

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

**OGÓLNA TEORIA STATECZNOŚCI PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH
Z UWZGLĘDNIENIEM ODKSZTAŁCALNOŚCI PRZEKROJU
POPZECZNEGO**

CZĘŚĆ I. PRĘTY O PROSTYM PRZEKROJU POPZECZNYM

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLXI**

TOM VIII . ZESZYT 3 . ROK 1960

SPIS TREŚCI

1. Uwagi wstępne	423
2. Równania równowagi ścianek pręta	426
3. Zagadnienia pomocnicze	430
4. Analiza stateczności niektórych prętów cienkościennych	435
5. Wyboczenie lokalne jako przypadek szczególny	451
6. Przykłady liczbowe. Porównanie z wynikami obliczeń uproszczonych	452
7. Wnioski praktyczne	456

1 Uwagi wstępne

Zagadnienie stateczności prętów cienkościennych opracowane jest dokładnie z dwu punktów widzenia: jako zagadnienie stateczności całego pręta (stateczności ogólnej) i jako zagadnienie stateczności lokalnej, tzn. płytowej stateczności jego ścianek.

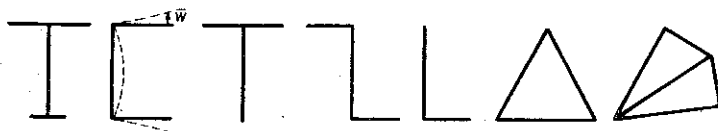
Teoria stateczności ogólnej prętów cienkościennych została podana w postaci najpełniejszej (a w zakresie sprężystym dla prętów przyzmatycznych) niewątpliwie ostatecznej przez WŁASOWA. Zarówno WŁASOW jak i jego poprzednicy przyjmują jako założenie zasadnicze podstawowe założenie wszelkich teorii prętowych, mianowicie nieodkształcalność przekroju poprzecznego. Założenie to jest oczywiście przybliżeniem, ponieważ otrzymane z niego siły wewnętrzne pozwalają na spełnienie warunków równowagi całego pręta, natomiast nie dają możliwości spełnienia wszystkich warunków równowagi dla poszczególnych jego elementów. Stosowalność wzorów klasycznych teorii prętów cienkościennych ogranicza się zatem do tych przypadków, w których zapewniona jest w stopniu praktycznie wystarczającym nieodkształcalność przekroju poprzecznego za pomocą dostatecznie gęsto rozmieszczonych przępon poprzecznych, i tylko dla tego rodzaju prętów zgodność teorii z doświadczeniem została potwierdzona eksperymentalnie.

Teoria wyboczenia lokalnego jest obecnie wystarczająco opracowana dla prętów przyzmatycznych osiowo ściskanych, których przekrój poprzeczny jest wielobokiem (np. [5] i [6]; por. też [7]). Poszczególne ścianki pręta traktowane są jako płyty połączone ze sobą wzdłuż krawędzi. Obciążenie krytyczne oblicza się w oparciu o teorię stateczności płyt biorąc pod uwagę zgodność przemieszczeń płytowych poszczególnych ścianek. Wyniki otrzymane w ten sposób są również nieściśle, ponieważ nie uwzględnia się tu wszystkich warunków równowagi; niezrównoważone są mianowicie poszczególne ścianki traktowane jako pręty, obciążone reakcjami płytowymi.

Mamy zatem z jednej strony do czynienia z wpływem odkształcalności przekroju poprzecznego na odkształcenia ścianek w ich płaszczyźnie, a co zatem idzie na siłę krytyczną wyboczenia pręta, z drugiej zaś strony z wpływem odkształcalności ścianek, a więc ich odkształceń prętowych na wyboczenie płytowe. Wynika stąd, że podział na stateczność ogólną i lokalną nie jest w ści-

słym ujęciu słuszny teoretycznie. Mamy bowiem do czynienia zawsze z jednym zjawiskiem, mianowicie utratą stateczności, przy czym powstają odkształcenia zarówno płytowe jak i prętowe. Fakt ten nie zmniejsza rzecz jasna praktycznej ważności tego podziału, tym bardziej, że wpływ odkształceń prętowych na wyoboczenie lokalne będzie zawsze znikomy z powodu dużej sztywności prętowej ścianek w porównaniu do ich sztywności płytowej, podczas gdy — z tej samej przyczyny — wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na stateczność ogólną może być znacznie większy.

Praca niniejsza jest kontynuacją poprzednich publikacji autora, [2], [3] i [4], w których omówiono wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego pręta na giętne, skrętne i giętno-skrętne wyoboczenie pręta dwuteowego i ceowego. Wyniki otrzymano tam przyjmując jako założenie upraszczające nieodkształcalność pólki. Jest rzeczą oczywistą, że założenie to wymaga weryfikacji i może budzić wątpliwości w przypadkach przekrojów o półkach bardzo cienkich. Poza tym ogranicza ono stosowalność teorii, ponieważ dopiero przy uwzględnieniu zniekształcenia całego przekroju poprzecznego można otrzymać wyniki miarodajne również dla obszaru obejmującego zjawiska niestateczności lokalnej. W pracy niniejszej podana jest teoria ogólna w ujęciu ścisłym, przez co rozumiemy uwzględnienie odkształcalności przekroju poprzecznego przy pozostawieniu pozostałych założeń teorii prętów cienkościennych.



Rys. 1

Traktowanie przedmiotu w sposób najogólniejszy, to znaczy obejmujący pręty o dowolnym krzywoliniowym przekroju poprzecznym, wymagałoby ogólnego rozwiązania zagadnienia stateczności powłoki walcowej. Jeżeli ograniczymy się do prętów o przekroju wielobocznym, to celowym dla nas okaże się podział ich na dwie grupy.

Do grupy pierwszej (rys. 1) zaliczamy te przekroje, których zniekształcenie nie powoduje bezpośrednio przemieszczeń punktów powierzchni środkowej w płaszczyźnie ścianki. Innymi słowy — powoduje powstanie tylko przemieszczeń płytowych w kierunku normalnym do ścianki. Grupa ta obejmuje wszystkie przekroje walcowane i przekroje do nich podobne (np. niesymetryczne), a zatem ogromną większość używanych w praktyce prętów cienkościennych. Z przekrojów zamkniętych należy do niej tylko przekrój trójkątny oraz przekroje złożone z pól trójkątnych. Przekroje pierwszej grupy nazywać będziemy prostymi.

Drugą grupę tworzą wszystkie inne przekroje; będziemy je nazywać złożonymi. Należą tu wszystkie przekroje zamknięte z wyjątkiem trójkątnych, a także bardziej skomplikowane przekroje otwarte (rys. 2).

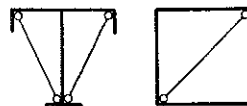
Zauważmy, że każdy przekrój złożony staje się przekrojem prostym, jeżeli zaopatrzymy go w odpowiednią ilość więzów (rys. 3). Wieży te powinny być rozłożone w sposób ciągły wzdłuż osi pręta i jeżeli nie mają przekroju otwartego zmieniać w zamknięty — nie mogą przenosić sił ścinających.



Rys. 2

W pracy niniejszej zajmiemy się prętami pierwszej grupy¹. Zniekształcenie tego rodzaju przekroju powoduje według definicji powstanie jedynie przemieszczeń płytowych \bar{w} o kierunku normalnym do ścianki. Przemieszczenia te, jak wiadomo (por. np. [1]), nie wpływają na rozkład naprężeń od zginania i skrępowanego skręcania, które zależą wyłącznie od składowej stycznej przemieszczeń punktów powierzchni środkowej ścianki.

Jeżeli weźmiemy poza tym pod uwagę fakt, iż przy badaniu stateczności zakłada się tylko nieskończenie małe odchylenia układu od położenia równowagi, a zatem — między innymi — nieskończenie małe przemieszczenia \bar{w} — dojdziemy do podstawowego dla dalszych rozważań



Rys. 3

(i uzasadniającego przeprowadzony podział prętów cienkościennych) następującego wniosku: przy badaniu stateczności prętów cienkościennych o prostym przekroju poprzecznym z uwzględnieniem odkształcalności przekroju naprężenia normalne i styczne, pochodzące od zginania i skrępowanego skręcania, związane z przejściem pręta od niestatecznej do statecznej postaci równowagi, podlegają wzorom teorii prętów cienkościennych, wyprowadzonym dla przekrojów nieodkształcalnych.

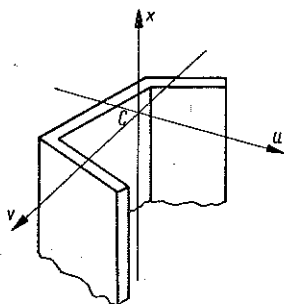
Rozważania nasze ograniczymy do przypadku osiowego ściskania w zakresie sprężystym. Przyjmiemy jak poprzednio powiedziano wszystkie założenia klasycznej teorii prętów cienkościennych z wyjątkiem założenia nieodkształcalności przekroju. Podkreślimy tu dwa najbardziej istotne z tych założeń. Pierwsze polega na pominięciu odkształceń postaciowych w powierzchni środkowej ścianki, co pozwalać będzie na traktowanie każdej ścianki pręta niezależnie za pomocą wzorów wynikających z przyjęcia płaskiego przekroju. Drugie polega na pominięciu podłużnych momentów zginających, które powstają wskutek odkształceń ścianki związanych z pracą całego pręta. Założenie

¹ Przekroje złożone będą przedmiotem oddzielnego opracowania.

to nie prowadzi do istotnych niedokładności i jak wykazał WŁASOW (por. [1]) jego odrzucenie nie komplikuje teorii, zmienia tylko minimalnie charakterystyki przekroju i współrzędne środka zginania. Rozważać będziemy pręty usztywnione dwoma tylko wiotkimi przeponami umieszczonymi na obu końcach i połączonymi przegubowo ze ściankami. Innymi słowy skrajne przekroje będą nieodkształcalne. Odnosnie ścianek przyjmujemy, że każda z nich ma stałą grubość. Na koniec założymy wolne podparcie pręta i swobodę deplanacji jego przekrojów skrajnych. Wzory robocze rozdziału drugiego zostaną wprowadzone dla przekrojów otwartych; dla przekrojów prostych zamkniętych metoda pozostanie nie zmieniona; przekrojów tych nie będziemy omawiać, ponieważ nie mają praktycznego znaczenia.

2. Równania równowagi ścianek pręta

Rysunek 4 przedstawia obrany układ współrzędnych; osie u i v są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju, oś x pokrywa się z osią ciężkości pręta. Stan odkształceń przekroju poprzecznego opisany jest (przy założeniu jego nieodkształcalności) przez przemieszczenia ξ , η w kierunku osi u i v oraz przez kąt obrotu φ przekroju względem środka zginania. Dodatnie przemieszczenia są skierowane zgodnie z kierunkiem dodatnim odpowiedniej osi, dodatni kąt obrotu widziany od dodatniej strony osi x ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara. Przy tych założeniach wzór na naprężenia styczne równomiernie rozłożone wzdłuż grubości ścianki przedstawia się jak następuje (por. np. [1]):



Rys. 4

$$(2.1) \quad \tau = \frac{E}{\delta} (\xi''' S_v + \eta''' S_u + \varphi''' S_\omega);$$

gdzie E jest modułem sprężystości, δ grubością ścianki, $S_v = \int u dA$ oraz $S_u = \int v dA$ przedstawiają momenty statyczne odciętej w rozpatrywanym punkcie części przekroju względem osi v i u , zaś $S_\omega = \int \omega dA$ jest jej wycinkowym momentem statycznym. Współrzędną wycinkową należy przy tym obliczać przyjmując za dodatni ten kierunek całkowania, który (widziany od strony dodatniej osi x) daje względem środka zginania zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara. Siła ścinająca, działająca na ściankę, będzie wynosić

$$(2.2) \quad t = \tau \delta = E (\xi''' S_v + \eta''' S_u + \varphi''' S_\omega).$$

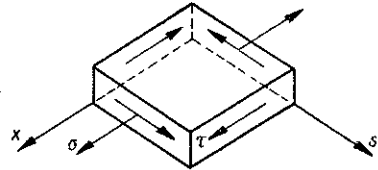
Dodatnia siła t będzie działać w kierunku zgodnym z przyjętym do obliczenia momentów statycznych S_v , S_u i S_ω kierunkiem całkowania, to znaczy w kierunku zmiennej s (rys. 5).

Przyjęcie odkształcalności przekroju wymaga traktowania każdej ścianki pręta niezależnie. Weźmy zatem pod uwagę dowolną ściankę r (rys. 6). Ścianka

ta przed utratą stateczności jest osiowo ściskanym płaskownikiem, przy czym siła ściskająca wynosi

$$P_r = A_r \sigma,$$

gdzie $A_r = b_r \delta_r$ jest powierzchnią jej przekroju poprzecznego, zaś $\sigma = P/A$ napreżeniem normalnym od ściskania pręta siłą P . Po utracie stateczności pojawiają się dodatkowe obciążenia ścianki wynikające z jej współpracy z pozostałymi elementami pręta. Między innymi będą to obciążenia rozłożone wzdłuż krawędzi ścianki, działające w jej płaszczyźnie. Sumę tych obciążeń nazwiemy p_r . Dodatkowo obciążenie p_r działać będzie w kierunku osi y_r . Składową przemieszczenia środka ciężkości ścianki w kierunku y_r nazwiemy ξ_r . Rzutując obciążenia elementu dx odkształconej ścianki na kierunek y_r otrzymamy (rys. 7)

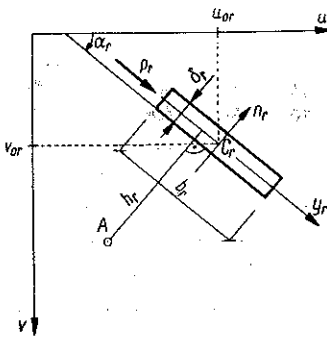


Rys. 5

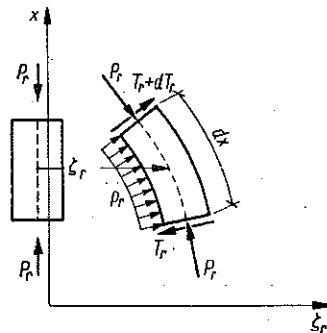
$$(2.3) \quad P_r \frac{d^2 \xi_r}{dx^2} - \frac{dT_r}{dx} - p_r = 0.$$

W powyższym równaniu T_r przedstawia siłę tnącą, która pojawia się wskutek odkształceń pręta. Siła ta będzie sumą sił ścinających, działających w przekroju ścianki, zatem:

$$(2.4) \quad T_r = \int_{-b_r/2}^{b_r/2} t_r dy_r = E \int_{-b_r/2}^{b_r/2} (\xi_r''' S_v + \eta_r''' S_u + \varphi_r''' S_\omega) dy_r.$$



