanach odkształceń	276
1.1. Obrót naokoło narzuconej osi obrotu	277
1.2. Zginanie w płaszczyźnie pionowej	279
1.3. Zginanie w płaszczyźnie poziomej	280
1.4. Stan przemieszczenia $u$	280
2. Równania różniczkowe rozpatrywanego zagadnienia	281
2.1. Wyprowadzenie równań różniczkowych zagadnienia	281
2.2. Przekształcenie równań różniczkowych	283
2.3. Przypadek obciążenia zależnego od czasu oraz zagadnienie wy- boczenia	286
3. Rozwiązanie układu równań różniczkowych	291
3.1. Rozwiązanie za pomocą funkcji przemieszczeń	291
3.2. Ogólne rozwiązanie dla płyty z żebrami symetrycznymi dla dowolnych warunków brzegowych	293
4. Rozwiązanie szczegółowe dla płyt z żebrami symetrycznymi	296
4.1. Płyta z żebrami symetrycznymi	296
4.2. Płyta z żebrami jednostronnymi swobodnie podparta obciążona statycznie	298
4.3. Drgania własne płyty wolnopodpartej	300
4.4. Drgania własne płyty obustronnie zamocowanej	300
4.5. Wyboczenie płyty	303
4.6. Płyta o danych przemieszczeniach poziomych na brzegach	303
4.7. Płyta o danych przemieszczeniach pionowych na brzegach	305

W pracy omówiona jest płyta ortotropowa o niesymetrycznych żebrach. Żebra połączone są z płytą monolitycznie, to znaczy, że z żeber przenoszą się na płytę siły tnące, skierowane wzdłuż i prostopadle do żebra, siły pionowe oraz momenty wzdłuż styku. Dla płyty przyjęto założenia teorii ortotropowych płyt cienkich. Odnośnie żeber przyjęto, że są one cienkościennymi prętami o przekroju otwartym oraz że kąt między żebrami i płytą w miejscu połączenia po obciążeniu nie ulega zmianie.

Zagadnienie płyt wzmocnionych żebrami rozpatrywane było w literaturze przy różnych założeniach upraszczających i za pomocą różnych metod matematycznych.

Płytami podpartymi żebrami o styku, który nie przenosi ani sił tnących ani momentów z żebra na płytę zajmowało się wielu autorów, między innymi Timoszenko, [13], R. Barbré, [14], W. Nowacki, [15].

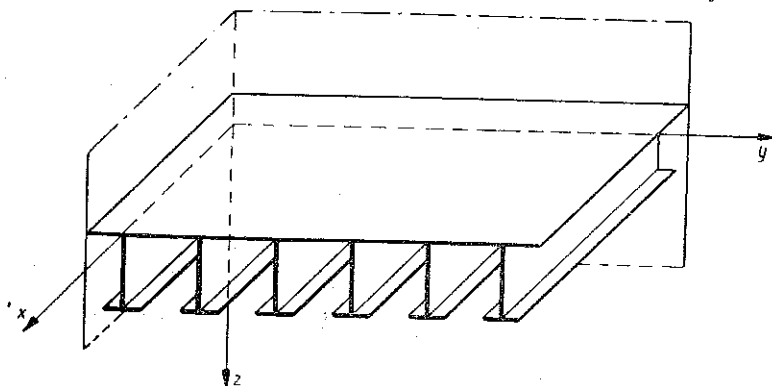
Przypadkiem żeber prostokątnych jednostronnych połączonych monolitycznie zajmowali się Homberg, [16], i M. Sokołowski, [17]. Homberg w cytowanej pracy analizuje wpływ tarczy na pracę rusztu metodami stosowanymi w mechanice budowli. M. Sokołowski rozpatruje wyboczenie pasma płytowego z żebrami o równych odstępach. Praca ta odnosi się w zasadzie do przypadku, gdy rozstaw żeber jest zbliżony do rozpiętości płyty.

Dla rozstawów żeber małych w porównaniu z rozpiętością płyty najkorzystniej jest zastąpić nieciągły model żeber przez matematyczny ciągły model zastępczy. Niektórzy autorzy ujmują omawiane zagadnienie jako przypadek płyty ortotropowej. Należy wymienić tutaj następujących autorów: M. T. Huber, [18], E. Chwalla, [19], S. G. Lechnicki, [20], W. Cornelius, [21]. Ten ostatni proponuje nawet obliczenie rusztów mostowych na podstawie teorii płyt ortotropowych.

Szczegółową analizę pracy statycznej lekkiej jezdni mostowej (płyta z żebrami teowymi) przeprowadzono doświadczalnie na modelu w Zakładzie Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej, [10]. Badania wykazały, że naprężenia od zginania półek (skręcanie skrępowane) są znaczne oraz że oś obojętna w poszczególnych żebrach jest zależna od położenia i rodzaju obciążenia. W pewnych przypadkach obciążenia naprężenia w nie-

których żebrach są jednego znaku. Powyższych zjawisk nie można wytłumaczyć sprowadzając zagadnienie do przypadku płyty ortotropowej.

Zagadnienie zastępczego modelu ciągłego żeber jednostronnych o przekroju prostokątnym rozpatrywane było przez A. Pflügera, Trenksa i E. Gineckiego. Pflüger, [12] rozwiązał zagadnienie wyboczenia płyty prostokątnej. Rozwiązanie jego jest szczególnym przypadkiem rozwiązania uzyskanego w niniejszej pracy. Trenks, [11], opierając się na równaniach wyprowadzonych przez Pflügera rozwiązał kilka przypadków obciążenia statycznego. E. Ginecke, [22], wyprowadził równania różniczkowe dla płyty z prostokątnymi żebrami jednostronnymi. W pracy nie ma żadnych rozwiązań ogólnych ani szczegółowych.



Rys. 1

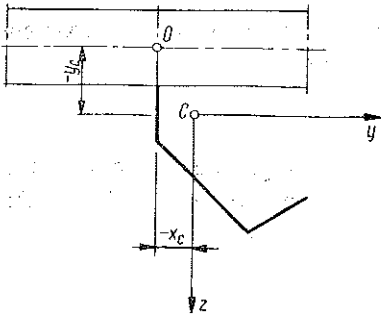
Praca niniejsza jest rozszerzeniem pracy Pflügera na przypadek dowolnych żeber cienkościennych. Różni się ona od wyżej wymienionych prac metodą rozwiązania i zawiera szereg rozwiązań, które nawet dla przypadku płyty z żeberkami prostokątnymi nie były znane.

W pracy przyjęto układ współrzędnych przedstawiony na rys. 1. Położenie początku układu podane jest przy wyprowadzeniach odpowiednich wzorów. Zasadniczy tok wyprowadzenia równań polega na znalezieniu wzorów na reakcję przy poszczególnych stanach odkształceń i następnie obciążeniu płyty ortotropowej reakcjami. Wyprowadzenie wzorów na reakcje opiera się na teorii profili cienkościennych, podanej w monografii J. Ruteckiego, [1]. W niniejszej pracy podano wyprowadzenie powyższych wzorów, ponieważ autor nie znalazł w dostępnej mu literaturze potrzebnych rozwiązań, które mógłby przyjąć w gotowej postaci.

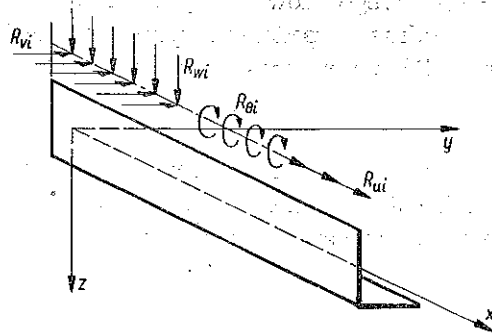
#### 1. Reakcje żeber przy poszczególnych stanach odkształceń

Ślad przecięcia płaszczyzny środkowej płyty z płaszczyzną do niej prostopadłą przechodzącą przez prostą styku żebra z płytą określa oś, do której będą odniesione odkształcenia żebra oraz reakcje od poszczegól-

nych stanów odkształceń. W przekroju żebra oś oznaczona jest przez punkt  $O$  (rys. 2). Przesunięcia płyty, które jednocześnie określają odkształcenia żebra w kierunku współrzędnych  $x, y, z$ , oznaczono odpowiednio przez  $u, v, w$ . Za dodatnie przyjęto przesunięcie skierowane w stronę dodatnich współrzędnych. Obrót żebra naokoło narzuconej osi obrotu  $O$  oznaczono przez  $\Theta$  i przyjęto za dodatni, zgodny ze wskazówkami zegara. Przy poszczególnych przypadkach odkształcenia żebra działają reakcje, które będziemy odnosili do osi  $O$ ; są one przedstawione na rys. 3. Za dodatnie przyjęto siły skierowane w stronę dodatnich współ-



Rys. 2

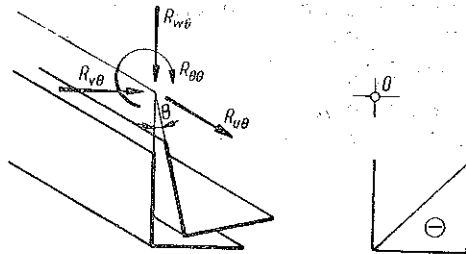


Rys. 3

rzędnych, a momenty działające zgodnie ze wskazówkami zegara. Ogólnie odkształcenie żebra będzie scharakteryzowane przez cztery przesunięcia:  $u, v, w$  i  $\Theta$ . Wyprowadzono wzory na reakcje dla przypadków, gdy występuje tylko jedno przesunięcie przy założeniu, że pozostałe są równe zero. Reakcje oznaczono literą  $R$  z dwoma indeksami, z których pierwszy wskazuje na kierunek działania, a drugi na przyczynę (stan). Przyjęto, że początek układu współrzędnych  $y, z$  pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju żebra, oznaczonym literą  $C$  (rys. 2).

#### 1.1. Obrót naokoło narzuconej osi

obrotu. Jako pierwszy przypadek rozpatrzono obrót naokoło narzuconej osi obrotu przechodzącej przez punkt  $O$  przy założeniu, że  $u = v = w = 0$ . Przyjęto pole powierzchni wycinkowej za dodatnie w przypadku, gdy promień wodzący porusza się zgodnie ze wskazówkami zegara. Ze względu na przyjęcie warunku, że przesunięcie  $u$  dla punktu  $O$  równa się zero, wartość początkowa współrzędnej wycinkowej jest równa zero. Wykres pola powierzchni wycinkowej



Rys. 4

przedstawiono przykładowo na rys. 4. Tak otrzymany wykres pola powierzchni wycinkowej  $\bar{\omega}$  można przedstawić w postaci:

$$(1.1) \quad \bar{\omega} = \omega - \omega_0,$$

gdzie  $\omega_0$  jest wartością stałą określoną następującą zależnością:

$$(1.2) \quad \omega_0 = - \frac{\int_A \bar{\omega} dA}{A}.$$

Przy takim założeniu  $\omega$  jest polem powierzchni wycinkowej liczonym od początkowego głównego promienia.

Zgodnie z podstawowymi zależnościami teorii profili cienkościennych, [1], naprężenia normalne są określone wzorem

$$(1.3) \quad \sigma = -(\omega - \omega_0) E \Theta''.$$

Reakcję poziomą obliczono z warunku równowagi rzutów sił na kierunku osi  $x$ . Rzutując wszystkie siły działające na element belki o długości  $dx$  na osi  $x$  otrzymano

$$R_{H\Theta} dx + \int_A d\sigma dA = 0.$$

Po podstawieniu  $\sigma$  z równania (1.3) i uwzględnieniu zależności (1.2) reakcja będzie określona zależnością

$$(1.4) \quad R_{H\Theta} = -\omega_0 E A \Theta'''.$$

Dla określenia pozostałych reakcji potrzebny jest wzór na naprężenia ścinające: zgodnie z teorią profili cienkościennych naprężenia ścinające określone są wzorem

$$(1.5) \quad q = q_0 - \int_0^s \frac{d\sigma}{dx} dA,$$

gdzie  $q$  oznacza strumień naprężeń ścinających równomiernie rozłożonych wzdłuż grubości ścianki, a  $q_0$  początkową wartość strumienia naprężeń ścinających.

