

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI

WPLYW CIĘŻARU WŁASNEGO
NA PELZAJĄCE WYBOCZENIE PRĘTÓW

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXIII

TOM VIII . ZESZYT 3 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	511
2. Równanie wyboczenia pełzającego	512
3. Rozwiązanie równania wyboczenia pełzającego zwyczajną metodą małego parametru	514
4. Określenie prędkości wyboczenia modyfikowaną metodą małego parametru	516
5. Rozwiązanie równania wyboczenia sprężystego zwyczajną metodą małego parametru	518
6. Określenie sprężystej strzałki ugięcia modyfikowaną metodą małego parametru	520
7. Wyboczenie sprężyste przy sinusoidalnej pierwotnej linii ugięcia	521
8. Związek z siłą krytyczną (EULERA)	523
9. Uwagi końcowe	525

1. Uwagi wstępne

W przypadku prętów pionowych o znacznej długości, wykonanych z materiału o dużym ciężarze właściwym, istnieje niebezpieczeństwo wybożenia pod wpływem bądź samego ciężaru własnego, bądź jednoczesnego działania zewnętrznej siły ściskającej i ciężaru własnego.

Problem wybożenia sprężystego jednostronnie utwierdzonego pręta pionowego, obciążonego ciężarem własnym, został rozwiązany przez L. EULERA w r. 1778 (por. E. L. NIKOŁAJ, [13], s. 450). Niezależnie od EULERA rozwiązał go w r. 1838 P. G. HEIM, [6], a następnie A. GREENHILL, [5]. W wielu monografiach nosi on niezbyt uzasadnioną nazwę problemu GREENHILLA. Szczególnie wiele uwagi poświęcił temu problemowi A. N. DINNIK, [2] i [3], który rozwiązał go za pomocą funkcji BESSELA dla różnych zamocowań końców pręta i dla pewnych typów prętów niepryzmatycznych. Również K. KARAS, [9], rozpatrywał różne przypadki zamocowania końców pręta. Fr. A. WILLERS, [21], zajmował się wybożeniem sprężystym prętów ciężkich uwzględniając wpływ siły skupionej i ciężaru własnego pręta. Pewne ogólne metody, uwzględniające dowolny rozkład siły osiowej, podali J. NALESZKIEWICZ, [12], oraz M. PIĄTEK, [14].

Wybożeniem sprężysto-plastycznym pręta obciążonego ciężarem własnym zajmował się F. REINITZHUBER, [16], [17] i [18].

W pracy niniejszej zbadamy wpływ ciężaru własnego na wybożenie pręta wykonanego z materiału, wykazującego własności reologiczne. Zgodnie z terminologią zaproponowaną w pracy [25] będziemy przypadek ten nazywali krótko «wybożeniem pełzającym» pręta. Przegląd prac teoretycznych i doświadczalnych nad wybożeniem pełzającym podają prace J. A. H. HULTA, [8], N. J. HOFFA, [7] i autora, [25].

Postawiony problem mieści się zasadniczo w punkcie III.1.2 klasyfikacji problemów wybożenia pełzającego, podanej w pracy [25] (uogólnienie schematu statycznego). Przyjmujemy przy tym następujące ważniejsze założenia odnośnie pozostałych schematów, mianowicie geometrycznych, fizykalnych i dynamicznych:

(1) Ugięcia pręta są nieskończenie małe; problemowi skończonych ugięć przy wybożeniu pełzającym poświęcona została praca [26].

(2) Pręt posiada stały przekrój poprzeczny i wykonany jest z materiału jednorodnego.

(3) Pręt posiada pewną niewielką krzywiznę pierwotną. Będziemy przy tym zakładać pewną szczególną postać pierwotnej linii ugięcia, którą sprecyzujemy później. Mamy więc zasadniczo na myśli wyboczenie w sensie technicznym, polegające na wzroście ugięć pierwotnych z upływem czasu, a nie problem stateczności w sensie ścisłym. Problem wyboczenia pełzającego bywa z reguły formułowany w ten sposób, [7]. Należy jednak wspomnieć, że odmienne podejście, związane z dynamiczną analizą stateczności układu, zaproponowali J. N. RABOTNOW i S. A. SZESTIERIKOW, [15].

(4) Materiał podlega liniowemu prawu pełzania z uwzględnieniem odkształceń sprężystych (prawa MAXWELLA). Analizę różnic między wyboczeniem pełzającym w przypadku liniowego i nieliniowego pełzania (prawa MAXWELLA i NORTONA) podaje praca [26]. W oparciu o teorię ugięć skończonych wykazano, że różnice te są czysto ilościowe, a nie jakościowe, co sugerowałaby teoria ugięć nieskończenie małych.

(5) Ograniczymy się do analizy prętów o jednym (dolnym) końcu utwierdzonym, a drugim swobodnym.

(6) Pominiemy siły bezwładności, zakładając, że przyspieszenia poszczególnych cząstek pręta są małe.

Zasadniczą metodą rozwiązania będzie metoda małego parametru, którą posługiwano się już uprzednio przy rozwiązywaniu zagadnień wyboczenia sprężystego (T. GALKIEWICZ, [4], H. YOSHIHARA, [23]), wyboczenia sprężysto-plastycznego (M. WNUK i M. ŻYCZKOWSKI, [22]), jak również wyboczenia pełzającego (M. ŻYCZKOWSKI, [24]).