Rys. 6



Rys. 7

Całkując przez części otrzymamy:

$$T_r = E \left[(\xi_r''' S_v + \eta_r''' S_u + \varphi_r''' S_\omega) y_r \right]_{-b_r/2}^{b_r/2} - \int_{-b_r/2}^{b_r/2} \left(\frac{dS_v}{dy_r} \xi_r'''' + \frac{dS_u}{dy_r} \eta_r'''' + \frac{dS_\omega}{dy_r} \varphi_r'''' \right) y_r dy_r.$$

Przyjmując dalej $dS_v = u dA$, $dS_u = v dA$, $dS_\omega = \omega dA$ oraz:

$$u = u_{0r} + y_r \cos \alpha_r, \quad v = v_{0r} + y_r \sin \alpha_r, \quad \omega = \omega_{0r} + y_r h_r,$$

gdzie u_{0r} , v_{0r} i ω_{0r} są współrzędnymi środka ciężkości C_r ścianki, zaś h_r jej odległością od środka zginania A , będziemy mieli:

$$T_r = \frac{1}{2} E b_r (S_v^{(r)} \xi'''' + S_u^{(r)} \eta'''' + S_\omega^{(r)} \varphi''') - EI_r (\xi'''' \cos \alpha_r + \eta'''' \sin \alpha_r + \varphi''' h_r),$$

gdzie:

$$(2.5) \quad \begin{cases} S_v^{(r)} = [S_v]_{y_r = b_r/2} + [S_v]_{y_r = -b_r/2}, \\ S_u^{(r)} = [S_u]_{y_r = b_r/2} + [S_u]_{y_r = -b_r/2}, \\ S_\omega^{(r)} = [S_\omega]_{y_r = b_r/2} + [S_\omega]_{y_r = -b_r/2}, \end{cases}$$

zaś

$$I_r = \int_{-b_r/2}^{b_r/2} y^2 dA = \frac{1}{12} \delta_r b_r^3$$

przedstawia moment bezwładności ścianki względem osi n_r . Biorąc dalej pod uwagę, że

$$\xi \cos \alpha_r + \eta \sin \alpha_r + \varphi h_r = \zeta_r,$$

otrzymamy ostatecznie

$$(2.6) \quad T_r = \frac{1}{2} E b_r (S_v^{(r)} \xi'''' + S_u^{(r)} \eta'''' + S_\omega^{(r)} \varphi''') - EI_r \zeta_r''''.$$

Podstawiając powyższy wzór do równania (2.3) i dzieląc je przez EA_r mamy

$$(2.7) \quad k \zeta_r'' + \frac{b_r^2}{12} \zeta_r'''' - \frac{1}{2\delta_r} (S_v^{(r)} \xi^{VI} + S_u^{(r)} \eta^{IV} + S_\omega^{(r)} \varphi^{IV}) - \frac{P_r}{EA_r} = 0,$$

gdzie $k = P_r / EA_r = \sigma / E$ jest bezwymiarowym współczynnikiem, odpowiadającym σ . Wyprowadzona zależność (2.7) przedstawia równanie równowagi odkształconej ścianki. Trzeci i czwarty jego wyraz przedstawiają wpływ oddziaływania na ściankę pozostałych elementów pręta. Pomijając ten wpływ otrzymujemy zwyczajne równania równowagi wolno stojącego płaskownika zginanego w płaszczyźnie osi y_r .

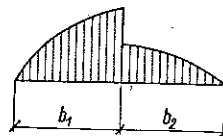
Wielkości $S_v^{(r)}$, $S_u^{(r)}$ i $S_\omega^{(r)}$ należy podstawiać według wzorów (2.5) z tym, że gdy kierunek y_r jest zgodny z kierunkiem całkowania s przyjętym do konstrukcji wykresów S_v , S_u i S_ω , wówczas momenty statyczne (liniowe i wycentrowane) występujące w tych wzorach należy brać wprost z odpowiednich wykresów, zaś gdy jest przeciwny — należy w nich zmienić znak.

W przypadku gdy wykres S jest nieciągły w obrębie ścianki (rys. 8), należy wzór (2.6) stosować oddzielnie do obu jej części, traktując je jako ścianki o sze-

rokościach b_1 oraz b_2 i przyjmując dla pierwszej z nich $I = (1/12)b_1^3\delta$, dla drugiej $I = (1/12)b_2^3\delta$ oraz sumując otrzymane w ten sposób częściowe siły tnące.

W równaniu (2.7) występują trzy składowe odkształceń pręta ξ , η , φ oraz przemieszczenie ζ_r ścianki w jej płaszczyźnie, które zgodnie z definicją prostego przekroju poprzecznego nie jest bezpośrednio zależne od zniekształcenia przekroju, zatem zależy wyłącznie od funkcji ξ , η , φ , przez które zawsze da się wyrazić. Warunki brzegowe dla tych funkcji wynikają z założenia wolnego i dopuszczającego swobodę deplanacji podparcia pręta na obu końcach, zatem dla $x = 0$, $x = l$ musi być

$$(2.8) \quad \xi = \eta = \varphi = \xi'' = \eta'' = \varphi'' = 0.$$



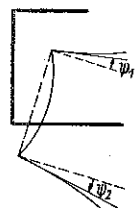
Rys. 8

Warunki te będą spełnione, jeżeli przyjmiemy te funkcje jako proporcjonalne do $\sin n\pi x/l$, gdzie n jest ilością półfal wyboczenia.

Nie biorąc pod uwagę zniekształcenia ścianki (tzn. jej zginania w kierunku poprzecznym) musielibyśmy do równania (2.6) dołączyć dwa dalsze, mianowicie dla zginania w płaszczyźnie osi n_r oraz dla skręcania. Przy uwzględnieniu odkształcalności poprzecznej ścianki równania te zastępujemy jednym dokładniejszym, mianowicie znanym równaniem równowagi odkształconej jednokierunkowo ściskanej płyty:

$$(2.9) \quad \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^2 \partial y_r^2} + \frac{\partial^4 w_r}{\partial y_r^4} = - \frac{\sigma \delta_r}{D_r} \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2}, \quad D_r = \frac{E \delta_r^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Pełne przemieszczenie płytowe $w_r(x, y_r)$ występujące w tym równaniu składa się z przemieszczenia \bar{w} , pochodzącego bezpośrednio od zniekształcenia przekroju, oraz z przemieszczeń związanych z odkształceniem całego pręta określonymi funkcjami $\xi(x)$, $\eta(x)$ i $\varphi(x)$. Funkcja $w_r(x, y_r)$ będzie przy danych naprężeniach ściskających określona jednoznacznie przez warunki brzegowe dla danej ścianki. Na brzegach poprzecznych $x = 0$, $x = l$ opartych na przeponach skrajnych będą to warunki wolnego podparcia, zaś na krawędziach podłużnych $y_r = \pm b_r/2$ warunki wynikające z określonych przemieszczeń brzegowych, ewentualnie — dla półek — warunki brzegu swobodnego.



Rys. 9

Przemieszczenia brzegowe na krawędziach podłużnych dane będą z kolei przez przemieszczenia prętowe $\xi(x)$, $\eta(x)$ i $\varphi(x)$ oraz przez kąty obrotu $\psi_i(x)$ krawędzi łączących poszczególne ścianki (por. rys. 9), które będziemy nazywali kątami zniekształcenia przekroju poprzecznego.

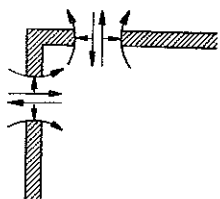
W ten sposób powierzchnia ugięcia $w_r(x_r, y_r)$ każdej ścianki określona będzie ostatecznie przez naprężenia ściskające σ i przez powyżej wymienione funkcje ξ , η , φ i ψ_i ; to samo dotyczy zatem również reakcji na brzegach podłużnych. Reakcje brzegowe ścianek schodzących się w jednej krawędzi muszą być

w równowadze (por. rys. 10). Z sum rzutów tych reakcji otrzymamy obciążenia p_r ścianek, wchodzące do równań (2.7). Pozostaną zatem sumy momentów, które dadzą równania typu

$$(2.10) \quad \sum m_{ik} = 0.$$

Jak widać, będziemy mieli ostatecznie układ równań typu (2.7) i (2.10), których niewiadomymi funkcjami będą tylko przemieszczenia prętowe $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\varphi(x)$ oraz kąty obrotu krawędzi $\psi_i(x)$.

Zatem ilość równań będzie równa ilości ścianek, do której należy dodać ilość krawędzi je łączących, zaś ilość niewiadomych będzie równa ilości krawędzi zwiększonej o trzy. Wynika stąd, że ilość ścianek pręta nie może przekraczać trzech, co istotnie zachodzi dla prętów o prostym otwartym przekroju poprzecznym (por. rys. 1).



Rys. 10

Dla prętów o przekroju zamkniętym lub zaopatrzonych w więzy według rys. 3 ilość ścianek może być większa, lecz jak łatwo udowodnić, zawsze ilość równań równowagi będzie równa ilości niewiadomych. Przy przeprowadzaniu dowodu należy do niewiadomych zaliczyć obciążenia p_r ścianek oraz siły w więzach, zaś do ilości równań pozostałe równania równowagi krawędzi wewnętrznych, tzn. dwie sumy rzutów dla każdej z nich². Przypadkiem tym nie będziemy się bliżej zajmować z powodu znikomego znaczenia praktycznego.

Rozwiązanie zagadnienia jest więc możliwe przez ułożenie odpowiedniej ilości równań (w przypadku ogólnym pręta o przekroju otwartym bez dodatkowych więzów — ilości równej sumie ścianek i krawędzi). Będą to zawsze równania jednorodne. Przyrównanie wyznacznika tego układu równań do zera da warunek wybozczeniowy w postaci równania przestępnego, z którego można obliczyć naprężenia krytyczne.

Wzory tego rozdziału wyprowadzono dla prętów cienkościennych otwartych. Dla prętów o prostym przekroju zamkniętym idea rozwiązania pozostanie taka sama, zmieni się jedynie wzór wyjściowy (2.1), a co zatem idzie również równanie równowagi ścianki (2.7).

3. Zagadnienie pomocnicze. Reakcje jednokierunkowo ściskanej płyty o danych przemieszczeniach brzegowych

Funkcję $w(x, y)$ dla każdej ścianki przyjmiemy w znanej postaci:

$$(3.1) \quad w(x, y) = f(y) \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l},$$

gdzie l jest długością pręta.

² Ten sam sposób dowodzenia należy przyjąć również dla przekroju (nie posiadającego praktycznego znaczenia) składającego się z dowolnej ilości ścianek, przecinających się w jednym punkcie, który również jest przekrojem prostym.

Jak wiadomo, tak przyjęte rozwiązanie spełnia warunki wolnego podparcia dla $x = 0$, $x = l$. Po wstawieniu do (2.9) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne dla funkcji $f(y)$:

$$(3.2) \quad f^{IV}(y) - 2\alpha_n^2 f'' + \left(\alpha_n^4 - k\alpha_n^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} \right) f = 0, \quad k = \frac{\sigma}{E}.$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci $f(y) = Ce^{ry}$ otrzymamy równanie charakterystyczne

$$(3.3) \quad r^4 - 2\alpha_n^2 r^2 + \left(\alpha_n^4 - k\alpha_n^2 \frac{12(1-\nu^2)}{\delta^2} \right) = 0,$$

którego pierwiastki dane są wzorami:

$$(3.4) \quad \begin{cases} r_{1,2} = \pm \alpha_n \sqrt{1 + \frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k}}, \\ r_{3,4} = \pm \alpha_n \sqrt{1 - \frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k}}. \end{cases}$$

Jak widać, dla naprężeń ściskających, tzn. dla $k > 0$, należy rozróżnić następujące przypadki:

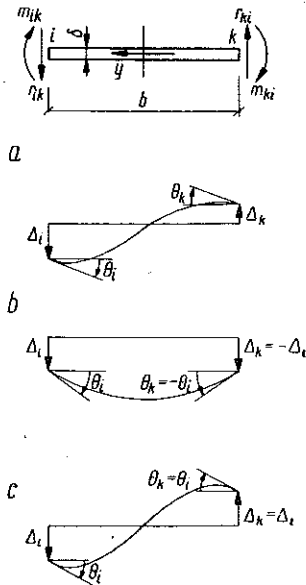
$$(3.5) \quad \begin{cases} 1. \quad k > \frac{n^2 \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2, \\ 2. \quad k = \frac{n^2 \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2, \\ 3. \quad k < \frac{n^2 \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2. \end{cases}$$

Przypadek pierwszy jest najważniejszy dla celów praktycznych.

Konieczność posługiwania się rozwiązaniami dla przypadków 2 i 3 może zachodzić tylko wyjątkowo dla prętów, w których ścianki różnią się znacznie grubością i to tylko dla dużych n .

Ścianki wewnętrzne są płytami, których obie krawędzie podłużne doznają przemieszczeń brzegowych, określonych przez odkształcenia prętowe i kąty zniekształcenia przekroju ψ . Rysunek 11a przedstawia przyjęte dodatnie kierunki tych przemieszczeń i reakcji brzegowych. Przyjmijmy przemieszczenia brzegowe ścianek w postaci:

$$(3.6) \quad \Delta(x) = \Delta \sin \alpha_n x, \quad \Theta(x) = \Theta \sin \alpha_n x.$$



Rys. 11

Przy założeniu powierzchni ugięcia ścianki według wzoru (3.1) również reakcje brzegowe obliczone ze znanych wzorów

$$(3.7) \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad r_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

będą rozłożone proporcjonalnie do funkcji $\sin \alpha_n x$, dadzą się zatem przedstawić w następującej postaci: dla symetrii (rys. 11b)

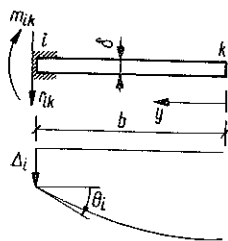
$$(3.8) \quad \begin{cases} m_{ik}(x) = -m_{ki}(x) = D [\alpha_n^2 M_{\Delta s} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta s} \Theta_i(x)], \\ r_{ik}(x) = -r_{ki}(x) = D [\alpha_n^3 R_{\Delta s} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta s} \Theta_i(x)], \end{cases}$$

i podobnie dla antysymetrii (rys. 11c):

$$(3.9) \quad \begin{cases} m_{ik}(x) = m_{ki}(x) = D [\alpha_n^2 M_{\Delta a} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta a} \Theta_i(x)], \\ r_{ik}(x) = r_{ki}(x) = D [\alpha_n^3 R_{\Delta a} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta a} \Theta_i(x)]. \end{cases}$$

Wielkości $M_{\Delta s}$, $M_{\Theta s}$... $R_{\Theta a}$ są współczynnikami liczbowymi, zależnymi od parametrów l/δ , b/l oraz $k = \sigma/E$.

