

MAREK SOKOŁOWSKI

**NAPRĘŻENIA CIEPLNE W POWŁOCE KULISTEJ ORAZ  
CYLINDRYCZNEJ W PRZYPADKU MATERIAŁÓW  
O WŁASNOŚCIACH ZALEŻNYCH OD TEMPERATURY**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLXIX**

**TOM VIII • ZESZYT 4 • ROK 1960**

## SPIS TREŚCI

Oznaczenia	643
1. Wstęp	643
2. Przemieszczenia i naprężenia	645
3. Rozkład temperatury	650
4. Naprężenia przy zmiennym współczynniku przewodnictwa	656
5. Wykładnicza zmienność modułu sprężystości	665

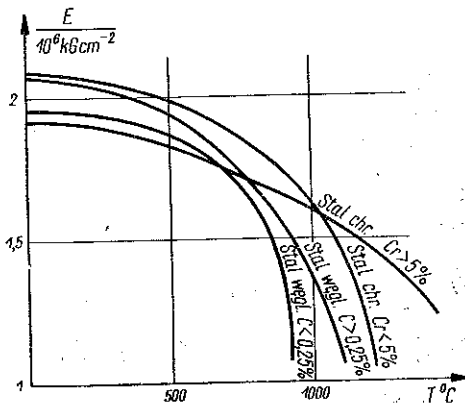
### Oznaczenia

- $a$  współczynnik rozszerzalności cieplnej,  
 $E$  moduł sprężystości materiału,  
 $E_0, E_1$  moduły sprężystości w temperaturach  $T_0$  i  $T_1$ ,  
 $\eta, \eta_1$  względne moduły sprężystości:  $\eta = E/E_0, \eta_1 = E_1/E_0$ ,  
 $F(\vartheta)$  funkcja temperatury  $F(v) = \int_1^{\vartheta} \lambda(v) dv / \int_1^{\vartheta_1} \lambda(v) dv$ ,  
 $\kappa, \kappa_1$  współczynniki:  $\kappa = [2/(\varrho_1^2 - 1)] \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 d\varrho, \kappa_1 = [3/(\varrho_1^3 - 1)] \int_1^{\varrho_1} \varrho^3 d\varrho$ ,  
 $\lambda$  współczynnik przewodnictwa cieplnego,  
 $\nu$  współczynnik POISSONA,  
 $r, \varphi, z$  współrzędne układu biegunowego,  
 $r, \varphi, \theta$  współrzędne układu walcowego,  
 $r_0, r_1$  promień wewnętrzny i zewnętrzny powłoki,  
 $\varrho, \varrho_1$  współrzędne bezwymiarowe:  $\varrho = r/r_0, \varrho_1 = r_1/r_0$ ,  
 $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  naprężenia w walcowym i biegunowym układzie współrzędnych,  
 $S(T)$  funkcja zmiennej  $T$ :  $S(T) = \int_{T_0}^T \lambda(T) dT$ ,  
 $R(\varrho)$  funkcja zmiennej  $\varrho$ :  $R(\varrho) = \int_1^{\varrho} \varrho d\varrho / \eta$ ,  
 $T$  temperatura [°C],  
 $T_0, T_1$  temperatura powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej,  
 $\vartheta$  temperatura względna:  $\vartheta = T/T_1, \vartheta_0 = T_0/T_1$ ,  
 $u$  przemieszczenie w kierunku promienia.

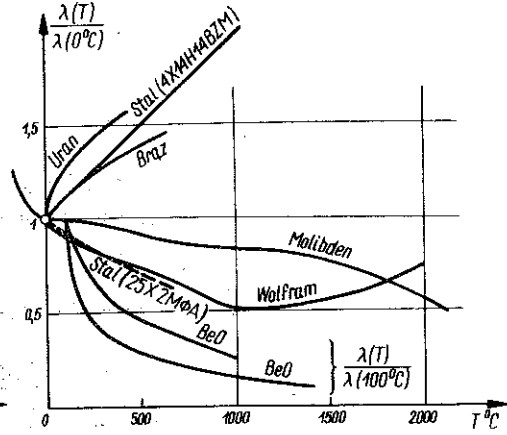
### 1. Wstęp

W pracy zajmiemy się ustalonymi zagadnieniami termosprężystości dotyczącymi naprężeń, jakie powstają w ściankach rury (powłoki walcowej) lub wydrążonej kuli (powłoki kulistej), w przypadku, gdy ich powierzchnia wewnętrzna i zewnętrzna zostają podgrzane do różnych temperatur  $T_0$  i  $T_1$ . W przypadku materiałów jednorodnych zagadnienie to jest oczywiście od dawna rozwiązane i cytowane w literaturze, np. w książce TIMOSZENKI, [1]. My zatrzymamy się tu nad zagadnieniem wpływu, jaki posiada na rozkład naprężeń cieplnych fakt, że w rzeczywistości własności fizyczne materiałów

zmieniają się w pewnym stopniu wraz z temperaturą. Dotyczy to w szczególności współczynnika przewodnictwa  $\lambda$ , modułu sprężystości  $E$  i współczynnika rozszerzalności cieplnej  $\alpha$ . Zmienność tych parametrów z temperaturą jest zazwyczaj uważana za nieznaczną i jest pomijana w obliczeniach. Postępowanie takie jest uzasadnione jednak tylko tak długo, dopóki zakres tem-

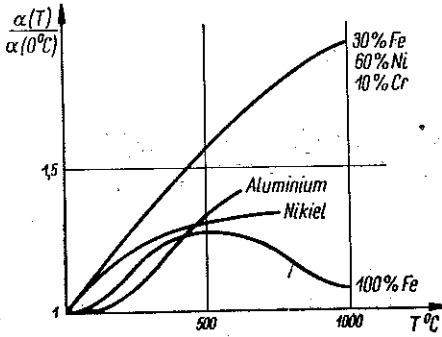


Rys. 1



Rys. 2

peratury występujący w zagadnieniu jest dostatecznie mały, a sama temperatura dostatecznie niska. Jednak współczesna technika operuje często temperaturami daleko przekraczającymi te granice i zaniedbywanie wpływu zależności współczynników  $E$ ,  $\lambda$  lub  $\alpha$  na rozkład naprężeń cieplnych prowadzi może do zbyt dużych błędów. Dla ilustracji na rys. 1, 2 i 3 podajemy wykresy, przedstawiające zależności  $E(T)$ ,  $\lambda(T)$  i  $\alpha(T)$  dla kilku materiałów konstrukcyjnych i izolacyjnych; zaczerpnięte z opracowania W. S. CZIRKINA, [7].



Rys. 3

W 1952 r. zagadnienie to podjął H.H. HILTON, [2], rozważając ciała nieściśliwe i podając pewne twierdzenia, określające górną granicę naprężeń cieplnych, jakie w takich materiałach mogą wystąpić. W r. 1958 R. TROSTEL, [3] i [4], podał ogólne równania termospężystości dla ciał o omawianych włas-

nościach, a także omówił bardziej szczegółowo kilka przypadków szczególnych, m. in. zagadnienie naprężeń termicznych w rurze oraz w zginanym pręcie. Szczególny nacisk kładzie przy tym TROSTEL na uwzględnienie zależności modułu sprężystości od temperatury, a ogólne rozwiązanie podaje w postaci szybkozbieżnych szeregów potęgowych w oparciu o metodę małego parametru.

Równanie różniczkowe dla  $u$  oraz pewne rozwiązania ściśle podaje także dla przypadku rury SZESTIERIKOW, [5], przy założeniu, że od temperatury zależy wyłącznie moduł sprężystości i to w postaci wykładniczej  $E = E_0 \exp AT$ . Wreszcie ostatnio J. NOWIŃSKI, [6], omawia problem naprężeń cieplnych dla zagadnienia o symetrii kulistej, kładąc jednak szczególny nacisk na zmienność modułu  $E$  i współczynnika  $\alpha$ ; ponadto zakłada on, podobnie jak większość innych autorów, że ciało jest nieściśliwe i  $\nu = 0,5$ .

My podajemy poniżej ogólne związki, pozwalające wyznaczyć naprężenia cieplne w przypadku dowolnej zależności  $\lambda$ ,  $E$  i  $\alpha$  od temperatury w kilku zagadnieniach jednowymiarowych ustalonego przepływu ciepła, także i przy uwzględnieniu istnienia w obrębie materiału źródeł ciepła. Jednak szczególny nacisk położony zostanie na analizę znaczenia zmienności współczynnika przewodnictwa  $\lambda(T)$ . Zamieszczone w pracy wykresy oraz pewne wzory przybliżone pozwalają w stosunkowo prosty sposób ocenić nie tylko jakościowy, ale i ilościowy wpływ tej zmienności na przebieg naprężeń cieplnych i ich wartości ekstremalne.

## 2. Przemieszczenia i naprężenia

Zatrzymamy się na następujących przypadkach konstrukcji.

*Przypadek I.* Pierścień kołowy lub rura o bardzo małej długości na całej powierzchni wolna od obciążeń. Pobocznicę (wewnętrzna i zewnętrzna) utrzymywane są w stałych temperaturach, równych odpowiednio  $T_0$  i  $T_1$ . Mamy tu do czynienia z płaskim stanem naprężenia ( $\sigma_z = 0$ ).

*Przypadek II.* Rura o unieruchomionych powierzchniach czołowych (obustronnie utwierdzona). Przy pozostałych warunkach niezmiennych w ściance rury panować będzie płaski stan odkształcenia ( $\varepsilon_z = 0$ ).

