

MARIAN SUCHAR

OBLICZANIE POWIERZCHNI WPLYWOWYCH
DLA PŁYT RÓWNOLEGŁOBCZNYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CXXV

SPIS TREŚCI

Wstęp	237
1. Związki podstawowe	237
2. Części osobliwe powierzchni wpływowych	246
3. Części regularne powierzchni wpływowych	250
4. Przykład liczbowy	252

Wstęp

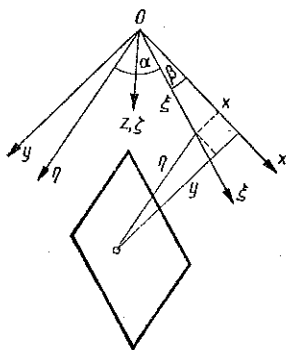
W ostatnim dwudziestoleciu rozpatrywano w kilkunastu pracach problemy związane z płytami w kształcie równoległoboku, które stosuje się między innymi w konstrukcjach mostowych oraz lotniczych. W niektórych pracach formułowano zagadnienie we współrzędnych prostokątnych, co prowadziło do znacznych trudności rachunkowych związanych ze spełnieniem warunków brzegowych. W innych wprowadzono bardziej dostosowany do istoty problemu układ współrzędnych ukośnokątnych prostoliniowych, w którym warunki brzegowe wyrażają się w sposób prostszy, jednakże równanie różniczkowe zagadnienia komplikuje się (jeśli idzie o izotropię i ortotropię), gdyż występują w nim dodatkowe wyrazy. Współrzędne ukośnokątne stosowali między innymi H. Favre, [1] i [2], N. J. Nielsen, [12], P. Lardy, [6], oraz S. T. Ödman, [13]. J. Krettner w pracy [4] podał podstawowe wzory teorii sprężystości ciała izotropowego w układzie ukośnokątnym, stosując zapis tensorowy oraz zastosował je do wyprowadzenia głównych związków dotyczących izotropowej płyty równoległobocznej, a w pracy [5] znalazł dla obciążenia działającego na całej powierzchni płyty rozwiązanie w postaci szeregów pojedynczych. Z. Kączkowski w pracy [3] rozważał ciało anizotropowe również w prostoliniowym ukośnokątnym układzie współrzędnych i wyprowadził podstawowe zależności dotyczące stanu odkształcenia, naprężenia, energii sprężystej oraz przejść z układu prostokątnego do ukośnokątnego i na odwrót.

W pracy niniejszej przeniesiemy metodę obliczania powierzchni wpływowych za pomocą wielomianów, opracowaną dla płyt izotropowych przez A. Puchera, [14] i [15], zaś dla płyt anizotropowych przez autora, [16], na płyty równoległoboczne.

1. Związki podstawowe

Zacniemy od wyprowadzenia wielkości statycznych działających w przekroju płyty oraz wyprowadzenia równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty anizotropowej w ukośnokątnym układzie współrzędnych.

Rozpatrujemy płyty cienkie o małych ugięciach. Zakładamy, że płyta posiada stałą grubość i wykonana jest z materiału jednorodnego anizotropowego, przy czym posiada w każdym punkcie jedną płaszczyznę symetrii sprężystej, równoległą do płaszczyzny środkowej płyty. Układ współrzędnych przyjmujemy w ten sposób, iż płaszczyznę środkową płyty uważamy za płaszczyznę $\xi\eta$, w której osie ξ i η tworzą kąt a na ogół różny od prostego, zaś oś ζ skierowujemy prostopadłe do tej płaszczyzny. Zastosujemy przybliżoną teorię ugięcia płyt cienkich, tzn. założymy, że odcinki prostoliniowe prostopadłe przed odkształceniem do płaszczyzny środkowej po ugięciu pozostają prostoliniowe i skierowane wzdłuż normalnej do ugiętej powierzchni środkowej oraz że naprężenia σ_ξ są małe w porównaniu z naprężeniami w przekrojach poprzecznych. Ponadto nie uwzględnimy sił objętościowych.



Rys. 1

Pomiędzy współrzędnymi prostokątnymi x, y, z i ukośnokątnymi ξ, η, ζ zachodzą, jak widać z rys. 1, następujące zależności:

$$(1.1) \quad \begin{cases} x = \xi \cos \beta + \eta \cos (a + \beta), \\ y = \xi \sin \beta + \eta \sin (a + \beta), \\ z = \zeta. \end{cases}$$

Stąd zaś

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\sin (a + \beta)}{\sin a} x - \frac{\cos (a + \beta)}{\sin a} y, \\ \eta = -\frac{\sin \beta}{\sin a} x + \frac{\cos \beta}{\sin a} y, \\ \zeta = z. \end{cases}$$

Przemieszczenia u, v dowolnego punktu w kierunku osi x i y wyrażają się przez ugięcie płaszczyzny środkowej za pomocą wzorów ([7], s. 141)

$$(1.2) \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Przemieszczenia tegoż punktu w kierunku osi ξ i η są zatem

$$(1.3) \quad \begin{cases} u^* = -\frac{\zeta}{\sin^2 a} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \cos a \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \\ v^* = -\frac{\zeta}{\sin^2 a} \left(-\cos a \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \end{cases}$$

natomiast przemieszczenia w kierunku osi $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ prostopadłych odpowiednio do osi η , ξ ([3], s. 54),

$$(1.4) \quad \bar{u} = -\frac{\zeta}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \bar{v} = -\frac{\zeta}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

Interesujące nas odkształcenia możemy więc określić za pomocą wzoru ([3], s. 58):

$$(1.5) \quad \varepsilon_{\xi} = -\frac{\zeta}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \varepsilon_{\eta} = -\frac{\zeta}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \gamma_{\xi\eta} = -\frac{2\zeta}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Pomijając σ_{ξ} oraz wykorzystując istnienie płaszczyzny symetrii sprężystej równoległej do płaszczyzny $\xi\eta$ możemy równania uogólnionego prawa Hooke'a, potrzebne do dalszych rozważań, przedstawić w postaci ([3], s. 58):

$$(1.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\xi} \sin \alpha = a''_{11} \sigma_{\xi} + a''_{12} \sigma_{\eta} + a''_{16} \tau_{\xi\eta}, \\ \varepsilon_{\eta} \sin \alpha = a''_{12} \sigma_{\xi} + a''_{22} \sigma_{\eta} + a''_{26} \tau_{\xi\eta}, \\ \gamma_{\xi\eta} = a''_{16} \sigma_{\xi} + a''_{26} \sigma_{\eta} + a''_{66} \tau_{\xi\eta}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ względem składowych stanu naprężenia otrzymamy

$$(1.7) \quad \begin{cases} \sigma_{\xi} = -\frac{\zeta}{\sin \alpha} \left(B''_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + B''_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 B''_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ \sigma_{\eta} = -\frac{\zeta}{\sin \alpha} \left(B''_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + B''_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 B''_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ \tau_{\xi\eta} = -\frac{\zeta}{\sin \alpha} \left(B''_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + B''_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 B''_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \end{cases}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$(1.8) \quad \begin{cases} B''_{11} = \frac{1}{\Delta} (a''_{22} a''_{66} - a''_{26}{}^2), & B''_{22} = \frac{1}{\Delta} (a''_{11} a''_{66} - a''_{16}{}^2), \\ B''_{12} = \frac{1}{\Delta} (a''_{16} a''_{26} - a''_{12} a''_{66}), & B''_{16} = \frac{1}{\Delta} (a''_{12} a''_{26} - a''_{22} a''_{16}), \\ B''_{26} = \frac{1}{\Delta} (a''_{12} a''_{16} - a''_{11} a''_{26}), & B''_{66} = \frac{1}{\Delta} (a''_{11} a''_{22} - a''_{12}{}^2), \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{16} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{26} \\ a''_{16} & a''_{26} & a''_{66} \end{vmatrix}.$$

Zależności między stałymi sprężystości a''_{ik} w układzie ukośnokątnym ξ, η, ζ a stałymi a_{ik} w układzie prostokątnym x, y, z są podane w pracy [3]. Wyrażenie stałych B''_{ik} przez odpowiednie stałe B_{ik} , które ze stałymi a_{ik} są związane wzorami powstającymi ze związków (1.8) przez opuszczenie w nich podwójnych kresek, przez wykorzystanie wyżej wspomnianych za-

leżności byłoby dosyć żmudne, dlatego zastosujemy porównanie odpowiednich postaci energii sprężystej.

