SZCZEPAN BORKOWSKI

O PODOBIEŃSTWIE PODSTAWOWYCH RÓWNAŃ FLÜGGEGO I WŁASOWA W TEORII ŁUPIN WALCOWYCH O PRZEKROJU KOŁOWYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXXI

TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Uwagi ogólne

Praca niniejsza zajmuje się porównaniem podstawowych równań różniczkowych łupiny walcowej o przekroju kołowym Flüggego, [1], i Własowa, [2]. Jak można się zorientować z bardzo obszernej literatury poświęconej powłokom, a w szczególności powłokom (łupinom) walcowym, nie zwrócono, jak do tej pory, uwagi na uderzające podobieństwo między tymi równaniami. Sam Własow w swojej pracy [2] porównuje otrzymane równania łupin walcowych, wynikające zresztą z ogólnej teorii powłok Własowa, i to jest ciekawe, jedynie z równaniami podanymi przez Galerkina, Love'a, Timoszenkę i Łuriego, stwierdzając przy tym, że zasadniczą ich wadą jest brak symetrycznej budowy, tj. że operatory symetrycznie położone względem głównej przekątnej nie są sobie równe. W pracy [2] nie ma porównania otrzymanych wyników z wynikami prac Flüggego, w szczególności z równaniami różniczkowymi łupiny obrotowo-walcowej, podanymi np. w pracy [1]. Przypuszczalnie na taki stan rzeczy złożyło się to, że równania Flüggego nie są napisane w postaci operatorowej, a więc porównywanie ich w tym stanie nie było możliwe. Rozważania niniejsze mają na celu wykazanie, że równania Flüggego spełniają podstawowy warunek symetrii (wykryty zresztą przez Własowa) oraz że w przypadku «dokładnej»[1] teorii powłok, pewne operatory równań różniczkowych Własowa i Flüggego są sobie równe, a pozostałe różnią się bardzo nieznacznie. W związku z porównywaniem tych klasycznych już dzisiaj prac wspomnieć należy, że pierwsze publikacje dotyczące powłok walcowych były przez Flüggego i Własowa — jak to wynika z cytowanej przez tych autorów w pracach [1] i [2] literatury — ogłoszone niemal równocześnie (lata 1932-1933).

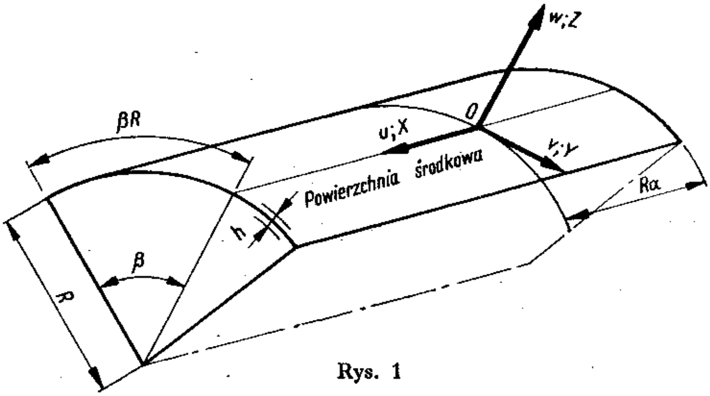
2. Porównanie równań Flüggego i Własowa

W ogólnym przypadku teorii łupin walcowych o przekroju kołowym równania te według teorii Własowa mają postać następującą:

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w = -kX, \\ L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w = -kY, \\ L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w = kZ. \end{cases}
$$

[1] Por. [3], s. 24.

Występujące w tych równaniach składowe wektora przemieszczenia środkowej powierzchni łupiny u, v, w wraz z zaznaczeniem ich dodatnich zwrotów podane są na rys. 1; na tym też rysunku zaznaczono dodatnie kierunki składowych



Rys. 1

X, Y, Z siły powierzchniowej. Postać operatorów występujących w równaniach (2.1) jest następująca:

$$
(2.2)\qquad \begin{cases}
L_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \\[2mm]
L_{12} = L_{21} = \dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \\[2mm]
L_{13} = L_{31} = \nu\dfrac{\partial}{\partial\alpha} - c^2\left(\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha^3} - \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right), \\[2mm]
L_{22} = \dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}, \\[2mm]
L_{23} = L_{32} = \dfrac{\partial}{\partial\beta} - \dfrac{3-\nu}{2}c^2\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}, \\[2mm]
L_{33} = c^2\left(\nabla^2\nabla^2 + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right) + 1 .
\end{cases}
$$