2. Równanie wyboczenia pełzającego

Weźmiemy pod uwagę pręt, przedstawiony na rys. 1. Obciążenie jego składa się z siły skupionej P i ciężaru własnego qF , gdzie q oznacza ciężar właściwy materiału pręta, F pole powierzchni przekroju. Moment zginający M jest w tym przypadku określony wzorem

$$(2.1) \quad M = Pv + \int_0^s qF d\xi [v(s) - v(\xi)],$$

gdzie ξ oznacza zmienną całkowania, $0 \leq \xi \leq s$. Podstawiając (2.1) do zasadniczego równania zginania pełzającego (równanie (4.9) w pracy [26])

$$(2.2) \quad \dot{M} + M = \lambda EI$$

otrzymujemy

$$(2.3) \quad P(\dot{v} + v) + \int_0^s qF [\dot{v}(s) - \dot{v}(\xi) + v(s) - v(\xi)] d\xi = \lambda EI.$$

W równaniu tym kropkami u góry oznaczono różniczkowanie względem bezwymiarowego czasu τ ,

$$(2.4) \quad \tau = \frac{E}{\lambda} t,$$

gdzie E oznacza moduł YOUNGA, λ moduł pełzania przy przedstawieniu prawa MAXWELLA w postaci

$$(2.5) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\lambda}.$$

Zgodnie z założeniem (1) ograniczymy się do rozważania ugięć nieskończenie małych. Przyjmując w przybliżeniu $\kappa = -\partial^2 v / \partial s^2 = -v''$, otrzymujemy równanie różniczkowo-całkowe. By sprowadzić je do równania różniczkowego, zróżniczkujemy (2.3) względem s :

$$(2.6) \quad P(\dot{v}' + v') + qFs(\dot{v}' + v') + EI\dot{v}''' = 0.$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych

$$(2.7) \quad x = \frac{\pi}{2l} s, \quad y = \frac{\pi}{2l} v,$$

bezwymiarowej siły skupionej

$$(2.8) \quad m = \frac{P}{P_E} = \frac{4Pl^2}{\pi^2 EI}$$

i bezwymiarowego ciężaru własnego

$$(2.9) \quad a = \frac{8qFl^3}{\pi^3 EI},$$

(przez l oznaczono tu długość pręta) napiszemy nasze równanie w postaci uproszczonej

$$(2.10) \quad \dot{y}''' + m(\dot{y}' + y') + ax(\dot{y}' + y') = 0.$$

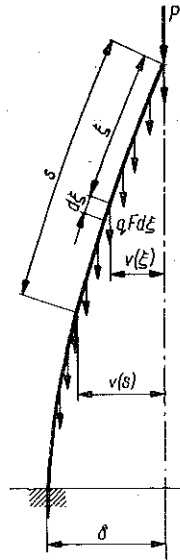
Do tego równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu sformułowane są następujące warunki brzegowe:

$$(2.11) \quad \begin{cases} x = 0, & x = \frac{\pi}{2}, \\ y = 0, & y = f = \frac{\pi}{2l} \delta, \\ y'' = 0; & y' = 0 \end{cases}$$

oraz warunek początkowy

$$(2.12) \quad y = y_+(x), \quad \text{gdy } \tau = 0,$$

przy czym linia ugięcia $y_+(x)$ zależy od $y_-(x)$ (ugięcie przed obciążeniem).



Rys. 1 Pręt obciążony siłą skupioną i ciężarem własnym

Warunki brzegowe (2.11) przepisujemy teraz w postaci następującej:

$$(3.6) \quad x = 0, \quad z = 0, \quad \text{skąd} \quad z_0 = z_1 = z_2 = \dots = 0;$$

$$(3.7) \quad x = 0, \quad z'' = 0, \quad \text{skąd} \quad z_0'' = z_1'' = z_2'' = \dots = 0;$$

$$(3.8) \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad z' = 0, \quad \text{skąd} \quad z_0' = z_1' = z_2' = \dots = 0.$$

Ponieważ $y = z$ w chwili $\tau = 0$, więc z czwartego, dodatkowego warunku brzegowego (2.11) wynika, że $z = f_+$ dla $x = \pi/2$; ugięcie f_+ zależy również od parametru α , więc przedstawiając tę zależność w postaci szeregu potęgowego

$$(3.9) \quad f_+ = f_{+,0} + \alpha f_{+,1} + \alpha^2 f_{+,2} + \dots,$$

napiszemy dodatkowy warunek brzegowy w postaci

$$(3.10) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \\ z_0 = f_{+,0}, \\ z_1 = f_{+,1}, \\ z_2 = f_{+,2}, \\ \dots \end{cases}$$

Wartości $f_{+,0}, f_{+,1}, \dots$ obliczymy później z równań ugięć sprężystych; w tym miejscu będziemy je traktowali jako znane.

Przejdziemy do całkowania układu (3.5). Rozwiązaniem pierwszego równania jest funkcja

$$(3.11) \quad z_0' = C_0 \sin \left(\sqrt{m + \frac{m}{k_0}} x \right) + D_0 \cos \left(\sqrt{m + \frac{m}{k_0}} x \right);$$

z warunku brzegowego (3.7) znajdziemy $C_0 = 0$, a z warunku (3.8)

$$(3.12) \quad \sqrt{m + \frac{m}{k_0}} = 1, 3, 5, \dots$$

Każda liczba nieparzysta określa pewną szczególną linię ugięcia, linię, która nie zmienia swego kształtu podczas wyboczenia. Ograniczymy się do pierwszego rozwiązania, najważniejszego dla zastosowań praktycznych. W przypadku działania samej tylko siły skupionej «szczególna linia ugięcia» będzie ćwiartką fali sinusoidy, natomiast w przypadku jednoczesnego działania obciążenia ciągłego będzie to sinusoida, «zakłócona» dalszymi wyrazami szeregu (3.3) Wobec tego

$$(3.13) \quad k_0 = \frac{m}{1-m}$$

oraz

$$(3.14) \quad z_0' = D_0 \cos x.$$

Całkując powtórnie i uwzględniając (3.6) i (3.10) otrzymujemy ostatecznie

$$(3.15) \quad z_0 = f_{+,0} \sin x.$$

Przybliżenie zerowego rzędu stanowi, oczywiście, rozwiązanie dla pręta obciążonego samą tylko siłą skupioną.