*Przypadek III.* Jeśli rura omówiona w przypadku II jest dostatecznie długa, a posiada końce swobodne, to w jej części środkowej panuje płaski stan odkształcenia, charakteryzujący się zależnością  $\varepsilon_z = \text{const} \neq 0$ . W tym przypadku naprężenia  $\sigma_z \neq 0$ , choć wypadkowa siła osiowa w każdym przekroju musi oczywiście być równa zeru ze względu na warunki równowagi. W pobliżu swobodnych końców rury będziemy mieli do czynienia z płaskim stanem naprężenia.

*Przypadek IV.* Ostatnią rozważaną konstrukcją jest kula ze współśrodkowym, kulistym wydrążeniem (grubościenne powłoka kulista), o obu powierzchniach wolnych od obciążeń zewnętrznych, utrzymywanych w różnych temperaturach  $T_0$  i  $T_1$ .

We wszystkich wymienionych przypadkach zajmiemy się przemieszczeniem promieniowym  $u$ , gdyż przemieszczenia pozostałe (z wyjątkiem  $w$  w przypadku III) równe są zeru.

Przypadek I. Wstawiając naprężenia z prawa HOOKE'A

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\nu}$$

do równania równowagi

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0$$

otrzymujemy po pewnych przekształceniach równanie różniczkowe

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T \right] \right\} = (1-\nu) \frac{u}{r} \frac{\partial E}{\partial r}.$$

Przypadek II i III. W płaskim stanie odkształcenia prawo HOOKE'A w postaci

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}$$

wraz z niezmiennym równaniem równowagi (2.1) prowadzi do równania

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \right] \right\} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{u}{r} \frac{\partial E}{\partial r}.$$

Przypadek IV. Stan naprężenia w kuli przy sferycznej symetrii rozkładu temperatury opisują dwa naprężenia  $\sigma_r$  oraz  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\nu \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T \right], \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - (1+\nu)\alpha T \right]. \end{cases}$$

Jedynym w tym przypadku równaniem równowagi ma postać

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0$$

i prowadzi do równania różniczkowego dla przemieszczenia

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} u - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \right] \right\} = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{u}{r} \frac{\partial E}{\partial r}.$$

Łatwo zauważyć, że przyjęcie modułu  $E$  niezależnego od  $T$ , a zatem i od  $r$ , upraszcza w sposób zasadniczy równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach (2.2), (2.3) i (2.5). Prawe strony tych równań znikają, lewe zaś ograniczają się wyłącznie do wyrazów zawartych w nawiasach kwadratowych i sprowadzają się do zależności znanych z literatury podręcznikowej.

Duże uproszczenia w omawianych równaniach przemieszczeniowych uzyskać można jednak i w dwóch innych przypadkach. Jeśli mianowicie mamy do czynienia z materiałem nieściśliwym, tj. takim, w którym współczynnik POISSONA  $\nu = 0,5$ , to prawe strony równań (2.3) i (2.5) znikają i otrzymujemy równania uproszczone

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - 3\alpha T \right] \right\} = 0,$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} - 3\alpha T \right] \right\} = 0,$$

które można scałkować w sposób ścisły. W płaskim stanie naprężenia uproszczenie to nie występuje.

Drugą możliwość uproszczenia równań przemieszczeniowych uzyskujemy wtedy, gdy zmienność  $E$  z temperaturą jest nieznaczna, a  $\nu$  jest bliskie 0,5. Ten ostatni fakt ma miejsce w większości materiałów przy podwyższonych temperaturach. Wtedy w równaniach (2.3) i (2.5) można z pewnym przybliżeniem pominąć prawe strony i uproszczone w ten sposób równania scałkować w sposób ścisły. Niezależnie od tych warunków rozwiązanie tak uproszczonych równań stanowić może w każdym razie pierwsze przybliżenie rozwiązania ścisłego. Uwzględnia ono częściowo zależność  $E$  od  $r$  dzięki pozostawieniu w klamrach po lewej stronie tych równań modułu sprężystości  $E$ .

Sposób całkowania uproszczonych równań przemieszczeniowych pokażemy na przykładzie równania (2.3), dotyczącego płaskiego stanu odkształcenia. Całkując raz równanie

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ E \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \right] \right\} = 0$$

otrzymujemy

$$(2.8) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T + \frac{A}{E},$$

gdzie  $A$  jest stałą całkowania. Rozwiązaniem równania (2.8) jest

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r r \alpha T dr + \frac{A}{r} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{E} + \frac{B}{r}$$

z drugą stałą całkowania  $B$ . Stałe  $A$  i  $B$  wyznaczamy z warunku, aby dla  $r = r_0$  i  $r = r_1$  naprężenia  $\sigma_r$  były równe zeru. Z układu równań

$$A \frac{1-\nu}{E_0} - B \frac{1-2\nu}{r_0^2} = 0,$$

$$A \left( \frac{1-\nu}{E_1} - \frac{1-2\nu}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r dr}{E} \right) - B \frac{1-2\nu}{r_1^2} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} r \alpha T dr$$

otrzymujemy

$$(2.9) \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\frac{1}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} r a T dr}{\frac{1-\nu}{E_1} - \frac{1-2\nu}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r dr}{E} - \frac{1-\nu}{E_0} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}, \\ B &= (1+\nu) \frac{\frac{r_0^2}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} r a T dr}{\frac{1-\nu}{E_1} E_0 - \frac{1-2\nu}{r_1^2} E_0 \int_{r_0}^{r_1} \frac{r dr}{E} - (1-\nu) \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}. \end{aligned} \right.$$

W podobny sposób całkujemy pozostałe równania przemieszczeniowe. Podajemy obecnie wzory na naprężenia otrzymane tą drogą dla przypadków II, III i IV.

Przypadek II, płaski stan odkształcenia ( $\varepsilon_z = 0$ ):

$$(2.10) \left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_0}{(1-\nu)\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta R(\varrho) - \eta}{\varrho_1^2 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta_1 R(\varrho_1) - \eta_1} \eta_1 \int_1^{\varrho_1} \varrho a T d\varrho - \eta \int_1^{\varrho} \varrho a T d\varrho \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{E_0}{(1-\nu)\varrho^2} \left[ \frac{\frac{\nu}{1-\nu} \varrho^2 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta R(\varrho) + \eta}{\varrho_1^2 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta_1 R(\varrho_1) - \eta_1} \eta_1 \int_1^{\varrho_1} \varrho a T d\varrho + \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_1^{\varrho} \varrho a T d\varrho - \eta a T \varrho^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(2.11) \quad \sigma_z = \frac{E_0}{1-\nu} \left[ \frac{\frac{\nu}{1-\nu} \eta_1 \int_1^{\varrho_1} \varrho a T d\varrho}{\varrho_1^2 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \eta_1 R(\varrho_1) - \eta_1} - \eta a T \right].$$

Naprężenie  $\sigma_z$  obliczyliśmy z równości  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) - E a T$ .

Przypadek III, płaski stan odkształcenia  $\varepsilon_z = \text{const}$ .

Naprężenia  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  pozostają niezmiennione w stosunku do przypadku II [równania (2.10)]. Natomiast naprężenia osiowe  $\sigma_z$  obliczamy z warunku  $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) - E a T + \sigma'_z$ , przy czym naprężenie dodatkowe  $\sigma'_z$  wyznaczyć nale-



zy z warunku, by wypadkowa siła osiowa w dowolnym przekroju rury była równa zero, tj. aby

$$(2.12) \quad \int_1^{\rho_1} \rho \sigma_z(\rho) d\rho = \int_1^{\rho_1} [\nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) - E\alpha T + \sigma'_z] d\rho = 0.$$

Jednocześnie jednak rozkład tych dodatkowych naprężeń powinien być taki, by nie naruszyć płaskiego stanu odkształcenia. W przypadku stałego modułu sprężystości  $E$  warunek taki spełnia naprężenie niezależne od  $\rho$ ,  $\sigma'_z = \text{const}$ . Ponieważ jednak tutaj moduł  $E$  zmienia się wraz z  $T$ , a więc i z  $\rho$ , to naprężenie  $\sigma'_z$  w równaniu (2.12) powinno być także funkcją  $\rho$ .

Przypadek IV, powłoka kulista:

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{2E_0}{(1-\nu)\rho^3} \left[ \frac{\rho^3 - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\eta R_1(\rho) - \eta}{\rho_1^3 - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}\eta_1 R_1(\rho_1) - \eta_1} \eta_1 \int_1^{\rho_1} \rho^2 \alpha T d\rho - \eta \int_1^{\rho_1} \rho^2 \alpha T d\rho \right], \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{E_0}{(1-\nu)\rho^3} \left[ \frac{\frac{2\nu\rho^3}{1-\nu} + \frac{2(1-2\nu)\eta R_1(\rho)}{1-\nu} + \eta}{\rho_1^3 - \frac{2(1-2\nu)\eta_1 R_1(\rho_1)}{1-\nu} - \eta_1} \eta_1 \int_1^{\rho_1} \rho^2 \alpha T d\rho + \right. \\ \left. + \eta \int_1^{\rho} \rho^2 \alpha T d\rho - \eta \alpha T \rho^3 \right]. \end{array} \right.$$

Podobnie jak równania (2.3) i (2.5) wzory (2.9)-(2.13) ulegają znacznym uproszczeniom w przypadku ciała nieściśliwego ( $\nu = 0,5$ ) i przedstawiają wtedy ściśle rozwiązania problemu.