W równaniach (2.2) przez α i β oznaczono bezwymiarowe współrzędne dowolnego punktu środkowej powierzchni łupiny (rys. 1), a przez

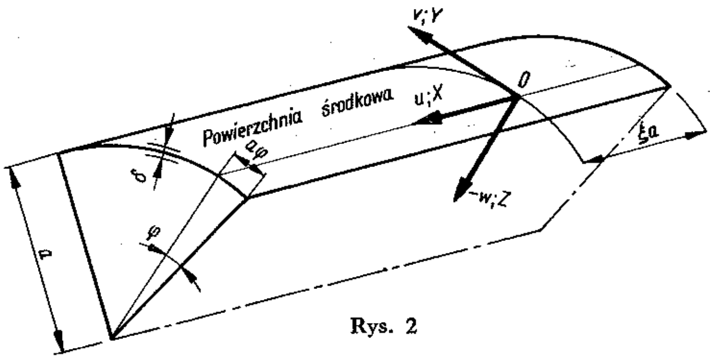
$$
(2.3)\qquad c^2 = \frac{h^2}{12R^2}
$$

oznaczona jest wartość stała, w której h jest grubością rozpatrywanej łupiny a R promieniem środkowej powierzchni łupiny w przekroju promieniowym. Natomiast symbolem

$$
(2.4)\qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}
$$

oznaczony jest operator LAPLACE'A we współrzędnych bezwymiarowych α, β; poza tym w równaniach (2.1) przez k oznaczono stałą wartość

$$k = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2. \tag{2.5}$$



Rys. 2

Równania FLÜGGEGO natomiast mają postać następującą:

$$\left\{\begin{aligned}
& u'' + \frac{1-\nu}{2} u^{\cdot\cdot} + \frac{1+\nu}{2} v'^{\cdot} + \nu w' + \\
& \qquad + \frac{K}{Da^2}\left(\frac{1-\nu}{2} u^{\cdot\cdot} - w''' + \frac{1-\nu}{2} w'^{\cdot\cdot}\right) + \frac{Xa^2}{D} = 0, \\
& \frac{1+\nu}{2} u'^{\cdot} + v^{\cdot\cdot} + \frac{1-\nu}{2} v'' + w^{\cdot} + \\
& \qquad + \frac{K}{Da^2}\left[\frac{3}{2}(1-\nu) v'' - \frac{3-\nu}{2} w''^{\cdot}\right] + \frac{Ya^2}{D} = 0, \\
& \nu u' + v^{\cdot} + w + \frac{K}{Da^2}\left(\frac{1-\nu}{2} u'^{\cdot\cdot} - u''' - \frac{3-\nu}{2} v''^{\cdot} + \right. \\
& \qquad \left. + w^{\mathrm{IV}} + 2w''^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2w^{\cdot\cdot} + w\right) + \frac{Za^2}{D} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

W równaniach tych przecinek oznacza pochodną względem ξ, kropka pochodną względem φ oraz

$$K = \frac{E\,\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{2.7}$$

$$D = \frac{E\,\delta}{1-\nu^2}, \tag{2.8}$$

Wyrażenie (2.7) określa tzw. sztywność zginania łupiny a wyrażenie (2.8) sztywność rozciągania łupiny. Pozostałe oznaczenia — podobnie jak odpowiednie wielkości w teorii WŁASOWA — są podane w sposób widoczny na rys. 2.

[2] W nowszej pracy FLÜGGEGO, [4], równania te mają tę samą postać (równania 98 na s. 150, $X = Y = Z = 0$).

Tablica 1. Zestawienie operatorów różniczkowych równań Flüggego i Własowa[1]

1[2]	L_{11}	$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\underline{c^2\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}}$	L_{12}	$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$	L_{13}	$\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}-c^2\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right)$
2		$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$		$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$		$\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}-c^2\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right)$
1	L_{21}	$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$	L_{22}	$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\underline{\frac{3}{2}(1-\nu)c^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}}$	L_{23}	$\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$
2		$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$		$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$		$\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$
1	L_{31}	$\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}-c^2\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right)$	L_{32}	$\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$	L_{33}	$c^2\left(\nabla^2\nabla^2+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)+1$
2		$\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}-c^2\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}\right)$		$\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$		$c^2\left(\nabla^2\nabla^2+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)+1$

[1] Operatory zestawiono w obu przypadkach zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w pracy [2].