Rozwiązanie dla dowolnych przemieszczeń brzegowych da się zawsze złożyć z części symetrycznej i antysymetrycznej przy wykorzystaniu wzorów (3.8) i (3.9).



Rys. 12

Ścianki zewnętrzne pręta doznają wymuszonych przemieszczeń brzegowych tylko na jednej krawędzi podłużnej, podczas gdy druga jest swobodna (rys. 12). Przyjmując te przemieszczenia w postaci (3.6) zapiszemy wzory na reakcje brzegowe, jak następuje:

$$(3.10) \quad \begin{cases} m_{ik}(x) = D [\alpha_n^2 M_{\Delta} \Delta_i(x) + \alpha_n M_{\Theta} \Theta_i(x)], \\ r_{ik}(x) = D [\alpha_n^3 R_{\Delta} \Delta_i(x) + \alpha_n^2 M_{\Theta} \Theta_i(x)]. \end{cases}$$

Przypadek 1. Pierwiastki r_3 , r_4 są wówczas liczbami urojonymi i otrzymamy:

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \operatorname{ch} py + C_3 \sin qy + C_4 \cos qy,$$

gdzie

$$p = \alpha_n \gamma_1, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k} + 1},$$

$$q = \alpha_n \gamma_2, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)k} - 1}.$$

Dla symetrii i antysymetrii (rys. 11) należy układ współrzędnych przyjąć w środku szerokości płyty. Wówczas można dla symetrii przyjąć $C_1 = C_3 = 0$, zaś dla antysymetrii $C_2 = C_4 = 0$. Dwie dalsze stałe wyliczamy z warunków

$$w = \Delta_i(x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\Theta_i(x) \quad \text{dla } y = \frac{b}{2}.$$

Dla płyty o krawędzi swobodnej (rys. 12) stałe wyliczamy z warunków
 dla $y = 0$ $m_y = 0$, $r_y = 0$; dla $y = b$ $w = \Delta_i(x)$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -\Theta_i(x)$.

Korzystając ze wzorów (3.7) i zapisując reakcje w postaci (3.8)-(3.10) otrzymamy ostatecznie dla symetrii:

$$M_{\Delta_s} = R_{\Theta_s} = \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q}}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{th} \bar{p}},$$

$$M_{\Theta_s} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\Delta_s} = - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p}};$$

dla antysymetrii

$$M_{\Delta_a} = R_{\Theta_a} = \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$M_{\Theta_a} = \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\Delta_a} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}}.$$

We wzorach tych przyjęto oznaczenia:

$$\bar{p} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_2.$$

Dla płyty o brzegu swobodnym otrzymamy

$$M_{\Delta} = R_{\Theta} = \frac{\gamma_2^2 + \nu}{N} [K\bar{K} - \bar{K} - \bar{K} \operatorname{ch} \bar{p} \cos \bar{q} - (1 + K\bar{K}^2) \operatorname{sh} \bar{p} \sin \bar{q}],$$

$$M_{\Theta} = \frac{1 + K}{N} \frac{\gamma_2^2 + \nu}{\gamma_2} (\operatorname{sh} \bar{p} \cos \bar{q} - K\bar{K} \operatorname{ch} \bar{p} \sin \bar{q}),$$

$$R_{\Delta} = - \frac{\gamma_1(\gamma_2^2 + \nu)(1 + K)}{N} (K\bar{K} \operatorname{sh} \bar{p} \cos \bar{q} + \operatorname{ch} \bar{p} \sin \bar{q}),$$

gdzie

$$N = K(1 - \bar{K}^2) \operatorname{sh} \bar{p} \sin \bar{q} + \bar{K}(K^2 + 1) \operatorname{ch} \bar{p} \cos \bar{q} + 2K\bar{K},$$

$$\bar{p} = n\pi \frac{b}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = n\pi \frac{b}{l} \gamma_2, \quad K = \frac{\gamma_2^2 + \nu}{\gamma_1^2 - \nu}, \quad \bar{K} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} K.$$

Przypadek 2. Pierwiastek $r_{3,4} = 0$ równania charakterystycznego jest wówczas podwójny. W związku z tym otrzymamy

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{2} a_n y + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{2} a_n y + C_3 a_n y + C_4.$$

Postępując dalej jak poprzednio dochodzimy do następujących wzorów dla symetrii

$$M_{As} = R_{Os} = \nu, \quad M_{\Theta} = \sqrt{2} \operatorname{ctgh} \bar{p}, \quad R_{As} = 0;$$

dla antysymetrii

$$M_{\Delta a} = R_{\Theta a} = \frac{\bar{p}\nu + (2-\nu) \operatorname{tgh} \bar{p}}{\bar{p} - \operatorname{tgh} \bar{p}}, \quad M_{\Theta a} = \frac{\sqrt{2} \bar{p} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\bar{p} - \operatorname{tgh} \bar{p}}, \quad R_{\Delta a} = \frac{2\sqrt{2}}{\bar{p} - \operatorname{tgh} \bar{p}}.$$

We wzorach tych

$$\bar{p} = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} \frac{b}{l}.$$

Dla płyty o brzegu swobodnym mamy

$$M_A = R_{\Theta} = \frac{1}{N} \left[\frac{\nu^2 \bar{p}}{2-\nu} \operatorname{sh} \bar{p} + 2(1-\nu)(1-\operatorname{ch} \bar{p}) \right],$$

$$M_{\Theta} = \frac{1}{N} \sqrt{2} \left(\frac{\nu \bar{p}}{2-\nu} \operatorname{ch} \bar{p} - \frac{2-\nu}{\nu} \operatorname{sh} \bar{p} \right),$$

$$R_A = \frac{1}{N} 2\sqrt{2} \frac{\nu}{2-\nu} \operatorname{sh} \bar{p},$$

gdzie

$$N = \frac{\nu \bar{p}}{2-\nu} \operatorname{sh} \bar{p} + \frac{(2-\nu)^2 + \nu^2}{(2-\nu)\nu} \operatorname{ch} \bar{p} - 2, \quad \bar{p} = \sqrt{2} n\pi \frac{b}{l}.$$

Przypadek 3. Wszystkie pierwiastki r równania (3.2) są wówczas rzeczywiste, zatem będziemy mieli

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \operatorname{ch} py + C_3 \operatorname{sh} qy + C_4 \operatorname{ch} qy,$$

gdzie

$$p = a_n \gamma_1 \quad \gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k}},$$

$$q = a_n \gamma_2 \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n\pi} \frac{l}{\delta} \sqrt{12(1-\nu^2)k}}.$$

Otrzymamy następujące wzory dla symetrii

$$M_{As} = R_{Os} = \frac{\gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{q} - \gamma_1(\gamma_2^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{q}},$$

$$M_{\Theta s} = \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{q}},$$

$$R_{As} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{tgh} \bar{p} \operatorname{tgh} \bar{q}}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{q}};$$

dla antysymetrii

$$M_{\Delta a} = R_{\Theta a} = \frac{\gamma_2(\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{p} - \gamma_1(\gamma_2^2 - \nu) \operatorname{tgh} \bar{q}}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$M_{\Theta a} = \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \operatorname{tgh} \bar{q} \operatorname{tgh} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}},$$

$$R_{\Delta a} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\gamma_1 \operatorname{tgh} \bar{q} - \gamma_2 \operatorname{tgh} \bar{p}}.$$

We wzorach tych

$$\bar{p} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{n\pi}{2} \frac{b}{l} \gamma_2.$$

Dla płyty o brzegu swobodnym

$$M_{\Delta} = R_{\Theta} = \frac{\gamma_2^2 - \nu}{N} [K(1+K) + (1+K\bar{K}^2) \operatorname{sh} \bar{p} \operatorname{sh} \bar{q} - K(1+K) \operatorname{ch} \bar{p} \operatorname{ch} \bar{q}],$$

$$M_{\Theta} = \frac{1-K}{N} \frac{\gamma_2^2 - \nu}{\gamma_2} (\operatorname{sh} \bar{p} \operatorname{ch} \bar{q} - K\bar{K} \operatorname{ch} \bar{p} \operatorname{sh} \bar{q}),$$

$$R_{\Delta} = \gamma_1(\gamma_2^2 - \nu) \frac{1-K}{N} (\operatorname{ch} \bar{p} \operatorname{sh} \bar{q} - \bar{K}K \operatorname{sh} \bar{p} \operatorname{ch} \bar{q}),$$

gdzie

$$N = \bar{K}(1+K^2) \operatorname{ch} \bar{p} \operatorname{ch} \bar{q} - K(1+\bar{K}^2) \operatorname{sh} \bar{p} \operatorname{sh} \bar{q} - 2K\bar{K},$$

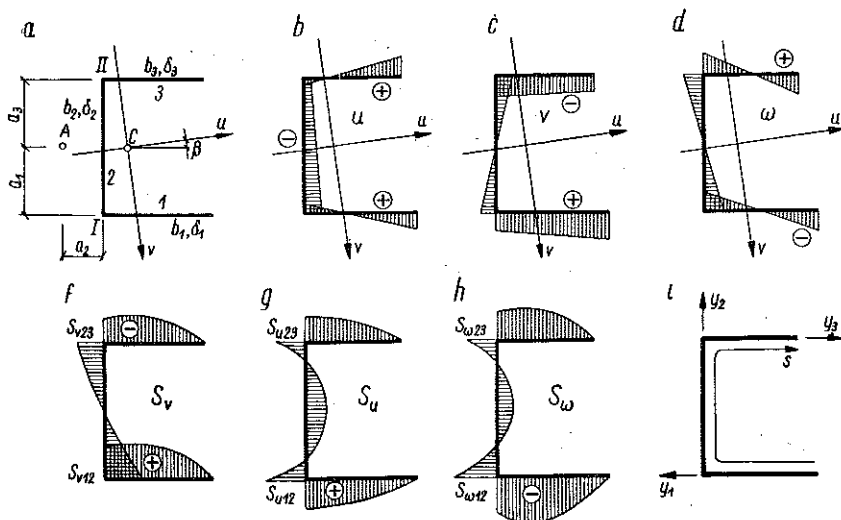
$$\bar{p} = n\pi \frac{b}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = n\pi \frac{b}{l} \gamma_2,$$

$$K = \frac{\gamma_2^2 - \nu}{\gamma_1^2 - \nu}, \quad \bar{K} = K \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

4. Analiza stateczności niektórych prętów cienkościennych

Przekrój ceowy niesymetryczny. Rozpatrywany przekrój pokazano na rys. 13a, rys. 13b-13d przedstawiają wykresy współrzędnych u , v , ω ; rys. 13f-13h przedstawiają wykresy S_v , S_u , S_ω , a na rys. 13e naniesiono przyjęty do konstrukcji wykresów S kierunek całkowania s oraz obrane osie y_r .

Rysunek 14 przedstawia stany jednostkowych odkształceń; ze względu na sposób wyprowadzenia wzorów rozdziału trzeciego przyjęto niewiadome ψ_1 i ψ_2 nie jako niezależne kąty obrotu ścianek na krawędziach I i II, lecz jako kąty odpowiadające symetrycznemu i antysymetrycznemu zniekształceniu środka.



Rys. 13

Równania równowagi ścianek przedstawiają się jak następuje:

$$(4.1) \quad \begin{cases} k\zeta_1'' + \frac{b_1^2}{12}\zeta_1^{IV} - \frac{1}{2\delta_1}(S_v^{(1)}\xi^{IV} + S_u^{(1)}\eta^{IV} + S_\omega^{(1)}\varphi^{IV}) - \frac{p_1}{EA_1} = 0, \\ k\zeta_2'' + \frac{b_2^2}{12}\zeta_2^{IV} - \frac{1}{2\delta_2}(S_v^{(2)}\xi^{IV} + S_u^{(2)}\eta^{IV} + S_\omega^{(2)}\varphi^{IV}) - \frac{p_2}{EA_2} = 0, \\ k\zeta_3'' + \frac{b_3^2}{12}\zeta_3^{IV} - \frac{1}{2\delta_3}(S_v^{(3)}\xi^{IV} + S_u^{(3)}\eta^{IV} + S_\omega^{(3)}\varphi^{IV}) - \frac{p_3}{EA_3} = 0, \end{cases}$$

gdzie (por. rys. 13)

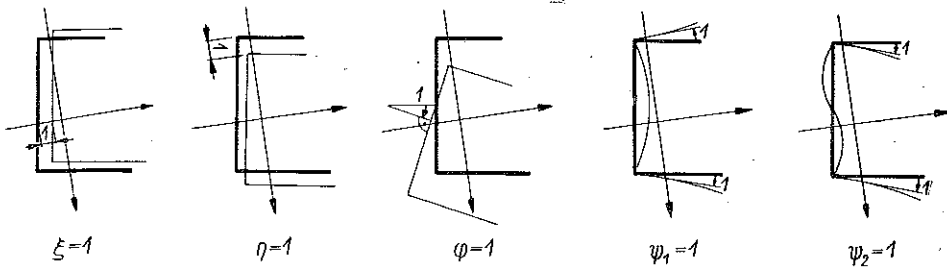
$$(4.2) \quad \begin{cases} S_v^{(1)} = S_{v12}, & S_v^{(2)} = S_{v12} + S_{v23}, & S_v^{(3)} = S_{v23}, \\ S_u^{(1)} = S_{u12}, & S_u^{(2)} = S_{u12} + S_{u23}, & S_u^{(3)} = S_{u23}, \\ S_\omega^{(1)} = S_{\omega12}, & S_\omega^{(2)} = S_{\omega12} + S_{\omega23}, & S_\omega^{(3)} = S_{\omega23}. \end{cases}$$

Przemieszczenia ścianek wyrazimy przez wielkości ξ , η , φ :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\xi \cos\beta - \eta \sin\beta + \varphi a_1, \\ \zeta_2 &= \xi \sin\beta - \eta \cos\beta - \varphi a_2, \\ \zeta_3 &= \xi \cos\beta + \eta \sin\beta + \varphi a_3. \end{aligned}$$

Przyjmując przemieszczenia brzegowe dla symetrii i antysymetrii według rys. 15 otrzymamy dla symetrii

$$(4.3) \quad \Delta = \xi \cos\beta + \eta \sin\beta + \frac{a_3 - a_1}{2}\varphi, \quad \Theta = \psi_1;$$



Rys. 14

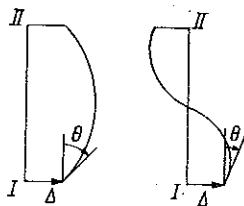
dla antysymetrii

$$(4.4) \quad \Delta = -\frac{a_3 + a_1}{2} \varphi, \quad \Theta = \varphi + \psi_2.$$

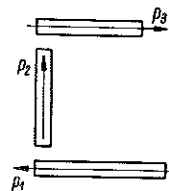
Korzystając dalej ze wzorów rozdziału trzeciego otrzymamy (por. rys. 16) obciążenia półek:

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = D_2 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi \cos \beta + \eta \sin \beta + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 \right] + \\ \quad + D_2 \left[-\alpha_n^3 R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right], \\ p_2 = -D_2 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi \cos \beta + \eta \sin \beta + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 \right] + \\ \quad + D_2 \left[-\alpha_n^3 R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right]. \end{array} \right.$$

Indeks 2 przy współczynnikach R oznacza, że należy je obliczać biorąc pod uwagę wymiary ścianki 2, to znaczy średnika.