Energię potencjalną odkształcenia, odniesioną do jednostki objętości, w danym punkcie ciała anizotropowego, w ukośnokątnym układzie współrzędnych (jeśli pominąć σ_{ξ} , $\tau_{\eta\xi}$ i $\tau_{\xi\xi}$) przedstawia wzór [3], s. 59:

$$(1.9) \quad E = \frac{1}{2} (\sigma_{\xi} \varepsilon_{\xi} \sin \alpha + \sigma_{\eta} \varepsilon_{\eta} \sin \alpha + \tau_{\xi\eta} \gamma_{\xi\eta})$$

lub uwzględniając (1.5) i (1.8)

$$(1.10) \quad E = \frac{\xi^2}{2 \sin^2 \alpha} \left[B'_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + 2 B'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + B'_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4 B'_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 + 4 B'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + 4 B'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right].$$

W układzie prostokątnym energia ta wyraża się wzorem analogicznym:

$$(1.11) \quad E = \frac{z^2}{2} \left[B_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4 B_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4 B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right].$$

Zastępując w ostatnim związku pochodne względem x, y przez pochodne względem ξ, η i przyrównując otrzymane w ten sposób wyrażenie do (1.10) otrzymamy poszukiwany związek między stałymi B'_{ik} i B_{ik} :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{aligned} B'_{11} &= \frac{\cos^4(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} [B_{11} \operatorname{tg}^4(\alpha + \beta) - 4 B_{16} \operatorname{tg}^3(\alpha + \beta) + \\ &\quad + 2(B_{12} + 2 B_{66}) \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) - 4 B_{26} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + B_{22}], \\ B'_{12} &= \frac{\cos^2(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \{ B_{11} \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2 \beta - \\ &\quad - 2 B_{16} \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\alpha + \beta) [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \beta] + B_{12} [\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}^2 \beta] - \\ &\quad - 2 B_{26} [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \beta] + 4 B_{66} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + B_{22} \}, \\ B'_{22} &= \frac{\cos^4 \beta}{\sin^2 \alpha} [B_{11} \operatorname{tg}^4 \beta - 4 B_{16} \operatorname{tg}^3 \beta + \\ &\quad + 2(B_{12} + 2 B_{66}) \operatorname{tg}^2 \beta - 4 B_{26} \operatorname{tg} \beta + B_{22}], \\ B'_{16} &= \frac{\cos^3(\alpha + \beta) \cos \beta}{\sin^2 \alpha} \{ - B_{11} \operatorname{tg}^3(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + \\ &\quad + B_{16} \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) [3 \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] - (B_{12} + 2 B_{66}) \times \\ &\quad \times \operatorname{tg}(\alpha + \beta) [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \beta] + B_{26} [\operatorname{tg} \beta + 3 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] - B_{22} \}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases}
 B''_{26} = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos^3 \beta}{\sin^2 \alpha} \{-B_{11} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^3 \beta + \\
 \quad + B_{16} \operatorname{tg}^2 \beta [\operatorname{tg} \beta + 3 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] - (B_{12} + 2 B_{66}) [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \\
 \quad + \operatorname{tg} \beta] \operatorname{tg} \beta + B_{26} [3 \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] - B_{22}\}, \\
 B''_{66} = \frac{\cos^2(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \{B_{11} \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2 \beta - \\
 \quad - 2 B_{16} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta [\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] + 2 B_{12} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + \\
 \quad + B_{66} [\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)]^2 - 2 B_{26} [\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \beta] + B_{22}\}.
 \end{cases}$$

Składowe $\tau_{\xi\xi}$ i $\tau_{\eta\xi}$ wyznaczmy z warunków równowagi, które w omawianym przypadku mają postać

$$(1.13) \quad \begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \sin \alpha \frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial \zeta} = 0, \\
 \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} + \sin \alpha \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \zeta} = 0, \\
 \frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \eta} + \sin \alpha \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \zeta} = 0,
 \end{cases}$$

$$(1.14) \quad \tau_{\eta\xi} = \sin \alpha \tau_{\xi\eta}, \quad \tau_{\xi\xi} = \sin \alpha \tau_{\zeta\xi}, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}.$$

Korzystając z dwu pierwszych równań (1.13), zależności (1.14) i (1.7) oraz biorąc pod uwagę warunki na powierzchniach zewnętrznych płyty (dla $\zeta = \pm h/2$, $\tau_{\xi\xi} = \tau_{\eta\xi} = 0$) po scałkowaniu otrzymujemy

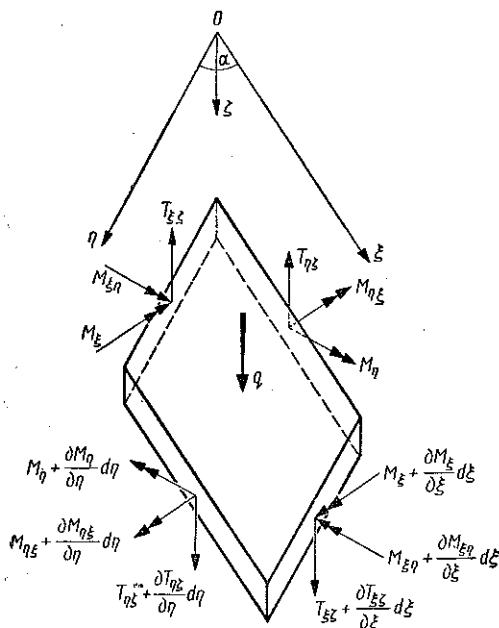
$$(1.15) \quad \begin{cases}
 \tau_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \left[B''_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 3 B''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\
 \quad \left. + (B'_{12} + 2 B'_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + B''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \\
 \tau_{\eta\xi} = \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{1}{\sin \alpha} \left[B''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (B'_{12} + 2 B'_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\
 \quad \left. + 3 B''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + B''_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right].
 \end{cases}$$

Momenty zginające M_{ξ} i M_{η} , skręcający $M_{\xi\eta}$ i siły poprzeczne $T_{\xi\xi}$ i $T_{\eta\xi}$ (odniesione do jednostki długości) otrzymamy ze znanych zależności

$$(1.16) \quad \begin{cases}
 M_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi} \zeta d\zeta, & M_{\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\eta} \zeta d\zeta, & M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\eta} \zeta d\zeta, \\
 T_{\xi\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi\xi} d\zeta, & T_{\eta\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\eta\xi} d\zeta.
 \end{cases}$$

Wyrażają się one przez ugięcie w sposób następujący:

$$(1.17) \quad \begin{cases} M_{\xi} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D''_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D''_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 D''_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_{\eta} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D''_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D''_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 D''_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_{\xi\eta} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D''_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D''_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 D''_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ T_{\xi\xi} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left[D''_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 3 D''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\ \left. + (D''_{12} + 2 D''_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + D''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \\ T_{\eta\xi} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left[D''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (D''_{12} + 2 D''_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\ \left. + 3 D''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + D''_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \end{cases}$$



Rys. 2

gdzie oznaczono

$$(1.18) \quad D'_{ik} = B'_{ik} \frac{h^3}{12}.$$

Rozważmy element płyty o kształcie równoległocianu prostego o wymiarach $d\xi$, $d\eta$, h i kącie między krawędziami podstawy α . Siły i momenty działające na ten element są przedstawione na rys. 2. Przez q oznaczamy obciążenie powierzchniowe płyty na jednostkę pola.