Podstawiając (3.13) i (3.15) do (3.5.2) otrzymujemy równanie

$$(3.16) \quad z_1''' + z_1' = \frac{(1-m)^2}{m} k_1 f_{+,0} \cos x - \frac{1}{m} f_{+,0} x \cos x.$$

Rozwiązanie tego równania, analogicznego do równania drgań wymuszonych, najłatwiej otrzymać przez zastosowanie całki DUHAMELA; obliczając najpierw z_1' i uwzględniając warunek (3.7) otrzymujemy

$$(3.17) \quad z_1' = D_1 \cos x + \frac{(1-m)^2}{2m} k_1 f_{+,0} x \sin x - \\ - \frac{f_{+,0}}{2m} \left(\frac{x^2}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right).$$

Z warunku (3.8) wynika teraz

$$(3.18) \quad k_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{(1-m)^2} = \frac{0,46709}{(1-m)^2}.$$

Podstawienie wartości (3.18) do wzoru (3.17) daje

$$(3.19) \quad z_1' = D_1 \cos x - \frac{f_{+,0}}{4m} \left[x^2 \sin x - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x \sin x - \sin x + x \cos x \right]$$

i ostatecznie, wobec (3.6) i (3.10),

$$(3.20) \quad z_1 = f_{+,1} \sin x + \frac{f_{+,0}}{4m} \left[x^2 \cos x - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x \cos x - \\ - 4 \cos x - 3x \sin x + \left(\frac{3}{2} \pi - 4 \right) \sin x + 4 \right].$$

Wzory (3.18) i (3.20) określają główne wartości poprawek do sinusoidalnego rozwiązania (3.15), spowodowane wpływem obciążenia ciągłego (ciężaru własnego). Dalsze wyrazy szeregów (3.3) i (3.4) można uzyskać na tej samej drodze.

4. Określenie prędkości wybożenia modyfikowaną metodą małego parametru

Podstawiając (3.13) i (3.18) do (3.4) określimy wielkość k , tzw. «logarytmiczną prędkość wybożenia» za pomocą szeregu

$$(4.1) \quad k = \frac{m}{1-m} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{(1-m)^2} \alpha + \dots$$

W punkcie $m = 1$ szereg ten staje się szeregiem rozbieżnym, a dla m nieco mniejszego od jedności jego zbieżność jest bardzo słaba. Przypadek taki jest

charakterystyczny dla metody małego parametru; podobnym problemem zajmowali się M. J. LIGHTHILL, [11], i Y. H. KUO, [10], (metoda PLK — została ona szczegółowo opisana w pracy H. S. TSIENA, [20]). Metodą PLK można się posługiwać, gdy w pewnym punkcie na osi x zerowe przybliżenie przy zwyczajnej metodzie małego parametru posiada osobliwość i gdy osobliwość ta powtarza się we wszystkich wyrazach szeregu. Wprowadza się wtedy nową, stosownie dobraną zmienną niezależną, $\xi = \xi(x, \alpha)$, w ten sposób, aby uzyskać «przesunięcie» osobliwości wzdłuż osi x . W naszym przypadku przybliżenie zerowe posiada również osobliwość w pewnym punkcie, $m = 1$, lecz punkt ten leży na osi m w płaszczyźnie m, k . Potraktujemy więc parametr m jako zmienną niezależną i wprowadzimy nową zmienną niezależną podobnie jak w metodzie PLK. Napiszemy mianowicie wzór dla pręta obciążonego jedynie siłą skupioną,

$$(4.2) \quad k = \frac{\bar{m}}{1 - \bar{m}},$$

lecz we wzorze tym siła m została zastąpiona przez siłę «zredukowaną» $\bar{m} = \bar{m}(a)$, określoną szeregiem

$$(4.3) \quad \bar{m} = m + a\bar{m}_1 + a^2\bar{m}_2 + \dots,$$

gdzie $\bar{m}_i = \bar{m}_i(m)$ są funkcjami, które należy określić. Podstawienie (4.3) do (4.2) i rozwinięcie na szereg daje

$$(4.4) \quad k = \frac{m}{1 - m} + \frac{\bar{m}_1}{(1 - m)^2} a + \dots$$

Porównanie współczynników w szeregach (4.1) i (4.4) pozwoli na określenie funkcji $\bar{m}_i(m)$:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \bar{m}_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} = 0,46709, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

i ostatecznie

$$(4.6) \quad \bar{m} = m + 0,46709a + \dots,$$

lub, wracając do wielkości fizycznych,

$$(4.7) \quad \bar{P} = P + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) qFl + \dots = P + 0,29736 qFl + \dots$$

Szeregi te są znacznie lepiej zbieżne niż szereg (4.1); określają one fikcyjną (zredukowaną) siłę skupioną, która odpowiada rzeczywistemu układowi obciążeń wywołując tę samą szybkość wybożenia pełzającego. Krótko mówiąc, do siły P należy dodać w przybliżeniu 0,3 ciężaru pręta, by otrzymać siłę zredukowaną.