[2] W pierwszej kolejności występują operatory równań FLÜGGEGO; podkreślone wyrazy stanowią dodatkowe wyrażenia, odróżniające te operatory od analogicznych operatorów równań WŁASOWA.

Jeżeli do wzorów (2.6) wprowadzimy oznaczenia takie jak u Własowa (odpowiedniość wynika z porównania rys. 1 i rys. 2), to równania te sprowadzą się do postaci (2.1), a odpowiednie operatory w tym przypadku dla równań Flüggego będą miały postać następującą:

$$
(2.9)\qquad
\begin{cases}
L_{11} = \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \underline{c^2\dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}}, \\[2ex]
L_{22} = \dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \underline{\dfrac{3}{2}(1-\nu)c^2\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2}}, \\[2ex]
L_{33} = c^2\left(\nabla^2\nabla^2 + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right) + 1, \\[2ex]
L_{12} = L_{21} = \dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \\[2ex]
L_{13} = L_{31} = \nu\dfrac{\partial}{\partial\alpha} - c^2\left(\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha^3} - \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha\,\beta^2}\right), \\[2ex]
L_{23} = L_{32} = \dfrac{\partial}{\partial\beta} - \dfrac{3-\nu}{2}c^2\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}.
\end{cases}
$$

Ze wzorów (2.9) widać, że ostatnie cztery operatory mają postać taką samą jak u Własowa; natomiast w dwu pierwszych operatorach występują pewne dodatkowe wyrazy [te dodatkowe wyrazy zostały w równaniach (2.9) podkreślone] przedstawiające w równaniach teorii łupin wielkości bardzo małe, gdyż zawierają czynnik c^2. Z zapisu tego wynika również, że operatory równań Flüggego spełniają warunek symetrii.

3. Wnioski końcowe

Reasumując powyższe wywody możemy powiedzieć, że operatory omawianych równań Flüggego i własowa posiadają na ogół tę samą budowę. Różnica zachodzi tylko w przypadku dwóch operatorów i to jedynie decyduje o odmienności zasadniczego układu równań Flüggego i Własowa. Z przeprowadzonej analizy wynika, iż operatory równań Flüggego są symetryczne względem głównej przekątnej, co jest — jak to zauważył Własow — w pełnej zgodności z zasadą Bettiego. Dla lepszego uwidocznienia podobieństwa tych operatorów zestawiono je w tablicy 1.

Literatura cytowana w tekście

[1] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer, Berlin 1934.

[2] В.З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Гос. Изд. Тех. Теор. Лит., Москва-Ленинград 1949.

[3] D. Rüdiger, J. Urban, *Łupiny walcowe o przekroju kołowym*, Arkady Warszawa 1958.

[4] W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer, Berlin (Göttingen)-Heildelberg 1957.

Резюме

О ПОДОБИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ФЛЮГГЕ И ВЛАСОВА В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Проводится сравнение основных дифференциальных уравнений Флюгге и Власова для цилиндрических оболочек кругового сечения. В результате проведенного анализа этих уравнений констатируется, что из общего числа девяти операторов уравнений Флюгге — семь имеет структуру идентичную с операторами Власова, а два остальных разнятся от первых незначительно. Это подобие показано в табл. 1. Устанавливается также, что операторы дифференциальных уравнений Флюгге удовлетворяют основному условию, являющемуся в согласии с принципом Бетти равенства соответствующих себе операторов, расположенных симметрично по отношению главной диагонали системы уравнений (2.1).

Summary

ON THE SIMILARITY BETWEEN THE BASIC EQUATIONS OF FLÜGGE AND VLASOV IN THE THEORY OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS

The paper contains a comparison between the basic differential equations of circular cylindrical shells derived by Flügge and Vlasov. As a result of the analysis of these equations it is found that of the nine operators of the Flügge equations seven have a structure identical with that of Vlasov, the difference for the remaining two being very small. It is found also that the operators of the Flügge equations satisfy the fundamental condition (in agreement with the Betti principle) of the equality of operators located symmetrically in relation to the principal diagonal of the system of equations (2.1).

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1960 r.