Do szczególnie prostej postaci, znanej od dawna w literaturze (por. np. [1]), doprowadzić je można przy założeniu zupełnej niezależności modułu sprężystości  $E$  od temperatury, a tym samym i od promienia  $r$ . Przytaczamy je poniżej stosując numerację, przyporządkowującą je odpowiednim przypadkom I-IV i wzorom (2.9)-(2.13):

$$(2.9.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{E}{\rho^2} \left[ \frac{\rho^2 - 1}{\rho_1^2 - 1} \int_1^{\rho_1} \rho \alpha T d\rho - \int_1^{\rho} \rho \alpha T d\rho \right], \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{\rho^2} \left[ \frac{\rho^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \int_1^{\rho_1} \rho \alpha T d\rho + \int_1^{\rho} \rho \alpha T d\rho \right] - E\alpha T; \end{array} \right.$$

$$(2.10.1) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1-\nu)\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2-1}{\varrho_1^2-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \alpha T d\varrho - \int_1^{\varrho} \varrho \alpha T d\varrho \right], \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\nu)\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2+1}{\varrho_1^2-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \alpha T d\varrho + \int_1^{\varrho} \varrho \alpha T d\varrho \right] - \frac{E\alpha T}{1-\nu}; \end{cases}$$

$$(2.11.1) \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \left[ \frac{1}{\varrho_1^2-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \alpha T d\varrho - \alpha T \right];$$

$$(2.13.1) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{2E}{(1-\nu)\varrho^3} \left[ \frac{\varrho^3-1}{\varrho_1^3-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 \alpha T d\varrho - \int_1^{\varrho} \varrho^2 \alpha T d\varrho \right], \\ \sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\nu)\varrho^3} \left[ \frac{2\varrho^3+1}{\varrho_1^3-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 \alpha T d\varrho + \int_1^{\varrho} \varrho^2 \alpha T d\varrho \right] - \frac{E\alpha T}{1-\nu}. \end{cases}$$

### 3. Rozkład temperatury

We wszystkich wzorach wyprowadzonych w poprzednim paragrafie występuje funkcja temperatury  $T(r)$  lub  $T(\varrho)$ , którą wyznaczyć należy z równania przewodnictwa i termicznych warunków zagadnienia. Równanie przewodnictwa dla przypadku osiowo-symetrycznego przy uwzględnieniu zależności współczynnika przewodnictwa  $\lambda$  od temperatury ma postać nieliniową:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dr} \left[ r\lambda(T) \frac{dT}{dr} \right] = -rw(r).$$

Symbol  $w(r)$  oznacza tu intensywność źródeł ciepła rozłożonych, także osiowo-symetrycznie, wewnątrz materiału (mierzoną w  $\text{kcal cm}^{-3} \text{sek}^{-1}$ ). Jest to jeden z najprostszych przykładów nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych i daje się prosto scałkować.

Jednokrotne całkowanie (3.1) daje

$$r\lambda(T) \frac{dT}{dr} = - \int_{r_0}^r rw(r) dr + C,$$

gdzie  $C$  oznacza stałą całkowania. Pozostawiamy teraz wszystkie wyrazy zawierające  $T$  po lewej stronie równania i całkujemy powtórnie

$$(3.2) \quad \int_{T_0}^T \lambda(T) dT = - \int_{r_0}^r \left[ \frac{1}{r} \int_{r_0}^r rw(r) dr \right] dr + \int_{r_0}^r \frac{C}{r} dr.$$

Granice dolne tych ostatnich całek dobieramy w ten sposób, aby spełniony był od razu warunek termiczny na wewnętrznej powierzchni rury  $T(r_0) = T_0$ .

Stałą  $C$  występującą w równaniu (3.2) obliczamy natomiast z drugiego warunku  $T(r_1) = T_1$ . Otrzymamy w ten sposób:

$$C = \frac{\int_{T_0}^{T_1} \lambda(T) dT + \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^r r w(r) dr}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$$

Wstawiając tę wartość na powrót do (3.2) dochodzimy do związku

$$(3.3) \quad \ln \frac{r}{r_0} = \frac{\int_{T_1}^T \lambda(T) dT + \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \int_{r_0}^r r w(r) dr}{\int_{T_0}^{T_1} \lambda(T) dT + \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \int_{r_0}^r r w(r) dr}$$

Wprowadzenie oznaczeń

$$(3.4) \quad \begin{cases} \int_{T_0}^T \lambda(T) dT = S(T), & \int_1^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_1^{\varrho} \varrho w(\varrho) d\varrho = W(\varrho), \\ \frac{r}{r_0} = \varrho, & \frac{r_1}{r_0} = \varrho_1, & F_1(\varrho, T) = \frac{S(T) + w(\varrho)}{S(T_1) + w(\varrho_1)} \end{cases}$$

pozwala przedstawić związek (3.3) w bardzo prostej postaci

$$(3.5) \quad \varrho = \varrho_1^{F_1(\varrho, T)}$$

W podobny sposób całkujemy równanie przewodnictwa w przypadku symetrii sferycznej (powłoka kulista):

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \lambda(T) \frac{dT}{dr} \right] = -r^2 w(r), \\ \int_{T_0}^T \lambda(T) dT = - \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} \int_{r_0}^r r^2 w(r) dr + C_1 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right); \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \varrho = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F_1'(\varrho, T)}$$

Tutaj oznaczono

$$(3.8) \quad F_1'(\varrho, T) = \frac{S(T) + W'(\varrho)}{S(T_1) + W'(\varrho_1)}, \quad W'(\varrho) = r_0^2 \int_1^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2} \int_1^{\varrho} \varrho^2 w(\varrho) d\varrho.$$

Jak widać, rozwiązania równań przewodnictwa (3.1) i (3.6) nie dają się w tym przypadku przedstawić w postaci jawnej ani względem zmiennej  $T$ , ani  $\varrho$ . Rozwiązania te można rozkwikłać względem  $T$  jedynie w przypadku szczegól-

nie prostych (np. liniowych) zależności  $\lambda = \lambda(T)$ , a względem  $\varrho$  — w przypadku pewnych szczególnych funkcji rozkładu źródeł ciepła  $w(r)$ . Przy zupełnym braku źródeł ciepła wewnątrz ciała [ $w(r) \equiv 0$ ] rozwiązania (3.5) i (3.7) mają jednak bezpośrednio postać jawną względem zmiennej  $\varrho$ , co wykorzystamy w dalszej części pracy.

Rozwikłaną względem  $\varrho$  postać rozwiązań równania przewodnictwa uzyskać możemy także w przypadku, gdy rozkład źródeł ciepła  $w(\varrho)$  przedstawia funkcję DIRACA  $w_0 \delta(\varrho - \xi)$ . Oznacza to, że wydzielanie ciepła następuje w nieskończenie cienkiej warstwie walcowej (w przypadku rury) lub kulistej (w przypadku kuli) o promieniu  $r_0 \xi$  z intensywnością  $w_0$ , reszta ciała jest zaś wolna od źródeł ciepła. Funkcja  $W(\varrho)$  przybiera wtedy wartości następujące:

$$W(\varrho) = r_0^2 \int_1^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_1^{\varrho} \varrho w_0 \delta(\varrho - \xi) d\varrho = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \varrho < \xi; \\ w_0 r_0^2 \xi \ln \frac{\varrho}{\xi}, & \text{jeśli } \varrho > \xi. \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach wzoru (3.5) otrzymujemy dla zagadnienia osiowo-symetrycznego następujące zależności między  $\varrho$  i  $T$ :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \varrho = \varrho_1 \frac{S(T)}{S(T_1) + w_0 r_0^2 \xi \ln \frac{\varrho_1}{\xi}}, & \text{jeśli } \varrho < \xi; \\ \varrho = \varrho_1 \frac{S(T) - w_0 r_0^2 \xi \ln \xi}{S(T_1) - w_0 r_0^2 \xi \ln \xi}, & \text{jeśli } \varrho > \xi. \end{cases}$$

Związki (3.9) można także rozwikłać względem funkcji temperatury:

$$(3.10) \quad \begin{cases} S(T) = \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} S(T_1) + w_0 r_0^2 \xi \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} \ln \frac{\varrho_1}{\xi}, & \text{jeśli } \varrho < \xi, \\ S(T) = \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} S(T_1) + w_0 r_0^2 \xi \frac{\ln \xi}{\ln \varrho_1} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho}, & \text{jeśli } \varrho > \xi. \end{cases}$$

Pierwsze wyrazy po prawej stronie równań (3.10) stanowią rozwiązanie przypadku, gdy w rurze brak źródeł ciepła. Drugie wyrazy traktować zaś można jako funkcję GREENA naszego zagadnienia. Rozwiązanie dla dowolnego rozkładu źródeł ciepła otrzymać więc można albo bezpośrednio ze wzoru (3.5), albo za pomocą wzoru

$$S(T) = \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} S(T_1) + \int_1^{\varrho_1} w_0(\xi) G(\varrho, \xi) d\xi,$$

gdzie na miejsce funkcji GREENA  $G(\varrho, \xi)$  wstawić należy odpowiednio

$$r_0^2 \xi \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} \ln \frac{\varrho_1}{\xi} \quad \text{a'bo} \quad r_0^2 \xi \frac{\ln \xi}{\ln \varrho_1} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho}$$

zależnie od tego czy  $\varrho$  jest mniejsze, czy większe od  $\xi$ .