5. Rozwiązanie równania wybożenia sprężystego zwyczajną metodą małego parametru

W poprzednim punkcie znaleźliśmy pewne rozwiązanie szczególne równania (2.10). Przyjmuje ono wartość $y(x, \tau) = z(x) = y_+(x)$ dla $\tau = +0$. Obecnie określimy pierwotną krzywą ugięcia przed przyłożeniem obciążenia ($\tau = -0$), oznaczaną symbolem $y_-(x)$, która po przyłożeniu obciążenia ulegnie zmianie na żądaną krzywą $y_+(x) = z(x)$.

Zmiana ta jest wynikiem odkształceń sprężystych. Do równania sprężystych ugięć prętów słabo zakrzywionych

$$(5.1) \quad \kappa - \kappa_- = \frac{M}{EI}$$

podstawimy równanie momentu zginającego (2.1), uzyskując

$$(5.2) \quad EI(\kappa - \kappa_-) = Pv + \int_0^s qF d\xi [v(s) - v(\xi)].$$

Przyjmując $\kappa = -v''$ otrzymujemy równanie różniczkowo-całkowe; zróżniczkowanie tego równania względem s daje

$$(5.3) \quad EI(v'''' - v''') + Pv' + qFsv' = 0,$$

lub po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych (2.7), (2.8) i (2.9)

$$(5.4) \quad y'''' - y'''' + my' + axy' = 0.$$

W równaniu tym funkcja $y(x) = y_+(x) = z(x)$ jest znana, a celem naszym jest określenie funkcji $y_-(x)$. Formalnie rzecz biorąc można z równania (5.4) obliczyć y'''' , a całkując trzykrotnie otrzymalibyśmy wtedy y_- . Jednak funkcja $z(x)$ znana jest tylko w postaci rozwinięcia na szereg potęgowy parametru a i równanie (5.4) musimy rozwiązać również za pomocą metody małego parametru. Poszukiwaną funkcję rozwiniemy więc w szereg

$$(5.5) \quad y_- = \sum_{j=0}^{\infty} a^j y_{-,j} = y_{-,0} + ay_{-,1} + a^2 y_{-,2} + \dots,$$

a przedstawiając również funkcję $y(x) = z(x)$ w postaci szeregu (3.3) i podstawiając obydwa szeregi do (5.4) otrzymujemy

$$(5.6) \quad z_0'''' + az_1'''' + a^2 z_2'''' + \dots - y_{-,0}'''' - ay_{-,1}'''' - a^2 y_{-,2}'''' - \dots + \\ + mz_0' + maz_1' + ma^2 z_2' + \dots + axz_0' + a^2 xz_1' + \dots = 0.$$

Przyrównując do zera współczynniki przy poszczególnych potęgach parametru a otrzymujemy układ równań

$$(5.7) \quad \begin{cases} z_0'''' - y_{-,0}'''' + mz_0' = 0, \\ z_1'''' - y_{-,1}'''' + mz_1' + xz_0' = 0, \\ \dots \\ z_n'''' - y_{-,n}'''' + mz_n' + xz_{n-1}' = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązania tego układu z warunkami brzegowymi (2.11). Strzałkę ugięcia $f = f_-$ traktujemy przy tym jako znaną, stałą i niezależną od parametru α .

Podstawiając do pierwszego równania wyrażenie (3.15) otrzymujemy

$$(5.8) \quad -f_{+,0} \cos x - y_{-,0}'' + m f_{+,0} \cos x = 0,$$

skąd

$$(5.9) \quad y_{-,0} = (1-m)f_{+,0} \sin x$$

oraz

$$(5.10) \quad f_- = (1-m)f_{+,0},$$

czyli

$$(5.11) \quad f_{+,0} = \frac{f_-}{1-m},$$

(jak zwykle dla pręta pryzmatycznego obciążonego jedynie siłą skupioną).

Przejdziemy obecnie do równania (5.7.2), określającego y_{-1} . Z równania tego wynika

$$(5.12) \quad y_{-,1}''' = z_1''' + m z_1' + \alpha z_0'.$$

Do równania tego możemy podstawić znane funkcje z_0 i z_1 i scałkować je trzykrotnie. Droga ta jest jednak bardzo niedogodna, szczególnie z uwagi na funkcję z_1 , która jest określona stosunkowo długim wzorem (3.20). Znacznie korzystniej jest wprowadzić następujące podstawienie wykorzystując (3.16):

$$(5.13) \quad z_1' = -z_1''' + \frac{(1-m)^2}{m} k_1 f_{+,0} \cos x - \frac{1}{m} f_{+,0} \alpha \cos x.$$

Po podstawieniu z_0 uzyskujemy wtedy równanie

$$(5.14) \quad y_{-,1}''' = (1-m)z_1''' + (1-m)^2 k_1 f_{+,0} \cos x,$$

które daje się scałkować bez żadnej trudności. Wobec warunków brzegowych (2.11) i wzoru (3.18) otrzymujemy

$$(5.15) \quad y_{-,1} = (1-m)z_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right) f_{+,0} \sin x.$$

Ponieważ założyliśmy, że pierwotna strzałka ugięcia f_- posiada wartość stałą i niezależną od parametru α , więc dla $x = \pi/2$ przyjmujemy $y_{-,1} = 0$, skąd

$$(5.16) \quad f_{+,1} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right) \frac{f_{+,0}}{1-m} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right) \frac{f_-}{(1-m)^2}$$

i ostatecznie po podstawieniu (3.20) i (5.11)

$$(5.17) \quad y_{-,1} = \frac{1-m}{4m} f_{+,0} \left[x^2 \cos x - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\right) x \cos x - 4 \cos x - 3x \sin x + \left(\frac{3}{4}\pi - 4\right) \sin x + 4 \right].$$