Początkowa wartość strumienia naprężeń ścinających związana jest z reakcją  $R_{H\Theta}$  zależnością

$$(1.6) \quad q_0 = -R_{H\Theta}.$$

Podstawiając do wzoru (1.5)  $\sigma$  z zależności (1.3) oraz  $q_0$  ze wzoru (1.6) przy uwzględnieniu wzoru (1.4) po uproszczeniu otrzymano

$$(1.7) \quad q = E \Theta''' (A \omega_0 - \omega_0 \int_0^s dA + \int_0^s \omega dA).$$

Reakcję pionową  $R_{w\theta}$  obliczono z warunku, że suma rzutów sił działających na element o długości  $dx$  na oś  $z$  równa się zeru. Po prostych przekształceniach otrzymano

$$R_{w\theta} = \int_A \frac{dq}{dx} dz.$$

Po podstawieniu  $q$  ze wzoru (1.7) i wykonaniu całkowania przez części reakcja  $R_{w\theta}$  określona będzie wzorem

$$(1.8) \quad R_{w\theta} = ES_{\omega y} \theta^{IV} + z_c \omega_0 EA \theta^{IV},$$

gdzie

$$S_{\omega y} = \int_A z \omega dA$$

oznacza wycinkowo-liniowy statyczny moment bezwładności przekroju względem osi  $y$ .

Analogicznie otrzymano wzór na reakcję  $R_{v\theta}$ :

$$(1.9) \quad R_{v\theta} = ES_{\omega z} \theta^{IV} + y_c \omega_0 EA \theta^{IV}.$$

Suma momentów wszystkich sił działających na element żebra o długości  $dx$  określona jest równaniem

$$R_{\theta\theta} dx + \int_A dq h ds + GJ_d \theta'' = 0,$$

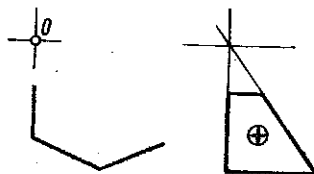
gdzie  $GJ_d$  jest sztywnością na czyste skręcanie.

Po podstawieniu  $q$  z zależności (1.7) i wykonaniu całkowania przez części otrzymano

$$(1.10) \quad R_{\theta\theta} = EJ_{\omega} \theta^{IV} + \omega_0^2 EA \theta^{IV} - GJ_d \theta''.$$

1.2. Zginanie w płaszczyźnie pionowej. W przypadku stanu  $w \neq 0$  a  $u = v = \theta = 0$ , mamy do czynienia ze zginaniem przy narzuconej osi obojętnej. Wykres naprężeń powstający w tym przypadku przedstawiono przykładowo na rys. 5. W tym stanie odkształcenia naprężenia normalne określone są wzorem

$$(1.11) \quad \sigma = (z - z_c) E w''.$$



Rys. 5

Z warunku równowagi sił w kierunku osi  $x$  działających na element długości  $dx$  otrzymano

$$(1.12) \quad R_{uw} = -z_c EA w''.$$

Strumień naprężeń ścinających określony jest wzorem

$$q = E w''' (z_c A - z_c \int_0^S dA + \int_0^S z dA).$$

Wykonując działania analogiczne do odpowiednich przy wyprowadzeniu reakcji przy obrocie naokoło narzuconego punktu obrotu otrzymano:

$$(1.13) \quad R_{ww} = EJ_y w^{IV} + z_c^2 EA w^{IV},$$

$$(1.14) \quad R_{vw} = EJ_{zy} w^{IV} + z_c y_c EA w^{IV},$$

$$(1.15) \quad R_{\theta w} = ES_{\omega y} w^{IV} + \omega_0 z_c EA w^{IV}.$$

1.3. Zginanie w płaszczyźnie poziomej. W przypadku stanu  $v \neq 0$  oraz  $u = w = \theta = 0$  naprężenia normalne określone są wzorem:

$$(1.16) \quad \sigma = (y - y_c) E v''.$$

Poszczególne reakcje określone są zależnościami:

$$(1.17) \quad R_{uv} = -y_c EA v''',$$

$$(1.18) \quad R_{vw} = EJ_{zy} v^{IV} + z_c y_c EA v^{IV},$$

$$(1.19) \quad R_{vv} = EJ_z v^{IV} + y_c^2 EA v^{IV},$$

$$(1.20) \quad R_{\theta v} = ES_{\omega z} v^{IV} + y_c \omega_0 EA v^{IV}.$$

1.4. Stan przemieszczenia  $u$ . W stanie odkształceń  $u \neq 0$  oraz  $v = w = \theta = 0$  naprężenia normalne w przekroju żebra określone są wzorem

$$(1.21) \quad \sigma = E u'.$$

Taki stan odkształceń jest w ogólności możliwy tylko w przypadku istnienia odpowiednich reakcji, które go wymuszają. Z warunku równowagi rzutów na oś  $x$  sił działających na element belki o długości  $dx$  otrzymano

$$(1.22) \quad R_{uu} = -EA u''.$$

Strumień naprężeń ścinających określony jest wzorem:

$$q = E u'' \left( A - \int_0^s dA \right).$$

Analogicznie jak w punkcie 1.1 otrzymano wzory na pozostałe reakcje:

$$(1.23) \quad R_{wu} = z_c EA u''',$$

$$(1.24) \quad R_{vu} = y_c EA u''',$$

$$(1.25) \quad R_{\theta u} = \omega_0 EA u''.$$

Jeżeli wszystkie reakcje zapisać w postaci macierzy, to przy zmianie konwencji znaków przyjętej odnośnie reakcji  $R_u$  macierz będzie symetryczna względem głównej przekątnej. Symetria ta wynika z twierdzenia o wzajemności przesunięć.



## 2. Równania różniczkowe rozpatrywanego zagadnienia

2.1. Wyprowadzenie równań różniczkowych zagadnienia. Dla wyprowadzenia równań różniczkowych uważamy, że płyta ortotropowa jest obciążona reakcjami żeber. Przechodząc ze skończonego rozstawu żeber do nieskończonej liczby należy wszystkie wielkości charakterystyczne dla przekroju żebra podzielić przez rozstaw żeber. W dalszych wyprowadzeniach przyjmuje się, że wielkości te są obliczone na jednostkę długości bez wprowadzenia specjalnych oznaczeń, ażeby nie komplikować symboliki.

Równanie różniczkowe płyty ortotropowej ma postać

$$(2.1) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q,$$

gdzie  $D_x$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_y$  oznaczają odpowiednie sztywności oraz gdzie  $q$  jest jednostkowym obciążeniem płyty. W omawianym przypadku przy oznaczeniu przez  $p$  obciążenia zewnętrznego  $q$  określone będzie po uwzględnieniu reakcji sił i momentów za pomocą wzoru

$$(2.2) \quad q = p - (R_{w\theta} + R_{ww} + R_{wv} + R_{wu}) + \frac{\partial}{\partial y} (R_{\theta\theta} + R_{\theta w} + R_{\theta v} + R_{\theta u}).$$

Przyjmując, że kąt pomiędzy płytą a żebrzem nie ulega zmianie po obciążeniu, można kąt obrotu wyrazić w zależności od funkcji ugięcia płyty wzorem

$$(2.3) \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Poziome obciążenie z żeber płyta będzie przenosiła jako tarcza obciążona w swojej płaszczyźnie. Równania równowagi tarczy mają postać

$$(2.4) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0,$$

gdzie przez  $N_x$  i  $N_y$  oznaczono siły normalne wewnętrzne skierowane odpowiednio wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . We wzorach tych  $N_{xy}$  oznacza siłę tnącą wypadkową naprężeń ścinających, działających na grubości płyty,  $X$  i  $Y$  siły obciążające działające odpowiednio w kierunku osi  $x$  i  $y$ .

Zależności między siłami  $N_x$ ,  $N_{xy}$  i  $N_y$  a przemieszczeniami otrzymano z równań dla przestrzennego stanu odkształceń przy uwzględnieniu płaskiego stanu naprężeń, ([2], s. 15).

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$(2.5) \quad \begin{cases} H_{11} = h \left( A_{11} - \frac{A_{13}^2}{A_{33}} \right), \\ H_{12} = h \left( A_{12} - \frac{A_{13} A_{23}}{A_{33}} \right), \\ H_{22} = h \left( A_{22} - \frac{A_{23}^2}{A_{33}} \right), \\ H_{66} = h A_{66}, \end{cases}$$

otrzymano

$$(2.6) \quad \begin{cases} N_x = H_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + H_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ N_y = H_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + H_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ N_{xy} = H_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Po podstawieniu prawych stron wzorów (2.6) do równań równowagi (2.4) otrzymuje się równania przemieszczeniowe zagadnienia:

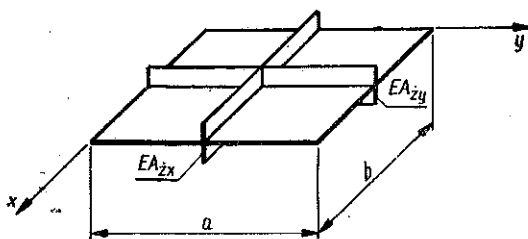
$$(2.7) \quad \begin{cases} \left( H_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v + X = 0, \\ \left( H_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v + (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u + Y = 0. \end{cases}$$

Współczynniki  $H_{ik}$  w przypadku technicznej ortotropii płyty z żebrami (rys. 6) przy przyjęciu, że szerokość żeber jest znikomo mała, można wyrazić wzorami:

$$(2.8) \quad \begin{cases} H_{11} = E \left( \frac{\delta}{1-\nu^2} + \frac{A_{zx}}{a} \right), & H_{12} = E \frac{\nu \delta}{1-\nu^2}, \\ H_{22} = E \left( \frac{\delta}{1-\nu^2} + \frac{A_{zy}}{b} \right), & H_{66} = E \frac{\delta}{2(1+\nu)}, \end{cases}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$\delta$  jest grubością blachy,  $A_{zx}$  przekrojem żebra równoległego do osi  $x$ ,  $A_{zy}$  przekrojem żebra równoległego do osi  $y$ ,  $a$  rozstawem żeber równoległych do osi  $x$ ,  $b$  rozstawem żeber równoległych do osi  $y$  oraz  $\nu$  liczbą Poissona.



Rys. 6

Dla uzyskania równań tarczy w omawianym przypadku należy do równań (2.7) podstawić za obciążenie  $X$  i  $Y$  odpowiednie reakcje obliczone dla poszczególnych stanów odkształceń. Obciążenia  $X$  i  $Y$  wyrażą się za pomocą wzorów:

$$(2.9) \quad X = R_{u\theta} + R_{uw} + R_{uv} + R_{uu}, \quad Y = R_{v\theta} + R_{vw} + R_{vv} + R_{vu}.$$

Po podstawieniu reakcji żeber dla poszczególnych stanów odkształceń do równań (2.2) i (2.9) oraz wprowadzeniu tak uzyskanych wyrażeń do rów-

nań (2.1) i (2.7) otrzymano układ równań różniczkowych naszego zagadnienia:

$$(2.10) \quad \begin{cases} L_{uu} u + L_{uv} v + L_{uw} w = 0, \\ L_{vu} u + L_{vv} v + L_{vw} w = 0, \\ L_{wu} u + L_{wv} v + L_{ww} w = p, \end{cases}$$

gdzie przez  $L_{ik}$  oznaczono odpowiednie operatory różniczkowe:

$$(2.11) \quad \begin{cases} L_{uu} = (H_{11} + EA) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{uv} = (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y_c EA \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \\ L_{uw} = EA \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( z_c + \omega_0 \frac{\partial}{\partial y} \right); \end{cases}$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} L_{vu} = (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial}{\partial x \partial y} - y_c EA \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \\ L_{vv} = -(EJ_z + EA y_c^2) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + H_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{vw} = -(ES_{\omega z} + \omega_0 y_c EA) \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} - (EJ_{zy} + z_c y_c EA) \frac{\partial^4}{\partial x^4}; \end{cases}$$

$$(2.13) \quad \begin{cases} L_{wu} = EA \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( z_c - \omega_0 \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{wv} = -(ES_{\omega z} + y_c \omega_0 EA) \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + (EJ_{zy} + y_c z_c EA) \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \\ L_{ww} = D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2D_{xy} + GJ_d) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - (EJ_{\omega} + \omega_0^2 EA) \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \\ + (D_x + EJ_y + z_c^2 EA) \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \end{cases}$$

Otrzymane operatory nie są symetryczne. Pochodzi to stąd, że cztery stany odkształceń doprowadzono do trzech równań różniczkowych.