Warunki równowagi tego elementu są następujące:

$$(1.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial T_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_{\eta\xi}}{\partial \eta} + q \sin \alpha = 0, \\ T_{\xi\xi} = \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\eta\xi}}{\partial \eta}, & T_{\eta\xi} = \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Z pierwszego z tych równań po wyrażeniu występujących w nim sił poprzecznych przez ugięcie w otrzymamy równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty:

$$(1.20) \quad D''_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4D''_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D''_{12} + 2D''_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ + 4D''_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + D''_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = q \sin^2 \alpha.$$

W celu ustalenia warunków brzegowych zauważmy, iż reakcje na podporach, równe siłom brzegowym działającym na podpory, są następujące (dla brzegów odpowiednio $\xi = \text{const}$ i $\eta = \text{const}$):

$$(1.21) \quad Q_{\xi\xi} = T_{\xi\xi} + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta}, \quad Q_{\eta\xi} = T_{\eta\xi} + \frac{\partial M_{\eta\xi}}{\partial \xi}.$$

Przez ugięcia wyrażają się one w postaci

$$(1.22) \quad \begin{cases} Q_{\xi\xi} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left[D''_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 4D''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (D''_{12} + 4D''_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \right. \\ \left. + 2D''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \\ Q_{\eta\xi} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left[2D''_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (D''_{12} + 4D''_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 4D''_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \right. \\ \left. + D''_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right]. \end{cases}$$

Dla najprostszych przypadków podparcia brzegu mamy następujące warunki brzegowe:

a) brzeg $\xi = \text{const}$ swobodnie podparty

$$w = 0, \quad M_{\xi} = 0;$$

b) brzeg $\xi = \text{const}$ utwierdzony zupełnie

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0;$$

c) brzeg $\xi = \text{const}$ swobodny

$$M_{\xi} = 0, \quad Q_{\xi\xi} = 0.$$

Wielkości przekrojowe oraz równanie różniczkowe powierzchni ugięcia dla przypadku ortotropii, której główne kierunki są równoległe do osi x i y (rys. 1), otrzymamy przyjmując formalnie w zależnościach (1.12), (1.17), (1.18) i (1.20) ¹

$$(1.23) \quad \begin{cases} D_{11} = D_1, & D_{12} = D_1 \nu_2, & D_{16} = D_{26} = 0, & D_{22} = D_2, \\ D_{66} = D_k, & D_{12} + 2D_{66} = D_1 \nu_2 + 2D_k = D_3. \end{cases}$$

¹ Oznaczenia są zgodne z zawartymi w pracy [7].

Tak więc wzory na momenty zginające, moment skręcający oraz siły poprzeczne mają postać

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{\xi} &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D'_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_{\eta} &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D'_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D'_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left(D'_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D'_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2D'_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ T_{\xi\xi} &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left[D'_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 3D'_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (D'_{12} + 2D'_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + D'_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \\ T_{\eta\xi} &= -\frac{1}{\sin \alpha} \left[D'_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (D'_{12} + 2D'_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 3D'_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + D'_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right]. \end{aligned} \right.$$

We wzorach tych wprowadzono oznaczenia:

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{aligned} D'_{11} &= \frac{\cos^4(\alpha + \beta)}{\sin^2 \alpha} [D_1 \operatorname{tg}^4(\alpha + \beta) + 2D_3 \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + D_2], \\ D'_{12} &= \frac{\cos^2(\alpha + \beta) \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \{ D_1 \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2 \beta + D_1 \nu_2 [\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + \\ &\quad + \operatorname{tg}^2 \beta] + 4D_k \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + D_2 \}, \\ D'_{22} &= \frac{\cos^4 \beta}{\sin^2 \alpha} [D_1 \operatorname{tg}^4 \beta + 2D_3 \operatorname{tg}^2 \beta + D_2], \\ D'_{16} &= -\frac{\cos^3(\alpha + \beta) \cos \beta}{\sin^2 \alpha} \{ D_1 \operatorname{tg}^3(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + D_3 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) [\operatorname{tg} \beta + \\ &\quad + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] + D_2 \}, \\ D'_{26} &= -\frac{\cos(\alpha + \beta) \cos^3 \beta}{\sin^2 \alpha} \{ D_1 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^3 \beta + D_3 \operatorname{tg} \beta [\operatorname{tg} \beta + \\ &\quad + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)] + D_2 \}, \\ D'_{66} &= \frac{\cos^3(\alpha + \beta) \cos^3 \beta}{\sin^2 \alpha} \{ D_1 \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) \operatorname{tg}^2 \beta + 2D_1 \nu_2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta + \\ &\quad + D_k [\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)]^2 + D_2 \}. \end{aligned} \right.$$

Przy $\alpha = 90^\circ$ zależności te są zgodne ze wzorami (69.6) i (69.7) w pracy [7].

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia przyjmuje postać:

$$(1.26) \quad D'_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4D'_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(D'_{12} + 2D'_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ + 4D'_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + D'_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = q \sin^2 \alpha.$$

W przypadku gdy jeden z głównych kierunków ortotropii jest równoległy do osi ξ układu ukośnokątnego, zaś drugi jest doń prostopadły, tzn. gdy $\beta=0$, zależności (1.25) przybierają postać:

$$(1.25.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} D'_{11} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (D_1 \sin^4 \alpha + 2 D_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + D_2 \cos^4 \alpha), \\ D'_{12} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (D_1 \nu_2 \sin^2 \alpha + D_2 \cos^2 \alpha), \quad D'_{22} = \frac{D_2}{\sin^2 \alpha}, \\ D'_{16} = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (D_2 \cos^2 \alpha + D_3 \sin^2 \alpha), \quad D'_{26} = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} D_2, \\ D'_{66} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (D_2 \cos^2 \alpha + D_3 \sin^2 \alpha). \end{array} \right.$$

Podstawiając z kolei

$$(1.27) \quad D_1 = D_2 = D_3 = D, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad D_k = \frac{1-\nu}{2} D, \quad (\beta=0),$$

otrzymamy dla przypadku izotropii znane związki (por. np. [13]):

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_\xi = -\frac{D}{\sin^3 \alpha} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right], \\ M_\eta = -\frac{D}{\sin^3 \alpha} \left[(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right], \\ M_{\xi\eta} = M_{\eta\xi} = -\frac{D}{\sin^3 \alpha} \left\{ -\cos \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + \right. \\ \left. + [2 \cos^2 \alpha + (1-\nu) \sin^2 \alpha] \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\}, \\ T_{\xi\xi} = -\frac{D}{\sin^3 \alpha} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - 3 \cos \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \\ \left. + (1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} - \cos \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right], \\ T_{\eta\xi} = -\frac{D}{\sin^3 \alpha} \left[-\cos \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \right. \\ \left. - 3 \cos \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right]; \end{array} \right.$$

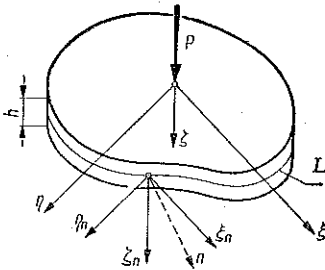
$$(1.29) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 4 \cos \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \\ - 4 \cos \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{q \sin^4 \alpha}{D}.$$

2. Części osobliwe powierzchni wpływowych

Chcąc wyznaczyć powierzchnię wpływową (funkcję Greena) ugięcia (lub dowolnej wielkości przekrojowej) przedstawiamy ją (por. np. [14]) w postaci sumy części osobliwej i regularnej:

$$(2.1) \quad K(u, v; \xi, \eta) = K_0(u, v; \xi, \eta) + K_1(u, v; \xi, \eta).$$

Funkcja K_0 zawiera osobliwość pochodzącą od jednostkowej siły skupionej, przyłożonej w punkcie (u, v) . Stanowi ona rozwiązanie osobliwe jednorodnego równania (1.20) (w przypadku płyty anizotropowej), natomiast całkę regularną tego równania K_1 dobieramy tak, by suma (2.1) spełniała dane warunki brzegowe.