Podobne wyniki otrzymamy w przypadku powłoki kulistej. Ponieważ dla  $w(\varrho) = w_0 \delta(\varrho - \xi)$  mamy

$$W'(\varrho) = r_0^2 \int_1^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2} \int_1^{\varrho} \varrho^2 w_0 \delta(\varrho - \xi) d\varrho = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \varrho < \xi, \\ r_0^2 w_0 \xi^2 \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\varrho} \right), & \text{jeśli } \varrho > \xi, \end{cases}$$

to wzór (3.7) przybiera dla tego przypadku postać

$$(3.11) \quad \begin{cases} \varrho = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{S(T)}{S(T_1) + W'(\varrho_1)} \right]^{-1}, & \text{jeśli } \varrho < \xi; \\ \varrho = \frac{r_0^2 w_0 \xi^2 - \frac{[S(T_1) + W'(\varrho_1)] \varrho_1}{\varrho_1 - 1}}{S(T) + w_0 r_0 \xi - \frac{[S(T_1) + W'(\varrho_1)] \varrho_1}{\varrho_1 - 1}}, & \text{jeśli } \varrho > \xi. \end{cases}$$

Także i tutaj możemy wyznaczyć funkcję GREENA dla  $S(T)$ , przekształcając (3.11) do postaci

$$(3.12) \quad \begin{cases} S(T) = \frac{(\varrho - 1) \varrho_1}{(\varrho_1 - 1) \varrho} \left[ S(T_1) + w_0 r_0^2 \xi^2 \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \right], & \text{jeśli } \varrho < \xi, \\ S(T) = \frac{(\varrho - 1) \varrho_1}{(\varrho_1 - 1) \varrho} \left[ S(T_1) + w_0 r_0^2 \xi^2 \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \right], & \text{jeśli } \varrho > \xi. \end{cases}$$

W przypadku gdy wewnątrz ciała nie zachodzi wydzielanie ciepła [ $w(\varrho) \equiv 0$ ], otrzymujemy rozwiązania równań przewodnictwa w szczególnie prostej i rozwikłanej względem  $\varrho$  postaci:

w zagadnieniu osiowo-symetrycznym

$$(3.13) \quad \varrho = \varrho_1^{r(T)};$$

w zagadnieniu sferycznie-symetrycznym

$$(3.14) \quad \varrho = \frac{1}{1 - \left( 1 - \frac{1}{\varrho_1} \right) F(T)}.$$

Wprowadzona tu funkcja temperatury

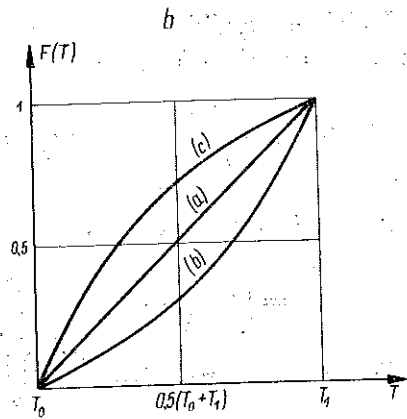
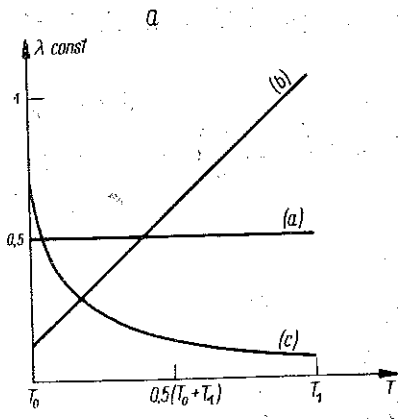
$$F(T) = \frac{\int_{T_0}^T \lambda(T) dT}{\int_{T_0}^{T_1} \lambda(T) dT} = [F_1(r, T)]_{w_0=0} = [F_1'(r, T)]_{w_0=0}$$

posiada następujące, łatwe do sprawdzenia, własności:

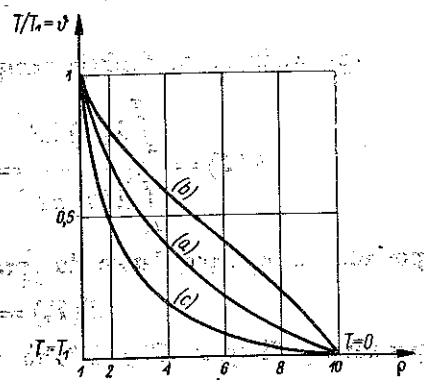
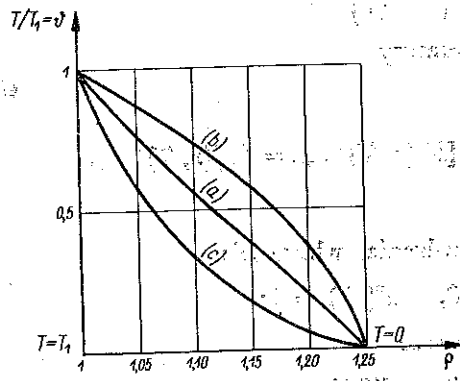
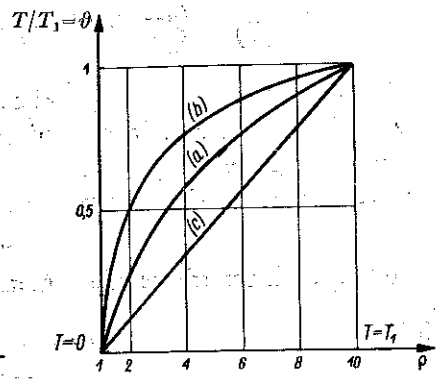
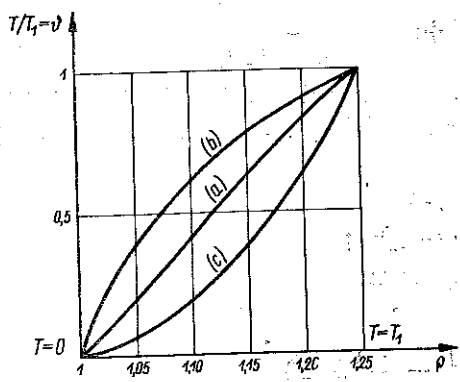
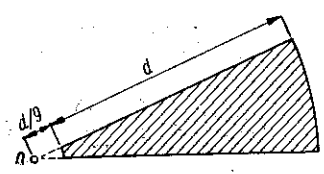
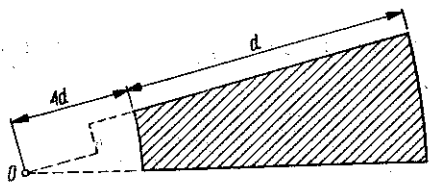
$$F(T_0) = 0, \quad F(T_1) = 1;$$

ponadto, jeśli tylko  $T' > T''$ , to zawsze

$$F(T') > F(T'').$$



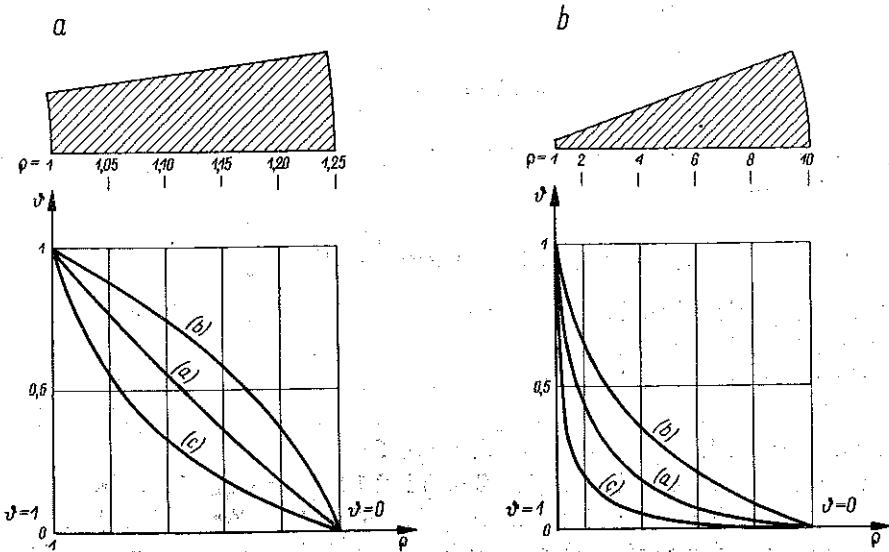
Rys. 4



Rys. 5

Rys. 6

Postać funkcji  $F(T)$  zależy oczywiście od charakteru zmienności  $\lambda = \lambda(T)$ . Przy  $\lambda(T) = \text{const}$  funkcja  $F(T)$  jest funkcją liniową. Na rysunku 4 przedstawiono przebieg funkcji  $F(T)$  dla trzech przypadków: ciała jednorodnego ( $\lambda = \text{const}$ , prosta  $a$ ), dla materiału o współczynniku  $\lambda$  wzrastającym wraz ze wzrostem temperatury (krzywa  $b$ ) oraz o współczynniku  $\lambda$  malejącym wraz ze wzrostem temperatury (krzywa  $c$ ). Zmienność  $\lambda$  według krzywej  $c$  odpowiada według W. S. CZIRKINA, [2], porowatemu tlenkowi berylu ( $\text{BeO}$ ), materiałowi o wybitnych własnościach izolacyjnych i ognioodpornych, w zakresie temperatur  $100^\circ\text{C}$ - $1400^\circ\text{C}$ . Prosta  $b$  na rys. 4a posiada charakter właściwy zmienności  $\lambda$  dla pewnego gatunku stali (por. [2]) w granicach  $0$ - $800^\circ\text{C}$ , jednak dla łatwiejszej interpretacji wyników stosunek  $\lambda_{800}/\lambda_0$  został kilkakrotnie



Rys. 7

zwiększony. W dalszym ciągu pracy omawiając te przypadki mówić będziemy dla krótkości o «materiale jednorodnym» ( $a$ ) oraz o materiałach ( $b$ ) i ( $c$ ). Także dla uproszczenia przyjmować będziemy dla tych materiałów jednakowy zakres zmienności temperatury oraz wprowadzimy bezwymiarową zmienną temperatury  $\vartheta = T/T_1$ ; mamy wobec tego dla funkcji  $F(\vartheta)$  przy  $T_0 = 0$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1.$$

Na rysunkach 5 i 6 podano dla materiałów ( $a$ ), ( $b$ ) i ( $c$ ) wykresy temperatur  $\vartheta = \vartheta(\rho)$  w dwóch przypadkach: gdy temperatura wewnętrzna rury wynosi  $T_1$ , a temperatura zewnętrzna równa się zero, oraz w przypadku odwrotnym. Wykresy te podano dla rur o różnych grubościach ścianek:  $\rho_1 = r_1/r_0 = 1,75$  i  $\rho_1 = 10$ .