Wzór ten określa główną wartość poprawki do sinusoidalnej krzywej pierwotnej (5.9), która jest niezbędna, by w chwili $\tau = +0$, po przyłożeniu obciążenia, linia ugięcia odpowiadała rozwiązaniu szczególnemu równania (2.10). Dla zbadania wartości liczbowych tej poprawki wprowadzimy oznaczenie

$$(5.18) \quad U(x) = \frac{1}{4} \left[x^2 \cos x - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right) x \cos x - 4 \cos x - 3x \sin x + \left(\frac{3}{4} \pi - 4 \right) \sin x + 4 \right],$$

Tablica 1. Wartości pomocniczej funkcji $U(x)$

x	$U(x)$
0	0
$\frac{1}{8}\pi$	-0,0176
$\frac{1}{4}\pi$	-0,0183
$\frac{3}{8}\pi$	-0,0070
$\frac{1}{2}\pi$	0

i przepisujemy (5.17) w postaci

$$(5.19) \quad y_{-,1} = \frac{1-m}{m} f_{+,0} U(x).$$

Wartości funkcji $U(x)$ zestawione zostały w tablicy 1. Wartości te są małe w stosunku do jedności i «zakłócona» pierwotna linia ugięcia na ogół mało się różni od ćwiartki sinusoidy. Większe różnice mogą jednak wystąpić przy małych wartościach siły skupionej m , bowiem siła ta znajduje się we wzorze (5.19) w mianowniku.

6. Określenie sprężystej strzałki ugięcia modyfikowaną metodą małego parametru

Strzałka ugięcia f_+ , po przyłożeniu obciążenia, wobec (3.9), (5.11) i (5.16) określona jest za pomocą szeregu

$$(6.1) \quad f_+ = f_- \left[\frac{1}{1-m} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{(1-m)^2} \alpha + \dots \right].$$

Szereg ten jest rozbieżny dla $m = 1$, lecz zbieżność jego może ulec poprawie przez wprowadzenie modyfikacji, zbliżonej do metody PLK. Wprowadzimy nową zmienną niezależną \bar{m} pisząc

$$(6.2) \quad f_+ = \frac{f_-}{1-\bar{m}},$$

gdzie podobnie jak we wzorze (4.3),

$$(6.3) \quad \bar{m} = m + \alpha \bar{m}_1 + \alpha^2 \bar{m}_2 + \dots$$

Należy określić funkcje $\bar{m}_i = \bar{m}_i(m)$. Podstawiając (6.3) do (6.2) i wykonując dzielenie szeregów otrzymujemy

$$(6.4) \quad f_+ = f_- \left[\frac{1}{1-m} + \frac{\bar{m}_1}{(1-m)^2} \alpha + \dots \right].$$

Porównując (6.1) i (6.4) możemy określić poszukiwane funkcje $\bar{m}_i(m)$:

$$(6.5) \quad \begin{cases} \bar{m}_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} = 0,46709 \\ \dots \end{cases}$$

i ostatecznie

$$(6.6) \quad \bar{m} = m + 0,46709\alpha + \dots$$

Dwa pierwsze wyrazy tego szeregu są identyczne z (4.6), zatem przy obliczaniu ugięć sprężystych należy również do siły P dodać w przybliżeniu 0,3 ciężaru pręta, by otrzymać siłę zredukowaną.

7. Wyboczenie sprężyste przy sinusoidalnej pierwotnej linii ugięcia

Określona w poprzednim punkcie metodą odwrotną pierwotna linia ugięcia była «zakłóconą sinusoidą». Dla porównania podamy jeszcze analizę ugięć sprężystych przy «zwyczajnej» sinusoidzie jako pierwotnej linii ugięcia.

Równanie (5.4) będziemy teraz rozwiązywać ze względu na $y = y(x)$. Podstawiając

$$(7.1) \quad y_- = f_- \sin x,$$

otrzymujemy równanie

$$(7.2) \quad y''' + my' + axy' = -f_- \cos x.$$

Rozwiązanie tego równania założymy jak zwykle w postaci

$$(7.3) \quad y = \sum_{j=0}^{\infty} a^j y_j = y_0 + ay_1 + a^2 y_2 + \dots$$

Podstawiając (7.3) do (7.2) i porównując współczynniki przy poszczególnych potęgach parametru a otrzymujemy układ równań

$$(7.4) \quad \begin{cases} y_0''' + my_0' = -f_- \cos x, \\ y_1''' + my_1' = -xy_0', \\ \dots \\ y_n''' + my_n' = -xy_{n-1}', \\ \dots \end{cases}$$

Poszukujemy rozwiązania tego układu z warunkami brzegowymi (2.11), przy czym strzałkę ugięcia $f = f_+$ przedstawimy szeregiem (3.9).

Rozwiązaniem pierwszego równania jest funkcja

$$(7.5) \quad y_0 = \frac{f_-}{1-m} \cos x,$$

zatem

$$(7.6) \quad f_{+,0} = \frac{f_-}{1-m}.$$

Otrzymaliśmy wzór (5.11), bowiem przybliżenia zerowe obu rozwiązań są identyczne.