Rys. 3

W paragrafie tym obliczymy część osobliwą powierzchni wpływowej ugięcia postępując w sposób podany przez J. Mossakowskię, [10], dla przypadku prostokątnego układu współrzędnych.

Nie umniejszając ogólności rozważań założymy, że siła skupiona P działa w początku ukośnokątnego układu współrzędnych (rys. 3).

Równanie charakterystyczne równania (1.20)

$$(2.2) \quad D_{22}'' \mu^4 + 4 D_{26}'' \mu^3 + 2 (D_{12}'' + 2 D_{66}'') \mu^2 + 4 D_{16}'' \mu + D_{11}'' = 0,$$

ma pierwiastki

$$(2.3) \quad \mu_n = \frac{\cos(\alpha + \beta) + k_n \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta + k_n \sin \beta} \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

gdzie k_n oznaczają pierwiastki równania

$$(2.4) \quad D_{22} k^4 + 4 D_{26} k^3 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) k^2 + 4 D_{16} k + D_{11} = 0.$$

Jak wykazał S. G. Lechnicki, [8], dla płyt anizotropowych jednorodnych doskonale sprężystych k_n nie mogą być rzeczywiste. Biorąc pod uwagę zatem, że $k_2 = \bar{k}_1$ i $k_4 = \bar{k}_3$ (kreska oznacza liczbę sprzężoną) łatwo sprawdzić, że $\mu_2 = \bar{\mu}_1$ i $\mu_4 = \bar{\mu}_3$.

Całkę osobliwą równania jednorodnego (1.20) przedstawiamy w postaci

$$(2.5) \quad K_0(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^4 A_n f_n(z_n),$$

gdzie

$$(2.6) \quad f_n(z_n) = z_n^3 \ln \frac{z_n}{\omega} - \frac{3}{2} z_n^3 \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

zaś z_n oznacza zmienną zespoloną

$$(2.7) \quad z_n = \xi + \mu_n \eta.$$

We wzorze (2.6) ω jest stałą dowolną.

Współczynniki A_n wyznaczamy z warunków jednoznaczności K_0 i jej pochodnych do rzędu drugiego włącznie, które mają postać

$$(2.8) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} A_n z_n^2 = 0, & \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} A_n = 0, \\ \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} A_n z_n = 0, & \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n A_n = 0, \\ \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} A_n \mu_n z_n = 0, & \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n^2 A_n = 0 \end{cases}$$

oraz z warunków równowagi krążka wyciętego z płyty (rys. 3). Warunków tych mamy sześć:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \int_{L-h/2}^{h/2} \int \xi_n \sin a \, d\zeta \, ds = 0, & \int_{L-h/2}^{h/2} \int (\zeta_n \eta - \eta_n \zeta) \sin a \, d\zeta \, ds = 0, \\ \int_{L-h/2}^{h/2} \int \eta_n \sin a \, d\zeta \, ds = 0, & \int_{L-h/2}^{h/2} \int (\xi_n \zeta - \zeta_n \xi) \sin a \, d\zeta \, ds = 0, \\ \int_{L-h/2}^{h/2} \int \zeta_n \, d\zeta \, ds + P = 0, & \int_{L-h/2}^{h/2} \int (\eta_n \xi - \xi_n \eta) \sin a \, d\zeta \, ds = 0. \end{cases}$$

Tutaj ξ_n , η_n , ζ_n oznaczają składowe naprężeń działających na walcowej powierzchni krążka, n normalną zewnętrzną do tej powierzchni, h grubość płyty, zaś L linię przecięcia płaszczyzny środkowej z powierzchnią boczną krążka.

Okazuje się, iż z równań (2.9) pierwsze, drugie i szóste są spełnione tożsamościowo, natomiast trzy pozostałe dają się zapisać w postaci

$$(2.10) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n^3 A_n = -\frac{P \sin a}{4\pi_l D_{22}''}, \\ \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} z_n \mu_n^2 A_n = -\frac{P \sin a}{4\pi_l D_{22}''} \eta, \\ \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \frac{z_n}{\mu_n} A_n = \frac{P \sin a}{4\pi_l D_{22}''} \xi. \end{cases}$$

Układ równań (2.8) i (2.10) jest równoważny następującym czterem równaniom

$$(2.11) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} A_n = 0, & \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n^2 A_n = 0, \\ \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n A_n = 0, & \sum_{n=1}^4 (-1)^{n-1} \mu_n^3 A_n = -\frac{P \sin a}{4\pi_l D_{22}''}. \end{cases}$$

Po ich rozwiązaniu i podstawieniu do (2.5) otrzymujemy dla K_0 ostatecznie wyrażenie:

$$(2.12) \quad K_0(\xi, \eta) = \frac{P \sin \alpha}{8\pi D'_{22} GH} \left\{ \frac{(a-c)^2 - (b^2 - d^2)}{b} R_1(\xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{(a-c)^2 + (b^2 - d^2)}{d} R_2(\xi, \eta) + 4(a-c) [S_1(\xi, \eta) - S_2(\xi, \eta)] \right\},$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{cases} R_1(\xi, \eta) = [(\xi + a\eta)^2 - b^2 \eta^2] \left[\ln \frac{(\xi + a\eta)^2 + b^2 \eta^2}{\omega^2} - 3 \right] - \\ - 4b\eta(\xi + a\eta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b\eta}{\xi + a\eta}, \\ S_1(\xi, \eta) = b\eta(\xi + a\eta) \left[\ln \frac{(\xi + a\eta)^2 + b^2 \eta^2}{\omega^2} - 3 \right] + \\ + [(\xi + a\eta)^2 - b^2 \eta^2] \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b\eta}{\xi + a\eta}, \end{cases}$$

zaś $R_2(\xi, \eta)$ i $S_2(\xi, \eta)$ otrzymuje się z $R_1(\xi, \eta)$ i $S_1(\xi, \eta)$ przez podstawienie c zamiast a i d zamiast b ; poza tym $G = (a-c)^2 + (b+d)^2$, $H = (a-c)^2 + (b-d)^2$, przy czym a, b, c, d są związane z μ_n zależnościami

$$(2.14) \quad \begin{cases} \mu_1 = a + ib, & \mu_2 = a - ib, \\ \mu_3 = c + id, & \mu_4 = c - id. \end{cases}$$

Równanie charakterystyczne równania (1.26) w przypadku gdy stałe D'_{ik} wyrażają się wzorami (1.25.1), tzn. gdy oś ξ układu ukośnokątnego ξ, η jest równoległa do jednego z głównych kierunków ortotropii, ma w zależności od ϱ rozwiązania

$$(2.15) \quad \begin{cases} \mu_{1,2} = \cos \alpha \pm i\varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} + \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha, \\ \mu_{3,4} = \cos \alpha \pm i\varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha \quad \text{dla } \varrho > 1; \end{cases}$$

$$(2.16) \quad \begin{cases} \mu_{1,2} = \cos \alpha - \varepsilon \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \sin \alpha \pm i\varepsilon \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} \sin \alpha, \\ \mu_{3,4} = \cos \alpha + \varepsilon \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \sin \alpha \pm i\varepsilon \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} \sin \alpha \quad \text{dla } \varrho < 1; \end{cases}$$

oraz dla $\varrho = 1$

$$(2.17) \quad \begin{cases} \mu_1 = \mu_3 = \cos \alpha + i\varepsilon \sin \alpha, \\ \mu_2 = \mu_4 = \cos \alpha - i\varepsilon \sin \alpha. \end{cases}$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$(2.18) \quad \varrho = \frac{D_3}{\sqrt{D_1 D_2}}, \quad \varepsilon = \sqrt[4]{\frac{D_1}{D_2}}.$$