Podobnie na rys. 7 przedstawiono graficznie przebieg temperatury w powłoce kulistej przy  $\rho_1 = 1,25$  i  $\rho_1 = 10$ , ogrzanej we wnętrzu do temperatury  $T_1$ ,

czyli  $\vartheta = 1$ . Na podkreślenie zasługuje tu fakt, że o ile zamiana temperatur  $T_1$  i 0 w materiale jednorodnym prowadzi do zmiany wykresu temperatury z  $\vartheta(\varrho)$  na  $1 - \vartheta(\varrho)$ , to w materiałach (b) lub (c) związki te nie są już tak proste. Jeśli  $T(r_0) = T_0$  oraz  $T(r_1) = T_1$ , to w przypadku rury mamy ze wzoru (3.13)

$$F(\vartheta) = \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1}.$$

Zamiana  $\vartheta_0$  z  $\vartheta_1$  prowadzi do funkcji  $F^*(\vartheta)$  w postaci

$$(3.15) \quad F^*(\vartheta) = \frac{\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \lambda(v) dv}{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \lambda(v) dv} = \frac{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \lambda(\vartheta) d\vartheta - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} \lambda(\vartheta) d\vartheta}{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \lambda(\vartheta) d\vartheta} = 1 - F(\vartheta),$$

czyli do temperatury

$$F(\vartheta) = 1 - \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1},$$

Jedynie w ciele jednorodnym  $F(\vartheta) = \vartheta$  zachodzi prosty związek, o którym wspomnieliśmy.

#### 4. Naprężenia przy zmiennym współczynniku przewodnictwa

Zajmiemy się obecnie bliższą oceną przebiegu naprężeń promieniowych  $\sigma_r$  i obwodowych  $\sigma_\varphi$  w przypadku, gdy od temperatury zależy wyłącznie współczynnik przewodnictwa  $\lambda(T)$ , zaś  $E = \text{const}$  i  $\alpha = \text{const}$ . Dla wyrażenia tych naprężeń w postaci zamkniętej oprzemy się na równaniach (2.9.1)-(2.13.1) oraz na związkach, wyprowadzonych w p. 3.

Jak widać z porównania wzorów (2.9.1) i (2.10.1), naprężenia w obu przypadkach stanu płaskiego są, z dokładnością do stałego współczynnika, identyczne. Przebieg naprężeń  $\sigma_r$  w różnych przypadkach rozkładu temperatury i dla różnych materiałów przedstawiają rysunki 8 i 9. Ze wzoru (2.9.1) napisanego w postaci

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T_1}{\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho_1^2 - 1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \vartheta d\varrho - \int_1^{\varrho} \varrho \vartheta d\varrho \right]$$

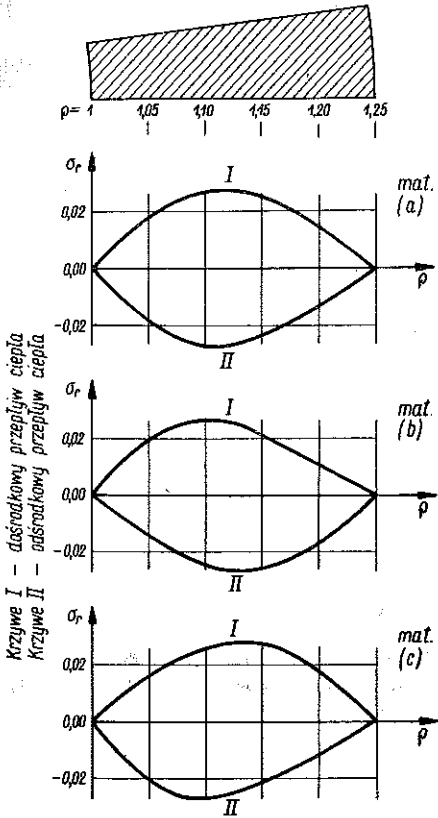
widzimy, że  $\sigma_r$  przybiera na końcach przedziału  $\varrho = 1$ ,  $\varrho = \varrho_1$  wartości zera i osiąga w tym przedziale tylko raz wartość ekstremalną na powierzchni odciętej, będącej pierwiastkiem równania

$$\vartheta \varrho^2 - 2 \int_1^{\varrho} \varrho \vartheta d\varrho = \frac{2}{\varrho_1^2 - 1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \vartheta d\varrho.$$

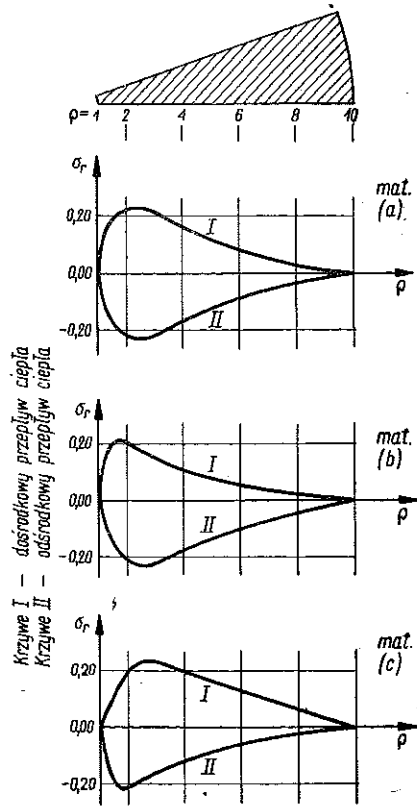
Porównanie ze sobą wykresów naprężeń  $\sigma_r$  dla rur o jednakowych wymiarach, a wykonanych z różnych materiałów wskazuje na fakt, że zmienność  $\lambda = \lambda(T)$  nie ma dużego wpływu ani na ich przebieg, ani na ekstremalne wartości.



Ponieważ zaś w ogóle znaczenie tych naprężeń w porównaniu z naprężeniami obwodowymi  $\sigma_\varphi$  jest niewielkie, zwłaszcza w przypadku rur cienkościennych (maksymalne naprężenie  $\sigma_r$  przy  $\varrho_1 = 1,25$  jest przeszło 10 razy mniejsze niż przy  $\varrho_1 = 10$ ), nie będziemy się nimi dalej zajmować. Na uwagę zasługuje może jedynie duża koncentracja naprężeń  $\sigma_r$  w pobliżu brzegu otworu w przypadku rur grubościennych.



Rys. 8



Rys. 9

Przebieg naprężeń obwodowych  $\sigma_\varphi$  wzdłuż promienia jest — w przypadku braku źródeł ciepła — zawsze monotoniczny. Ekstremalne wartości przyjmuje  $\sigma_\varphi$  na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej rury. Ich wielkości oznaczymy odpowiednio przez  $\sigma_\varphi^w$  i  $\sigma_\varphi^z$ . Do drugiego z równań (2.9.1)

$$\sigma_\varphi = \frac{EaT_1}{\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho_1^2 - 1} \int_1^{\varrho_1} \varrho \vartheta d\varrho + \int_1^{\varrho} \varrho \vartheta d\varrho \right] - EaT_1 \vartheta$$

w miejsce  $\varrho$  wstawiamy odpowiednią wartość ze wzoru (3.13). Ponieważ

$$\varrho = \varrho_1^{r(\vartheta)}, \quad d\varrho = \ln \varrho_1 F'(\vartheta) \varrho_1^{r(\vartheta)},$$

naprężenie  $\sigma_\varphi$  wyrazimy w postaci zamkniętej

$$(4.1) \quad \sigma_\varphi = \frac{EaT_1}{\varrho^2} \left[ \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho_1^2 - 1} \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} \ln \varrho F'(\vartheta) \vartheta \varrho_1^{2F(\vartheta)} d\vartheta + \right. \\ \left. + \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho)} \ln \varrho F'(\vartheta) \vartheta \varrho_1^{2F(\vartheta)} d\vartheta - \varrho^2 \vartheta \right].$$

Przy warunkach termicznych  $\vartheta(1) = 0$ ,  $\vartheta(\varrho_1) = 1$  otrzymamy na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej naprężenia

$$(4.2) \quad \begin{cases} \sigma_\varphi^w = EaT_1 \frac{2 \ln \varrho_1}{\varrho_1^2 - 1} \int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) \varrho_1^{2F(\vartheta)} d\vartheta, \\ \sigma_\varphi^z = EaT_1 \left[ \frac{2 \ln \varrho_1}{\varrho_1^2 - 1} \int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) \varrho_1^{2F(\vartheta)} d\vartheta - 1 \right]. \end{cases}$$

Całkę występującą we wzorach (4.2) oznaczamy przez  $\kappa$ ,

$$(4.3) \quad \kappa = \frac{2}{\varrho_1^2 - 1} \int_1^{\varrho_1} \vartheta \varrho d\varrho = \frac{2 \ln \varrho_1}{\varrho_1^2 - 1} \int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) \varrho_1^{2F(\vartheta)} d\vartheta,$$

i otrzymujemy proste związki

$$(4.4) \quad \sigma_\varphi^w = EaT_1 \kappa, \quad \sigma_\varphi^z = EaT_1 (\kappa - 1) = -EaT_1 (1 - \kappa).$$

Łatwo sprawdzić za pomocą (4.3), że zawsze jest  $0 < \kappa < 1$ .