**2.2. Przekształcenie równań różniczkowych.** W dalszych rozważaniach wygodniej będzie przedstawić przesunięcia  $u$  w postaci sumy dwóch wyrażeń. Jeżeli przyjmiemy się, że

$$(2.14) \quad u = u_1 + u_2,$$

to na jedną z tych funkcji np.  $u_2$  można narzucić dowolny warunek. Przyjęto, że funkcja  $u_2$  określona jest następującą zależnością

$$(2.15) \quad u_2 = -\frac{EA}{H_{11} + EA} \left( z_c \frac{\partial w}{\partial x} + y_c \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Po podstawieniu  $u_2$  do równania (2.14) otrzymano wzór na przemieszczenie  $u$  w zależności od nowej funkcji  $u_1$  w postaci

$$(2.16) \quad u = u_1 - \frac{EA}{H_{11} + EA} \left( z_c \frac{\partial w}{\partial x} + y_c \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Równania różniczkowe naszego zagadnienia (2.10) po podstawieniu zależności (2.16) będą miały postać:

$$(2.17) \quad \begin{cases} L_{uu}^* u_1 + L_{uv}^* v + L_{uw}^* w = 0, \\ L_{vu}^* u_1 + L_{vv}^* v + L_{vw}^* w = 0, \\ L_{wu}^* u_1 + L_{wv}^* v + L_{ww}^* w = p, \end{cases}$$

gdzie przez  $L_{ik}^*$  oznaczono następujące operatory różniczkowe:

$$(2.17.1) \quad \begin{cases} L_{uu}^* = H_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{66}^* \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{uv}^* = (H_{66}^* + H_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y_c^* H_{66}^* \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \\ L_{uw}^* = -H_{66}^* \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left( z_c^* + \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right); \end{cases}$$

$$(2.18) \quad \begin{cases} L_{vu}^* = (H_{66}^* + H_{12}) \frac{\partial}{\partial x \partial y} - y_c^* H_{11}^* \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \\ L_{vv}^* = H_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - EJ_z^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} - y_c^* (H_{66}^* + H_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}, \\ L_{vw}^* = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( EJ_{zy}^* + ES_{\omega z}^* \frac{\partial}{\partial y} \right) - (H_{66}^* + H_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left( z_c^* + \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right); \end{cases}$$

$$(2.19) \quad \begin{cases} L_{wu}^* = H_{11}^* \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( z_c^* - \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{wv}^* = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( EJ_{zy}^* - ES_{\omega z}^* \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{ww}^* = D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2D_{xy}^* \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{\omega}^* \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + D_x^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \end{cases}$$

w których z kolei oznaczono:

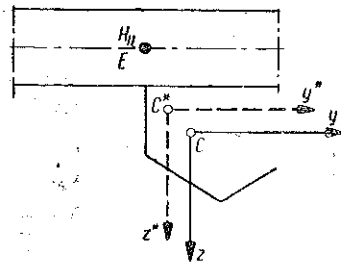
$$(2.20) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{11}^* &= H_{11} + EA, \\ D_x^* &= D_x + EJ_y + z_c^2 EA - z_c^2 \frac{(EA)^2}{H_{11}^*}, \\ D_{xy}^* &= D_{xy} + 0,5 GJ_d, \\ z_c^* &= z_c \frac{EA}{H_{11}^*}, \\ y_c^* &= y_c \frac{EA}{H_{11}^*}, \\ \omega_0^* &= \omega_0 \frac{EA}{H_{11}^*}, \\ D_\omega^* &= EJ_\omega + \omega_0^2 EA - \omega_0^2 \frac{(EA)^2}{H_{11}^*}, \\ EJ_{zy}^* &= EJ_{zy} + z_c y_c EA - z_c y_c \frac{(EA)^2}{H_{11}^*}, \\ EJ_z^* &= EJ_z + y_c^2 EA - y_c^2 \frac{(EA)^2}{H_{11}^*}, \\ ES_{\omega z}^* &= ES_{\omega z} + y_c \omega_0 EA - y_c \omega_0 \frac{(EA)^2}{H_{11}^*}. \end{aligned} \right.$$

Wielkości oznaczone gwiazdką posiadają dosyć prosty sens fizyczny. Są one charakterystykami przekroju żebra, z tzw. sprowadzonym polem powierzchni płyty, odniesionym do środka ciężkości (rys. 7).

Przez sprowadzone pole powierzchni płyty należy rozumieć wielkość  $H_{11}/E$  i tak np. w przypadku płyty izotropowej sprowadzone pole powierzchni równa się  $\delta/(1-\nu^2)$ .

Na rysunku 7 oznaczono przy  $y^*$  i  $z^*$  osie współrzędnych przechodzące przez środek ciężkości całego sprowadzonego przekroju. Za pomocą prostych przekształceń otrzymuje się znaczenie fizyczne wyrażeń (2.20). I tak

$H_{11}^*$  równa się całkowitemu polu powierzchni pomnożonej przez moduł sprężystości;  $y_c^*$  i  $z_c^*$  to współrzędne punktu  $O$  w nowym układzie osi współrzędnych  $y^*$  i  $z^*$  przechodzących przez środek całego przekroju  $C^*$ ;  $D_x^*$  to sztywność na zginanie całego przekroju;  $EJ_{zy}^*$  i  $EJ_z^*$  to momenty bezwładności całego przekroju we współrzędnych  $y^*$ ,  $z^*$ . Te uwagi dotyczą także charakterystyk wycinkowych przekroju. Oznaczono przez  $\omega^*$  pola powierzchni wycinkowych dla całego przekroju sprowadzonego liczone od



Rys. 7

głównego początkowego promienia. Nowe pola powierzchni wycinkowych różnią się od pól powierzchni sektorialnych dla samego żebra o wielkość stałą dla całego przekroju  $\Delta\omega_0$ :

$$(2.21) \quad \omega^* = \omega + \Delta\omega_0.$$

Warunek, że wypadkowa siła naprężeń normalnych równa się zeru, sprowadza się do równania

$$(2.22) \quad \int_A \omega^* dA + \omega_0^* \frac{H_{11}}{E} = 0.$$

Podstawiając (2.21) do (2.22) po uporządkowaniu otrzymano

$$\omega_0^* = \omega_0 \frac{EA}{H_{11}^*},$$

co jest identyczne z odpowiednim wyrażeniem w zależnościach (2.20).

Analogiczne rozumowania prowadzą do wniosku, że  $D_{\omega}^*/E$  to wycinkowy moment bezwładności całego przekroju,  $S_{\omega z}^*$  to wycinkowo-liniowy statyczny moment przekroju sprowadzonego względem osi  $z^*$ .

Przy obliczeniach nie jest konieczne wyznaczenie charakterystyk przekroju dla odciętego żebra; należy od razu wyznaczać charakterystyki dla przekroju ze sprowadzonym polem powierzchni płyty odniesionym do środka ciężkości płyty.

### 2.3. Przypadek obciążenia zależnego od czasu oraz zagadnienie wyboczenia.

Wzory (2.20) wskazują, że istnieje możliwość wyprowadzenia równań różniczkowych naszego zagadnienia (2.17) wychodząc bezpośrednio od analizy reakcji pręta, którego przekrój stanowi żebro wraz ze sprowadzonym polem powierzchni płyty dla poszczególnych stanów odkształceń. Przed przystąpieniem do podania toku wyprowadzenia równań różniczkowych wyznaczmy reakcję sprowadzonego żebra przy działaniu mimośrodowej siły ściskającej oraz reakcje przy drganiach konstrukcji. Umożliwi to rozszerzenie zagadnienia na zjawisko wyboczenia oraz obciążenia dynamicznego.

Niech siła ściskająca  $P$  działa na mimośrodku  $e_z$  i  $e_y$  odniesionym do układu współrzędnych  $y^*$  i  $z^*$ , którego początek pokrywa się ze środkiem ciężkości całego przekroju (rys. 8).

Tok postępowania przyjęto z prac [1] i [3]. Przyjmijmy, że pręt doznał tylko ugięcia pionowego. Naprężenia normalne od siły  $P$  przed wyboczeniem określone są przy założeniu  $H_{12}^2 = 0$  wzorem

$$(2.23) \quad \sigma = P \left( \frac{1}{A^*} + \frac{e_y y^*}{J_z^*} + \frac{e_z z^*}{J_y^*} \right), \quad |$$

gdzie przez  $A^*$  oznaczono sprowadzone pole przekroju zebra. Po odkształceniu kąt między naprężeniami normalnymi  $\sigma$  w przekrojach odległych o  $dx$  określony jest przez pochodną —  $d^2w/dx^2$ . Rzutując siły na płaszczyznę  $x = \text{const}$  otrzymuje się elementarne obciążenie określone zależnością

$$(2.24) \quad dP_{ww} = -\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA.$$

Reakcja pionowa wyrazi się sumą elementarnych przyrostów ze znakiem przeciwnym:

$$(2.25) \quad R_{ww}^{*P} = \int_A \sigma \frac{d^2 w}{dx^2} dA.$$

Uwzględniając wzory (2.25) i (2.23) otrzymano po scałkowaniu

$$R_{ww}^{*P} = P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Występujący moment reakcji można obliczyć całkując elementarne momenty elementarnych sił. W identyczny sposób wyznaczono reakcje przy poszczególnych stanach odkształceń. W ten sposób otrzymano:

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{w\Theta}^{*P} = -P \left( y_c^* - e_y - e_z \frac{J_{zy}^*}{J_y^*} \right) \Theta'', \quad R_{v\Theta}^{*P} = P \left( z_c - e_z - e_y \frac{J_{zy}^*}{J_z^*} \right) \Theta'', \\ R_{u\Theta}^{*P} = 0, \quad R_{\Theta\Theta}^{*P} = P \left( \frac{J_0}{A^*} - e_y \frac{J_{z0}}{J_z^*} + e_z \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) \Theta'', \quad R_{ww}^{*P} = Pw'', \\ R_{vv}^{*P} = 0, \quad R_{uv}^{*P} = 0, \quad R_{\Theta w}^{*P} = -P \left( y_c^* - e_y - e_z \frac{J_{zy}^*}{J_y^*} \right) w'', \\ R_{wv}^{*P} = 0, \quad R_{vv}^{*P} = Pv'', \quad R_{uv}^{*P} = 0, \\ R_{\Theta v}^{*P} = P \left( z_c^* - e_z - e_y \frac{J_{zy}^*}{J_z^*} \right) v'', \end{array} \right.$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$J_0 = \int_A \rho^2 dA$$

jest biegunowym momentem bezwładności względem punktu  $O$ ,

$$\rho^2 = (z - z_c)^2 + (y - y_c)^2$$

kwadratem odległości punktu przekroju od punktu  $O$  oraz

$$J_{z0} = \int_A y \rho^2 dA, \quad J_{y0} = \int_A z \rho^2 dA.$$

Reakcje równoważące obciążenia, występujące przy ugięciach zależnych od czasu, wyznaczono według zasady d'Alemberta. Przyjęto uproszczone założenie, że masa jest skupiona w środku ciężkości mas. Przyjmijmy układ współrzędnych przechodzących przez środek ciężkości mas. Nowe współrzędne oznaczono przez  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$ . Należy zaznaczyć, że w ogólnym przypadku środek mas nie musi pokrywać się ze środkiem ciężkości. Wyprowadzenie poszczególnych reakcji jest proste i nie wymaga specjalnego omówienia. Otrzymaliśmy w ten sposób następujące wzory:

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{llll} R_{w\theta}^{*M} = -M\bar{y}_c \ddot{\theta}, & R_{v\theta}^{*M} = M\bar{z}_c \ddot{\theta}, & R_{u\theta}^{*M} = 0, & R_{\theta\theta}^{*M} = J_0 \ddot{\theta}, \\ R_{ww}^{*M} = M\ddot{w}, & R_{vw}^{*M} = 0, & R_{uw}^{*M} = 0, & R_{\theta w}^{*M} = -M\bar{y}_c \ddot{w}, \\ R_{vv}^{*M} = 0, & R_{\theta v}^{*M} = M\ddot{v}, & R_{uv}^{*M} = 0, & R_{\theta v}^{*M} = M\bar{z}_c \ddot{v}, \\ R_{wu}^{*M} = 0, & R_{vu}^{*M} = 0, & R_{uu}^{*M} = M\ddot{u}, & R_{\theta u}^{*M} = 0, \end{array} \right.$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:  $M$  jest masą jednostkową długości pręta,  $J_0$  biegunowym momentem bezwładności mas jednostkowej długości pręta względem punktu  $O$ ,  $\bar{z}_c, \bar{y}_c$  współrzędnymi punktu  $O$  w układzie przechodzącym przez środek ciężkości mas (we wzorach tych kropkami oznaczono pochodne względem czasu).