Rys. 15



Rys. 16

Przemieszczenia brzegowe półki górnej wynoszą

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = -\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2, \\ \Theta = \varphi + \psi_2 - \psi_1; \end{array} \right.$$

zaś półki dolnej

$$(4.7) \quad \begin{cases} \Delta = -\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2, \\ \Theta = \varphi + \psi_1 + \psi_2. \end{cases}$$

Otrzymamy stąd obciążenia środka

$$(4.8) \quad p_2 = D_1 [\alpha_n^3 R_D^{(1)} (-\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2) + \alpha_n^2 R_\theta^{(1)} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)] + \\ + D_2 [\alpha_n^3 R_D^{(3)} (-\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2) + \alpha_n^2 R_\theta^{(3)} (\varphi + \psi_2 - \psi_1)].$$

Wielkości p_1 , p_2 , p_3 oraz przemieszczenia ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 należy podstawić do równań (4.1).

Poza tym ustawiamy równania sum momentów działających na krawędzie. Dla krawędzi dolnej (I) otrzymamy biorąc pod uwagę przemieszczenia (4.3), (4.4) i (4.7)

$$(4.9) \quad D_2 \left[\alpha_n^2 M_{D_s}^{(2)} \left(\xi \cos \beta + \eta \sin \beta + \frac{a_2 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n M_{\theta_s}^{(2)} \psi_1 - \right. \\ \left. - \alpha_n^2 M_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \alpha_n M_{\theta_a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right] + \\ + D_1 [\alpha_n^2 M_D^{(1)} (-\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2) + \alpha_n M_\theta^{(1)} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)] = 0,$$

zaś dla krawędzi górnej (II) biorąc pod uwagę (4.3), (4.4) oraz (4.6):

$$(4.10) \quad D_2 \left[-\alpha_n^2 M_{D_s}^{(2)} \left(\xi \cos \beta + \eta \sin \beta + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) - \alpha_n M_{\theta_s}^{(2)} \psi_1 + \right. \\ \left. - \alpha_n^2 M_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \alpha_n M_{\theta_a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right] + \\ + D_3 [\alpha_n^2 M_D^{(3)} (-\xi \sin \beta + \eta \cos \beta + \varphi a_2) + \alpha_n M_\theta^{(3)} (\varphi + \psi_2 - \psi_1)] = 0.$$

Równania (4.9) i (4.10) dają wraz z równaniami (4.1) układ pięciu równań różniczkowych czwartego rzędu, w którym niewiadome są funkcje $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$. Przyjmiemy je w postaci³

$$(4.11) \quad \begin{cases} \xi(x) = C_\xi l \sin \alpha_n x, & \eta(x) = C_\eta l \sin \alpha_n x, \\ \varphi(x) = C_\varphi \sin \alpha_n x, & \psi_1 = C_{\psi_1} \sin \alpha_n x, & \psi_2 = C_{\psi_2} \sin \alpha_n x. \end{cases}$$

Podstawiając w dalszym ciągu (4.11) do układu równań otrzymamy po skróceniu funkcji $\sin \alpha_n x$ układ pięciu równań liniowych i jednorodnych ze względu na stałe $C_{\xi_1}, \dots, C_{\psi_2}$, którego macierz przedstawiona jest w tablicy 1. Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje warunek wybozeniowy

³ Mnożniki l przy dwóch pierwszych stałych wprowadzono w tym celu, aby wszystkie stałe były wielkościami bezwymiarowymi.

Tablica 1. Ceownik niesymetryczny

C_{ξ}	C_{η}	C_{φ}	C_{ψ_1}	C_{ψ_2}
$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}}}{2\delta_1} + \frac{b_1^2}{12} \cos \beta \right) + \alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)} \cos \beta \alpha_n^2 k \cos \beta \right]$	$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}}}{2\delta_1} + \frac{b_1^2}{12} \sin \beta \right) + \alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)} \sin \beta - \alpha_n^2 k \sin \beta \right]$	$\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}}}{2\delta_1} - \frac{b_1^2 \alpha_{11}}{12} \right) + \alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)} \left(\frac{a_3 - a_1}{2} - R_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) + \alpha_n^2 \left(\frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)} + k \alpha_1 \right)$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)}$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_2}^{(2)}$
$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}} + S_{\omega_{23}}}{2\delta_3} - \frac{b_2^2}{12} \sin \beta \right) - \alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} \right) \sin \beta + \alpha_n^2 k \sin \beta \right]$	$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}} + S_{\omega_{23}}}{2\delta_2} + \frac{b_2^2}{12} \cos \beta \right) + \alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} \right) \cos \beta - \alpha_n^2 k \cos \beta \right]$	$\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega_{12}} + S_{\omega_{23}}}{2\delta_2} + \frac{b_2^2 \alpha_2}{12} \right) + \alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} \right) \alpha_2 + \alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} - k \alpha_2 \right)$	$\alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} - \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} \right)$	$\alpha_n^2 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_{D_1}^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_{D_3}^{(3)} \right)$
$l \left[\alpha_n^4 \left(-\frac{S_{\omega_{23}}}{2\delta_3} + \frac{b_3^2}{12} \cos \beta \right) + \alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)} \cos \beta - \alpha_n^2 k \cos \beta \right]$	$l \left[\alpha_n^4 \left(-\frac{S_{\omega_{23}}}{2\delta_3} + \frac{b_3^2}{12} \sin \beta \right) + \alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)} \sin \beta - \alpha_n^2 k \sin \beta \right]$	$\alpha_n^4 \left(-\frac{S_{\omega_{23}}}{2\delta_3} + \frac{b_3^2 \alpha_3}{12} \right) + \alpha_n^2 \left(\frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)} + R_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} - \alpha_n^2 \left(\frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)} + k \alpha_3 \right) \right)$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{D_2}^{(2)}$
$l \alpha_n^2 \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} \cos \beta - D_1 M_{D_1}^{(1)} \sin \beta \right)$	$l \alpha_n^2 \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} \sin \beta + D_1 M_{D_1}^{(1)} \cos \beta \right)$	$-\alpha_n^2 \left[D_2 \left(M_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} - M_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) + D_1 M_{D_1}^{(1)} \alpha_2 \right] + \alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_1 M_{D_1}^{(1)} \right)$	$\alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_1 M_{D_1}^{(1)} \right)$	$\alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_1 M_{D_1}^{(1)} \right)$
$-l \alpha_n^2 \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} \cos \beta + D_3 M_{D_3}^{(3)} \sin \beta \right)$	$-l \alpha_n^2 \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} \sin \beta - D_3 M_{D_3}^{(3)} \cos \beta \right)$	$-\alpha_n^2 \left[D_2 \left(M_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} + M_{D_2}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) - D_3 M_{D_3}^{(3)} \alpha_2 \right] + \alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_3 M_{D_3}^{(3)} \right)$	$-\alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_3 M_{D_3}^{(3)} \right)$	$\alpha_n \left(D_2 M_{D_2}^{(2)} + D_3 M_{D_3}^{(3)} \right)$

w postaci równania przestępnego ze względu na krytyczną wartość współczynnika $k = \sigma/E$. Jak widać, zginanie w obu płaszczyznach osi głównych jest tu sprzężone ze skręcaniem i zniekształceniem przekroju poprzecznego.

Przekrój ceowy symetryczny. Rozważany przekrój pokazano na rysunku 17. Do wzorów wyprowadzonych powyżej należy podstawić tu $a_1 = a_3 = h/2$, $a_2 = a$, $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$ oraz wymiary przekroju według rys. 17. Ze względu na symetrię lub antysymetrię wykresów S_v , S_u i S_ω będziemy mieli:

$$\begin{aligned} S_v^{(1)} &= S_{v12}, & S_v^{(2)} &= 0, & S_v^{(3)} &= -S_{v12}, \\ S_u^{(1)} &= S_{u12}, & S_u^{(2)} &= 2S_{u12}, & S_u^{(3)} &= S_{u12}, \\ S_\omega^{(1)} &= S_{\omega12}, & S_\omega^{(2)} &= 2S_{\omega12}, & S_\omega^{(3)} &= S_{\omega12}. \end{aligned}$$

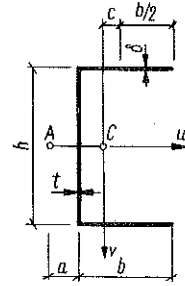
Tablica 2. Ceownik symetryczny — wybočenje symetryczne (giętnie)

C_ξ	C_{ψ_1}
$2l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{v12}}{2\delta} + \frac{b^2}{12} \right) + \frac{\alpha_n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{D_s}^{(s)} - \alpha_n^2 k \right]$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\Theta_s}^{(s)}$
$l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} t^3 M_{D_s}^{(s)}$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta_s}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)})$

Tablica 3. Ceownik symetryczny — wybočenje antysymetryczne (giętno-skrętne)

C_η	C_φ	C_{ψ_2}
$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{u12}}{t} + \frac{h^2}{12} \right) + \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{ht} R_{D'}^{(p)} - \alpha_n^2 k \right]$	$\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega12}}{t} + \frac{h^2 a}{12} \right) + \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3 a}{ht} R_{D'}^{(p)} + \alpha_n^2 \left(\frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{ht} R_{\Theta'}^{(p)} - ka \right)$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{ht} R_{\Theta'}^{(p)}$
$l \alpha_n^4 \frac{S_{\omega12}}{\delta}$	$\alpha_n^4 \left(\frac{S_{\omega12}}{\delta} - \frac{hb^2}{12} \right) - \frac{\alpha_n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3 h}{b\delta} R_{D_a}^{(s)} + \alpha_n^2 \left(\frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\Theta_a}^{(s)} + kh \right)$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\Theta_a}^{(s)}$
$l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \delta^3 M_{D'}^{(p)}$	$\frac{\alpha_n^2}{12(1-\nu^2)} (2\delta^3 a M_{D'}^{(p)} - t^3 h M_{D_a}^{(s)}) + \frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (\delta^3 M_{\Theta'}^{(p)} + t^3 M_{\Theta_a}^{(s)})$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (\delta^3 M_{\Theta'}^{(p)} + t^3 M_{\Theta_a}^{(s)})$

Po podstawieniu tych wielkości układ pięciu równań da się rozbić (przez dodawanie i odejmowanie równań parami) na dwa układy niezależne. Pierwszy z nich (tablica 2) odpowiada wyboczeniu symetrycznemu względem osi u , to znaczy wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie tej osi sprzężonemu z symetrycznym zniekształceniem środka. Układ drugi (tablica 3) odpowiada wyboczeniu antysymetrycznemu, to znaczy giętno-skrętnemu sprzężonemu z antysymetrycznym zniekształceniem środka. Jak widać, przy uwzględnieniu odkształcalności przekroju poprzecznego zasadnicze postaci utraty stateczności nie zmieniają się tu w porównaniu ze znanymi z teorii prętów cienkościennych.

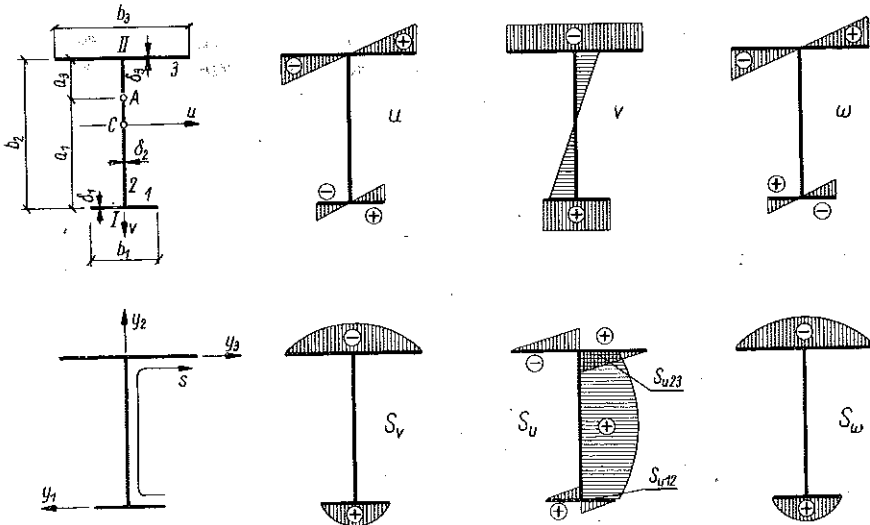


Rys. 17

Przekrój dwuteowy monosymetryczny (rys. 18). Równania równowagi ścianek przedstawiają się następująco:

$$(4.12) \quad \begin{cases} k\zeta_1'' + \frac{b_1^2}{12} \zeta_1^{IV} - \frac{p_1}{EA_1} = 0, \\ k\zeta_2'' + \frac{b_2^2}{12} \zeta_2^{IV} - \frac{1}{2\delta_2} S_u^{(2)} \eta^{IV} - \frac{p_2}{EA_2} = 0, \\ k\zeta_3'' + \frac{b_3^2}{12} \zeta_3^{IV} - \frac{p_3}{EA_3} = 0, \end{cases}$$

przy czym $S_u^{(2)} = S_{u12} + S_{u23}$.