Podobnie w przypadku, gdy  $\vartheta(1) = 1$ , a  $\vartheta(\varrho_1) = 0$ , otrzymamy

$$(4.5) \quad \sigma_\varphi^w = -EaT_1 (1 - \kappa), \quad \sigma_\varphi^z = EaT_1 \kappa.$$

Występujący tu współczynnik  $\kappa$ , który wyraża się tym samym co poprzednio wzorem (4.3), posiada inną wartość niż w zależnościach (4.4) ze względu na inny kształt funkcji  $\vartheta(\varrho)$ .

Z uwag powyższych wypływa wniosek, że wielkością rozstrzygającą o ekstremalnych, z technicznego punktu widzenia najważniejszych, wartościach naprężenia  $\sigma_\varphi$  jest współczynnik  $\kappa$ . Jego wartość ocenić można łatwo w następujący sposób. Oznaczamy całkę  $\int_1^{\varrho_1} \vartheta \varrho d\varrho$  przez  $I$ . Mamy

$$I = \ln \varrho_1 \int_0^1 \exp[\ln \varrho_1 2F(\vartheta)] \vartheta F'(\vartheta) d\vartheta.$$

Po rozwinięciu funkcji  $\exp[\ln \varrho_1 2F(\vartheta)]$  w szereg potęgowy otrzymamy

$$(4.6) \quad I = \ln \varrho_1 \int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2 \ln \varrho_1 F(\vartheta)]^n}{n!} d\vartheta = \ln \varrho_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \ln \varrho_1)^n}{n!} \int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) F^n(\vartheta) d\vartheta.$$

Wykonując po prawej stronie (4.6) całkowanie przez części będziemy mieli

$$\int_0^1 \vartheta F'(\vartheta) F^n(\vartheta) d\vartheta = [\vartheta F^n(\vartheta) F(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=1} - \int_0^1 F(\vartheta) [F^n(\vartheta) + \vartheta n F^{n-1}(\vartheta) F'(\vartheta)] d\vartheta,$$

czyli

$$\int_0^1 \vartheta F(\vartheta) F^n(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{1+n} \left[ 1 - \int_0^1 F^{n+1}(\vartheta) d\vartheta \right].$$

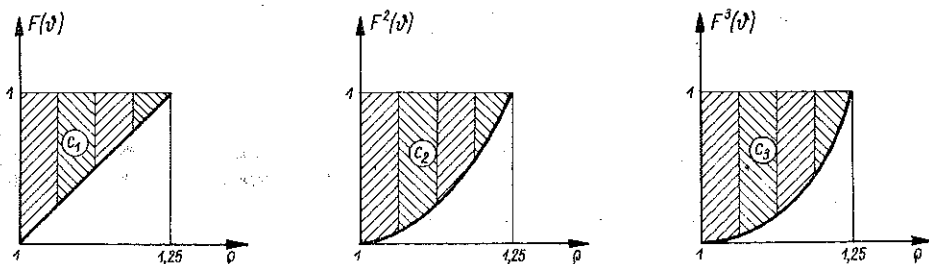
Wprowadzając teraz oznaczenie

$$(4.7) \quad 1 - \int_0^1 F^n(\vartheta) d\vartheta = c_n$$

otrzymujemy na podstawie (4.3), (4.6) i (4.7) przejrzysty wzór

$$(4.8) \quad \kappa = \frac{1}{\varrho_1^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \ln \varrho_1)^n}{n!} c_n.$$

Ponieważ dla  $0 < \vartheta < 1$  zawsze  $0 < F(\vartheta) < 1$ , to współczynniki  $c_n$  (4.7) spełniają nierówność  $0 < c_n < 1$ , a  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ . Stąd wyciągamy wniosek, że szereg (4.8) jest zbieżny zawsze, niezależnie od postaci funkcji  $\lambda(T)$ , a jest szczególnie szybkozbieżny przy małych wartościach  $\varrho_1$  (rury cienkościenne).



Rys. 10

Sposób przybliżonego, graficzno-analitycznego obliczenia wartości współczynnika  $\kappa$  przedstawia prosty przykład dotyczący przypadku  $\lambda = \text{const}$ ,  $\varrho_1 = 1,25$ . Ograniczono się jedynie do trzech wyrazów rozwinięcia szeregu (4.8), zaś pola  $c_n$  (rys. 10) obliczono sposobem SIMPSONA, dzieląc odcinek (1-1,25) na cztery przedziały. W wyniku otrzymujemy

$$\kappa = \frac{1}{0,5625} \left( \frac{0,4463}{1} \cdot 0,500 + \frac{0,4463^2}{2} \cdot 0,667 + \frac{0,4463^3}{6} \cdot 0,751 \right) = 0,5346$$

zamiast wartości ściślej 0,5371... (błąd wynosi tu więc tylko około 0,5%).

Dalszym wnioskiem, wynikającym ze wzorów (4.4) i (4.5) jest stwierdzenie, że różnica naprężeń  $\sigma_{\varphi}$ , występujących na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni

rury nie zależy od zmienności  $\lambda(T)$  i wynosi zawsze  $\sigma_\varphi^w - \sigma_\varphi^z = EaT_1$  lub  $-EaT_1$ , zależnie od kierunku przepływu ciepła. Wykres tych naprężeń przy uwzględnieniu różnych zmienności  $\lambda = \lambda(T)$  ulega więc tylko przesunięciu w górę lub w dół; niezależnie od tego przebieg naprężeń ścianek rury ulega także pewnym zmianom, posiadającym jednak z punktu widzenia wytrzymałości mniejsze znaczenie.

I tutaj, podobnie jak przy omawianiu wykresu temperatury, zwrócić należy uwagę na fakt, że zmiana kierunku przepływu ciepła prowadzi do poważnych zmian w przebiegu wykresu naprężeń, podczas gdy w ciele jednorodnym ( $\lambda = \text{const}$ ) zamiana  $T_0$  z  $T_1$  prowadzi jedynie do zmiany znaku  $\sigma_\varphi$ , a także  $\sigma_r$ . Można udowodnić, że warunkiem koniecznym do tego, by przy odwróceniu kierunku przepływu ciepła przynajmniej skrajne wartości  $\sigma_\varphi$  (tj.  $\sigma_\varphi^w$  i  $\sigma_\varphi^z$ ) nie zmieniły swych wartości bezwzględnych jest spełnienie równości

$$\int_0^1 \text{sh} [F(v) - 0,5] \ln \varrho_1^2 dv = 0.$$

Ilustracją powyższych uwag są wykresy podane na rys. 11 i 12. Na rysunkach tych widzimy wykresy naprężeń  $\sigma_\varphi$  w ściankach rury sporządzonej z materiałów (a), (b) i (c). Uwzględniono przy tym dwa przypadki  $\varrho_1 = 1,25$  (rys. 11) oraz  $\varrho_1 = 10$  (rys. 12), a także dwa możliwe kierunki przepływu ciepła: odśrodkowy oraz dośrodkowy.

Zreasumujemy obecnie wnioski płynące z powyższych rozważań oraz z wykresów na rys. 11 i 12.

1. Naprężenie promieniowe  $\sigma_r$  jest, zwłaszcza w rurach cienkościennych, wielokrotnie mniejsze od naprężenia obwodowego i nie posiada większego znaczenia technicznego. W rurach grubościennych największa koncentracja naprężeń  $\sigma_r$  występuje w pobliżu krawędzi otworu przy przepływie odśrodkowym w materiale (c), a przy przepływie dośrodkowym — w materiale (b).

2. Charakter materiału nie ma większego wpływu na wielkość maksymalnych naprężeń  $\sigma_r$ .

3. Przy dowolnym kierunku przepływu ciepła wykres naprężeń  $\sigma_\varphi$  przesuwa się w materiałach typu (b) w kierunku dodatnim, a w materiałach typu (c) — w kierunku ujemnym.

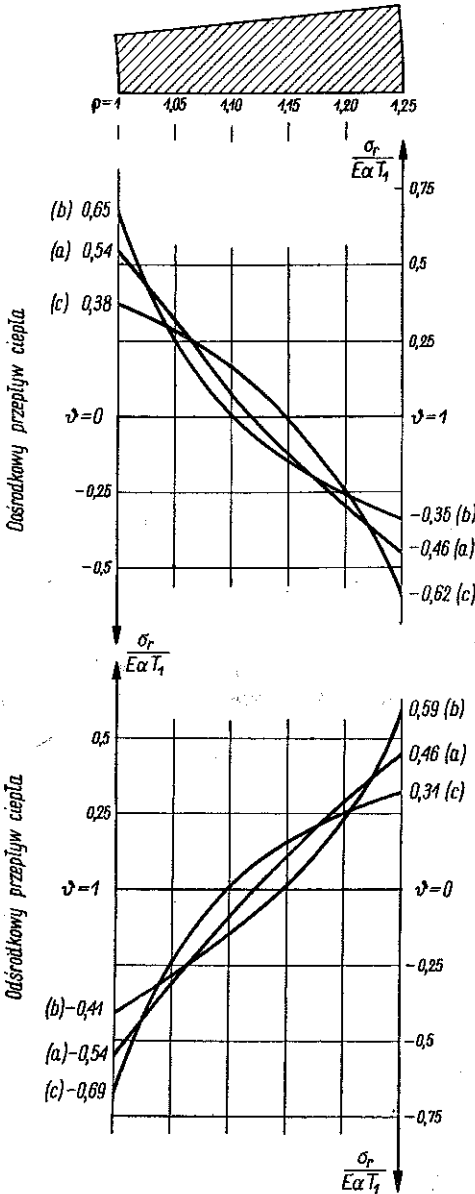
4. Wielkość tych przesunięć, a więc i przyrosty ekstremalnych naprężeń rozciągających lub ściskających są w rurach grubościennych i cienkościennych w przybliżeniu takie same. W związku z tym pomijanie wpływu zmienności  $\lambda(T)$  na naprężenia w rurach cienkościennych nie wydaje się uzasadnione.