Podstawiając więc do związków (2.12) i (2.13)

$$a = c = \cos \alpha, \quad b = \varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} + \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha,$$

$$d = \varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha$$

otrzymamy dla płyty ortotropowej w przypadku $\varrho > 1$ następujące wyrażenie jako część osobiwą powierzchni wpływowej ugięcia ($P=1$):

$$(2.19) \quad K_0(\xi; \eta) = \frac{1}{16\pi D_{22} \varepsilon^3 \sqrt{\varrho^2 - 1} \sin^2 \alpha} \times$$

$$\times \left\{ \left(\sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} \right) [(\xi + \eta \cos \alpha)^2 - \eta^2 \varepsilon^2 (\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}) \sin^2 \alpha] \times \right.$$

$$\times \ln \frac{(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \eta^2 \varepsilon^2 (\varrho + \sqrt{\varrho^2 - 1}) \sin^2 \alpha}{\omega^2} +$$

$$+ \left(\sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} + \sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} \right) [(\xi + \eta \cos \alpha)^2 -$$

$$- \eta^2 \varepsilon^2 (\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}) \sin^2 \alpha] \ln \frac{(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \eta^2 \varepsilon^2 (\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 1}) \sin^2 \alpha}{\omega^2} +$$

$$+ 4\eta \varepsilon \sin \alpha (\xi + \eta \cos \alpha) \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta \varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} + \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha}{\xi + \eta \cos \alpha} \right.$$

$$- \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta \varepsilon \left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} - \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} \right) \sin \alpha}{\xi + \eta \cos \alpha} \left. \right] -$$

$$- 6 \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}} [(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \varepsilon^2 \eta^2 \sin^2 \alpha] \left. \right\}.$$

W przypadku $\varrho < 1$ należy do (2.12) i (2.13) podstawić

$$a = \cos \alpha - \varepsilon \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha + \varepsilon \sqrt{\frac{1-\varrho}{2}} \sin \alpha,$$

$$b = d = \varepsilon \sqrt{\frac{1+\varrho}{2}} \sin \alpha.$$

Przechodząc z (2.19) do granicy przy $\varrho \rightarrow 1$ otrzymamy

$$(2.20) \quad K_0(\xi, \eta) = \frac{1}{16\pi D_{22} \varepsilon^3 \sin^2 \alpha} \left\{ [(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \eta^2 \varepsilon^2 \sin^2 \alpha] \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \eta^2 \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{\omega^2} - [3(\xi + \eta \cos \alpha)^2 + \eta^2 \varepsilon^2 \sin^2 \alpha] \right\}.$$

Stąd zaś przyjmując $\varepsilon = 1$ przejść można do rozwiązania osobliwego dla płyty izotropowej, wyrażonego we współrzędnych ukośnokątnych.

Wzory (2.19) i (2.20) można również otrzymać z rozwiązań podanych przez J. Mossakowskiego, [9], dokonując zamiany zmiennych $x = \xi + \eta \cos \alpha$, $y = \eta \sin \alpha$.

3. Części regularne powierzchni wpływowych

Przechodzimy do podania sposobu obliczania części regularnej K_1 powierzchni wpływowej. Jak już wspominaliśmy, należy ją tak dobrać, aby suma $K = K_0 + K_1$ spełniała dane warunki brzegowe. W tym celu przedstawiamy ją w postaci szeregu

$$(3.1) \quad K_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(\xi, \eta),$$

gdzie $W_n(\xi, \eta)$ stanowią układ zupełny regularnych całek jednorodnego równania (1.20). Dla przybliżonego wyznaczenia współczynników c_n możemy [ograniczając się do skończonej ilości wyrazów szeregu (3.1)] zażądać, aby w określonej ilości punktów brzegu płyty wartości K zgadzały się z wartościami danymi lub możemy skorzystać z metody najmniejszych błędów kwadratowych.

Jako funkcje $W_n(\xi, \eta)$ możemy przyjąć wielomiany jednorodne zmiennych ξ i η kolejnych stopni. Wielomiany takie dla przypadku prostokątnego układu współrzędnych zostały podane w pracy autora [16]. Dzięki formalnemu podobieństwu równań różniczkowych dla ugięcia płyty zarówno anizotropowej jak i ortotropowej oraz izotropowej, wyrażonych w ukośnokątnym układzie współrzędnych do równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty anizotropowej w układzie prostokątnym, możemy bezpośrednio przenieść rezultaty otrzymane w wyżej wymienionej pracy na wszystkie interesujące nas przypadki.

Okazuje się mianowicie, że każdy wielomian $W_n(\xi, \eta)$ stopnia $n \geq 3$ jest kombinacją liniową czterech liniowo niezależnych wielomianów stopnia n , tzn.

$$(3.2) \quad W_n(\xi, \eta) = a_{n,0} W_{n,0}(\xi, \eta) + a_{n-1,1} W_{n-1,1}(\xi, \eta) + \\ + a_{n-2,2} W_{n-2,2}(\xi, \eta) + a_{n-3,3} W_{n-3,3}(\xi, \eta),$$

gdzie

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{n,0}(\xi, \eta) &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu-1} \binom{n}{\nu} \delta^{\nu-n} B_{\nu-4} \xi^{n-\nu} \eta^{\nu}, \\ W_{n-1,1}(\xi, \eta) &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu-1} \frac{1}{n} \binom{n}{\nu} \delta^{\nu-n} (B_{\nu-1} - \gamma B_{\nu-2} + 2\kappa B_{\nu-3}) \xi^{n-\nu} \eta^{\nu}, \\ W_{n-2,2}(\xi, \eta) &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} \frac{\binom{n}{\nu}}{\binom{n}{2}} \delta^{\nu-n} (B_{\nu-2} - \gamma B_{\nu-3}) \xi^{n-\nu} \eta^{\nu}, \\ W_{n-3,3}(\xi, \eta) &= \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu-1} \frac{\binom{n}{\nu}}{\binom{n}{3}} \delta^{\nu-n} B_{\nu-3} \xi^{n-\nu} \eta^{\nu}. \end{aligned} \right.$$

We wzorach powyższych $a_{n,0}$, $a_{n-1,1}$, $a_{n-2,2}$, $a_{n-3,3}$ oznaczają dowolne stałe, B_n następujący wyznacznik stopnia n

$$(3.4) \quad B_n = \begin{vmatrix} \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2\kappa & \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 2\kappa & \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 2\kappa & \gamma & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2\kappa & \gamma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda & 2\kappa & \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \lambda & 2\kappa & \gamma & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 2\kappa & \gamma \end{vmatrix}.$$

Symbole B_0 , B_{-1} , B_{-2} , B_{-3} , B_{-4} są zdefiniowane następująco:

$$(3.5) \quad B_0 = 1, \quad B_{-1} = B_{-2} = B_{-3} = 0, \quad B_{-4} = -1,$$

natomiast λ , κ , γ i δ wyrażają się przez stałe materiałowe.