Podstawiając (7.5) i (7.6) do (7.4.2) otrzymujemy równanie

$$(7.7) \quad y_1''' + my_1' = -\frac{f_-}{1-m} x \cos x.$$

Ze względu na funkcję y_1' jest to równanie typu równania drgań wymuszonych. Stosując całkę DUHAMELA otrzymujemy najpierw

$$(7.8) \quad y_1' = C_1 \sin x \sqrt{m} + D_1 \cos x \sqrt{m} - \\ - \frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^x \frac{f_-}{1-m} \xi \cos \xi \sin[\sqrt{m}(x-\xi)] d\xi,$$

przy czym ξ oznacza zmienną całkowania. Uwzględniając warunki brzegowe dla pierwszej i drugiej pochodnej i wykonując całkowanie dochodzimy do wzoru

$$(7.9) \quad y_1' = \frac{\left[2\sqrt{m} - (1+m) \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m}\right] f_-}{m(1-m)^3 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} \cos x \sqrt{m} + \\ + \frac{f_-}{\sqrt{m}(1-m)^3} [\sqrt{m}(1-m)x \cos x - 2\sqrt{m} \sin x + (1+m) \sin x \sqrt{m}].$$

Całkując jeszcze raz i uwzględniając warunek $y = 0$ dla $x = 0$ otrzymujemy

$$(7.10) \quad y_1 = \frac{f_-}{m(1-m)^3} \left\{ \frac{2\sqrt{m} - (1+m) \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} \sin x \sqrt{m} + \right. \\ \left. + m(1-m)x \sin x + m(3-m) \cos x - (1+m) \cos x \sqrt{m} + (1-m)^2 \right\}.$$

Podstawienie $x = \pi/2$ pozwoli teraz określić poszukiwaną wielkość $f_{+,1}$ wzorem

$$(7.11) \quad f_{+,1} = \frac{2\sqrt{m} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m} + \left[(1-m)^2 + \frac{\pi}{2} m(1-m) \right] \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} - (1+m)}{m(1-m)^3 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} f_-$$

i ostatecznie strzałkę ugięcia po przyłożeniu obciążenia, f_+ , określimy szeregiem

$$(7.12) \quad f_+ = f_- \left\{ \frac{1}{1-m} + \frac{2\sqrt{m} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m} + \left[(1-m)^2 + \frac{\pi}{2} m(1-m) \right] \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} - (1+m)}{m(1-m)^3 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} \alpha + \dots \right\}.$$

Dla poprawienia zbieżności szeregu (7.12) można zastosować modyfikację metody małego parametru, wprowadzając «zredukowane» obciążenie wzorami (6.2) i (6.3). Rozwijając (6.2) na szereg (6.4) i porównując ten szereg z szeregiem (7.12), określimy poszukiwaną funkcję $\bar{m}_1 = \bar{m}_1(m)$ za pomocą wzoru

$$(7.13) \quad \bar{m}_1 = \frac{2\sqrt{m} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m} + \left[(1-m)^2 + \frac{\pi}{2} m(1-m) \right] \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} - (1+m)}{m(1-m) \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}},$$

tak że ostatecznie obciążenie «zredukowane» \bar{m} przedstawimy szeregiem

$$(7.14) \quad \bar{m} = m + \frac{2\sqrt{m} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m} + \left[(1-m)^2 + \frac{\pi}{2} m(1-m) \right] \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} - (1+m)}{m(1-m) \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} \alpha + \dots,$$

Funkcja $\bar{m}_1 = \bar{m}_1(m)$ określona wzorem (7.13) posiada granice zarówno w punkcie $m = 0$ jak i w punkcie $m = 1$. Łatwo wykazać, że granice te wynoszą

$$(7.15) \quad \bar{m}_1(0) = \frac{3}{2}\pi - 3 - \frac{\pi^2}{8} = 0,47868,$$

$$(7.16) \quad \bar{m}_1(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} = 0,46709.$$

W przedziale $(0, 1)$ wartości funkcji $\bar{m}_1 = \bar{m}_1(m)$ zawarte są pomiędzy tymi wartościami skrajnymi, a więc zmieniają się nieznacznie; zostały one zestawione w tabelicy 2.

Tablica 2. Wartości funkcji $\bar{m}_1 = \bar{m}_1(m)$ w przypadku sinusoidalnej pierwotnej linii ugięcia

m	$\bar{m}_1(m)$	m	$\bar{m}_1(m)$
0	0,4787	0,5	0,4732
0,1	0,4777	0,6	0,4720
0,2	0,4766	0,7	0,4708
0,3	0,4755	0,8	0,4696
0,4	0,4744	0,9	0,4684
0,5	0,4732	1	0,4671

8. Związek z siłą krytyczną (Eulera)

Przy posługiwaniu się teorią ugięć nieskończenie małych nieograniczony wzrost strzałki ugięcia pręta o krzywiznie pierwotnej stanowi pewne kryterium siły krytycznej dla odpowiedniego pręta prostego. Dzięki zastosowanej mody-

fikowanej metody małego parametru kryterium to posiada w naszym przypadku niezwykle prostą postać

$$(8.1) \quad \bar{m} = 1,$$

a więc korzystając z przeprowadzonej analizy możemy bez trudu otrzymać przybliżone wzory na siłę krytyczną (w naszym przypadku, ściślej mówiąc, zespół obciążeń krytycznych). Porównanie ich z posiadanymi wzorami ścisłymi będzie pewnym sprawdzianem zbieżności stosowanych szeregów.