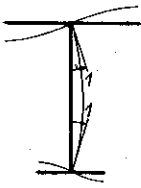


Rys. 18

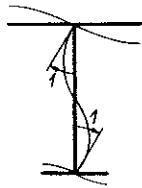
Zniekształcenie przekroju określone będzie przez kąty ψ_1 i ψ_2 odpowiadające symetrycznemu lub antysymetrycznemu zniekształceniu środnika (rys. 19). Przemieszczenia ścianek wynoszą:

$$(4.13) \quad \zeta_1 = -\xi + a_1\varphi, \quad \zeta_2 = -\eta, \quad \zeta_3 = \xi + a_3\varphi.$$

Przemieszczenia brzegowe środnika (wg. rys. 15) będą dla symetrii



$\psi_1=1$



$\psi_2=1$

Rys. 19

$$(4.14) \quad \Delta = \xi + \frac{1}{2}(a_3 - a_1)\varphi, \quad \Theta = \psi_1,$$

dla antysymetrii

$$(4.15) \quad \Delta = -\frac{1}{2}\varphi(a_3 + a_1), \quad \Theta = \varphi + \psi_2.$$

Podstawiając odpowiednio te wielkości do równań (3.8) i (3.9) otrzymamy obciążenia półek:

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = D_2 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 \right] + \\ \quad + D_2 \left[-\alpha_n^3 R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right], \\ p_2 = -D_2 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 \right] - \\ \quad - D_2 \left[\alpha_n^3 R_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi - \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right]. \end{array} \right.$$

Przemieszczenia brzegowe prawych części półek wynoszą dla półki górnej

$$(4.17.1) \quad \Delta = \eta, \quad \Theta = \varphi - \psi_1 + \psi_2,$$

dla półki dolnej

$$(4.17.2) \quad \Delta = \eta, \quad \Theta = \varphi + \psi_1 + \psi_2.$$

Stąd otrzymujemy obciążenie środnika:

$$(4.18) \quad p_2 = 2D_1 \alpha_n^3 R_{\Delta}^{(1)} \eta + 2D_3 \alpha_n^3 R_{\Delta}^{(3)} \eta.$$

Równania równowagi momentów dla krawędzi przedstawiają się następująco: dla krawędzi dolnej (I)

$$(4.19.1) \quad D_2 \left[\alpha_n^2 M_{\Delta s}^{(2)} \left(\xi + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) + \alpha_n M_{\Theta s}^{(2)} \psi_1 - \alpha_n^2 M_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \right. \\ \left. + \alpha_n M_{\Theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right] + D_1 2\alpha_n M_{\Theta}^{(1)} (\varphi + \psi_1 + \psi_2) = 0;$$

dla krawędzi górnej (II)

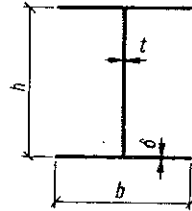
$$(4.19.2) \quad D_2 \left[-\alpha_n^2 M_{\delta s}^{(2)} \left(\xi + \frac{a_3 - a_1}{2} \varphi \right) - \alpha_n M_{\theta s}^{(2)} \psi_1 - \alpha_n^2 M_{\Delta a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \varphi + \right. \\ \left. + \alpha_n M_{\theta a}^{(2)} (\varphi + \psi_2) \right] + D_3 2\alpha_n M_{\theta s}^{(3)} (\varphi - \psi_1 + \psi_2) = 0.$$

Równania (4.19) wraz z równaniami (4.12), do których należy podstawić wzory (4.16), (4.18) oraz (4.13), dają razem układ pięciu równań, w którym jednak jedno, mianowicie drugie z równań (4.12), jest niezależne od pozostałych⁴. Po wstawieniu zatem przemieszczeń według (4.11) otrzymamy jedno równanie przestępne dla wybożenia symetrycznego (giętnego) w płaszczyźnie osi symetrii v :

$$(4.20) \quad I \left[\alpha_n^4 \left(\frac{S_{u12} + S_{u23}}{2 \delta_2} + \frac{b_2^3}{12} \right) + 2\alpha_n^3 \left(\frac{D_1}{EA_2} R_A^{(1)} + \frac{D_3}{EA_2} R_A^{(3)} \right) - k\alpha_n^2 \right] = 0$$

oraz układ czterech równań jednorodnych, którego macierz przedstawiona jest w tablicy 4, odpowiadający wybożeniu antysymetrycznemu (giętno-skrętnemu).

Przekrój dwuteowy bisymetryczny (rys. 20). Mamy tutaj $S_{u12} = S_{u23}$, $a_1 = a_3 = h/2$. Układ czterech równań otrzymany dla przypadku ogólnego da się rozbić na dwa układy niezależne. Jeden z nich (tablica 5) odpowiada wybożeniu symetrycznemu (giętnemu) w płaszczyźnie osi u , drugi (tablica 6) wybożeniu antysymetrycznemu (skrętnemu). Pierwsza postać wybożenia związana jest z symetrycznym, druga z antysymetrycznym zniekształceniem środnika.



Rys. 20

Przekrój zetowy (rys. 21). Równania równowagi ścianek przedstawiają się następująco:

$$(4.21) \quad \begin{cases} k\zeta_1'' - \frac{b^2}{12} \zeta_1^{IV} - \frac{1}{2\delta} (S_{u12} \eta^{IV} + S_{\omega12} \varphi^{IV}) - \frac{p_1}{EA_p} = 0, \\ k\zeta_2'' - \frac{h^2}{12} \zeta_2^{IV} - \frac{1}{2t} 2S_{u12} \eta^{IV} - \frac{p_2}{EA_s} = 0, \\ k\zeta_3'' - \frac{b^2}{12} \zeta_3^{IV} - \frac{1}{2\delta} (S_{u12} \eta^{IV} + S_{\omega12} \varphi^{IV}) - \frac{p_2}{EA_p} = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$A_p = b\delta, \quad A_s = ht.$$

⁴ Przy układaniu równań (4.12) każda półka traktowana jest jako jeden element (ścianka). Natomiast przy obliczaniu reakcji brzegowych należy każdą z półek dwuteownika uważać za dwie płyty o brzegach swobodnych.

Tablica 4. Dwuteownik monosymetryczny — wyboczenie antysymetryczne (giętno-skrętne)

C_{ξ}	C_{φ}	C_{φ_1}	C_{φ_2}
$l \left(\alpha_n^4 \frac{b_1}{2} + \right.$ $\left. + \alpha_n^3 \frac{D_2}{EA_1} R_{D_s}^{(2)} - \right.$ $\left. - \alpha_n^2 k \right)$	$-\alpha_n^4 \frac{b_1^2 a_1}{12} +$ $+ \alpha_n^3 \frac{D_2}{EA_1} \left(R_{D_s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} - \right.$ $\left. - R_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) +$ $+ \alpha_n^2 \left(\frac{D_2}{EA_1} R_{\theta_a}^{(2)} + k a_1 \right)$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{\theta_s}^{(2)}$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_1} R_{\theta_a}^{(2)}$
$l \left(\alpha_n^4 \frac{b_3}{12} + \right.$ $\left. + \alpha_n^3 \frac{D_2}{EA_3} R_{D_s}^{(2)} - \right.$ $\left. - \alpha_n^2 k \right)$	$\alpha_n^4 \frac{b_3^2 a_3}{12} +$ $+ \alpha_n^3 \frac{D_2}{EA_3} \left(R_{D_s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} + \right.$ $\left. + R_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) -$ $- \alpha_n^2 \left(\frac{D_2}{EA_3} R_{\theta_a}^{(2)} + k a_3 \right)$	$\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{\theta_s}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 \frac{D_2}{EA_3} R_{\theta_a}^{(2)}$
$l \alpha_n^2 D_2 M_{D_s}^{(2)}$	$\alpha_n^2 D_2 \left(M_{D_s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} - \right.$ $\left. - M_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) + \alpha_n (D_2 M_{\theta_a}^{(2)} +$ $+ 2D_1 M_{\theta}^{(1)})$	$\alpha_n (D_2 M_{\theta_s}^{(2)} +$ $+ 2D_1 M_{\theta}^{(1)})$	$\alpha_n (D_2 M_{\theta_a}^{(2)} +$ $+ 2D_1 M_{\theta}^{(1)})$
$-l \alpha_n^2 D_2 M_{D_s}^{(2)}$	$-\alpha_n^2 D_2 \left(M_{D_s}^{(2)} \frac{a_3 - a_1}{2} + \right.$ $\left. + M_{D_a}^{(2)} \frac{a_3 + a_1}{2} \right) + \alpha_n (D_2 M_{\theta_a}^{(2)} +$ $+ 2D_3 M_{\theta}^{(3)})$	$-\alpha_n (D_2 M_{\theta_s}^{(2)} +$ $+ 2D_3 M_{\theta}^{(3)})$	$\alpha_n (D_2 M_{\theta_a}^{(2)} +$ $+ 2D_3 M_{\theta}^{(3)})$

Tablica 5. Dwuteownik bisymetryczny — wyboczenie symetryczne (giętno) w płaszczyźnie pólek

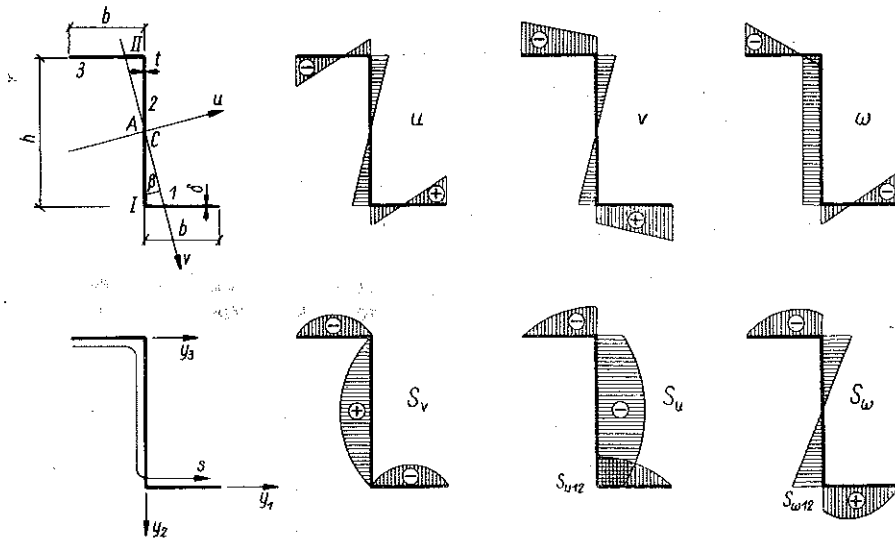
C_{ξ}	C_{φ_1}
$2l \left(\alpha_n^4 \frac{b^2}{12} + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{D_s}^{(2)} - \alpha_n^2 k \right)$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\theta_s}^{(2)}$
$l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} t^3 M_{D_s}^{(2)}$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\theta_s}^{(2)} + 2\delta^3 M_{\theta}^{(3)})$

Tablica 6. Dwuteownik bisymetryczny — wybočenje antysymetryczne (skrętnie)

C_φ	C_{φ_2}
$\alpha_n^4 \frac{b^2 h}{12} + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3 h}{b \delta} R_{\Delta a}^{(s)} -$ $-\alpha_n^3 \left(\frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b \delta} R_{\Theta a}^{(s)} + kh \right)$	$-\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b \delta} R_{\Theta a}^{(s)}$
$-\alpha_n^2 \frac{t^3 h}{12(1-\nu^2)} M_{\Delta a}^{(s)} + \frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta a}^{(s)} - 2\delta^3 M_{\Theta a}^{(p)})$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta a}^{(s)} + 2\delta^3 M_{\Theta a}^{(p)})$

Przemieszczenia ścianek będą następujące:

$$(4.22) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \xi \cos \beta + \eta \sin \beta - \varphi \frac{h}{2}, \\ \zeta_2 = -\xi \sin \beta + \eta \cos \beta, \quad \zeta_3 = \xi \cos \beta + \eta \sin \beta + \varphi \frac{h}{2}. \end{cases}$$



Rys. 21

Przyjęte kąty ψ_1 i ψ_2 przedstawia rys. 22. Przemieszczenia brzegowe środka wynoszą (rys. 15) dla symetrii

$$\Delta = \xi \cos \beta + \eta \sin \beta, \quad \Theta = \psi_1;$$

dla antysymetrii

$$\Delta = -\varphi \frac{h}{2}, \quad \Theta = \varphi + \psi_2.$$

Zatem obciążenia półek będą

$$(4.23) \quad \begin{cases} p_1 = -D_s [\alpha_n^2 R_{2s}^{(s)} (\xi \cos \beta + \eta \sin \beta) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(s)} \psi_1] + \\ \quad \quad \quad - D_s \left[-\alpha_n^2 R_{2a}^{(s)} \frac{h}{2} \varphi + \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(s)} (\varphi + \psi_2) \right], \\ p_3 = -D_s [\alpha_n^2 R_{2s}^{(s)} (\xi \cos \beta + \eta \sin \beta) + \alpha_n^2 R_{\Theta s}^{(s)} \psi_1] + \\ \quad \quad \quad + D_s \left[-\alpha_n^2 R_{2a}^{(s)} \frac{h}{2} \varphi + \alpha_n^2 R_{\Theta a}^{(s)} (\varphi + \psi_2) \right]. \end{cases}$$

Przemieszczenia brzegowe półki górnej są równe

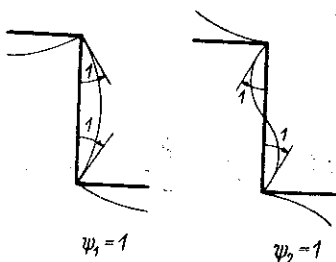
$$\Delta = \xi \sin \beta - \eta \cos \beta, \quad \Theta = \varphi - \psi_1 + \psi_2,$$

zaś półki dolnej

$$\Delta = \xi \sin \beta - \eta \cos \beta, \quad \Theta = \varphi - \psi_1 + \psi_2.$$

Stąd otrzymujemy obciążenie środnika

$$(4.24) \quad p_2 = 2 D_p [\alpha_n^2 R_A^{(p)} (\xi \sin \beta - \eta \cos \beta) - \alpha_n^2 R_{\Theta}^{(p)} \psi_1].$$



Rys. 22

Podstawiając (4.22), (4.23) i (4.24) do (4.21) otrzymujemy trzy równania; dochodzą do nich równania równowagi krawędzi: dla krawędzi I

$$D_s \left[\alpha_n^2 M_{2s}^{(s)} (\xi \cos \beta + \eta \sin \beta) + \alpha_n M_{\Theta s}^{(s)} \psi_1 - \alpha_n^2 M_{2a}^{(s)} \frac{h}{2} \varphi + \alpha_n M_{\Theta a}^{(s)} (\varphi + \psi_2) \right] + \\ + D_p [\alpha_n^2 M_A^{(p)} (-\xi \sin \beta + \eta \cos \beta) + \alpha_n M_{\Theta}^{(p)} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)] = 0;$$

dla krawędzi II

$$D_s \left[-\alpha_n^2 M_{2s}^{(s)} (\xi \cos \beta + \eta \sin \beta) - \alpha_n M_{\Theta s}^{(s)} \psi_1 - \alpha_n^2 M_{2a}^{(s)} \frac{h}{2} \varphi + \alpha_n M_{\Theta a}^{(s)} (\varphi + \psi_2) \right] + \\ + D_p [\alpha_n^2 M_A^{(p)} (\xi \sin \beta - \eta \cos \beta) + \alpha_n M_{\Theta}^{(p)} (\varphi - \psi_1 + \psi_2)] = 0.$$

Otrzymamy w ten sposób przy uwzględnieniu (4.11) układ równań, który da się rozbić na dwa układy niezależne. Pierwszy z nich (tablica 7) obejmuje trzy równania o niewiadomych ξ , η i ψ_1 , co wskazuje, że przy uwzględnieniu odkształcalności przekroju wyboczenie giętne następuje jednocześnie w obu płaszczyznach osi głównych i sprzężone jest z symetrycznym zniekształceniem środnika; dla tej postaci wyboczenia nieznaną w klasycznej teorii prętów cienkościennych proponujemy nazwę wyboczenie giętno-giętne. Drugi układ równań (tablica 8) obejmuje funkcje φ oraz ψ_2 i odpowiada mu wyboczenie skrętne z jednoczesnym antysymetrycznym zniekształceniem środnika.