Określenie reakcji dla schematu pręta o przekroju żebra ze skupionym sprowadzonym polem powierzchni płyty jest w zasadzie powtórzeniem rozumowania z rozdziału pierwszego. Należy tylko pamiętać, że muszą występować pewne reakcje, które narzucą płycie odkształcenie przewidziane danym stanem przemieszczeń. Nowe stany odkształceń będą odpowiadały czterem przemieszczeniom:  $\theta, w, v$  i  $u_1$ .

Trzeba zwrócić uwagę, że w tym przypadku  $\omega^*$  jest polem powierzchni liczonym od głównego początkowego promienia; przy stanach odkształceń  $w$  i  $v$  oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości sprowadzonego przekroju;  $u_1$  jest przemieszczeniem środka ciężkości sprowadzonego przekroju. Przy dowolnym stanie odkształcenia przemieszczenie  $u$  w płycie określone jest zależnością (2.16), która przy wykorzystaniu oznaczeń (2.20) będzie miała postać

$$(2.28) \quad u = u_1 - \left( z_c^* \frac{\partial w}{\partial x} + y_c^* \frac{\partial v}{\partial x} + \omega_0^* \frac{\partial \theta}{\partial x} \right).$$

Z przemieszczeniem  $u$  związane są siły wewnętrzne w płycie określone zależnościami (2.6). Dodatkowe reakcje muszą zrównoważyć przyrosty sił wewnętrznych. Reakcje te rozłożone wzdłuż żebra określone są równaniami (rys. 9)

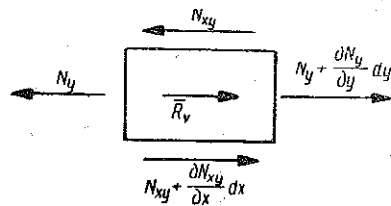
$$(2.29) \quad \bar{R}_v = -\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}, \quad \bar{R}_u = -\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y},$$



gdzie wprowadzono oznaczenia:  $\bar{R}_v, \bar{R}_u$  są reakcjami utrzymującymi płytę w żądanym stanie odkształceń, skierowanymi odpowiednio w kierunku  $y$  i  $x$ ,  $\bar{N}_x$  jest siłą normalną o kierunku  $x$  po odrzuceniu siły związanej z przemieszczeniem  $u$ , które należy do sił wewnętrznych pręta. Końcowe wzory na dodatkowe reakcje po podstawieniu do (2.29) prawych stron (2.6) będą miały postać:

$$(2.30) \quad \begin{cases} \bar{R}_v = H_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - H_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ \bar{R}_u = - (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - H_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Podstawiając do tych wzorów dla poszczególnych stanów odkształceń odpowiednie  $v$  i  $u$ , obliczone ze wzorów (2.28), i do tak otrzymanych reakcji dodając reakcje żebra, obliczone na podstawie wzorów z pierwszego rozdziału z uwzględnieniem całego przekroju żebra łącznie ze sprowadzoną po-



Rys. 9

wierzchnią płyty otrzymano:

dla stanu  $\Theta \neq 0, w = v = u_1 = 0$

$$(2.31) \quad \begin{cases} R_{\Theta\Theta}^* = D_{\omega y}^* \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} - 2 D_{xy}^* \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \\ R_{w\Theta}^* = ES_{\omega y}^* \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4}, \\ R_{v\Theta}^* = ES_{\omega z}^* \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^4} + (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x^2 \partial y}, \\ R_{u\Theta}^* = \omega_0^* H_{66} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial x \partial y^2}; \end{cases}$$

dla stanu  $w \neq 0, \Theta = v = u_1 = 0$

$$(2.32) \quad \begin{cases} R_{\Theta w}^* = ES_{\omega y}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \\ R_{ww}^* = D_x^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y^* \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \\ R_{vw}^* = EJ_{zy}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + z_c^2 (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \\ R_{uw}^* = z_c^* H_{66} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}; \end{cases}$$

dla stanu  $v \neq 0$ ,  $\theta = w = u_1 = 0$

$$(2.33) \quad \begin{cases} R_{\theta v}^* = ES_{\omega z}^* \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \\ R_{wv}^* = EJ_{zy}^* \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \\ R_{vv}^* = -H_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - H_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EJ_z^* \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + y_c^* (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \\ R_{uv}^* = -(H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + H_{66} y_c^* \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}; \end{cases}$$

dla stanu  $u_1 \neq 0$ ,  $\theta = w = v = 0$

$$(2.34) \quad \begin{cases} R_{\theta u}^* = \omega_0^* H_{11}^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}, \\ R_{w u}^* = z_c^* H_{11}^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}, \\ R_{\theta u}^* = y_c^* H_{11}^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - (H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}, \\ R_{uu}^* = -H_{11}^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - H_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Z warunku, że sumy reakcji  $R_{ui}$  i  $R_{vi}$  oraz suma reakcji pionowych wraz z momentami sprowadzonymi do pary sił według równania (2.2) równają się zeru, otrzymano trzy równania różniczkowe zagadnienia typu (2.14), gdzie poszczególne operatory różniczkowe otrzymano w postaci:

$$(2.35) \quad \begin{cases} L_{uu}^* = H_{11}^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - M \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ L_{uv}^* = (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y_c^* H_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}, \\ L_{uw}^* = -H_{66} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left( z_c^* + \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right); \end{cases}$$

$$(2.36) \quad \begin{cases} L_{vu}^* = (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial}{\partial x \partial y} - y_c^* H_{11}^* \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \\ L_{vv}^* = H_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + H_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - EJ_z^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} - y_c^* (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{vw}^* = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( EJ_{zy}^* + ES_{\omega z}^* \frac{\partial}{\partial y} \right) - (H_{66} + H_{12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left( z_c^* + \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right) - P \left( z_c^* - e_z - e_y \frac{J_{zy}^*}{J_z^*} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - M z_c^* \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2}; \end{cases}$$

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{uu}^* = H_{11}^* \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( z_c^* - \omega_0^* \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{uv}^* = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( EJ_{zy}^* - ES_{\omega z}^* \frac{\partial}{\partial y} \right) - \\ \quad - P \left( z_c^* - e_z - e_y \frac{J_{zy}^*}{J_z^*} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - M \bar{z}_c \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2}, \\ L_{vw}^* = D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 D_{xy}^* \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{\omega}^* \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ \quad + P_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - P \left( \frac{J_0}{A^*} + e_v \frac{J_{z0}}{J_z^*} + e_z \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \bar{J}_0 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2}. \end{array} \right.$$

Otrzymane operatory poza wyrazami ujmującymi zagadnienie wybożenia i drgań nie różnią się od poprzednio wyprowadzonych operatorów (2.17), (2.18) i (2.19). Drugi tok wyprowadzenia podano głównie dlatego, że daje on dobry wgląd w mechanizm pracy omawianej konstrukcji.

### 3. Rozwiązanie układu równań różniczkowych

3.1. Rozwiązanie za pomocą funkcji przemieszczeń. Ogólne rozwiązanie można przedstawić za pomocą funkcji przemieszczeń. Funkcja przemieszczeń ([4], s. 27) określona jest w omawianym przypadku następującym równaniem różniczkowym:

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} L_{uu}^* & L_{uv}^* & L_{uw}^* \\ L_{vu}^* & L_{vv}^* & L_{vw}^* \\ L_{wu}^* & L_{wv}^* & L_{ww}^* \end{vmatrix} F = p,$$

gdzie przez  $F$  oznaczono funkcję przemieszczeń.

Poszczególne przemieszczenia wyrażą się przez funkcję przemieszczeń za pomocą wzorów:

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_1 = \begin{vmatrix} L_{uv}^* & L_{uw}^* \\ L_{vv}^* & L_{vw}^* \end{vmatrix} F, \\ v = - \begin{vmatrix} L_{uu}^* & L_{uw}^* \\ L_{vu}^* & L_{vw}^* \end{vmatrix} F, \\ w = \begin{vmatrix} L_{uu}^* & L_{uv}^* \\ L_{vu}^* & L_{vv}^* \end{vmatrix} F. \end{cases}$$

W przypadku pasma poddanego obciążeniu zależnemu tylko od zmiennej niezależnej  $x$  wszystkie funkcje  $u_1, v, w$  i  $F$  będą funkcjami jednej

zmiennej. Wykonując działanie określone przez wyznacznik operatorowy (3.1) otrzymano równanie różniczkowe dla pasma w postaci

$$(3.3) \quad H_{11}^* (EJ_{zy}^{*2} - D_x^* EJ_z^*) F^{(10)} + H_{11}^* D_x^* H_{66} F^{(8)} = p.$$

Poszczególne przemieszczenia wyrażą się na podstawie zależności (3.2) przez funkcje przemieszczeń w następujący sposób:

$$(3.4) \quad \begin{cases} w_1 = 0, \\ v = H_{11}^* EJ_{zy}^* F^{(6)}, \\ w = H_{11}^* (H_{66} F^{(4)} - EJ_z^* F^{(6)}). \end{cases}$$

W przypadku gdy brzegi pasma są swobodnie podparte i obciążenie dane w postaci szeregu Fouriera

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin a_n x,$$

funkcję przemieszczeń można przyjąć w postaci

$$(3.5) \quad F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin a_n x.$$

Podstawiając (3.5) do równania różniczkowego (3.3) otrzymano wyrażenie na współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji przemieszczeń. Równania (3.4) dają po uwzględnieniu uzyskanej funkcji przemieszczeń następujące wzory na przemieszczenia  $v$  i  $w$

$$(3.6) \quad \begin{cases} v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \frac{EJ_{zy}^* \alpha_n^2}{D_x^* (H_{66} + EJ_z^* \alpha_n^2) - EJ_{zy}^{*2} \alpha_n^2} \sin a_n x, \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \frac{H_{66} + EJ_z^* \alpha_n^2}{D_x^* (H_{66} + EJ_z^* \alpha_n^2) - EJ_{zy}^{*2} \alpha_n^2} \sin a_n x. \end{cases}$$

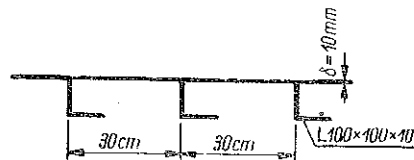
W przypadku, gdy grubość płyty będzie dążyć do zera, równania (3.6) przejdą w zależności:

$$(3.7) \quad \begin{cases} v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \frac{1}{E} \frac{J_{zy}}{J_y J_z - J_{zy}^2} \sin a_n x, \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^4} \frac{1}{E} \frac{J_z}{J_y J_z - J_{zy}^2} \sin a_n x, \end{cases}$$

które są równaniami dla belki, w przypadku gdy obciążenie nie pokrywa się z głównymi osiami bezwładności.

Przykład 1 (rys. 10). Dla pasma o przekroju przedstawionym na rys. 10 otrzymano następujące zmniejszenie sztywności (zwiększenie ugięcia pionowego) dla obciążenia typu  $p = P_n \sin a_n x$ : gdy  $n = 1$  o 0,30%, gdy  $n = 2$  o 1,20%, oraz gdy  $n = 3$  o 2,60%.