5. Dla materiałów typu (b) możliwy jest przypadek, że maksymalne naprężenie (i to rozciągające) wystąpi na powierzchni zewnętrznej rury (rys. 11). W materiałach jednorodnych (a) przypadek taki nie zachodzi nigdy.

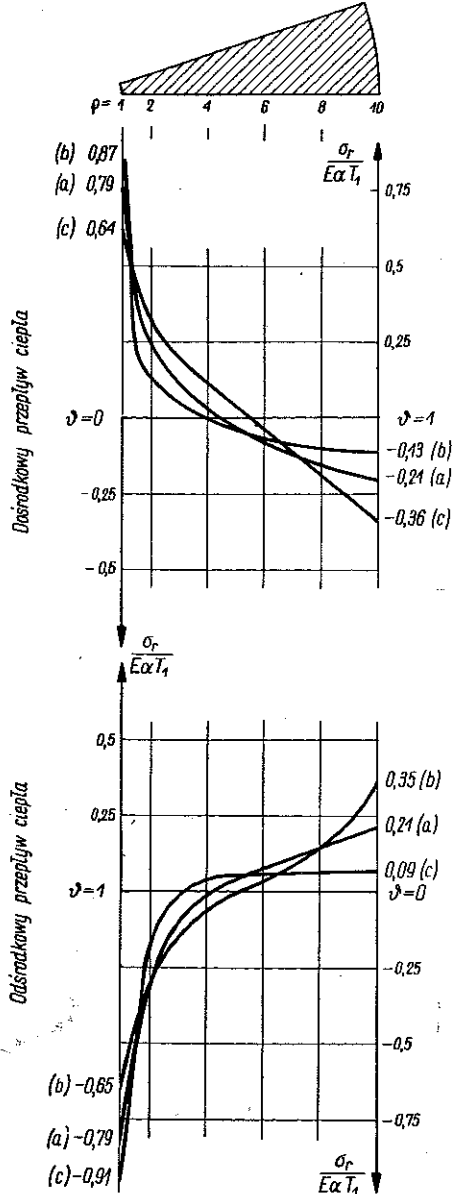
Jeśli chodzi o naprężenia osiowe, to ze wzoru (1.12.1) przepisanego w postaci

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T_1}{1-\nu} (\kappa - \vartheta)$$

widzimy, że w przypadku rury swobodnej na końcach osiągają one na jej pobocznicach te same wartości ekstremalne, co naprężenia obwodowe  $\sigma_\varphi$ . Ich



Rys. 11



Rys. 12

przebieg w przedziale  $(1, \varrho_1)$  jest monotoniczny i z dokładnością do stałej identyczny z przebiegiem temperatury  $T$ , nie wymaga więc osobnej dyskusji.

Wykres naprężenia osiowego  $\sigma_z$  dla rury na końcach utwierdzonej (2.11.1) przesunięty jest w stosunku do omówionego poprzednio o wartość stałą  $EaT_1\kappa/2(1-\nu)$ :

$$\sigma_z = \frac{EaT_1}{1-\nu} \left( \frac{\kappa}{2} - \vartheta \right),$$

to znaczy w kierunku ujemnym. Przy dośrodkowym przepływie ciepła naprężenia ściskające  $\sigma_z$  w warstwach zewnętrznych rury utwierdzonej są więc o  $0,5 \kappa EaT_1/(1-\nu)$  większe od naprężeń  $\sigma_\varphi$ , występujących w tym samym miejscu. Podobna sytuacja zachodzi w przypadku odśrodkowego przepływu ciepła przy wewnętrznej powierzchni rury.

Podobne rozumowanie, jakie przeprowadziliśmy dla przypadku rury, można powtórzyć i dla przypadku powłoki kulistej. Naprężenie promieniowe (2.13.1)

$$\sigma_r = \frac{2EaT_1}{(1-\nu)\varrho^3} \left[ \frac{\varrho^3-1}{\varrho_1^3-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 \vartheta d\varrho - \int_1^{\varrho} \varrho^2 \vartheta d\varrho \right]$$

równe jest zeru przy  $\varrho = 1$  i  $\varrho = \varrho_1$ , a swoją wartość ekstremalną osiąga przy  $\varrho$ , będącym pierwiastkiem równania

$$\vartheta \varrho^3 - 3 \int_1^{\varrho} \varrho^2 \vartheta d\varrho = \frac{3}{\varrho_1^3-1} \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 \vartheta d\varrho.$$

Oznaczając

$$\frac{3}{\varrho_1^3-1} \int_1^{\varrho} \varrho^2 \vartheta d\varrho = \kappa_1,$$

naprężenia obwodowe  $\sigma_\varphi$  na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej wyrazimy odpowiednio zależnościami

$$\sigma_\varphi^w = \frac{EaT_1}{1-\nu} \kappa, \quad \sigma_\varphi^z = -\frac{EaT_1}{1-\nu} (1-\kappa).$$

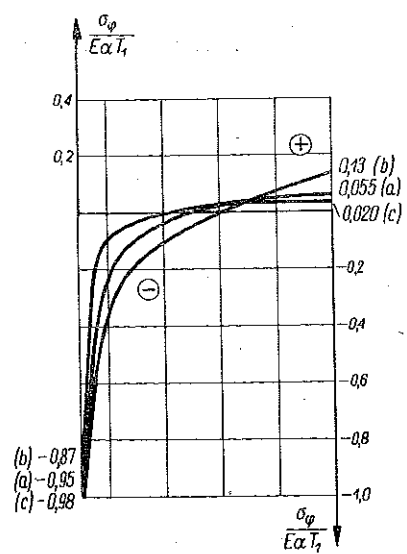
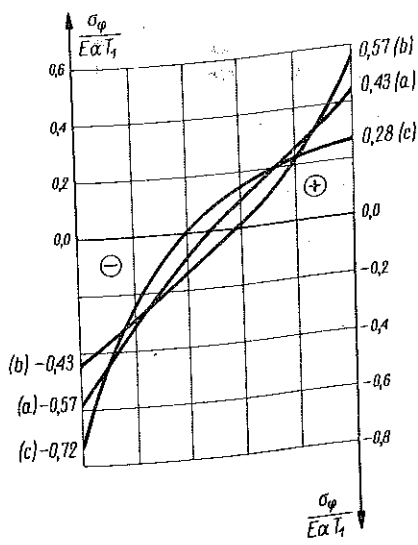
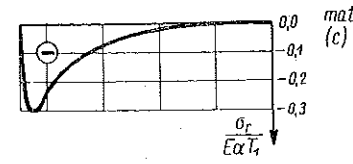
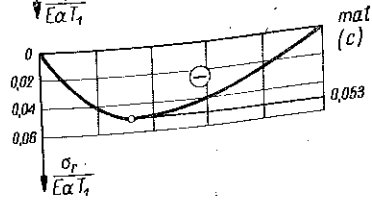
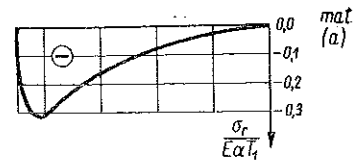
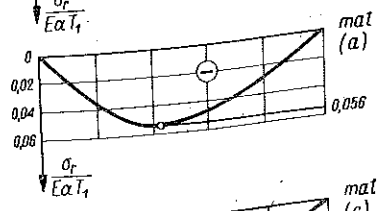
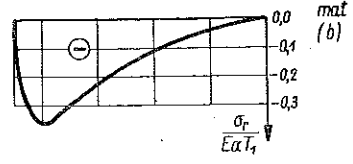
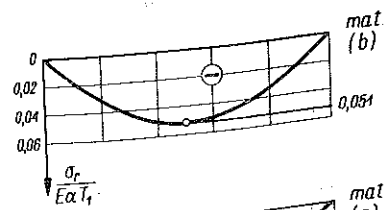
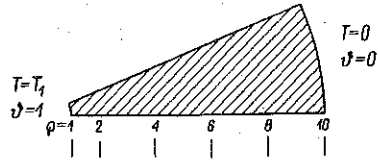
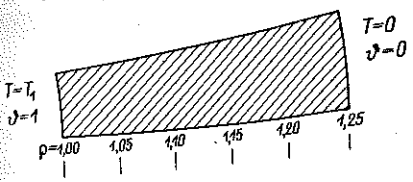
Wykorzystując następnie wzór (3.14), naprężenia  $\sigma_\varphi$  (a także oczywiście  $\sigma_r$ ) przedstawić można w postaci zamkniętej. Wystarczy w tym celu wstawić

$$(4.9) \quad \varrho = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)}, \quad d\varrho = \frac{\left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F'(\vartheta)}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^2} d\vartheta$$

do wzoru (2.13.1) i wykonać całkowanie w granicach dla  $\vartheta$  od 0 do 1 lub od 1 do 0, w zależności od kierunku przepływu ciepła.