Tablica 7. Zetownik — wyboczenie giętno-giętne

C_{ξ}	C_{η}	C_{ψ_1}
$l \left(\alpha_n^4 + \frac{b^2}{6} \frac{\alpha_n^3}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\Delta s}^{(s)} - 2\alpha_n^2 k \right) \cos \beta$	$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{b^2}{6} \sin \beta - \frac{S_{\omega 12}}{\delta} \right) + \frac{\alpha_n^3}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{b\delta} R_{\Delta s}^{(s)} \sin \beta - 2\alpha_n^2 k \sin \beta \right]$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^2}{b\delta} R_{\Theta s}^{(s)}$
$l \left(-\alpha_n^4 \frac{h^2}{12} + \frac{\alpha_n^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{th} R_A^{(p)} + \alpha_n^2 k \right) \sin \beta$	$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{h^2}{12} \cos \beta - \frac{S_{\omega 12}}{t} \right) + \frac{\alpha_n^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{th} R_A^{(p)} \cos \beta - \alpha_n^2 k \cos \beta \right]$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{th} R_{\Theta}^{(p)}$
$l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Delta s}^{(s)} \cos \beta - \delta^3 M_A^{(p)} \sin \beta)$	$l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Delta s}^{(s)} \sin \beta + \delta^3 M_A^{(p)} \cos \beta)$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta s}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)})$

Tablica 8. Zetownik — wyboczenie skrętnie

C_{φ}	C_{ψ_2}
$\alpha_n^4 \left(\frac{bh^2}{12} + \frac{S_{\omega 12}}{\delta} \right) + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3 h}{\delta b} - \alpha_n^2 \left(\frac{1}{6(1-\nu^2)} \frac{t^3}{\delta b} R_{\Theta a}^{(s)} + kh \right)$	$\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{t^2}{\delta b} R_{\Theta a}^{(s)}$
$-\alpha_n^2 \frac{t^3 h}{12(1-\nu^2)} M_{\Delta a}^{(s)} + \frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta a}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)})$	$\frac{\alpha_n}{6(1-\nu^2)} (t^3 M_{\Theta a}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)})$

Przekrój teowy (rys. 23). Stan odkształceń opisany jest przez wielkości ξ , η oraz ψ (rys. 24). Równania równowagi ścianek przedstawiają się jak następuje:

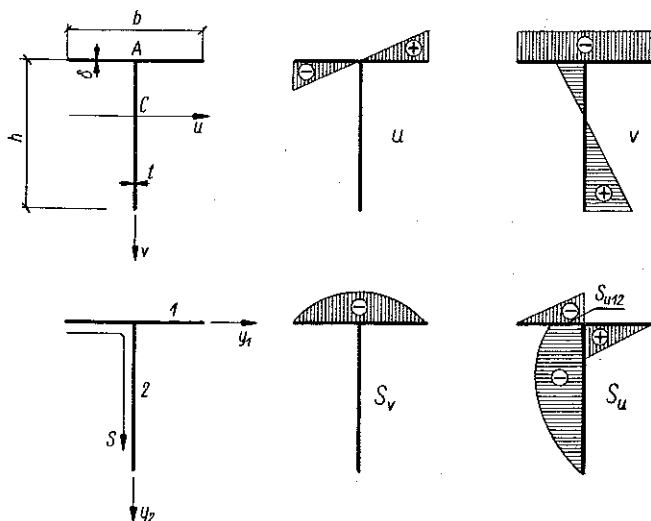
$$(4.25) \quad \begin{cases} k\xi_1'' + \frac{b^2}{12} \xi_1^{IV} - \frac{P_1}{EA_p} = 0, \\ k\xi_2'' + \frac{h^2}{12} \xi_2^{IV} - \frac{1}{2t} S_{\omega 12} \eta^{IV} - \frac{p_2}{EA_s} = 0. \end{cases}$$

Przemieszczenia ścianek będą równe

$$(4.26) \quad \zeta_1 = \xi, \quad \zeta_2 = \eta;$$

przemieszczenia brzegowe środknika

$$\Delta = -\xi, \quad \Theta = \psi;$$



Rys. 23

stąd obciążenie półki

$$(4.27) \quad p_1 = D_s(-\alpha_n^3 R_A^{(s)} \xi + \alpha_n^2 R_\Theta^{(s)} \psi).$$

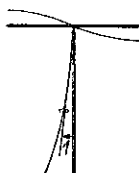
Przemieszczenia brzegowe prawej części półki

$$\Delta = \eta, \quad \Theta = \psi;$$

stąd obciążenie środknika

$$(4.28) \quad p_2 = -2D_p \alpha_n^3 R_A^{(p)} \eta.$$

Podstawiając (4.26) i (4.28) do drugiego równania (4.25) i przyjmując $\eta = C_n \sin \alpha_n x$ otrzymamy niezależne od pozostałych równanie przestępne odpowiadające wyboczeniu symetrycznemu (giętnemu) w płaszczyźnie osi v :



$\psi = \gamma$

Rys. 24

$$(4.29) \quad \alpha_n^4 \left(\frac{h^2}{12} - \frac{S_{u12}}{2t} \right) + \frac{\alpha_n^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^3}{ht} R_A^{(p)} - \alpha_n^2 k = 0.$$

Równanie sumy momentów dla krawędzi jest następujące:

$$(4.30) \quad 2D_p \alpha_n M_\Theta^{(p)} \psi + D_s(-\alpha_n^2 M_\Delta^{(s)} \xi + \alpha_n M_\Theta^{(s)} \psi) = 0.$$

Równanie to wraz z pierwszym równaniem (4.25) daje po uwzględnieniu (4.26) i (4.27) i przyjęciu

$$\xi = C_\xi l \sin \alpha_n x, \quad \psi = C_\psi \sin \alpha_n x$$

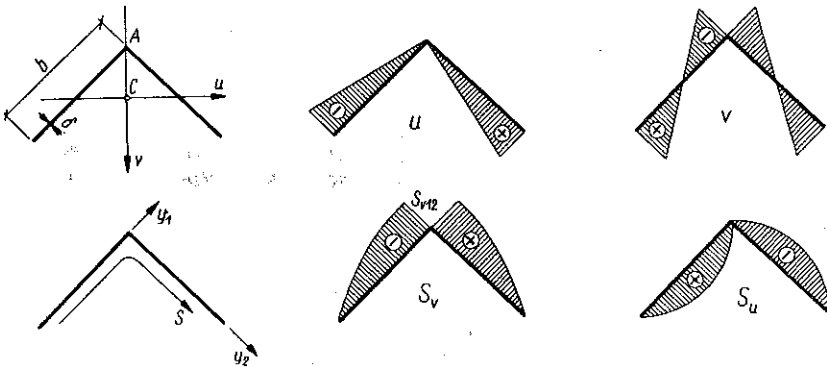
układ dwu równań, którego macierz przedstawiona jest w tablicy 9. Odpowiada on wyboczeniu antysymetrycznemu (giętno-skrętnemu).

Tablica 9. Teownik — wyboczenie antysymetryczne (giętno-skrętne)

C_ξ	C_ψ
$l \left(\alpha_n^4 \frac{b^2}{12} + \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3}{\delta b} R_D^{(s)} - \alpha_n^2 k \right)$	$-\frac{\alpha_n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{t^3}{\delta b} R_\Theta^{(s)}$
$-l \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \alpha_n^2 M_D^{(s)}$	$\frac{\alpha_n}{12(1-\nu^2)} (2\delta^3 M_\Theta^{(p)} + t^3 M_\Theta^{(s)})$

Przekrój kątowy równoramienny (rys. 25). Stan odkształceń opisany jest przez wielkości ξ , η oraz ψ (rys. 26). Równania równowagi ścianek przedstawiają się następująco:

$$(4.31) \quad \begin{cases} k \zeta_1'' + \frac{b^2}{12} \zeta_1^{IV} - \frac{1}{2\delta} S_{u12} \eta^{IV} - \frac{\hat{p}_1}{EA_p} = 0, \\ k \zeta_2'' + \frac{b^2}{12} \zeta_2^{IV} - \frac{1}{2\delta} S_{u12} \eta^{IV} - \frac{\hat{p}_2}{EA_p} = 0. \end{cases}$$



Rys. 25

Przemieszczenia ścianek wynoszą

$$(4.32) \quad \zeta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \eta), \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi + \eta).$$

Przemieszczenia brzegowe półki prawej

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\xi + \eta), \quad \Theta = \psi;$$



Rys. 26

zaś półki lewej

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\xi - \eta), \quad \Theta = \psi.$$

Stąd obciążenia ścianek będą:

$$(4.33) \quad \begin{cases} p_1 = D \left[\alpha_n^3 R_\Delta \frac{\sqrt{2}}{2}(-\xi + \eta) + \alpha_n^2 R_\Theta \psi \right], \\ p_2 = D \left[\alpha_n^3 R_\Delta \frac{\sqrt{2}}{2}(-\xi - \eta) + \alpha_n^2 R_\Theta \psi \right]. \end{cases}$$

Równanie sumy momentów dla krawędzi

$$(4.34) \quad 2D \left(-\alpha_n^2 M_\Delta \frac{\sqrt{2}}{2} \xi + \alpha_n M_\Theta \psi \right) = 0.$$

Równanie (4.34) wraz z równaniami (4.31) po wykorzystaniu wzorów (4.32), (4.33) i podstawieniu

$$\xi = C_\xi l \sin \alpha_n x, \quad \eta = C_\eta l \sin \alpha_n x, \quad \psi = C_\psi \sin \alpha_n x$$

daje układ trzech równań. Układ ten daje się rozbić na jedno równanie niezależne

$$(4.35) \quad \alpha_n^4 \frac{b^2}{12} + \frac{\alpha_n^2}{12(1-\nu^2)} \frac{\delta^2}{b} R_\Delta - \alpha_n^2 k = 0,$$

odpowiadające wyboczeniu symetrycznemu (giętnemu) w płaszczyźnie symetrii, związanemu z symetrycznym zniekształceniem przekroju poprzecznego, oraz na układ dwu równań, którego macierz przedstawiona jest w tablicy 10.

Tablica 10. Kątownik równoramienny — wyboczenie antysymetryczne (giętno-skrętne)

C_ξ	C_ψ
$l \left[\alpha_n^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} b^2 - \frac{S_{v12}}{\delta} \right) + \sqrt{2} \frac{\alpha_n^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\delta^2}{b} R_\Delta - \alpha_n^2 \sqrt{2} k \right]$	$-\frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^2}{b} R_\Theta$
$-l \frac{\alpha_n^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\delta^2}{2} M_\Delta \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_n \frac{\delta^3}{6(1-\nu^2)_\Theta} M_\Theta$

Układ ten odpowiada wyboczeniu antysymetrycznemu (giętno-skrętnemu) z antysymetrycznym zniekształceniem przekroju.

Uwaga ogólna. W tablicach 1-10 zestawiono macierze układów równań w postaci otrzymanej wprost z wyprowadzenia. W teorii wyznaczników udowadnia się, jak wiadomo, że wartość wyznacznika nie ulega zmianie, gdy do

wyrazów dowolnej kolumny (lub wiersza) dodamy lub odejmiemy wyrazy dowolnej innej kolumny (lub wiersza). Fakt ten można wykorzystać w tablicy 3 (odejmując wyrazy trzeciej kolumny od wyrazów drugiej kolumny), w tablicy 6 (odejmując wyrazy drugiej kolumny od wyrazów pierwszej kolumny), w tablicy 4 (odejmując wyrazy czwartej kolumny od wyrazów drugiej kolumny) oraz w tablicy 8 (jak w tablicy 6). W każdym z wymienionych przypadków otrzymamy znaczne uproszczenie niektórych wyrazów wyznacznika i pewne zmniejszenie pracy rachunkowej przy obliczaniu współczynnika k . Można udowodnić, że te uproszczone wyznaczniki dadzą się uzyskać wprost z układów równań. W tym celu należy stan odkształceń $\varphi = 1$ przyjmować nie ściśle według definicji, to znaczy jako obrót przekroju nieodkształcalnego, lecz jako obrót z takim zniekształceniem środnika, przy którym półki doznają jedynie przemieszczenia w swej płaszczyźnie. Przyjęcie takie jest dopuszczalne, ponieważ w prostym przekroju poprzecznym zniekształcenie przekroju nie ma wpływu na siły ścinające t , a stan $\varphi = 1$ uwidacznia się w równaniach wyłącznie za pośrednictwem właśnie sił ścinających [wyraz $E\varphi'''S_w$ w równaniu (2.2)]. Przykłady tego rodzaju będą podane w następnej publikacji autora, traktującej o przekrojach złożonych.

5. Wyboczenie lokalne jako przypadek szczególny

Jeżeli dla danego przekroju ułożymy jedynie równania równowagi momentów na krawędziach (równania $\Sigma m_{ic} = 0$), wówczas otrzymamy przypadek wyboczenia lokalnego (płytkowego). Równania te można też uzyskać przyjmując w wyprowadzonych w rozdziale 4 równaniach ogólnych $\xi = \eta = \varphi = 0$. Zestawimy poniżej równania przestępne wyboczenia lokalnego dla rozważanych poprzednio przekrojów.