Biorąc pod uwagę szereg (6.6) otrzymujemy

$$(8.2) \quad m + 0,46709a + \dots = 1,$$

a z szeregu (7.14) wynika

$$(8.3) \quad m + \frac{2\sqrt{m} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{m} + \left[(1-m)^2 + \frac{\pi}{2} m(1-m) \right] \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m} - (1+m)}{m(1-m) \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{m}} a + \dots = 1.$$

Założymy $m = 0$ i obliczymy krytyczne obciążenie ciągle (ciężar własny) α . Uwzględniając dwa pierwsze wyrazy szeregu (8.2) otrzymujemy

$$(8.4) \quad \alpha = \frac{1}{0,46709} = 2,1409,$$

skąd

$$(8.5) \quad (qFl)_k = \frac{\pi^3}{8} \cdot 2,1409 \frac{EI}{l^2} = 8,2977 \frac{EI}{l^2}.$$

Posługując się dwoma pierwszymi wyrazami szeregu (8.3) otrzymujemy nieco inny wynik, mianowicie, wobec (7.15),

$$(8.6) \quad \alpha = \frac{1}{0,47868} = 2,0891,$$

skąd

$$(8.7) \quad (qFl)_k = \frac{\pi^3}{8} \cdot 2,0891 \frac{EI}{l^2} = 8,0969 \frac{EI}{l^2}.$$

Ścisła wartość obciążenia krytycznego $[(qFl)_k]$ określona jest równaniem przepiętnym (G. BÜRGERMEISTER i H. STEUP, [1], i A. N. DINNIK, [3]),

$$(8.8) \quad J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} l^{3/2} \sqrt{\frac{qF}{EI}} \right) = 0,$$

gdzie $J_{-1/3}(x)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju, rzędu minus jedna trzecia. Korzystając z tablic [19] znajdujemy

$$\frac{2}{3} l^{3/2} \sqrt{\frac{qF}{EI}} = 1,86635,$$

skąd ostatecznie

$$(8.9) \quad (qFl)_k = 7,83735 \frac{EI}{l^2}.$$

Błąd wzoru (8.5) jest zatem mniejszy niż 6%, a błąd wzoru (8.7) wynosi około 3%; należy przy tym podkreślić, że wartości a , $a = 2,1409$ i $a = 2,0891$, nie są tu bynajmniej małe wobec jedności. Ze zmniejszaniem się a błędy przybliżenia maleją, zatem zbieżność stosowanych szeregow należy w całym przedziale $0 \leq m \leq 1$ uznać za dostatecznie szybką.

9. Uwagi końcowe

Praca została zasadniczo poświęcona analizie szczególnego rozwiązania równania wyboczenia pełzającego (2.10), a więc rozwiązania przy warunku początkowym $y(x, 0) = y_+(x) = z(x)$, określonym równaniami (3.3), (3.15) i (3.20). Warunkowi temu odpowiada pierwotna linia ugięcia, określona równaniami (5.5), (5.9) i (5.17). Linia ta jest najważniejsza dla zastosowań praktycznych, niewiele się bowiem różni od ćwiartki sinusoidy. Zastosowaną w niniejszej pracy metodą można jednak uzyskać ciąg podobnych rozwiązań odpowiadających przyjęciu wyższych wartości własnych we wzorze (3.12), oraz określić odpowiednie pierwotne linie ugięcia. Dowolną pierwotną linię ugięcia można wtedy aproksymować kombinacją liniową kilku pierwszych wyrazów ciągu. Natomiast rozwinięcie danej linii ugięcia na szereg, którego wyrazami są kolejne pierwotne linie ugięcia, odpowiadające kolejnym rozwiązaniom szczególnym równania (2.10), nastęrcza trudności, ponieważ nie znamy wzoru ogólnego, określającego n -ty wyraz szeregu i nie możemy zbadać zupełności układu odpowiednich funkcji.

Jako ostateczny wniosek przyjmujemy, iż dla pierwotnej linii ugięcia, nieznacznie odbiegającej od ćwiartki sinusoidy, obciążenie ciągłe (ciężar własny) można w przybliżeniu zastąpić zarówno przy analizie wyboczenia sprężystego, jak i pełzającego, przez równoważną siłę skupioną $P = 0,3 qFl$ [wzory (4.7) i (6.6)].

Literatura cytowana w tekście

- [1] G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, *Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114*, Teil 1, Akademie-Verlag, Berlin 1957.
- [2] А. Н. ДИНИК, *Продольный изгиб-кручение*, Издат. АН СССР, Москва. 1955.
- [3] А. Н. ДИНИК, *Избранные труды*, т. 2, Акад. Наук Укр. ССР, Киев 1955, 73-87.
- [4] T. GALKIEWICZ, *Zastosowanie metody małego parametru do określania siły krytycznej ścisłanego pręta o zmiennym przekroju poprzecznym*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej, Mechanika 4, Łódź 1956.

[5] A. GREENHILL, *Determination of the Greatest Height Consistent with Stability That a Vertical Pole or Mast Can be Made, or the Greatest Height to which a Tree of Given Properties Can Grow*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 4 (1881), 65-75.

[6] P. G. HEIM, *Über Gleichgewicht und Bewegung gespannter elastischer fester Körper*, Stuttgart u. Tübingen 1838.

[7] N. J. HOFF, *A Survey of the Theories of Creep Buckling*, Proc. Third US Nat. Congr. Appl. Mech., Brown University 1958, publ. Pergamon Press 1958.

[8] J. A. H. HULT, *Krypknäckning av stråvor*, Instn. Hallfasthetslära Kungl. Tekniska Högskolan, Publ. nr 111, Stockholm 1955.

[9] K. KARAS, *Über die Knickung gerader Stäbe durch ihr Eigengewicht*, Z. Bauwesen, 1925, s. 86.

[10] Y. H. KUO, *On the Flow of an Incompressible Viscous Fluid Past a Flat Plate at Moderate Reynolds Number*, J. Math. Phys. 32 (1953), 83.

[11] M. J. LIGHTHILL, *A Technique for Rendering Approximate Solutions to Physical Problems Uniformly Valid*, Phil. Mag., 40 (1949), 1179.