Jednocześnie przesunięcie poziome przy  $n = 1$  wynosi  $v = 0,0076w$ , przy  $n = 2$  wynosi  $v = 0,0307w$ . Z przykładu widać, że zwiększenie ugięcia ma istotne znaczenie dla konstrukcji o bardzo dużych żebrawach i małej rozpiętości.



Rys. 10

3.2. Ogólne rozwiązanie dla płyty z żebrawami symetrycznymi dla dowolnych warunków brzegowych. Rozwiązanie równania (3.1) jest w ogólnym przypadku bardzo trudne. Typowe rozwiązanie za pomocą pojedynczych szeregów prowadzi do równania różniczkowego o współczynnikach stałych i wysokim rzędzie trudnym do rozwinięcia. Jedynie realne jest rozwiązanie za pomocą podwójnych szeregów. Ogólny tok rozwiązania w przypadku szeregu funkcji nie spełniających warunków brzegowych zagadnienia przy zastosowaniu metody energetycznej oraz za pomocą reguły nieoznaczonego czynnika Lagrange'a podali Budiansky i Hu, [9]. W. Nowacki w pracy [5] wykazał możliwość zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych do bezpośredniego rozwiązania płyty zamocowanej. Z. Kączkowski w pracach [6] i [7] podał ogólne rozwiązanie ortotropowej płyty prostokątnej przy dowolnych warunkach brzegowych. Prace Z. Kączkowskiego wykazały, że zastosowanie podwójnych szeregów daje w pewnych przypadkach bardzo dobre rezultaty. Ogólne rozwiązanie równań różniczkowych zagadnienia (2.17) za pomocą podwójnych szeregów przy dowolnych warunkach brzegowych uprości się znacznie w przypadku, gdy żebra są symetrycznie względem osi pionowej. Warunek ten spełnia bardzo ważny praktycznie przypadek płyty z żebrawami teowymi. W dalszym ciągu ograniczono się do analizy przypadku z żebrawami symetrycznymi.

Dla uproszczenia rozwiązań przyjęto, że proste przechodzące przez środek płyty  $x = a/2$  i  $y = b/2$  są osiami symetrii konstrukcji oraz obciążenia. W tym przypadku powierzchnia ugięcia  $w$  będzie symetryczna względem obu osi; powierzchnia przemieszczenia  $u$  symetryczna względem osi  $y = b/2$  a antysymetryczna względem osi  $x = a/2$ ; powierzchnia przemieszczenia  $v$  symetryczna względem osi  $x = a/2$  i antysymetryczna względem osi  $y = b/2$ .

Niech będą dowolne warunki brzegowe dane w postaci następujących szeregów Fouriera:

(3.8)

$$\begin{aligned}
 w(x, 0) = w(x, b) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \sin a_n x, \\
 w(0, y) = w(a, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} B_m \sin \beta_m y, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} C_m \sin \beta_m y, \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} D_n \sin a_n x, \\
 u(x, 0) = u(x, b) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_n \cos a_n x, \\
 v(0, y) = v(a, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} P_m \cos \beta_m y, \\
 \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} N_m \sin \beta_m y, \\
 \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, b) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} R_n \sin a_n x, \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(a, y) &= \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \cos \beta_m y.
 \end{aligned}$$

Z. K ą c z k o w s k i w pracach [4] i [5] przy wyprowadzeniu zależności dla ortotropowych płyt prostokątnych wychodził z przesłanek fizycznych. W omawianym przypadku uogólnienie rozumowania Z. K ą c z k o w s k i e g o jest bardzo trudne. Z tego względu ogólne równanie na współczynniki Fouriera dla poszukiwanych funkcji przemieszczeń wprowadzono za pomocą transformacji Fouriera.

Rozwiązanie dla płyty ortotropowej o dowolnych warunkach brzegowych uzyskane za pomocą transformacji Fouriera podał autor niniejszej rozprawy w pracy [8].

W przypadku płyty z dużą ilością żeber można zastosować transformację albo do równania dla funkcji przemieszczeń (3.1), lub bezpośrednio do układu równań różniczkowych zagadnienia (2.17). Transformacja równania dla funkcji przemieszczeń sprowadziłaby zagadnienie do jednego równania algebraicznego, co jest niewątpliwie bardzo korzystne. Z drugiej jednak strony występujące po transformacji wartości funkcji  $F$  i jej pochodnych na brzegach mają sens fizyczny dopiero w przypadku zastosowania wzorów (3.2), wyrażających poszczególne przemieszczenia w zależności od funkcji przemieszczeń.

Zastosowano transformację Fouriera do układu równań różniczkowych naszego zagadnienia. Oznaczono następującymi symbolami transformacje potrzebne do rozwiązania równania:

$$(3.9) \quad \begin{cases} S \{f(x,y)\} = \int_D \int f(x,y) \sin a_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy, \\ U \{f(x,y)\} = \int_D \int f(x,y) \sin a_n x \cos \beta_m y \, dx \, dy, \\ T \{f(x,y)\} = \int_D \int f(x,y) \cos a_n x \sin \beta_m y \, dx \, dy, \end{cases}$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$  oraz  $m = 1, 3, 5, \dots$ .

Po zastosowaniu do pierwszego równania układu równań różniczkowych (2.17) transformację  $T$ , do drugiego transformację  $U$ , a do trzeciego  $S$  równania różniczkowe przejdą w następujący układ trzech równań algebraicznych o trzech niewiadomych  $T\{u_1\}$ ,  $U\{v\}$  i  $S\{w\}$  (pierwsze dwa równania pomnożono przez  $-1$ ):

$$(3.10) \quad \begin{cases} a_{11} T\{u_1\} + a_{12} U\{v\} + a_{13} S\{w\} = a_{10}, \\ a_{21} T\{u_1\} + a_{22} U\{v\} + a_{23} S\{w\} = a_{20}, \\ a_{31} T\{u_1\} + a_{32} U\{v\} + a_{33} S\{w\} = a_{30}, \end{cases}$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} a_{11} = H_{11}^* a_n^2 + H_{66} \beta_m^2 - M\omega^2, \\ a_{12} = (H_{66} + H_{12}) a_n \beta_m, \\ a_{13} = -z_c^* H_{66} a_n \beta_m^2, \\ a_{21} = (H_{66} + H_{12}) a_n \beta_m, \\ a_{22} = H_{22} \beta_m^2 + a_n^2 H_{66} + a_n^4 E J_z^* - M\omega^2 - P a_n^2, \\ a_{23} = -\{[z_c^*(H_{66} + H_{12}) - ES_{\omega z}^* a_n^2 + P(z_c^* - e_z)] a_n^3 \beta_m + \beta_m \bar{z}_c \omega^2 M\}, \\ a_{31} = z_c^* H_{11}^* a_n^3, \\ a_{32} = \beta_m a_n^4 ES_{\omega z}^* - P(z_c^* - e_z) a_n^2 \beta_m - \bar{z}_c \omega^2 M \beta_m, \\ a_{33} = \Delta_{nm}; \end{cases}$$

$$(3.12) \quad \begin{cases} a_{10} = -H_{11}^* b N_m + H_{66} \beta_m a M_n + (H_{66} + H_{12}) \beta_m b P_m + \\ \quad \quad \quad + z_c^* H_{66} [\beta_m^2 b B_m - \beta_m \cdot 4 w(0,0)], \\ a_{20} = (H_{66} + H_{12}) a_n a M_n - a H_{22} R_n + a_n (H_{66} - P) b P_m + \\ \quad \quad \quad + E J_z^* (a_n^3 b P_m - a_n b E_m) - ES_{\omega z}^* [\beta_m a_n^3 b C_m + 4 a_n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,0)] - \\ \quad \quad \quad - [z_c^*(H_{66} + H_{12}) - ES_{\omega z}^* a_n^2 + P(z_c^* - e_z)] [a_n \beta_m b B_m + \\ \quad \quad \quad + a_n^2 a A_n - a_n \cdot 4 w(0,0)] - \bar{z}_c \omega^2 M a A_n, \end{cases}$$

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{30} = & -P(z_c^* - e_z) a_n \beta_m b P_m - z_c^* H_{11}^* a_n b N_m + E S_{oz}^* (\beta_m a_n^3 b P_m - \\ & - \beta_m a_n b E_m) - a_n b (D_x^* + \beta_m^2 D_\omega^*) C_m - \beta_m a D_y D_n + \Delta_x b B_m + \\ & + \Delta_y a A_n + a_n \beta_m D_\omega \cdot 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,0) - a_n \beta_m \left[ 2 D_{xy}^* + a_n^2 D_\omega^* - \right. \\ & \left. - P \left( \frac{J_0}{A^*} + e_2 \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) \right] \cdot 4 w(0,0) + S [p(x,y)], \end{aligned} \right.$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & a_n^4 D_x^* + 2 D_{xy}^* a_n^2 \beta_m^2 + D_\omega^* a_n^4 \beta_m^2 + D_y \beta_m^4 - a_n^2 P - \beta_m^2 P_y - \\ & - P \left( \frac{J_0}{A^*} + e_2 \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) a_n^2 \beta_m^2 - M \omega^2 - \bar{J}_0 \omega^2 \beta_m^2, \\ \Delta_x = & a_n^3 D_x^* + a_n \beta_m^2 (2 D_{xy}^* + a_n^2 D_\omega^*) - P a_n - P \left( \frac{J_0}{A^*} + e_2 \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) a_n \beta_m^2, \\ \Delta_y = & \beta_m^3 D_y + a_n^2 \beta_m (2 D_{xy}^* + a_n^2 D_\omega^*) - P_y \beta_m - P \left( \frac{J_0}{A^*} + e_2 \frac{J_{y0}}{J_y^*} \right) \beta_m a_n^2 - \\ & - \bar{J}_0 \omega^2 \beta_m. \end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań przy danych warunkach brzegowych (3.8) oraz danym obciążeniu poszukiwane przemieszczenia  $u_1, v, w$  można wyrazić za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych następującymi zależnościami:

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 = & \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T \{u_1\} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y, \\ v = & \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U \{v\} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y, \\ w = & \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S \{w\} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y, \end{aligned} \right.$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots, m = 1, 3, 5, \dots$

#### 4. Rozwiązanie szczegółowe dla płyt z żebrami symetrycznymi

4.1. Płyta z żebrami symetrycznymi. Najprostszy przypadek jest wtedy, gdy wszystkie funkcje określone warunkami brzegowymi (3.8) są równe tożsamościowo zeru. Takie warunki odpowiadają wolnopodpartej płycie z żebrami przy nieskończone sztywnych przeponach na brzegach. Przypadek ten ma bardzo duże znaczenie praktyczne; odpowiada on w przybliżeniu warunkom podparcia przedstawionym na rys. 1.

Gdy żebra posiadają dwie osie symetrii i płyta znajduje się w poziomej osi symetrii, równania (3.10) i (3.11) uproszczą się do postaci:



$$(4.1) \quad \begin{cases} (H_{11}^* \alpha_n^2 + H_{66} \beta_m^2 - M\omega^2) T\{u_1\} + (H_{66} + H_{12}) \alpha_n \beta_m U\{v\} = 0, \\ (H_{66} + H_{12}) \alpha_n \beta_m T\{u_1\} + (H_{22} \beta_m^2 + \alpha_n^2 H_{66} + \alpha_n^4 E J_z^* - M\omega^2) U\{v\} = 0, \end{cases}$$

$$(4.2) \quad [\alpha_n^4 D_x^* + (2D_{xy}^* + D_\omega^* \alpha_n^2) \alpha_n^2 \beta_m^2 + D_y \beta_m^4 - \alpha_n^2 P_x - \beta_m^2 P_y - M\omega^2 - \bar{J}_0 \omega^2 \beta_m^2] S\{w\} = S\{p(x, y)\}.$$

W omawianym przypadku równania rozdzieliły się na równanie typu tarczy (4.1) oraz płyty (4.2). Obliczenia wykazały, że wpływ wyrazów  $\alpha_n^4 E J_z^*$  oraz  $D_\omega \alpha_n^4 \beta_m^2$  w praktycznie występujących zagadnieniach nie jest znaczny. Wpływ tych wyrazów rośnie dla wyższych składowych.