Ceownik niesymetryczny (rys. 13):

$$(\delta_2^3 M_{\theta_s}^{(2)} + \delta_1^3 M_{\theta}^{(1)})(\delta_2^3 M_{\theta_a}^{(2)} + \delta_3^3 M_{\theta}^{(3)}) + (\delta_2^3 M_{\theta_a}^{(2)} + \delta_1^3 M_{\theta}^{(1)})(\delta_2^3 M_{\theta_s}^{(2)} + \delta_3^3 M_{\theta}^{(3)}) = 0.$$

Ceownik symetryczny (rys. 17):

symetria odkształceń

$$t^3 M_{\theta_s}^{(s)} + \delta^3 M_{\theta}^{(p)} = 0;$$

antysymetria odkształceń

$$t^3 M_{\theta_a}^{(s)} + \delta^3 M_{\theta}^{(p)} = 0.$$

Dwuteownik monosymetryczny (rys. 18):

$$(\delta_2^3 M_{\theta_s}^{(2)} + 2\delta_1^3 M_{\theta}^{(1)})(\delta_2^3 M_{\theta_a}^{(2)} + 2\delta_3^3 M_{\theta}^{(3)}) + (\delta_2^3 M_{\theta_a}^{(2)} + 2\delta_1^3 M_{\theta}^{(1)})(\delta_2^3 M_{\theta_s}^{(2)} + 2\delta_3^3 M_{\theta}^{(3)}) = 0.$$

Dwuteownik bisymetryczny (rys. 20):

symetria odkształceń

$$t^3 M_{\theta_s}^{(s)} + 2\delta^3 M_{\theta}^{(p)} = 0,$$

antysymetria odkształceń

$$t^3 M_{\Theta\alpha}^{(s)} + 2\delta^3 M_{\Theta}^{(p)} = 0.$$

Zetownik (rys. 21):

symetria odkształceń środника

$$t^3 M_{\Theta s}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)} = 0;$$

antysymetria odkształceń środnika

$$t^3 M_{\Theta\alpha}^{(s)} + \delta^3 M_{\Theta}^{(p)} = 0.$$

Teownik (rys. 23); antysymetria odkształceń

$$t^3 M_{\Theta}^{(s)} + 2\delta^3 M_{\Theta}^{(p)} = 0.$$

Kątownik równoramienny (rys. 26); antysymetria odkształceń

$$M_{\Theta} = 0.$$

Teownik i kątownik równoramienny mogą ulec również wyboczeniu płytowemu symetrycznemu nieobjętemu powyższymi równaniami. Wówczas obie połowki półek teownika względnie oba ramiona kątownika zachowują się jak płyty utwierdzone na jednej podłużnej krawędzi i swobodne na drugiej oraz wolnopodparte na krawędziach poprzecznych.

6. Przykłady liczbowe. Porównanie z wynikami obliczeń uproszczonych

Rozpatrzmy z kilku punktów widzenia wyboczenie giętnie symetrycznego przekroju teowego. Odpowiednie równanie przestępne otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik układu równań przedstawionego w tablicy 2. Przyjmując w nim dalej

$$S_{\alpha 12} = b\delta c, \quad \text{gdzie} \quad c = b = \frac{1}{4 \frac{b}{h} \frac{\delta}{t} + 2},$$

otrzymamy po prostych przekształceniach równanie, w którym pręt jest scharakteryzowany parametrami bezwymiarowymi:

$$(6.1) \quad \left[n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{c}{l} + \frac{1}{12} \frac{b}{l} \right) + \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{2s}^{(s)} - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k \right] \times \\ \times \left[\left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta s}^{(p)} + M_{\Theta}^{(p)} \right] - \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^6 R_{\Theta s}^{(s)} M_{2s}^{(s)} = 0.$$

Zależność siły krytycznej od długości pręta. Zbadamy przede wszystkim zależność siły krytycznej obliczonej dla $n = 1$ od parametru l/b , czyli przy stałym przekroju poprzecznym zależność od długości pręta. Pozostałe parametry przyjmijmy jak następuje:

$$\frac{h}{b} = 1, \quad \frac{h}{t} = 50, \quad \frac{\delta}{t} = 3.$$

Podstawiając powyższe wartości do (6.1), otrzymamy roboczą postać równania przestępnego:

$$(6.2) \quad \left(326,378 \frac{b}{l} + 0,0106552 R_{D_s}^{(s)} - 277,779 \frac{l}{b} k \right) \times \\ \times (0,0370370 M_{\Theta_s}^{(s)} + M_{\Theta}^{(p)}) - 3,94637 \cdot 10^{-4} \cdot R_{\Theta_s}^{(s)} M_{D_s}^{(s)} = 0.$$

Współczynnik k_E odpowiadający sile krytycznej EULERA wynosi:

$$k_E = 1,0072 \left(\frac{b}{l} \right)^2.$$

Wyniki obliczeń wykonanych dla $10 \leq l/b \leq 20$ zestawiono w tablicy 11 (dla $\nu = 0,3$).

Tablica 11

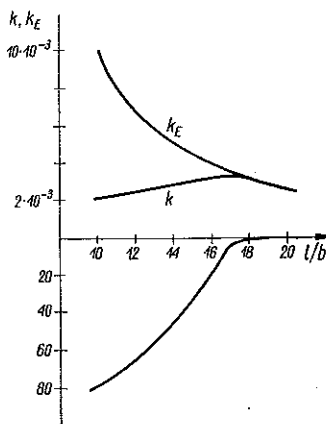
l/b	10	12	14	16	17	18	20
$k_E \cdot 10^3$	10,1	6,99	5,14	3,93	3,48	3,11	2,52
$k \cdot 10^3$	2,12	2,44	2,80	3,20	3,33	3,08	2,51
$\Delta k_E \%$	79	65	44	19	4,3	1,0	0,4
$k_{pl} \cdot 10^3$ $n = 1$	2,12	2,44	2,80	3,23	3,46	—	—

Współczynnik k_E rośnie jak wiadomo gwałtownie przy malejącej długości pręta. Jednocześnie współczynnik k obliczony z równania (6.2) i odpowiadający ściśle wartości siły krytycznej rośnie tylko przy dużych l/b , od $l/b = 17$, natomiast maleje przy zmniejszaniu długości pręta. W trzecim rzędzie tablicy zestawiono procentowe zmniejszenie siły krytycznej EULERA,

$$\Delta k_E = \frac{k_E - k}{k_E} 100.$$

Powyższy spadek siły krytycznej EULERA rośnie stale ze zmniejszaniem długości pręta. Do $l/b = 17$ wzrost ten jest powolny i Δk_E nie przekracza w tym przedziale kilku procent. Natomiast poniżej $l/b = 17$ wzrost staje się gwałtowny i Δk_E osiąga kilkadziesiąt procent, co oznacza, że rzeczywista siła krytyczna jest kilkakrotnie mniejsza od siły EULERA. Wykresy k_E , k oraz Δk_E jako funkcji l/b przedstawiono na rys. 27. W ostatnim rzędzie tablicy 11 wpisano współczynniki k_{pl} odpowiadające wyoboczeniu płytowemu ścianek ceownika, obliczone dla $n = 1$ według równania

$$(6.3) \quad \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta_s}^{(s)} + M_{\Theta}^{(p)} = 0,$$



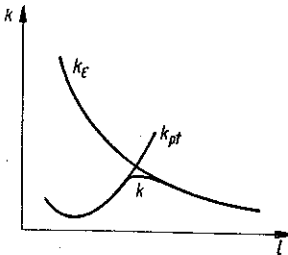
Rys. 27

które po podstawieniu wartości liczbowych przybiera postać

$$0,0370370 M_{\Theta_s}^{(s)} + M_{\Theta}^{(p)} = 0.$$

Widoczne jest, że otrzymane wartości są dla małych l/b (do $l/b = 14$) identyczne z wartościami współczynnika k (przy uwzględnieniu trzech miejsc znaczących). Dla $l/b > 14$ jest oczywiście zawsze $k < k_{pt}$, przy czym różnica między obu współczynnikami rośnie szybko ze zwiększaniem długości pręta.

Można zatem w rozpatrywanej przez nas zależności wyróżnić trzy wyraźne przedziały. Z jednej strony mamy przedział dużych l/b , w którym ściśle wartości sił krytycznych praktycznie nie różnią się od sił EULERA, można zatem w tym przypadku mówić o wpływie zniekształcenia przekroju poprzecznego na siłę krytyczną; wpływ ten jest niewielki, ponieważ zniekształcenie przekroju jest tu zjawiskiem drugorzędym, wtórnym w stosunku do pierwotnej niestateczności giętej całego pręta. W drugim przedziale obejmującym małe l/b siły krytyczne praktycznie nie różnią się od sił krytycznych wyoboczenia płytowego, obliczonych dla $n = 1$; wynika stąd, że pierwotna jest tu niestateczność płytowa ścianek pręta, zaś odkształcenia gięte pręta są tu zjawiskiem wtórnym, drugorzędym, należy zatem mówić o wpływie odkształceń prętowych na stateczność płytową. Na pograniczu tych przedziałów znajduje się bardzo wąski przedział trzeci, w którym siła krytyczna różni się wyraźnie zarówno od siły EULERA jak i płytowej, przy czym maksymalne odchylenie wynosi w naszym przypadku 4,3%.



Rys. 28

Wyniki powyższe można uważać za typowe, jeżeli chodzi o ogólny przebieg rozpatrywanej zależności. Odpowiedni typowy zespół wykresów przedstawia rys. 28. Hiperbola EULERA przecina się tu z krzywą wyoboczenia płytowego. Ostre załamanie pomiędzy miarodajnymi gałęziami obu krzywych w okolicy ich punktu przecięcia łągodzi krzywa odpowiadająca ściśłym wartościom siły krytycznej.

Zależność siły krytycznej od ilości półfal wyoboczenia. Pełne zbadanie stateczności pręta wymaga obliczenia sił krytycznych dla różnych wartości n , przy czym najmniejszą z otrzymanych wartości należy przyjąć jako miarodajną. Dlatego wyniki liczbowe otrzymane dla $n = 1$ będą praktycznie ważne tylko wtedy, gdy dla większych n otrzymamy większe wartości siły krytycznej. Przeprowadzimy dyskusję tego rodzaju dla następujących wartości parametrów

$$\frac{l}{h} = \frac{l}{b} = 10, \quad \frac{h}{t} = 50, \quad \frac{\delta}{t} = 1.$$

Równanie (6.1) przybiera postać

$$(6.4) (411,234n^2 + 0,287692n R_{\Delta_s}^{(s)} - 25000k)(M_{\Theta_s}^{(s)} + M_{\Theta}^{(p)}) - 0,287692n R_{\Theta_s}^{(s)} M_{\Delta_s}^{(s)} = 0.$$

Podstawiając $n = 1, 2, 3, \dots$ otrzymamy po rozwiązaniu równania (6.4) naprężenia krytyczne dla różnych postaci wybożenia. Wyniki przedstawia tablica 12 (dla $\nu = 0,3$).

Tablica 12

n	1	3	4	5	6
$k \cdot 10^4$	16,44	3,72	3,25	3,23	3,43

Najmniejsze naprężenie krytyczne otrzymamy dla $n = 5$, co oznacza, że pręt wyboczy się według pięciu półfal. Dla $n = 1$ otrzymujemy $k = 1,646 \cdot 10^{-3}$, podczas gdy dla wybożenia giętnego EULERA w założeniu przekroju nieodkształcalnego mielibyśmy $k_E = 10,97 \cdot 10^{-3}$. Wpływ zniekształcenia przekroju na siłę EULERA jest zatem bardzo duży. Należy jednak pamiętać, że ścianki rozpatrywanego pręta są bardzo cienkie, a ich sztywności płytowe znikome w porównaniu ze sztywnościami prętowymi. Dlatego podana powyżej siła krytyczna wybożenia prawie nie różni się od siły krytycznej wybożenia płytowego, obliczonej dla $n = 1$ (różnica wynosi poniżej jednego promille; porównaj rozważania dotyczące tablicy 11). Fakt ten można uznać za regułę dla wszystkich prętów, w których zmniejszenie siły krytycznej wybożenia ogólnego jest bardzo duże, tzn. osiąga kilkadziesiąt procent. Jeszcze mniejszy jest oczywiście wpływ odkształceń prętowych na wybożenie przy większych n . Reasumując zatem można stwierdzić, że rozpatrywany pręt ulega wybożeniu według pięciu półfal, przy czym naprężenia krytyczne praktycznie nie różnią się od naprężeń wybożenia płytowego, obliczonych dla $n = 5$.

Porównanie z wynikami obliczeń uproszczonych. Ciekawe i pożyteczne jest porównanie wyników przedstawionej teorii ścisłej z wynikami otrzymanymi w sposób uproszczony, to znaczy przy założeniu nieodkształcalności półek, przedstawionymi w pracach [2]-[4].

Równanie przybliżone dla giętnego wybożenia ceownika, przedstawione w pracy [4], ma postać podobną do (6.1)⁵:

$$(6.5) \quad \left[n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{12} \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \frac{c}{l} \right) + \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\mathcal{G}_s}^{(s)} - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k \right] \times \\ \times \left\{ 12(1-\nu^2) \frac{b}{l} \left[\frac{n^3 \pi^3}{48} \left(\frac{b}{l} \right)^2 + \frac{n\pi}{6(1+\nu)} - n\pi \left(\frac{1}{3} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{12} \right) k - \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\mathcal{G}_s}^{(s)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^6 R_{\mathcal{G}_s}^{(s)} M_{\mathcal{G}_s}^{(s)} = 0. \right.$$

Jak widać, różnica między równaniem ścisłym i przybliżonym ogranicza się do jednego wyrazu równania (6.1), mianowicie $M_{\mathcal{G}_s}^{(s)}$, który w równaniu (6.5) zastąpiony jest dłuższym wyrażeniem.

⁵ Równanie (6.5) napisano biorąc pod uwagę umowę o znakach przemieszczeń i reakcji brzegowych płyt wprowadzoną w niniejszej pracy, a różną od przyjętej w [4].

W tablicy 13 przedstawiono wyniki obliczeń dla pręta o parametrach $l/h = 10$, $l/b = 10$, $h/t = 50$, przy zmiennym stosunku δ/t i przy $n = 1$ oraz $\nu = 0,3$.