[12] J. NALESZKIEWICZ, *Rozważania ogólne nad zginaniem prostych belek ściskanych*, Księga Jubil. M. T. Hubera, Gdańsk 1950, 251-274.

[13] Е. Л. НИКОЛАИ, *О работах Эйлера по теории продольного изгиба*, Труды по механике, Гостехиздат, Москва 1955, 436-454.

[14] M. PIĄTEK, *Linia ugięcia belki obustronnie utwierdzonej przy dowolnym obciążeniu i zmiennym przekroju*, Zjazd Nauk. PZITB, t. 3, Gdańsk 1949, 215-227.

[15] Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. Мат. Мех., 21 (1957), 406-412 oraz J. Mech. Phys. Solids, 6 (1957), 27-34.

[16] F. REINITZHUBER, *Stabilität gerader Stäbe mit linear veränderlicher Längskraft im unelastischen Bereich*, Alfons Leon Gedenkschrift, Verlag Allg. Bau-Z., Wien 1952, 18-22.

[17] F. REINITZHUBER, *Knickung gerader Stäbe mit linear veränderlicher Längskraft im elastischen und unelastischen Bereich*, Bautechnik-Architektur, 1955, 1-32.

[18] F. REINITZHUBER, *Angenäherte Formeln für Knickung von Stäben mit linear veränderlicher Längskraft*, Publ. Int. Assn. Bridge Struct. Engin., 13 (1953), 309-319.

[19] *Tables of Functions and Zeros of Functions*, US Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Series, 37, November 1954.

[20] H. S. TSIEN, *The Poincare-Lighthill-Kuo Method*, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 4, Acad. Press inc., New York 1956, 281-349.

[21] F. A. WILLERS, *Das Knicken schwerer Gestänge*, Z. Angew. Math. Mech. 21 (1941), 43.

[22] M. WNUK, M. ŻYCZKOWSKI, *Wpływ osłabienia pręta na siłę krytyczną w zakresie sprężysto-plastycznym*, Rozpr. inżyn., 3, 7 (1959), 311-336.

[23] H. YOSHIHARA, *On the Lateral Buckling of a Tapered Cantilever Beam*, AF Techn. Rep. WADC TR 54-477, October 1954.

[24] M. ŻYCZKOWSKI, *Some Problems of Creep Buckling of Homogeneous and Non-Homogeneous Bars*, Proc. Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1959, 353-363.

[25] M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd i klasyfikacja prac nad wyboczeniem pełzającym*, Czasop. Techn., 1, 65 (1960).

[26] M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically Non-Linear Creep Buckling of Bars*, Arch. Mech. stos., 3, 12 (1960), 379-411.

ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТВЕРЖНЕЙ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе рассматривается проблема продольного изгиба при ползучести, односторонне защемленных вертикальных стержней, находящихся под действием сосредоточенной силы и собственного веса. При этом принимаются следующие более важные предположения, что: 1 — прогиб бесконечно мал, 2 — стержень имеет некоторую начальную кривизну (технический продольный изгиб), 3 — что материал подчиняется линейному закону ползучести типа Максвелла.

Основным уравнением является уравнение устойчивости при ползучести (2.10). Оно интегрируется путем разделения переменных и разложения собственных функций в степенный ряд малого параметра α , за который принято собственный вес [«косое решение» уравнения (2.10)]. Логарифмическая скорость продольного изгиба k определяется рядом (4.1), а затем применяется модификация метода малого параметра, применяя формулу (4.2), в которой разлагается в ряд «редуцированную» силу \bar{m} .

Далее определяется уравнение начальной линии прогиба $y(x)$, которая соответствует первому особому решению уравнения устойчивости при ползучести. Эта линия определяется уравнениями (5.5), (5.9) и (5.7), — при чем она немного разнится от четверти синусоиды. Степень сходимости полученных рядов исследуется путем определения критического собственного веса, основываясь при этом на критерии (8.1) и сравнении с известным решением.

В качестве окончательного заключения принимается, что для начальной линии прогиба, незначительно разнящейся от четверти синусоиды, распределенная нагрузка (собственный вес) может быть заменена в приближении при анализе устойчивости при ползучести, как и при упругой устойчивости — эквивалентной сосредоточенной силой $P = 0,3qFl$.

Summary

THE INFLUENCE OF THE WEIGHT ON CREEP BUCKLING OF BARS

The problem of creep buckling of vertical cantilever bars loaded by a concentrated force and the weight of the bar is considered. The principal assumptions are as follows: the deflections are infinitely small; the bar has a certain initial curvature (technical type of buckling) the material is subject to a linear creep law of Maxwellian type.

The fundamental equation is that of creep buckling (2.10). It is integrated by separating variables and expanding the eigenfunctions into a power series of a small parameter α , for which the weight of the bar is assumed («parti-

cular» solutions of the Eq. (2.10). The logarithmic creep buckling rate is expressed by the series (4.1). Then the small parameter method is modified by assuming the Eq. (4.2) where the «reduced» force \bar{m} is expanded in a series.

In the next part of the paper the equation of the initial deflection curve $y(x)$ corresponding to the first particular solution of the creep buckling equation is established. This curve is determined by the Eqs. (5.5), (5.9) and (5.17); it differs very little from the quarter of a sine-curve. The rate of convergence of the series obtained is investigated by calculating the critical weight on the basis of the criterion (8.1) and comparing it with the known accurate solution.

As a final conclusion it is found that for an initial deflection curve differing very little from the quarter of a sine-curve, the distributed load (the weight) may be replaced, in an approximate manner, both for creep buckling and elastic buckling, by the equivalent concentrated force $P = 0,3qFl$.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 lutego 1960 r.