Przyjmując

$$\bar{H}_{22} = H_{22} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 E J_z, \quad \bar{D}_{xy} = D_{xy}^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 D_\omega,$$

można równanie płyty (4.1) uprościć do równania tarczy ortotropowej, a równanie (4.2) do równania płyty ortotropowej. Błąd, jaki się tutaj popelnia, sprowadza się do pewnej różnicy wyższych składowych przemieszczenia.

*Przykład 2.* Dana płyta o bokach  $a = b = 200$  cm oraz charakterystykach przekroju  $D_x^* = 30,285$  (cm<sup>3</sup>)  $E$ ,  $D_y = 0,09116 E$ ,  $D_\omega^* = 953,78 E$  oraz  $D_{xy}^* = 0,09543 E$  poddana jest działaniu obciążenia równomiernego rozłożonego; wyznaczyć trzeba ugięcie oraz moment  $M_x$  w środku płyty.

Obliczając z równania (4.2)  $S\{w\}$  i podstawiając do wzoru na transformację odwrotną (3.13) powierzchnię ugięcia wyrazimy następującym podwójnym szeregiem trygonometrycznym:

$$w = \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6 D_x^*} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn^5} \left[ 1 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \frac{D_\omega^*}{D_x^*} + 2 \left(\frac{ma}{nb}\right)^2 \frac{D_{xy}^*}{D_x^*} + \left(\frac{ma}{nb}\right)^4 \frac{D_y^*}{D_x^*} \right]^{-1} \times \\ \times \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$  oraz  $m = 1, 3, 5, \dots$ .

Podstawiając wartości liczbowe i sumując wyrazy dla  $n = 1, 3, 5$  oraz  $m = 1, 3, 5$  otrzymano:

$$\begin{aligned} w &= \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6 D_x^*} 0,7056, & \text{jeśli pominąć } D_\omega^*, \\ w &= \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6 D_x^*} 0,6678, & \text{jeśli uwzględnić } D_\omega^*, \\ M_x &= \frac{16 q_0 a^2}{\pi^4} 0,6947, & \text{jeśli pominąć } D_\omega^*, \\ M_y &= \frac{16 q_0 a^2}{\pi^4} 0,6526, & \text{jeśli uwzględnić } D_\omega^*. \end{aligned}$$

W obliczonym przykładzie sztywność na skręcanie skrepowane zmniejszyła ugięcie o 5%, a moment zginający o 6,5%.

4.2. Płyta z żebrami jednostronnymi swobodnie podparta, obciążona statycznie. Dla płyty z żebrami jednostronnymi symetrycznymi, wolnopodpartej, z przeponami na końcach równania (3.10) i (3.11) w przypadku obciążenia statycznego pionowego redukują się do postaci:

$$(4.4) \quad \begin{cases} a_{11}T\{u_1\} + a_{12}U\{v\} + a_{13}S\{w\} = 0, \\ a_{21}T\{u_1\} + a_{22}U\{v\} + a_{23}S\{w\} = 0, \\ a_{31}T\{u_1\} + a_{32}U\{v\} + a_{33}S\{w\} = S\{p(x, y)\}, \end{cases}$$

gdzie we wzorach na współczynniki  $a_{ik}$  należy przyjąć  $\omega = 0$  i  $P = P_y = 0$ .

Dla danego obciążenia należy zastosować transformację  $S$  do obciążenia zewnętrznego, następnie rozwiązać układ równań (4.4) dla kolejnych par liczb  $n$  i  $m$ . Z transformacji odwrotnej (3.13) otrzymuje się poszukiwane przemieszczenia w postaci podwójnych szeregów trygonometrycznych.

Na podstawie obliczonych przemieszczeń siły wewnętrzne dla żebra wyrażą się następującymi wzorami:

$$(4.5) \quad M_x^* = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad N_x^* = H_{11}^* \frac{du_1}{dx}, \quad B^* = -D_o^* \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.$$

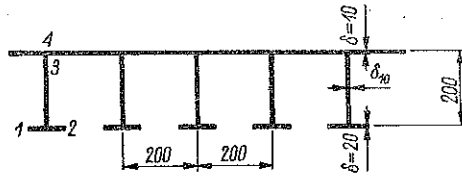
Na podstawie wzorów (4.5) można obliczyć naprężenia normalne w żebrze. Naprężenia normalne w płycie można obliczyć na podstawie sił wewnętrznych w płycie określonych następującymi zależnościami:

$$(4.6) \quad \begin{cases} M_y = -D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_y D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ N_x = H_{11} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_c^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + H_{13} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ N_y = H_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + H_{12} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_c^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_x = -D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu_x D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{cases}$$

gdzie charakterystyki z gwiazdką odnoszą się do przekroju sprowadzonego, a bez gwiazdki do samej płyty; w wzorach tych  $\nu_x, \nu_y$  oznaczają liczby Poissona.

Uwzględnienie wyrazów  $\nu_y D_x \partial^2 w / \partial x^2$  oraz  $M_x$  we wzorach (4.6) jest niepotrzebne w przypadkach, gdy płyta jest cienka w porównaniu z wysokością żeber. Naprężenie  $\sigma_x$  w tym przypadku sprawdza się na osi płyty i moment  $M_x$  nie ma znaczenia.

Należy zwrócić uwagę, że w ogólnym przypadku naprężenia w płycie i w żebrze w miejscu styku zębra z płytą będą różne. Różnica naprężeń wynika z zachowania warunku ciągłości przemieszczenia przy różnej pracy płyty i żeber w konstrukcji. Dla płyty i żeber z jednakowego materiału oraz przy  $\nu = H_{12} = 0$  nie ma skoku naprężeń przy przejściu z żebra do płyty.



Rys. 11

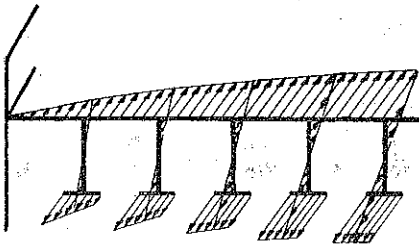
Przykład 3. Na płytę o wymiarach  $a=b=200$  o przekroju przedstawionym na rys. 11 działa obciążenie  $q = q_0 \sin(\pi/a)x \sin(\pi/b)y$  wyznaczyć rozkład naprężeń wzdłuż prostej  $x = a/2$ .

Po obliczeniu charakterystyk przekroju, podstawieniu do równania (4.4), rozwiązaniu i podstawieniu do wzorów na transformację odwrotną otrzymano:

$$w = q_0 \frac{10^6}{E} 0,0652 \sin a_n x \sin \beta_m y,$$

$$v = - q_0 \frac{10^6}{E} 0,00469 \sin a_n x \cos \beta_m y,$$

$$u_1 = - q_0 \frac{10^6}{E} 1,333 \cdot 10^{-4} \cos a_n x \sin \beta_m y.$$



Rys. 12

Po obliczeniu sił wewnętrznych ze wzorów (4.5) oraz (4.6) otrzymano naprężenia normalne. W tabelcy 1 zestawiono naprężenia normalne w poszczególnych punktach charakterystycznych pokazanych na rys. 11. (Naprężenia  $\sigma_3$  odnoszą się do żebra, a  $\sigma_4$  do płyty).

Wykres naprężeń przedstawiono na rys. 12.

Tablica 1

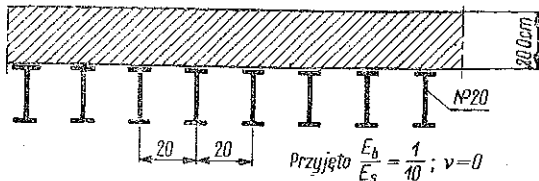
Zebro w odległości $y$ od podparcia	0,00	20,0	40,0	60,0	80,0	100,0	[cm]
$\sigma_1$	31,01	83,39	123,81	154,10	169,31	167,95	$q_0$
$\sigma_2$	- 31,01	22,41	73,63	117,64	150,15	167,95	$q_0$
$\sigma_3$	0,00	- 47,43	- 90,21	- 124,16	- 145,95	- 153,47	$q_0$
$\sigma_4$	0,00	- 44,53	- 84,66	- 116,52	- 136,98	- 144,03	$q_0$

4.5. Drgania własne płyty wolnopodpartej. Obliczenie częstości drgań własnych płyty wolnopodpartej z przeponami na brzegach sprowadza się do przyrównania do zera wyznacznika układu równań (3.10). Równanie na częstość drgań własnych zapisane w postaci wyznacznika ma postać:

$$(4.7) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczenie wyznacznika (4.7) sprowadza się do rozwiązania równania trzeciego stopnia ze względu na  $\omega^2$ . Dla każdej pary liczb  $n, m$  otrzymuje się trzy częstości drgań własnych.

Schemat podparcia płyty odpowiada podparciu płyty lekkiej jezdni mostowej na dźwigarach głównych i poprzecznicach w przypadku, gdy wzdłuż dźwigarów oraz poprzecznic tworzą się osie antysymetrii.



Rys. 13

Obliczenie częstości drgań własnych za pomocą wyznacznika (4.7) uwzględnia wpływ sił normalnych. Siły normalne ściskające wywołują zmniejszenie częstości drgań własnych. Wpływ sił

normalnych jest bardzo duży w przypadku, gdy wartość ich jest bliska siłom krytycznym.

Przykład 4. Wyznaczyć podstawową częstość drgań własnych dla płyty o bokach  $a = b = 200$  m o przekroju przedstawionym na rys. 13. Po obliczeniu charakterystyk przekroju i podstawieniu do wyznacznika (4.7) po rozwiązaniu równania trzeciego stopnia względem  $\omega^2$  otrzymano

$$\omega = 1,53 \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{E_b}{M}} \quad (E_b \text{ i } M \text{ w kg i cm}).$$

Obliczając konstrukcję jak płytę ortotropową otrzymano

$$\omega = 1,47 \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{E_b}{M}}.$$

Wzrost częstości o 4% przy pierwszym obliczeniu związany jest ze zwiększeniem sztywności wskutek pracy płyty na odkształcenie postaciowe.

4.4. Drgania własne płyty obustronnie zamocowanej. Obliczenie częstości drgań własnych przy innych warunkach brzegowych nie napotyka na specjalne trudności. Należy rozszerzyć metody stosowane przez W. Nowacki

kiego, [5] i Z. Kąc z k o w s k i e g o, [6] i [7], na omawiane zagadnienie. Dla przykładu podano tok obliczenia częstości drgań własnych płyty na brzegach  $x=0$  i  $x=a$  zamocowanej. Dla uproszczenia zapisu przyjęto, że płyta posiada jednostronne zębra prostokątne. Warunki brzegowe określone są następującymi zależnościami:

dla  $x=0$  oraz  $x=a$

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad u=0, \quad v=0, \\ \text{dla } y=0 \text{ oraz } y=b \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad u=0. \end{array} \right.$$

W ogólnym przypadku proste  $x=a/2$  i  $y=b/2$  mogą być osiami symetrii lub antysymetrii amplitud powierzchni odkształcenia. Każdy z poszczególnych czterech możliwych przypadków należy rozpatrywać oddzielnie. W niniejszej pracy omówiono tylko przypadek podwójnej symetrii powierzchni odkształcenia. Pozostałe przypadki merytorycznie nie różnią się od omawianego.

Wykorzystując warunki symetrii można rozpatrywać warunki brzegowe tylko dla brzegów  $x=0$  i  $y=0$ . Z zależności (4.8) warunków brzegowych  $\partial w(0, y)/\partial x=0$  oraz  $u(0, y)=0$  nie można bezpośrednio podstawić do ogólnych warunków brzegowych (3.8). Należy przyjąć, że na brzegach  $x=0$  i  $x=a$  występują nie znane wartości brzegowe spełniające warunki:

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} N_m \sin \beta_m y, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} C_m \sin \beta_m y. \end{array} \right.$$

Równania zagadnienia (3.10) przy warunkach brzegowych określonych zależnościami (4.9) zredukują się przy założeniach przyjętych w omawianym zagadnieniu do postaci:

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} T\{u_1\} + a_{12} U\{v\} + a_{13} S\{w\} = -H_{11}^* b N_m, \\ a_{21} T\{u_1\} + a_{22} U\{v\} + a_{23} S\{w\} = 0, \\ a_{31} T\{u_1\} + a_{32} U\{v\} + a_{33} S\{w\} = -z_c^* H_{11}^* a_n b N_m - a_n b D_x^* C_m, \end{array} \right.$$

gdzie we współczynnikach  $a_{ik}$  określonych zależnościami (3.11) należy przyjąć  $ES_{wz}^* = EJ_{zy}^* = EJ_z^* = 0$ .