Mianowicie dla płyty anizotropowej należy przyjąć [por. (1.18) i (1.12)]:

$$(3.6) \quad \lambda = \frac{4D'_{16}}{\sqrt{D'_{11}{}^3 D'_{22}}}, \quad \kappa = \frac{D'_{12} + 2D'_{66}}{\sqrt{D'_{11} D'_{22}}}, \quad \gamma = \frac{4D'_{26}}{\sqrt{D'_{11} D'_{22}}}, \quad \delta = \sqrt[4]{\frac{D'_{11}}{D'_{22}}},$$

dla płyty ortotropowej w zależnościach (3.6) trzeba zastąpić D'_{ik} przez D_{ik} [por. (1.25) i (1.25.1)], zaś dla płyty izotropowej przyjmujemy

$$(3.7) \quad \lambda = \gamma = -4 \cos a, \quad \kappa = 1 + 2 \cos^2 a, \quad \delta = 1.$$

Wzory (3.2) i (3.3) obejmują również wielomiany $W_n(\xi, \eta)$ stopni 0, 1 i 2, należą jednak przyjąć, że

$$(3.8) \quad W_{n-m, m} = 0 \quad \text{dla} \quad m > n.$$

Czwórki liniowo niezależnych wielomianów $W_{n-k, k}(\xi, \eta)$ ($k=0, 1, 2, 3$) kolejnych stopni najwygodniej jest obliczać korzystając z następujących wzorów rekurencyjnych:

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{n+1,0}(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\delta} W_{n,0}(\xi, \eta) - \binom{n}{3} \eta W_{n-3,3}(\xi, \eta), \\ W_{n,1}(\xi, \eta) = \frac{1}{n+1} \eta W_{n,0}(\xi, \eta) + \frac{n}{n+1} \frac{\xi}{\delta} W_{n-1,1}(\xi, \eta) - \\ \quad - \frac{\lambda}{n+1} \binom{n}{3} \eta W_{n-3,3}(\xi, \eta), \\ W_{n-1,2}(\xi, \eta) = \frac{2}{n+1} \eta W_{n-1,1}(\xi, \eta) + \frac{n-1}{n+1} \frac{\xi}{\delta} W_{n-2,2}(\xi, \eta) - \\ \quad - \frac{2\lambda(n-1)(n-2)}{3(n+1)} \eta W_{n-3,3}(\xi, \eta), \\ W_{n-2,3}(\xi, \eta) = \frac{3}{n+1} \eta W_{n-2,2}(\xi, \eta) + \frac{n-2}{\delta(n+1)} (\xi - \gamma\delta\eta) W_{n-3,3}(\xi, \eta). \end{array} \right.$$

Przyjmując tu $W_{0,0} = 1$ oraz pamiętając o umowie (3.8) możemy obliczać sukcesywnie wielomiany dowolnych stopni.

Na zakończenie tego paragrafu zauważmy, że układ powyżej określonych wielomianów jest układem zupełnym. Dowód tego faktu nie różni się formalnie od dowodu twierdzenia o zupełności układu wielomianów (A), podanego w pracy [16].

4. Przykład liczbowy

Rozważmy obecnie płytę² w kształcie równoległoboku o kącie ostrym przy wierzchołku $\alpha = 45^\circ$ (rys. 4). Wymiary płyty niech będą $a = b = 2$. Płyta jest wzdłuż boków $\xi = \pm 1$ wolno podparta, pozostałe boki są swobodne. Płyta jest wykonana z materiału ortotropowego, przy czym jeden z głównych kierunków sprężystych jest równoległy do osi ξ , drugi jest doń prostopadły. Przyjmujemy, iż stosunek głównych sztywności na zginanie wynosi $D_1/D_2 = \varepsilon^4 = 64$. Zakładamy też, że $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

Szukamy powierzchni wpływowej ugięcia oraz wielkości przekrojowych dla środka płyty.

² Dane zaczerpnięte z pracy [11].

Część osobiwą powierzchni wpływowej ugięcia przedstawia wzór (2.20). Podstawiając w nim $D'_{22} = D_2/\sin^2\alpha$, $\varepsilon = 2\sqrt{2}$ oraz przyjmując $\omega = 1$ otrzymamy

$$(4.1) \quad K_0(\xi, \eta) = \frac{1}{256 \sqrt{2}\pi D_2} [(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) \ln(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) - (3\xi^2 + 3\sqrt{2}\xi\eta + 5,5\eta^2)].$$

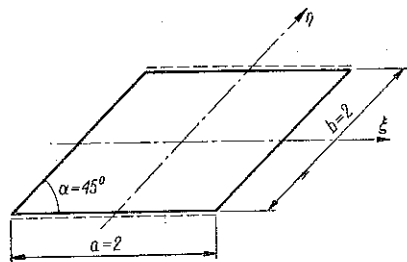
W celu spełnienia warunków na brzegu płyty przedstawiamy powierzchnię wpływową ugięcia w postaci

$$(4.2) \quad K(\xi, \eta) = K_0(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^n c_i P_i(\xi, \eta).$$

Z warunków fizycznych wynika, iż funkcja $K(\xi, \eta)$ spełnia warunek

$$K(-\xi, -\eta) = K(\xi, \eta).$$

Zatem na funkcje $P_i(\xi, \eta)$ wybierzemy wielomiany (3.3) o tej samej własności. Wypiszemy je ograniczając się do wielomianów do szóstego stopnia włącznie:



Rys. 4

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = W_{0,0} = 1, \\ P_2 = W_{2,0} = \frac{2}{9} \xi^2, \quad P_3 = W_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \xi\eta, \quad P_4 = W_{0,2} = \eta^2, \\ P_5 = W_{4,0} = \frac{4}{81} \xi^4 - \eta^4, \quad P_6 = W_{3,1} = \frac{2\sqrt{2}}{27} \xi^3\eta + \frac{1}{3} \eta^4, \\ P_7 = W_{2,2} = \frac{2}{9} \xi^2\eta^2 - \frac{11}{27} \eta^4, \quad P_8 = W_{1,3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \xi\eta^3 + \frac{1}{3} \eta^4, \\ P_9 = W_{6,0} = \frac{8}{729} \xi^6 - \frac{10}{3} \xi^2\eta^4 - \frac{8\sqrt{2}}{3} \xi\eta^5 + \frac{2}{3} \eta^6, \\ P_{10} = W_{5,1} = \frac{4\sqrt{2}}{243} \xi^5\eta + \frac{20}{27} \xi^2\eta^4 + \frac{7\sqrt{2}}{27} \xi\eta^5 - \frac{10}{27} \eta^6. \end{array} \right.$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 K(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 K(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{dla } \eta = \pm 1, \\ L_1[K(\xi, \eta)] = 0, \quad L_2[K(\xi, \eta)] = 0 \quad \text{dla } \xi = \pm 1, \end{array} \right.$$

Tablica 1

$A_{1,k}$	$A_{2,k}$	$A_{3,k}$	$A_{4,k}$	$A_{5,k}$	$A_{6,k}$	$A_{7,k}$	$A_{8,k}$	$A_{9,k}$	$A_{10,k}$	B_k
2,00000	0,148148	0	2,000000	-1,980247	0,666267	-0,666667	0,666667	-0,088571	-4,465982	4,809135
0,148148	0,414815	-0,131687	0,192044	0,293945	-0,009145	0,065071	-0,053041	-0,427503	-0,471749	0,147252
0	-0,131687	0,192044	-0,014632	-0,146319	0,032262	-0,035225	0,182289	0,053893	0,040582	-0,928423
2,000000	0,192044	-0,014632	10,00487	-49,93147	16,66016	-19,61789	16,65529	-52,02872	-12,54549	78,14945
-1,980247	0,293945	-0,146319	-49,93147	293,74192	-97,47166	115,51102	-96,32647	309,23698	52,44946	-436,91967
0,666667	-0,009145	0,039262	16,66016	-97,47166	32,89257	-38,68993	32,63476	-103,43471	-17,51676	143,04631
-0,666667	0,065071	-0,035225	-19,61789	115,51102	-38,68993	45,77062	-38,47146	122,56590	20,48588	-170,48395
0,666667	-0,033041	0,182289	16,65529	-96,32647	32,63476	-38,47146	38,71396	-109,56799	-17,45858	114,91127
-0,088571	-0,427503	0,053893	-52,02872	309,23698	-103,43471	122,56590	-109,56799	4715,3420	51,76371	1437,7290
-4,465982	-0,471749	0,040582	-12,54549	52,44946	-17,51676	20,48588	-17,45858	51,76371	210,99489	81,89637

gdzie L_1 i L_2 oznaczają operatory:

$$(4.5) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{81} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ L_2 = \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{14}{27} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{4\sqrt{2}}{81} \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}. \end{cases}$$