Tablica 13

δ/t	1	2	3
$k_E \cdot 10^3$	10,97	10,53	10,07
$k_{\text{ściśle}} \cdot 10^3$	1,64	1,67	2,12
$k_{\text{upr}} \cdot 10^3$	2,30	1,72	2,12

Dla $\delta/t = 3$ nie stwierdzono w granicach trzech miejsc znaczących różnicy między rozwiązaniami równań (6.1) i (6.5); natomiast dla $\delta/t = 1$ różnica ta wynosi 40% w odniesieniu do wartości ścisłej lub 29% w odniesieniu do wartości przybliżonej. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że w odniesieniu do wartości k_E błąd wynikający z przyjęcia równania uproszczonego wynosi zaledwie kilka procent, dojdziemy do wniosku, że tylko w wypadkach przekrojów blachowych o półkach bardzo cienkich zachodzi konieczność korzystania ze wzorów ścisłych. Wniosek ten jest ważny oczywiście tylko dla $n = 1$, to znaczy dla wyboczenia ogólnego, ponieważ dla większej ilości półfal wpływ pracy płytowej półek rośnie i nie może być pominięty, tym bardziej że miarodajne wartości k otrzymujemy wówczas zazwyczaj dla dużych n .

7. Wnioski praktyczne

Wyniki liczbowe uzyskane w pracy niniejszej oraz w pracach [2]-[4] jak również pewne nieopublikowane przez autora materiały pozwalają na wyciągnięcie wniosków praktycznych dotyczących omawianego zagadnienia. Wnioski te są następujące:

1. Rozwiązania ogólne przedstawionej teorii ściślejszej wskazują, że pręty cienkościenne o prostym przekroju poprzecznym przy założeniu wolnego i dopuszczającego swobodę deplanacji usztywnionych przeponami przekrojów skrajnych podparcia wybaczą się podług sinusoidy, to znaczy tak, jak przewiduje klasyczna teoria prętów cienkościennych. Jednocześnie ulegają odkształceniu falistemu ścianki pręta, przy czym ilość półfal odkształcenia płytowego jest zawsze identyczna z ilością półfal odkształceń prętowych. Nie ulegają też zmianie zasadnicze postaci wyboczenia dla prętów o przekrojach walcowanych. Wyjątkiem jest przekrój zetowy, w którym zachodzi sprzężenie wyboczenia giętnego w obu płaszczyznach osi głównych.

2. Jakkolwiek przedstawiona teoria nie rozróżnia wyboczenia lokalnego i ogólnego, ponieważ zjawiska te zawsze występują jednocześnie, to jednak zmiany, jakie otrzymujemy w wynikach liczbowych, nie są na tyle duże w porównaniu do wartości otrzymywanych z klasycznej teorii prętów cienkościennych.

nych, aby podział taki przestał być racjonalny z praktycznego punktu widzenia. Dlatego będziemy mówić oddzielnie o wpływie odkształcalności przekroju poprzecznego na stateczność ogólną pręta lub o wpływie odkształceń prętowych na stateczność lokalną.

3. W przekrojach walcowanych, jak również w typowych przekrojach spawanych mogą być przy badaniu stateczności ogólnej ($n = 1$) używane równania uproszczone, wyprowadzone w założeniu półek nieodkształcalnych. Równania te prowadzić mogą do istotnych błędów tylko w przypadku bardzo cienkich półek blachowych. Wniosek powyższy pozwala na włączenie do dyskusji wyników liczbowych podanych w pracach [2]-[4].

4. Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na siłę krytyczną wyboczenia ogólnego jest dla prętów walcowanych znikomy i wyraża się ułamkiem procentu, a nawet promillem. W przekrojach spawanych o grubych półkach i wiotkim środniku może być większy, lecz w przypadkach typowych nie przekracza kilku procent. Wpływ ten maleje szybko przy wzroście długości pręta. W prętach bardzo krótkich może przekraczać nieco wartości podane powyżej, lecz wówczas naprężenia krytyczne będą zawsze znajdować się daleko poza granicą sprężystości każdego materiału konstrukcyjnego. Wpływ ten rośnie gwałtownie przy zwiększaniu szerokości półki i dla półek bardzo szerokich przy cienkim jednocześnie środniku może, zwłaszcza wtedy gdy zachodzi symetryczne zniekształcenie środnika, osiągnąć kilkadziesiąt procent. Należy jednak podkreślić, że tylko pod względem formalnym mamy wówczas do czynienia z wyboczeniem pręta. W rzeczywistości bowiem odkształcenia prętowe są wówczas znikome i utrata stateczności zachodzi niemal wyłącznie przez wyboczenie płytowe według jednej półfali, a odpowiednie wyniki liczbowe można otrzymać z wystarczającą dokładnością ze wzorów rozdziału 5, ewentualnie z analogicznych wzorów wyprowadzonych w założeniu nieodkształcalności półek.

Mamy zatem przeważnie do czynienia z jednym z dwu przypadków skrajnych. W pierwszym zniekształcenie przekroju jest zjawiskiem wtórnym w porównaniu do niestateczności ogólnej — wówczas wpływ jego jest bardzo mały i z reguły może być pominięty, to znaczy dopuszczalne jest korzystanie ze wzorów klasycznej teorii prętów cienkościennych. W drugim — omawiany wpływ jest bardzo duży, to znaczy pierwotna jest niestateczność płytowa półek pręta (w ujęciu przybliżonym — niestateczność skretna), zaś odkształcenia prętowe są zjawiskiem wtórnym; wówczas wynik wystarczająco dokładny można uzyskać pomijając odkształcenia prętowe i rozwiązując równanie przestępne wyboczenia płytowego dla $n = 1$. W obu tych skrajnych przypadkach można zatem korzystać z równań uproszczonych. Natomiast obszar, w którym konieczne jest korzystanie z pełnych równań (w ujęciu ścisłym lub uproszczonym), to znaczy, w którym pominięcie czy to odkształceń płytowych, czy prętowych daje bardziej istotne błędy jest bardzo wąski, zaś wpływ odkształcalności

przekroju jest wówczas stosunkowo nieduży i prawdopodobnie tylko wyjątkowo może przekraczać 10 procent.

5. Wpływ odkształceń prętowych na stateczność lokalną jest w przypadkach mających praktyczne znaczenie znikomym i zawsze może być pominięty.

Literatura cytowana w tekście

- [1] В. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
- [2] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego na siłę krytyczną Eulera*, Rozpr. inżyn., 1, 8 (1960).
- [3] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego pręta dwuteowego*, Rozpr. inżyn., 1, 8 (1960).
- [4] A. CHUDZIKIEWICZ, *Giętne i giętno-skrętne wyboczenie pręta ceowego o odkształcalnym przekroju poprzecznym*, Rozpr. inżyn., 2, 8 (1960).
- [5] F. BLEICH, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York 1952.
- [6] E. STOWELL, C. LIBOVE, E. LUNDQUIST, G. HEIMERL, *Buckling Stresses for Flat Plates and Sections*, Proceedings ASCE, 77, 1951.
- [7] R. DĄBROWSKI, *Praktycznie ważne przypadki wyboczenia skrętnego prętów cienkościennych*, Arch. Inżyn. ładow. 1, 1956.

Резюме

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СΤΕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ДΕΦОРМАЦИИ ПОΠΕΡΕЧНОГО СΕЧЕНИЯ

Часть I. Стержни с простым поперечным сечением

Работа представляет собой продолжение предыдущих публикаций автора [2]–[4]. Её предметом является теория устойчивости тонкостенных стержней, обобщающая известные теории общей и местной потери устойчивости. Эти теории не точны, так как с одной стороны не учитывают влияния деформации поперечного сечения на деформации стержней, а с другой стороны — влияния деформации стержней на деформации стенок.

Рассуждения ограничиваются упругой зоной осевого сжатия стержней, обладающих полигональным поперечным сечением и постоянной толщиной каждой стенки. Предполагается, что только лишь оба конца ужестчены тонкими диафрагмами, препятствующими деформации опорных сечений, а также что опоры снабжены шарнирами и дают возможность свободной деформации крайних сечений.

Предлагается разделение на две группы полигональных сечений. Сечения первой группы называемые простыми (рис. 1) характеризуются тем, что их деформации вызывают непосредственно только перемещения точек по направлению нормальному к стенке, (касательная составляющая равняется нулю). В сечениях второй группы (рис. 2) называемых сложными также возможны перемещения по направлению касательному к стенке, возникшие непосредственно вследствие деформации сечения. В работе подробно рас-

сматриваются сечения первой группы (сечения второй группы будут темой отдельной публикации).

Для каждой сформированной стенки r стержня (рис. 6 и 7) рассматриваемой отдельно составляется уравнение равновесия (2.3), в котором P_r обозначает часть сжимающей силы, действующей на стенку, а p_r нагрузку реакциями соседних стенок. Сдвиг T_r определяется как сумма касательных напряжений τ используя факт, что в простом поперечном сечении они не зависят непосредственно от деформации сечения и поэтому выражаются формулой (2.1), применяемой для недеформируемых сечений. Получаются окончательно уравнения типа (2.7), в которых выступают компоненты ξ , η — перемещения и φ поворота поперечного сечения и перемещения ζ_r , которые можно выразить величинами ξ , η , φ . Кроме того составляется уравнение равновесия поперечных изгибающих моментов, действующих на краю (2.10).

Реакции p_r , m_{rc} между отдельными стенками можно всегда определить с помощью величин ξ , η , φ , и углов поворота края ψ_i , как реакции однонаправленно сжимаемой пластинки, продольные края которой подвергаются заданным краевым перемещениям Δ и Θ (рис. 11 и 12). Соответствующие формулы (3.8), (3.9) и (3.10) получаются решая уравнение (2.9). В результате, во всех уравнениях типа (2.7) и (2.10) неизвестными остаются всегда три компонента перемещений стержней ξ , η , φ и углы поворота ψ_i , определяющие деформацию сечения. Приравнение к нулю детерминанта, полученной таким способом однородной системы уравнений, дает условие продольного изгиба, в виде трансцендентного уравнения, в котором неизвестной является безразмерный коэффициент $k = \sigma/E$ (где σ — есть критическое напряжение).

В разделе 4 проводится подробный анализ устойчивости для более важных типов сечений. В разделе 5 рассматривается в качестве особого случая выпучивание стенок; соответствующие формулы можно получить принимая в выведенных общих формулах $\xi = \eta = \varphi = 0$. В разделе 6 приводятся числовые результаты и дискуссия для изгибной потери устойчивости коробчатого сечения сравнивая их с результатами полученными в работе [4], при предположении недеформируемости полков.

Заключения можно сформулировать следующим образом:

1. Влияние деформации сечения на критическую силу в прскатных стержнях — ничтожно и выражается в долях процента или промилле.
2. В стержнях с очень гибкой стенкой и широкими полками это влияние может быть больше, но в практически важных случаях только исключительно может превысить несколько процентов.
3. Влияние деформации сечения повышается с уменьшением длины стержня и в очень коротких стержнях теоретически может достиг нескольких десятков процентов. В этих случаях критическая сила не разнится практически от критической силы выпучивания стенок, вычисленной для $n = 1$ (рис. 28).

4. Почти всегда при исследовании устойчивости можно предположить, что полки недеформируются. Погрешности имеют существенное значение только в случае очень тонких полок из листового железа.

5. Влияние деформации стержней на выпучивание стенок ничтожно и нем всегда можно пренебречь.

Summary

GENERAL THEORY OF STABILITY OF THIN-WALLED BARS WITH DEFORMABLE CROSS-SECTION

Part I. Bars with Simple Cross-Section

This is a continuation of the former paper by the present author, Refs. [2]-[4]. The subject matter is a theory of thin-walled bars constituting a generalization of the known theories of primary and local buckling. These theories are not accurate because they do not take into consideration the influence of deformability of the cross-section of the deformation of the bar and, on the other hand, the influence of the deformations of the bar on the deformations of its walls.

The assumptions are as follows: the elastic range, axial compression, the polygonal cross-section and constant thickness of every wall. It is assumed further that the ends of the bar are stiffened by thin diaphragms preventing the deformation of the end cross-sections and that the supports are hinged ones and enable free warping of the end cross-sections.

The polygonal cross-sections are classified into two groups. Characteristic of the first sections, called simple (Fig. 1) is that their deformation causes directly only the displacements normal to the wall (the tangential components being equal to zero). In the cross-sections of the second group (Fig. 2) — called composite displacements tangential to the wall are also possible. Cross-sections of the first group are discussed in detail in the present paper. The second group will constitute the subject matter of a separate paper.

For each deformed wall r of the bar (Fig. 6,7), treated separately, the equilibrium equation (2.3) is established, P_r denoting part of the compressive force acting on the wall and p_r —the distributed reactions of the adjacent walls. The shearing force T_r is expressed as a sum of the shear stresses τ making use of the fact that for a simple cross-section they do not depend directly on the deformation of the cross-section and are given by the Eq. (2.1) for indeformable cross-sections. Thus, finally, we obtain equations of the type (2.7) in which the displacement components ξ , η appear as well as the rotation φ of the cross-section and the displacements of the walls ζ_r which may always be expressed in terms of the quantities ξ , η , φ . In addition, the equations of equilibrium (2.10) are established for the transversal bending moments acting along the edges.

The reactions p_r, m_{θ} between the walls constituting the reactions of a plate compressed in one direction with longitudinal edges undergoing edge displacements Δ, θ (Fig. 11,12), can always be expressed in terms of ξ, η, φ and the rotation angles ψ_i of the edges. The relevant formulae (3.8), (3.9), (3.10) are obtained by solving the Eq. (2.9). As a result there remain always in all the equations of the type (2.7) and (2.10) the three unknown displacement components of the bar ξ, η, φ and the rotation angles ψ_i , determining the deformation of the cross-section. Setting the determinant of the system of homogeneous equations thus obtained equal to zero, we obtain the buckling condition in the form of a transcendental equation, in which the unknown is the dimensionless coefficient $k = \sigma/E$ (where σ is the critical stress).

In Sec. 4 a detailed analysis of stability is given for the most important types of cross-section. In Sec. 5 plate buckling of the walls is considered as a particular case, which may be obtained by assuming $\xi = \eta = \varphi = 0$ in the general equations obtained. In Sec. 6 numerical results are given and a discussion for flexural buckling of a channel section. These results are compared with those of the Ref. [4] where indeformable flanges were assumed.

The conclusions may be formulated thus:

1. The influence of the deformability of the cross-section on the critical force in rolled profile bars is insignificant and amounts to a fraction of one per cent.

2. In bars with very flexible web and broad flanges this influence may be greater, but in practice it exceeds a few per cent only in rare cases.

3. The influence of the deformability of the cross-section increases rapidly with decreasing the length of the bar. In very short bars it may reach theoretically a few tens per cent. In these cases the critical force does not differ practically from the critical force for plate buckling of the walls computed for $n = 1$ (Fig. 28, Table 11).

4. It may practically be always assumed that the flanges are indeformable. The errors are significant only in the case of very thin flanges.

5. The influence of bar deformations on local buckling is insignificant and may be disregarded.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1960 r.