Rozwiązując dla każdej pary liczb  $m$  i  $n$  układ równań (4.10) i stosując transformację odwrotną otrzymuje się:

$$(4.11) \quad \begin{cases} w = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{nm} N_m + \delta_{nm} C_m) \sin a_n x \sin \beta_m y, \\ u_1 = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\varrho_{nm} N_m + \psi_{nm} C_m) \cos a_n x \sin \beta_m y, \end{cases}$$

gdzie  $n = 1, 3, 5 \dots$  oraz  $m = 1, 3, 5 \dots$ . We wzorach tych  $\gamma_{nm}$ ,  $\delta_{nm}$ ,  $\varrho_{nm}$ ,  $\psi_{nm}$  są współczynnikami, które otrzymuje się z rozwiązania układu równań (4.10). Współczynniki te zawierają nie znaną częstość kołową drgań własnych  $\omega^2$ .

Dla spełnienia warunków brzegowych (4.8) muszą być spełnione następujące zależności otrzymane na podstawie (4.11):

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \left[ \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (a_n \gamma_{nm} N_m + a_n \delta_{nm} C_m) \right] \sin \beta_m y = 0, \\ u_1(0, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \left[ \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} (\varrho_{nm} N_m + \psi_{nm} C_m) \right] \sin \beta_m y = 0. \end{cases}$$

Pojedyncze szeregi Fouriera (4.12) o współczynnikach danych w postaci szeregów liczbowych będą tylko tożsamościowo równe zeru, jeżeli każdy współczynnik rozwinięcia będzie równał się zeru. Warunek powyższy sprowadza się do nieskończonego układu równań:

$$(4.13) \quad G_m^\gamma N_m + G_m^\delta C_m = 0, \quad G_m^\varrho N_m + G_m^\psi C_m = 0,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} G_m^\gamma &= \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} a_n \gamma_{nm}, & G_m^\delta &= \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} a_n \delta_{nm}, \\ G_m^\varrho &= \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \varrho_{nm}, & G_m^\psi &= \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \psi_{nm}. \end{aligned}$$

Eliminując w drugim równaniu (4.13)  $C_m$  za pomocą równania pierwszego oraz mnożąc uzyskane równanie przez  $G_m^\delta$  otrzymano warunek na obliczenie częstości drgań własnych:

$$(4.14) \quad \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \varrho_{nm} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} a_n \delta_{nm} - \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \psi_{nm} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} a_n \gamma_{nm} = 0.$$

Dla danego  $m$  ustalającego ilość półfal w kierunku  $y$  otrzymuje się nieskończenie wiele częstości drgań własnych w zależności od postaci drgań w kierunku  $x$ .

Równanie (4.14) w przypadku płyty ortotropowej upraszcza się do postaci

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{c_n^2}{\Delta_{nm}} = 0,$$

co pokrywa się z rozwiązaniem W. Nowackiego ([5] wzór 14).

**4.5. Wyboczenie płyty.** Zagadnienie wyboczenia płyty z żebrami nie wymaga szerszego omówienia. Podstawiając do wyznacznika (4.7) zamiast  $P$  iloczyn  $sP$ , a zamiast  $P_y$  iloczyn  $\lambda sP$ , gdzie  $\lambda$  równa się stosunkowi siły ściskającej  $P_y$  do  $P$  oraz przyjmując  $\omega = 0$  otrzymuje się równanie na współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie  $S$ . Równanie na współczynnik bezpieczeństwa jest kwadratowe, oznacza to, że dla danej liczby półfali  $n, m$  istnieją dwie postacie wyboczenia. W przypadku jednostronnych żeber prostokątnych oraz płyty izotropowej rozwiązanie (4.7) pokrywa się z warunkami na wyboczenie, uzyskanymi dla tego przypadku przez A. Pflügera, [12].

Warunek na wyboczenie dla płyty zamocowanej na brzegach  $x = 0$  i  $x = a$  pokrywa się z równaniem (4.14), gdzie wielkości  $\varrho_{nm}, \delta_{nm}, \psi_{nm}, \gamma_{nm}$  należy obliczyć z równania (4.10) przy przyjęciu  $\omega = 0$ . Dla najczęściej występujących przypadków najmniejszy współczynnik bezpieczeństwa otrzymuje się dla jednej półfali w kierunku  $y$ ,  $m = 1$ , oraz dla pierwszej postaci odkształcenia w kierunku  $x$ . W tym przypadku dla praktycznie wymaganych dokładności obliczenia wystarczy wziąć  $n$  równe 1 i 3. Wielkość współczynnika należy poszukiwać metodą prób. Otrzymane rozwiązanie jest oczywiście prawdziwe tylko w przypadku, gdy wyboczenie występuje w obszarze sprężystym.

**4.6. Płyta o danych przemieszczeniach poziomych na brzegach.** Przyjmijmy, że płyta prostokątna z żebrami posiada jednorodne warunki brzegowe typu (3.2) z wyjątkiem warunku na  $u_1$ :

$$(4.15) \quad u_1(x, 0) = u_1(x, b) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} M_n \cos a_n x.$$

Powierzchnię przemieszczenia  $u_1(x, y)$  można przy danym przemieszczeniu na krawędziach (4.15) przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji

$$(4.16) \quad u_1 = \bar{u}_1 + u_1^*.$$

Przyjmijmy, że powierzchnia przemieszczenia  $u_1$  równa się na krawędzi określonymu przez warunki brzegowe przemieszczeniu (4.15), a wzdłuż prostych  $\kappa = \text{const}$  jest funkcją stałą. Funkcję  $u_1$  można przedstawić następującym szeregiem podwójnym:

$$(4.17) \quad \bar{u}_1 = \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_n}{\beta_m} \cos a_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$  oraz  $m = 1, 3, 5, \dots$

Po rozwiązaniu równań (3.10) dla omawianego przypadku warunków brzegowych oraz wykorzystaniu zależności (4.16) i (4.17) otrzymano

$$(4.18) \quad u_i^* = -\frac{4}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{M_n}{\beta_m} \frac{W_n^*}{W_p},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$(4.19) \quad W_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$(4.20) \quad W_n^* = \begin{vmatrix} H_{11}^* \alpha_n^2 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ z_c^* H_{11}^* \alpha_n^2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

W przypadku kiedy  $\nu = H_{12} = 0$  równanie (4.18) może posłużyć do analizy szerokości współpracującej dla konstrukcji składającej się z dwóch dźwigarów głównych i płyty o żebrach równoległych do dźwigarów głównych. Jeżeli ilość poprzecznic jest znaczna, można je rozłożyć i wliczyć do sztywności poprzecznej płyty.

W niniejszej pracy ograniczono się do bardziej szczegółowego omówienia przypadku, gdy dane przemieszczenie na brzegu określone jest za pomocą funkcji

$$(4.21) \quad u_1(x, 0) = u_1(x, b) = M_1 \cos \frac{\pi}{a} x,$$

We wzorze tym stałe materiałowe  $\nu = H_{12} = 0$ , a żebra płyty są prostokątne.

W tym przypadku funkcja ugięcia (4.18) zredukuje się do postaci

$$(4.22) \quad u_1^* = -\frac{4}{b} M_1 \cos \frac{\pi}{a} x \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} \frac{Z_{1m}}{Z_{1m} + H_{22} H_{66} \beta_m^4} \sin \beta_m y,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$Z_{1m} = H_{11}^* H_{22} \alpha_1^2 \beta_m^2 + H_{66} \alpha_1^2 (H_{11}^* \alpha_1^2 + H_{22} \beta_m^2) + \\ + (H_{22} \beta_m^2 + \alpha_1^2 H_{66}) \frac{z_c^{*2} H_{11}^* H_{66} \alpha_1^4 \beta_m^2}{\Delta_{nm}}.$$

Uwzględniając wyrażenie (4.16) widzimy, że siła normalna określona jest za pomocą wzoru

$$(4.23) \quad N_x^* = H_{11}^* \frac{\partial u_1}{\partial x} = \\ = -H_{11}^* \left( M_1 \alpha_1 - \frac{4}{b} M_1 \alpha_1 \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} \frac{Z_{1m}}{Z_{1m} + H_{22} H_{66} \beta_m^4} \sin \beta_m y \right) \sin \frac{\pi}{a} x.$$



Przy obciążeniu dźwigarów według jednej sinusoidy oraz gdy  $\nu = H_{12} = 0$  szerokość współpracującą można zdefiniować jako szerokość prostokątnego wykresu sił normalnych o rzędnej równej sile normalnej w miejscu styku z dźwigarem głównym, którego wypadkowa równa się odpowiedniej wypadkowej z rzeczywistego rozkładu siły normalnej. Oznaczając przez  $\lambda_u$  szerokość współpracującą, którą należy wliczyć do jednego dźwigara, powyższy warunek można zapisać w następujący sposób:

$$(4.24) \quad 2 \lambda_u [N_x^*]_{y=0} = \int_0^b N_x^* dy.$$

Po podstawieniu do (4.24) wyrażenia (4.23), scałkowaniu i uporządkowaniu otrzymano

$$(4.25) \quad \lambda_u = \frac{b}{2} - \frac{4b}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{z_{1m}}{z_{1m} + H_{22} H_{66} \beta_m^4}.$$

Szereg (4.25) jest bardzo szybko zbieżny i dla większości zagadnień wystarczy uwzględnić tylko jeden wyraz. W przypadku, jeżeli tarcza nie ma sztywności na ścianie (ruszt),  $H_{66} = 0$ , szerokość współpracująca  $\lambda$  dąży do zera, ponieważ  $\sum_{m=1,3,5}^{\infty} 1/m^2 = \pi^2/8$ . Należy zauważyć, że w tym skrajnym przypadku błąd pierwszego przybliżenia odjemnika wynosi 19%. Dla przypadków ważnych w praktyce błąd pierwszego przybliżenia wynosi około 1%.

Przy bardzo małych szerokościach współpracujących wzór (4.25) traci oczywiście sens, ponieważ przyjęcie zastępczego modelu ciągłego jest nieuzasadnione.

Wskutek jednostronnego przymocowania żeber płyta dozna przy przemieszczeniu krawędzi wygięcia pionowego. Powierzchnie wygięcia można wyrazić w przypadku żeber prostokątnych następującym szeregiem podwójnym:

$$(4.26) \quad w = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T\{u_1\} \frac{z_c^* H_{11}^* \alpha_n^3}{\Delta_{nm}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y,$$

gdzie  $n = 1, 3, 5, \dots$  oraz  $m = 1, 3, 5, \dots$ .

W przypadku gdy szerokość współpracująca jest znaczna, nie popełni się większego błędu przyjmując do analizy ugięcia zamiast rzeczywistego wykresu  $u_1$  wykres prostokątny określony podwójnym szeregiem (4.17); podstawiając  $T\{u_1\}$  obliczone z zależności (4.17) otrzymano

$$(4.27) \quad w = -\frac{4}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{M_n z_c^* H_{11}^* \alpha_n^3}{\beta_m \Delta_{nm}} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

W przypadku przemieszczenia na brzegu określonego jedną cosinusoidą (4.21) moment zginający po zróżniczkowaniu (4.27) i prostych przekształceniach określony jest następującym szeregiem pojedynczym:

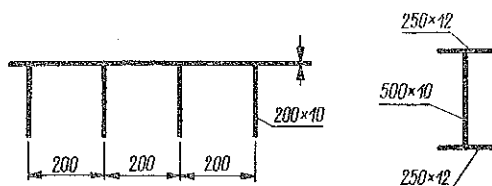
$$(4.28) \quad M_x^* = N_x^* z_c^* \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{D_x^* \alpha_n^4}{\Delta_{nm}} \sin \beta_m y.$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy  $D_y = D_{xy}^* \rightarrow 0$ , wzór (4.28) dąży do granicy

$$M_x^* = N_x^* z_c^*,$$

ponieważ szereg dąży w tym przypadku do funkcji stałej równej  $\pi/4$ .