W stosunku do naprężeń cieplnych w powłoce kulistej, wykonanej z materiałów typu (a), (b) lub (c) można wyciągnąć identyczne pod względem jakościowym

wnioski 1-5, podobnie, jak to uczyniliśmy w przypadku rury. Ograniczymy się tu zatem wyłącznie do przytoczenia na rys. 13 i 14 gotowych wykresów naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  dla grubościennych powłok kulistych, wykonanych z materiałów



Rys. 13

Rys. 14

o różnych własnościach termicznych. Dotyczą one tylko jednego odśrodkowego kierunku przepływu ciepła.

Także i w przypadku powłoki kulistej można dla współczynnika  $\kappa_1$  znaleźć dogodnie dla obliczeń rozwinięcie w szereg analogiczny do (4.8). Przy pomocy zależności (4.9) możemy napisać

$$\kappa_1 = \frac{3}{\varrho_1^3 - 1} \int_1^{\varrho_1} \varrho^2 \vartheta d\varrho = \frac{3}{\varrho_1^3 - 1} \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} \frac{\left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) \vartheta F'(\vartheta) d\vartheta}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^4}.$$

Całkując przez części

$$\int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} \frac{\left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) \vartheta F'(\vartheta) d\vartheta}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^4} = \left\{ \vartheta \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} \frac{\left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F'(\vartheta) d\vartheta}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^4} \right\}_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} - \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} d\vartheta \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta} \frac{\left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F'(\vartheta) d\vartheta}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^4},$$

dochodzimy do związku

$$\kappa_1 = \frac{3}{\varrho_1^3 - 1} \left\{ \frac{\varrho_1^3 - 1}{3} - \frac{1}{3} \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} \left[ \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right) F(\vartheta)\right]^3} - 1 \right] d\vartheta \right\}.$$

Rozwijając wyrażenie podcałkowe w szereg potęgowy według wzoru

$$\frac{1}{(1-\delta)^3} - 1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) \delta^n,$$

zbieżny przy  $|\delta| < 1$  (oczywiście zawsze zachodzi nierówność

$$0 < (1 - 1/\varrho_1)F(\vartheta) < 1)$$

otrzymujemy w końcu rozwinięcie

$$(4.10) \quad \kappa_1 = 1 - \frac{1}{\varrho_1^3 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \left(1 - \frac{1}{\varrho_1}\right)^n c'_n,$$

gdzie

$$c'_n = \int_{\vartheta(1)}^{\vartheta(\varrho_1)} F^n(\vartheta) d\vartheta = 1 - c_n.$$

Szereg (4.10) jest podobnie jak i (4.8) szczególnie szybkozbieżny w przypadku powłok cienkościennych, czyli dla  $\varrho_1 - 1 \ll 1$ .



### 5. Wykładnicza zmienność modułu sprężystości

Całkowanie równań przemieszczeniowych (2.2), (2.3) i (2.5) w ogólnym przypadku zmienności  $E = E(T)$  jest uciążliwe i nie zawsze da się przeprowadzić. Przyjęcie zależności

$$(5.1) \quad E(T) = E_0 \exp(AT)$$

prowadzi, jak to zauważył SZESTIERIKOW, [5], do dużych uproszczeń. Otrzymujemy mianowicie w płaskim stanie naprężenia równanie

$$(5.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} \left(1 + A\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) - \frac{u}{\varrho^2} \left(1 - A\nu\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) = (1+\nu)r_0\alpha \frac{\partial T}{\partial \varrho} (1+AT),$$

zaś w płaskim stanie odkształcenia

$$(5.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} \left(1 + A\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) - \frac{u}{\varrho^2} \left(1 - \frac{A\nu}{1-\nu} \varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) = \\ = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} r_0\alpha \frac{\partial T}{\partial \varrho} (1+AT).$$

Możliwość scałkowania tych równań zależy oczywiście od przebiegu temperatury  $T(\varrho)$ . Jeśli  $\lambda = \text{const}$ , to z równania przewodnictwa otrzymujemy zależność

$$T(\varrho) = T_0 + \frac{(T_1 - T_0) \ln \varrho}{\ln \varrho_1},$$

która przekształca równania (5.2) i (5.3) w niejednorodne równanie typu EULERA. Dla płaskiego stanu odkształcenia mamy np.

$$(5.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} \left[1 + \frac{A}{\ln \varrho_1} (T_1 - T_0)\right] - \frac{u}{\varrho^2} \left[1 - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{A}{\ln \varrho_1} (T_1 - T_0)\right] = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{ar_0(T_1 - T_0)}{\ln \varrho_1} [1 + AT(\varrho)].$$

Równanie to całkuje się bez trudu w znany sposób (por. np. [8]). W przypadku wydrążonej kuli podstawienie zależności (5.1) do (2.5) prowadzi do równania

$$(5.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} \left(1 + A\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) - \frac{u}{\varrho^2} \left(1 - A\nu\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) = (1+\nu)r_0\alpha \frac{\partial T}{\partial \varrho} (1+AT).$$

Przyjęcie  $\lambda = \text{const}$  nie upraszcza w tym przypadku równania (5.5) do postaci typu (5.4). Aby współczynniki zawarte w nawiasach po lewej jego stronie były stałe i niezależne od  $\varrho$ , należy przyjąć także wykładniczą zależ-

нось коэффициента теплопроводности  $\lambda$  от температуры, напр.  $\lambda = \varrho_1^{-\theta}$ . Тогда при условиях граничных  $\vartheta(1) = 0$ ,  $\vartheta(\varrho_1) = 1$  получим на основании (3.14)

$$F(\vartheta) = \frac{1 - \varrho_1^{-\theta}}{1 - \varrho_1^{-1}}, \quad \varrho = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\varrho_1} \right) F(\vartheta) \right]^{-1} = \varrho_1^\vartheta \quad \text{или} \quad T = T_1 \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1},$$

а уравнение (5.5) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} \left( 1 + \frac{AT_1}{\ln \varrho_1} \right) - \frac{u}{\varrho^2} \left( 1 - \frac{A\nu T_1}{\ln \varrho_1} \right) = \frac{(1 + \nu)r_0 a T_1}{\ln \varrho_1} \left( 1 + AT_1 \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} \right).$$

Также и это уравнение, как уравнение типа Эйлера, можно проинтегрировать по квадратам.

#### Литература цитована в тексте

- [1] S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, New York-Toronto-London 1951.
- [2] H. H. HILTON, *Thermal Stresses in Bodies Exhibiting Temperature Dependent Properties*, J. Appl. Mech., 1952, 74, 350.
- [3] R. TROSTEL, *Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten*, Ing. Arch., 2, 26 (1958).
- [4] R. TROSTEL, *Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Werten*, Ing. Arch., 6, 26 (1958).
- [5] С.А. ШЕСТЕРИКОВ, *Температурные напряжения в упругом диске постоянной толщины*, Изв. АН СССР, Отд. Тех. Наук, Механика и Машиностроение, 5, 1959.
- [6] J. NOWIŃSKI, *Thermoelastic Problem of an Isotropic Sphere with Temperature Dependent Properties*, ZAMP, 6, 10 (1959).
- [7] В.С. ЧИРКИН, *Термофизические свойства материалов*, Москва 1959.
- [8] E. КАМКЕ, *Differentialgleichungen*, Leipzig 1956.

#### Резюме

#### ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКАХ В СЛУЧАЕ МАТЕРИАЛОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассматривается одномерная, стационарная задача термоупругости, состоящая в определении напряжений, возникающих в толстостенной цилиндрической и сферической оболочках в случае, когда их внутренняя и наружная поверхности подвергнуты нагреву до различных температур  $T_0$  и  $T_1$ . Кроме того принимается, что материал оболочки обладает упругими ( $E$ ) и термическими ( $\lambda, \alpha$ ) свойствами, изменяющимися произвольно с температурой. При этих предположениях в разделе 2 и 4 выводятся формулы для напряжений в случае плоского напряженного и деформированного состояний, а также в случае сферической симметрии задачи термоупругости (задача пустотелого шара). При этом принимается в основу приведенные

в разделе 2 уравнения в перемещениях и решения нелинейных уравнений проводимости, выведенные в разделе 3. Обсуждение этих уравнений при предположении, что  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $E = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$  проведенное в разделе 4 дает возможность ориентироваться в какой именно степени изменчивость коэффициента проводимости  $\lambda = \lambda(T)$  влияет на форму и экспериментальные значения напряжений. Это влияние в случае некоторых огнеупорных материалов и при больших разнице температур  $T_1 - T_0$  может сказаться довольно значительным и достигает 20 и более процентов величины максимального напряжения.

#### Summary

#### THERMAL STRESSES IN A SPHERICAL AND CYLINDRICAL SHELL IN THE CASE OF MATERIAL PROPERTIES DEPENDING ON THE TEMPERATURE

A one-dimensional steady-state thermoelastic problem is considered, consisting in determining the stresses in a thick-walled cylindrical and spherical shell if the inner and outer surface are heated to different temperatures  $T_0$  and  $T_1$ . It is assumed in addition that the elastic ( $E$ ) and thermal properties ( $\lambda$ ,  $\alpha$ ) of the material vary with the temperature in an arbitrary manner. With these assumptions general equations for stresses are derived in Sec. 2 and 4 for plane stress and strain and in the case of the spherically symmetric thermoelastic problem (the problem of the hollow sphere). This is done on the basis of the displacement equations obtained in Sec. 2 and the solutions of the non-linear heat equations derived in Sec. 3. A discussion of these equations, in Sec. 4, gives a certain idea of the degree in which the variability of the coefficient of heat conduction,  $\lambda = \lambda(T)$ , influences the form and the extremum values of the stresses. In the case of certain heat resisting materials, and with considerable temperature differences ( $T_1 - T_0$ ) this influence may prove to be relatively high and amounts to ten or twenty per cent of the maximum stress, or even more.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
IPPT PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 18 lutego 1960 r.*