Aby spełnić w przybliżony sposób warunki brzegowe, zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów. Do wyznaczenia współczynników c_i otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych, symetryczny względem głównej przekątnej:

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^n A_{i,k} c_i + B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$(4.7) \quad \begin{cases} A_{i,k} = \int_0^1 \{ (L_1 [P_i] L_1 [P_k] + L_2 [P_i] L_2 [P_k])_{\xi=-1} + \\ \quad + (L_1 [P_i] L_1 [P_k] + L_2 [P_i] L_2 [P_k])_{\xi=1} \} d\eta + \\ \quad + \int_{-1}^1 \left[P_i P_k + \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 P_k}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right]_{\eta=1} d\xi, \\ B_k = \int_0^1 \{ (L_1 [K_0] L_1 [P_k] + L_2 [K_0] L_2 [P_k])_{\xi=-1} + \\ \quad + (L_1 [K_0] L_1 [P_k] + L_2 [K_0] L_2 [P_k])_{\xi=1} \} d\eta + \\ \quad + \int_{-1}^1 \left[K_0 P_k + \left(\frac{\partial^2 K_0}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 K_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 P_k}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right]_{\eta=1} d\xi. \end{cases}$$

Macierz obliczonych współczynników układu oraz wyrazy wolne zawiera tablica 1.

Kolejne przybliżenia rozwiązania dla $n = 8, 9, 10$ podane są w tablicy 2.

Tablica 2

n	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
8	81,61325	9,84516	1,12037	-39,8142	-2,77539	1,51234	-0,20985	5,28523	—	—
9	34,77433	9,83898	1,23723	-43,06546	-2,86471	1,82436	-0,25624	4,82632	-0,43152	—
10	34,02916	9,72727	1,23945	-44,32273	-2,90745	1,87733	-0,24784	4,84228	-0,43206	-0,87242

Dla zorientowania się w zbieżności zastosowanej metody zbadamy, w jakim stopniu kolejne przybliżenia spełniają warunki brzegowe. W tym celu porównamy średnie błędy m określone w sposób następujący:

$$(4.8) \quad m^2 = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-1}^1 \left[K_0 + \sum_{i=1}^n c_i P_i \right]_{\eta=1}^2 d\xi + \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^2 K_0}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 K_0}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial \eta^2} - \sqrt{2} \frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right]_{\eta=1}^2 d\xi + \int_0^1 \left\{ \left(L_1 [K_0] + \sum_{i=1}^n c_i L_1 [P_i] \right)_{\xi=-1}^2 + \right. \\ \left. + \left(L_1 [K_0] + \sum_{i=1}^n c_i L_1 [P_i] \right)_{\xi=1}^2 \right\} d\eta + \int_0^1 \left\{ \left(L_2 [K_0] + \sum_{i=1}^n c_i L_2 [P_i] \right)_{\xi=-1}^2 + \right. \\ \left. + \left(L_2 [K_0] + \sum_{i=1}^n c_i L_2 [P_i] \right)_{\xi=1}^2 \right\} d\eta \right\}.$$

Obok całkowitego błędu średniego m porównamy również poszczególne składniki sumy (4.8) oznaczone kolejno przez m_1, m_2, m_3 i m_4 . Przedstawiają one bowiem średnie odchylenia od danych wartości dla ugięcia oraz sił brzegowych. Zestawienie tych wielkości zawiera tabl. 3 (wszystkie wartości pomnożone przez $256\sqrt{2}\pi$).

Tablica 3

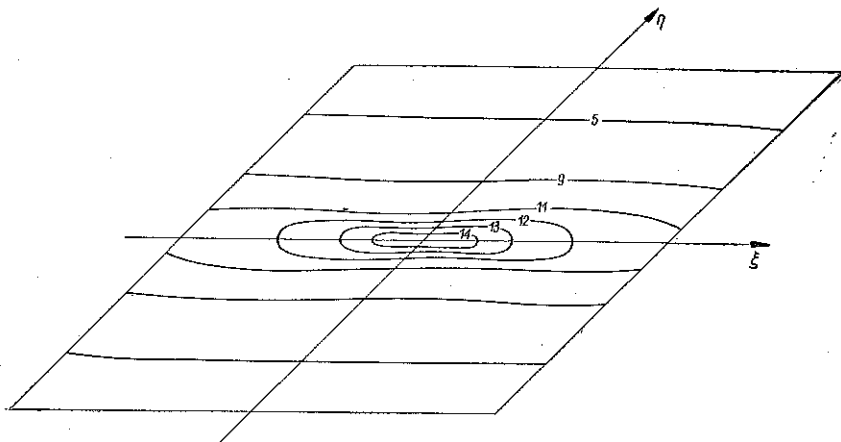
n	m_1	m_2	m_3	m_4	m
8	$\pm 2,089$	$\pm 18,42$	$\pm 43,49$	$\pm 239,42$	$\pm 172,56$
9	$\pm 1,432$	$\pm 13,64$	$\pm 35,28$	$\pm 151,61$	$\pm 110,49$
10	$\pm 1,002$	$\pm 9,69$	$\pm 32,28$	$\pm 91,82$	$\pm 69,17$

W stosunku do odpowiednich odchyżeń średnich, które wykazują część osobiwą ugięcia i rozpatrywanych sił brzegowych, wynoszących kolejno $\pm 9,825; \pm 90,53; \pm 278,26; \pm 620,43$ średnie błędy m_i dla $n=10$ stanowią odpowiednio 10,2%, 10,7%, 11,6%, 14,8%.

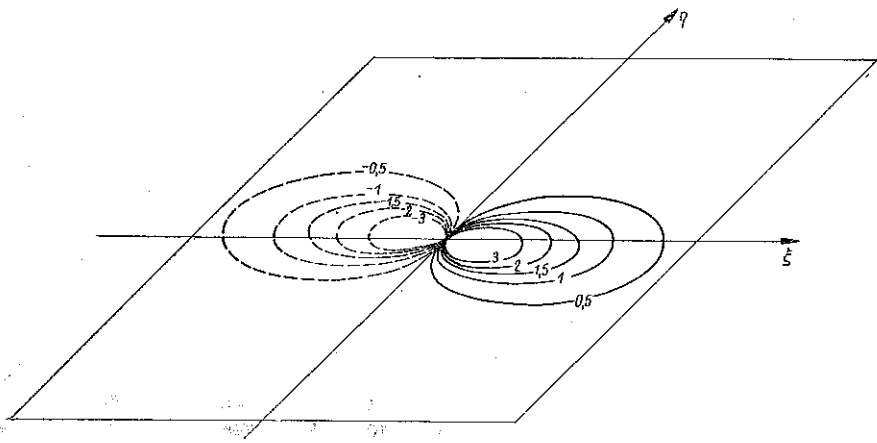
Przy tym stopniu dokładności możemy powierzchnię wpływową ugięcia zapisać w postaci:

$$(4.9) \quad K(\xi, \eta) = \frac{1}{256\sqrt{2}\pi D_2} \left[(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) \ln(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) - \right. \\ \left. - (3\xi^3 + 3\sqrt{2}\xi\eta + 5,5\eta^2) + 34,02916 P_1 + 9,72727 P_2 + 1,23945 P_3 - \right. \\ \left. - 44,32273 P_4 - 2,90745 P_5 + 1,87733 P_6 - 0,24784 P_7 + 4,84228 P_8 - \right. \\ \left. - 0,43206 P_9 - 0,87242 P_{10} \right].$$