Fizycznie oznacza to, że wykres naprężeń normalnych będzie w tym przypadku odpowiadał wykresowi dla siły normalnej zaczepionej w płycie.



Rys. 14

**Przykład 5.** Niech będzie dany most o rozpiętości  $a = 40$  m o dwóch dźwigarach głównych w rozstawie  $b = 5,00$  m, o jezdni i poprzecznicach o rozstawie  $4,00$  m, przedstawionych na rys. 14.

Wliczając sztywność poprzecznic do sztywności płyty  $D_y$  otrzymano ze wzoru (4.25) po podstawieniu liczbowych wartości charakterystyk przekroju

$$\lambda = 250 - (17,3 + 0,23 + \dots) = 232,5 \text{ cm.}$$

Jak widać z przykładu szereg (4.25) jest bardzo szybko zbieżny. Drugi wyraz zwiększa odjemnik tylko o 1%. Wpływ uchylenia się od współpracy wskutek ugięcia zawarty w ostatnim wyrażeniu  $Z_{mn}$  w obliczonym przykładzie jest praktycznie równy zeru. Dla zorientowania się we wpływie ugięcia na zmniejszenie szerokości współpracującej obliczono ten sam przykład przy założeniu, że nie ma poprzecznic. Obliczenie wykazało, że odjemnik w wyrażeniu na  $\lambda$  wzrośnie o 5%.

Obliczając moment  $M_x^*$  w środku szerokości płyty ze wzoru (4.28) otrzymano

$$M_x^* = N_x^* (z_c^* 0,00022),$$

oraz

$$M_x^* = N_x^* (z_c^* 0,023),$$

kiedy nie ma poprzecznic.

4.7. Płyta o danych przemieszczeniach pionowych na brzegach. Przyjmijmy, że płyta prostokątna z żebrami posiada jednorodne warunki brzegowe typu (3.8) z wyjątkiem warunku dla  $w$ , który ma postać

$$(4.29) \quad w(x, 0) = w(x, b) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x.$$

Przyjmując, analogicznie jak poprzednio, że powierzchnia ugięcia określona jest sumą dwóch funkcji:

$$(4.30) \quad w(x, y) = \bar{w}(x, y) + w^*(x, y),$$

z których funkcja  $\bar{w}(x, y)$  na krawędzi określa dane przemieszczenie, a wzdłuż prostych  $x = \text{const}$  jest funkcją stałą; po rozwiązaniu równań otrzymano

$$(4.31) \quad w^*(x, y) = -\frac{4}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_m} \frac{w_w^*}{w_p},$$

gdzie  $w_p$  określone jest za pomocą wyznacznika (4.19) a  $w_w^*$  wzorem

$$(4.32) \quad w_w^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -z_c^* H_{66} a_n \beta_m^3 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_n^4 D_x \end{vmatrix}.$$

Szczególnie prosto wyrazi się wzór na ugięcie (4.31) w przypadku, gdy żebra posiadają dwie osie symetrii i blacha znajduje się na poziomej osi symetrii żeber. Wzór (4.31) zredukuje się do postaci

$$(4.33) \quad w^* = -\frac{4}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_n \frac{a_n^4 D_x}{\beta_m \Delta_{nm}} \sin a_n x \sin \beta_m y.$$

Wzór (4.31) może posłużyć do określenia, jaką część momentu bezwładności jezdni względem osi należy wliczyć do momentu bezwładności dźwigarów. W przypadku obciążenia dźwigarów obciążeniem w postaci jednej sinusoidy oraz w przypadku  $\nu = H_{12} = 0$  można szerokość współpracującą zdefiniować jako szerokość prostokątnego wykresu momentów zginających  $M_x^*$  o rzędnej równej momentowi w miejscu styku dźwigara głównego z płytą, którego wypadkowy moment równa się odpowiedniej wypadkowej z rzeczywistego rozkładu momentów zginających. Oznaczając przez  $\lambda_w$  szerokość współpracującą, z której należy wliczyć moment bezwładności płyty z żebrami względem własnej osi do momentu bezwładności jednego dźwigara, powyższy warunek można przedstawić w postaci równania

$$(4.34) \quad 2 \lambda_w [M_x^*]_{(y=0)} = \int_0^b M_x^* dy.$$

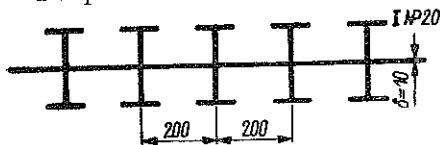
Po podstawieniu (4.34) do wyrażenia (4.33), scałkowaniu i uporządkowaniu, otrzymano dla przypadku symetrycznych żeber umieszczonych symetrycznie względem płyty

$$(4.35) \quad \lambda_w = \frac{b}{2} - \frac{4}{\pi} b \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{a_n^4 D_x}{\Delta_{1m}}.$$

Szerokość współpracująca  $\lambda_w$  w ogólnym przypadku nie równa się szerokości współpracującej  $\lambda_n$ .

Przykład 6. Przykład obliczono dla danych z przykładu 5, tylko dla innej jezdni przedstawionej na rys. 15.

Po podstawieniu wartości liczbowych do wzoru (4.35) otrzymano



Rys. 15

$$\lambda = 250 - 0,0425 \approx 250,0 \text{ cm,}$$

oraz

$$\lambda = 250 - 4,5 = 245,5 \text{ cm}$$

w przypadku braku poprzecznic.

Dla mniejszych stosunków  $a/b$  szerokość współpracująca maleje i tak dla  $a = 20,0 \text{ m}$ ,  $b = 5,0 \text{ m}$ , gdy nie ma poprzecznic wynosi

$$\lambda = 250 - 24,5 = 225,5 \text{ cm.}$$

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] J. Rutecki, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.
- [2] С. Т. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, Moskwa 1950.
- [3] С. Тимошенко, *Устойчивость упругих систем*, Moskwa 1955.
- [4] S. Kaliski, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Warszawa 1957.
- [5] W. Nowacki, *Drgania własne i wyboczenie płyty prostokątnej na obwodzie całkowicie utwierdzonej*, Arch. Mech. stos., 4, 6 (1954).
- [6] Z. Kączkowski, *Ortotropowe płyty prostokątne o brzegach swobodnych*, Arch. Mech. stos., 4, 7 (1955).
- [7] Z. Kączkowski, *Orthotropic Rectangular Plates with Arbitrary Boundary Conditions*, Arch. Mech. stos., 2, 8 (1956).
- [8] P. Wilde, *The General Solution for a Rectangular Orthotropic Plate Expressed by Double Trigonometric Series*, Arch. Mech. stos., 5, 10 (1958).
- [9] B. Budiansky i P. G. Hu, *The Lagrangian Multiplier Method of Finding Stresses of Clamped Plates*, Technical Note, no 1103, NACA 1946.
- [10] R. Ganowicz, P. Wilde, H. Mikołajczak, M. Wizmur, *Badanie modelowe lekkiej jezdni mostowej*, Arch. Inżyn. lądow., 1 (1959).
- [11] K. Trenks, *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten Bauing.*, 29 (1954).
- [12] A. Pflüger, *Zum Baulproblem der anisotropen Rechteckplatte*, Ing. Archiv. 1947, s. 111.
- [13] С. Тимошенко, *Об устойчивости пластин подкрепленных ребрами*, Petersburg 1915.
- [14] R. Barbré, *Stabilität gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten mit Längs- oder Quersteifen*, Ing. Archiv., 8 (1937).
- [15] W. Nowacki, *Zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami*, Arch. Mech. stos., 4, 6 (1954).
- [16] H. Homberg, *Über die Lastverteilung durch Schubkräfte*, Theorie der Plattenkreuzwerke Der Stahlbau, 3, 1952.
- [17] M. Sokołowski, *The Stability of an Orthotropic Infinitely Long Plate with Ribs*, Arch. Mech. stos., 4, 8 (1956).
- [18] M. T. Huber, *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotropen Platten*, Warszawa 1929.

- [19] E. Chwalla, *Die Formeln zur Berechnung der voll mittgetragenden Breite dünner Gurt- und Ribbenplatten*, Der Stahlbau, 19, 73 (1936).
- [20] С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Moskwa 1957.
- [21] W. Cornelius, *Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal-anisotropen Platte*, Der Stahlbau, 2, 1952.
- [22] E. Ginecke, *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, 6, 1955.

## Резюме

### ОРТОТРОПНАЯ ПЛАСТИНКА С ТОНКОСТЕННЫМИ НЕСИММЕТРИЧНЫМИ РЕБРАМИ

Обсуждается ортотропная пластинка, обладающая несимметричными ребрами. Ребра соединены с пластинкой монолитически. Для пластинки принимаются предположения теории тонких пластинок, что же касается ребер — предполагается, что они представляют собой тонкостенные стержни открытого сечения и что угол между ребрами и пластинкой в месте соединения не подвергается после нагрузки изменению.

Для решения задачи принимается математическая модель бесконечного числа ребер. В этом отношении работа является расширением работы П ф л и г е р а, [12], для случая ребер, обладающих произвольным сечением.

Основной ход решения задачи состоит в выведении уравнений для реакции ребра при отдельных деформированных состояниях, а затем в нагрузке реакциями ортотропной пластинки. Получается система трех дифференциальных уравнений задачи, определяющих перемещения в пластинке при данных краевых условиях. В уравнениях учитываются силы инерции, а также представляется вопрос продольного изгиба (2.17), (2.35), (2.36) и (2.37).

Решение для произвольных ребер в случае цилиндрического изгиба получается с помощью функций перемещений. Общее решение, выраженное двойными тригонометрическими рядами, получается при произвольных краевых условиях с помощью преобразования Ф у р ь е для пластинки с симметричными ребрами. Аналогичное решение для ортотропной пластинки автор приводит в своей работе [8].

Дифференциальное уравнение обсуждаемой задачи при данных краевых условиях в форме (3.8) сводится после преобразования (3.9) к системе алгебраических уравнений (3.10) с коэффициентами, определенными формулами (3.11) и со свободными выражениями, определенными зависимостями (3.12).

Дается целый ряд подробных решений для пластинок с симметричными ребрами. Обсуждается вопрос определения частоты соб-

ственных колебаний, а также продольный изгиб для свободно опертой и закрепленной пластинки. Для синусоидальной нагрузки дается формула для расчетной ширины пластинки с ребрами, имеющей два основных подкрепления. Подробное решение иллюстрируется числовыми примерами.

#### Summary

#### AN ORTHOTROPIC PLATE WITH THIN-WALLED ASYMMETRIC RIBS

The problem under consideration is that of an orthotropic plate with asymmetric ribs constituting a monolithic structure with the plate. The assumptions of the theory of thin plates are assumed for the plate. For the ribs, it is assumed that they are thin-walled bars with open cross-section and that the angle between the plate and the rib does not change under the influence of the load.

To solve the problem, the mathematical model of infinite number of ribs is assumed. In this respect, this paper is a generalization of the work by Pflüger, [12], to the case of ribs of any cross-section.

The procedure consists in deriving equations for the reactions of the ribs and then in loading the orthotropic plate by these reactions. A system of three differential equations is obtained, determining the displacements in the plate with given boundary conditions. The equations take into consideration the inertia forces and describe the buckling problem (2.17), (2.35), (2.36) and (2.37).

The solution for arbitrary ribs is obtained by means of the displacement function in the case of cylindrical loading. The general solution expressed by double trigonometric series is obtained with any boundary conditions by means of the Fourier transformation for a plate with symmetric ribs. An analogous solution for an orthotropic plate was given by the author in the Ref. [8]. The differential equations of the problem with given boundary conditions in the form (3.8) reduce after the transformation (3.9) to a system of algebraic equations (3.10), the coefficients being determined by the Eqs. (3.11) and the free terms — by the relations (3.12).

For a plate with symmetric ribs, a number of particular solutions are given. The problem of determining the frequency of free vibration and that of buckling of a simply supported or clamped plate is discussed. For a sinusoidal load, an equation for the co-working width of a ribbed plate with two main girders is obtained. The solutions are illustrated by numerical examples.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI  
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1959 r.