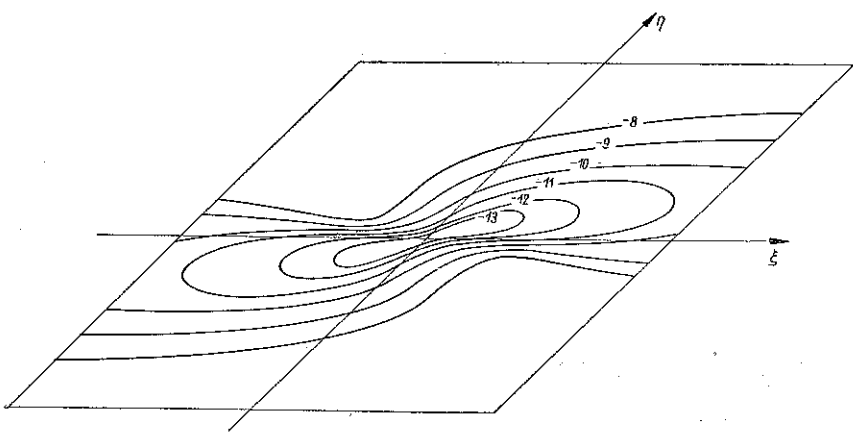
Różniczkując funkcję $K(\xi, \eta)$ względem współrzędnych punktu przyłożenia siły według wzorów (1.24) możemy otrzymać powierzchnie wpły-



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

wowe dla poszczególnych wielkości przekrojowych. Tak na przykład dla momentów zginającego i skręcającego oraz siły poprzecznej uzyskamy w ten sposób następujące wyrażenia:

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{\eta} = -\frac{1}{16\pi} \left[\ln(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) + \frac{8\eta^3}{\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2} - \right. \\ \quad - 10,9107 - 0,2275\xi^2 + 1,2324\xi\eta + 6,6508\eta^2 + 0,0171\xi^4 - \\ \quad \left. - 0,0254\xi^3\eta - 0,7625\xi^2\eta^2 + 0,3122\xi\eta^3 + 1,6321\eta^4 \right], \\ M_{\xi\eta} = \frac{1}{16\sqrt{2}\pi} \left[\ln(\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2) - \frac{8\sqrt{2}\xi\eta}{\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2} - \right. \\ \quad - 9,1552 - 1,5123\xi^2 + 2,1784\xi\eta + 1,7096\eta^2 + 0,0829\xi^4 - \\ \quad \left. - 0,2285\xi^3\eta - 0,7635\xi^2\eta^2 + 3,1805\xi\eta^3 + 1,2612\eta^4 \right], \\ T_{\xi\xi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \sqrt{2}\xi\eta + 4,5\eta^2} - 0,7183\xi + 0,0677\sqrt{2}\eta - \right. \\ \quad \left. - 0,0597\xi^3 - 0,2107\sqrt{2}\xi^2\eta + 0,3847\xi\eta^2 + 0,4444\sqrt{2}\eta^3 \right). \end{array} \right.$$

Wykresy (rys. 5-7) na s. 257 przedstawiają plany warstwicowe tych powierzchni.

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. Favre, *Contribution à l'étude des plaques obliques*, Schweiz, Bauztg., 120 (1942).
- [2] H. Favre, *Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences*, Publ. Assoc. Bridge and Struc. Engin., Zurich 1943/44.
- [3] Z. Kączkowski, *Kierunki sprzężone w ciele anizotropowym*, Arch. Mech. stos. 1 (1955).
- [4] J. Krettner, *Zur Theorie und Anwendung der schiefen Platte*, Ing.-Arch. 2 (1953).
- [5] J. Krettner, *Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten*, Ing.-Arch. 1 (1954).
- [6] P. Lardy, *Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte*, Schweiz. Bauztg., 67 (1949).
- [7] С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Москва 1947.
- [8] С. Г. Лехницкий, *О некоторых вопросах связанных с теорией изгиба тонких плит*, Прикл. Мат. Мех. 2 (1938).
- [9] J. Mossakowski, *Rozwiązania osoblwe w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. stos. 3 (1954).
- [10] J. Mossakowski, *Rozwiązania osoblwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. stos. 1 (1955).
- [11] M. Naruoka, H. Yonezawa, *Über die Anwendung der Biegungstheorie orthotroper Platten auf die Berechnung schiefer Balkenbrücken*, Bauing 10 (1957).
- [12] N. J. Nielsen, *Skaevinklede plader*, Ingeniorvidenskablige skrifter, 3, Kopenhaga 1944.

[13] S. T. Ödman, *Studies of Boundary Value Problems, Part 3, Oblique Plate in Oblique Coordinates*, Swedish Cement and Concrete Res. Inst. Royal Inst. Techn., Stockholm, Proc., nr 25, 1955.

[14] A. Pucher, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing.-Arch. 12 (1941).

[15] A. Pucher, *Einflussfelder elastischen Platten*, Wiedeñ 1951.

[16] M. Suchar, *Computation by Means of Polynomials of Influence Surfaces for Anisotropic Plates with Finite Dimensions*, Arch. Mech. stos. 5 (1958).

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ ПЛАСТИНОК В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

В работе приводится расчет поверхностей влияния (функций Грина) для тонких пластинок в форме параллелограмма. Рассуждения проводились при использовании косоугольной прямолинейной координатной системы, оси которой параллельны к сторонам пластинки. В работе принимаются предположения классической теории тонких пластинок с малыми прогибами; кроме того, предполагается, что пластинка изготовлена из однородного, анизотропного, абсолютно упругого материала и имеет в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, параллельную к срединной плоскости пластинки.

В пкт. 1 выводятся зависимости между прогибом пластинки и статическими величинами, составляется дифференциальное уравнение поверхности изгиба пластинки для случая анизотропии и ортотропии; формулируются также краевые условия для наиболее простых случаев закрепления края.

В пкт. 2 проводится расчет особых частей поверхности влияния изгиба для анизотропных, ортотропных и изотропных пластинок методом, данным Ю. Моссаковским для случая прямоугольной координатной системы.

В пкт. 3 дается система полиномов, при помощи которых можно определить регулярные части поверхностей влияния.

В заключительной части работы приводится числовой пример. Рассматривается ортотропная пластинка в форме параллелограмма со сторонами $a = b = 2$ и острым углом у вершины $\alpha = 45^\circ$, две противоположные стороны которого свободно оперты, а остальные свободны. Краевые условия удовлетворяются в приближении, применяя метод наименьших квадратов. Для ориентировки относительно сходимости примененного метода, сравниваются три последовательных приближения при $n = 8, 9, 10$, определяя соответствующие средние погрешности. Прилагаются ламиллярные планы поверхностей влияния изгибающего и скручивающего моментов и перерезывающей силы.

Summary

COMPUTATION OF THE INFLUENCE SURFACES OF PLATES IN THE FORM FOR PARALLELOGRAMS

This paper is devoted to the computation of influence surfaces (Green's functions) for plates having the form of parallelograms. An oblique rectilinear system is considered the axes of which are parallel to the sides of the plate. The assumptions are those of the classical theory of thin plates with small deflections, and that the plate is homogeneous, anisotropic, perfectly elastic and has at every point one plane of elastic symmetry parallel to the middle plane.

In Sec. 1, the relations between the deflection and the cross-section quantities are derived as well as the differential equation of the deflection surface in the case of anisotropy and orthotropy. The boundary conditions are formulated in the simplest cases of support.

Sec. 2 contains the computation of the singular parts of the influence surface of deflection for anisotropic, orthotropic and isotropic plates in a manner given by J. Mossakowski for orthogonal coordinates.

In Sec. 3 a system of polynomials is given by means of which regular parts of the influence surfaces may be determined.

Finally, a numerical example is considered. This concerns an orthotropic plate in the form of a parallelogram, the sides of which are $a=b=2$, the acute angle between the sides being 45° . Two opposite sides are simply supported, the remaining edges are free. The boundary conditions are satisfied in an approximate manner by means of the method of least squares. In order to appraise the convergence of the method used, the three successive approximations for $n=8, 9, 10$ are compared by computing the mean errors. Diagrams of contour lines of the influence surfaces for the bending moment, the twisting moment and the shearing force are presented.

ZAKŁAD MECHANIKI OSRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1959 r.
