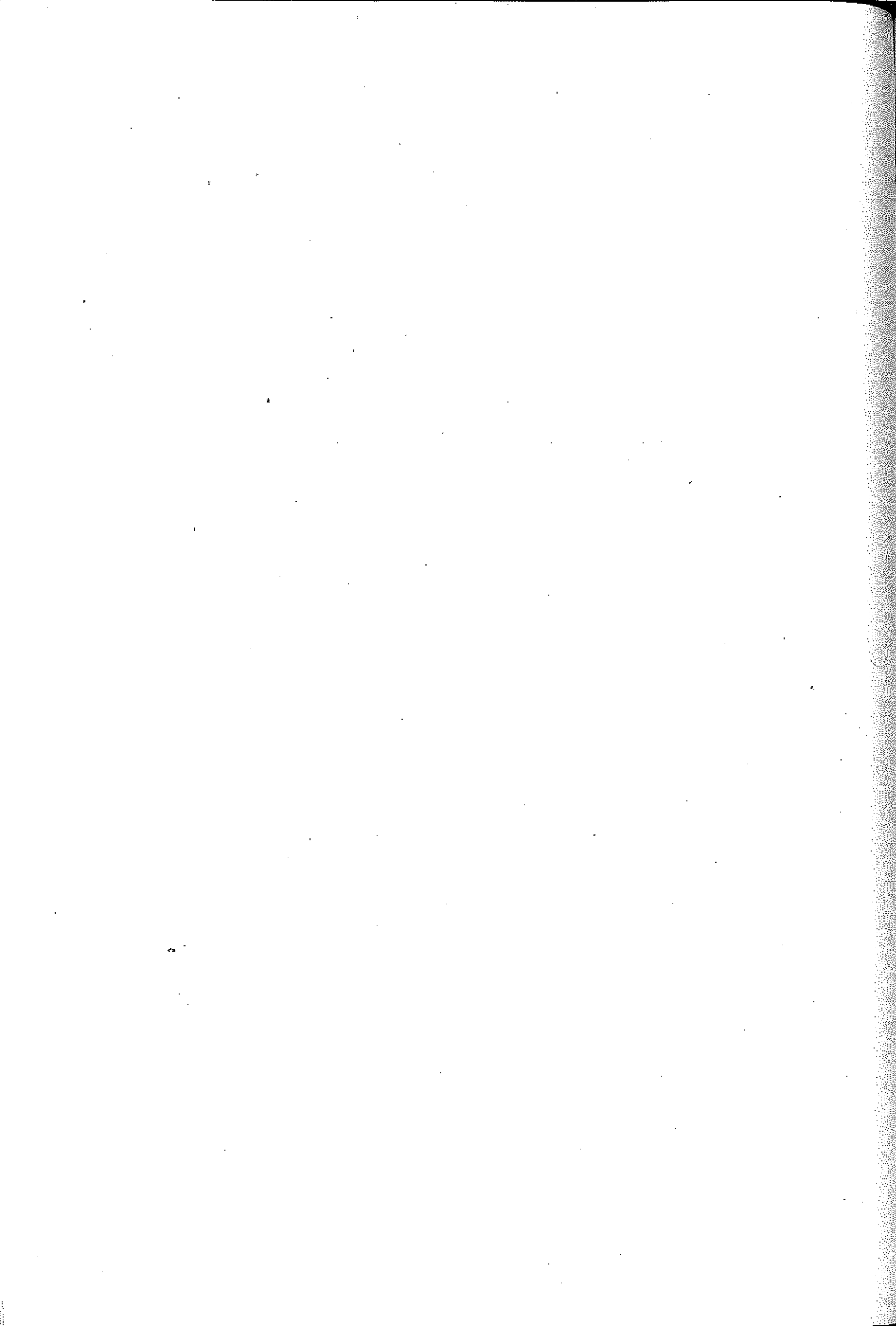


KRYSTYNA SALWA I HENRYK WALDEN

FILTRACJA CIECZY
W ZŁOŻU ZE SZCZELINĄ POZIOMĄ

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLX

TOM VIII . ZESZYT 3 . ROK 1960



W celu zwiększenia wydobycia ropy naftowej stosowana jest obecnie na szeroką skalę metoda hydraulicznego szczelinowania złoża. W pracy tej otrzymano rozwiązanie zagadnienia filtracji osiowo-symetrycznej w złożu poziomym jednorodnym ze szczeliną poziomą. Przeprowadzono weryfikację doświadczalną wyniku teoretycznego¹.

W rok później ukazała się praca PISKUNOWA, [2]. Autor tej pracy rozpatruje podobne zagadnienie przyjmując jednak zupełnie inne założenia i warunki graniczne.

Dla uproszczenia zadania pomijamy wpływ otworu, którego wydatek jest bardzo mały w porównaniu z wydatkiem szczeliny. Pomijamy również straty ciśnienia w samej szczelinie oraz jej grubość.

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia wydatku cieczy, przepływającej przez szczelinę według wzoru:

$$(1) \quad Q = -\frac{k}{\mu} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} r dr \quad \text{dla } z = h,$$

przy czym k oznacza współczynnik filtracji, μ współczynnik lepkości dynamicznej, $p(r, z)$ ciśnienie w złożu oraz ρ promień szczeliny.

Funkcja $p(r, z)$ spełnia w obszarze filtracji (rys. 1) równanie LAPLACE'A we współrzędnych cylindrycznych

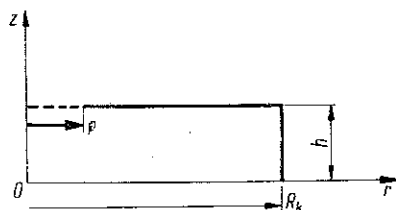
$$(2) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

oraz warunki brzegowe

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0, \quad 0 \leq r \leq R_k,$$

$$(4) \quad p = g(r) \quad \text{dla } z = h, \quad 0 \leq r \leq R_k,$$

$$(5) \quad p = p_k \quad \text{dla } 0 \leq z \leq h, \quad r = R_k.$$



Rys. 1

¹ Praca powyższa była referowana na Konferencji Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN w Krynicy we wrześniu 1957 roku.

We wzorach tych p_k oznacza ciśnienie na konturze o promieniu R_k oraz h grubość złoza.

Tak sformułowane zagadnienie brzegowe mieszane po wprowadzeniu nowej zmiennej $r = uR_k$ oraz funkcji $v(r, z) = p(r, z) - p_k$ przyjmie następującą postać:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial v}{\partial u} + R_k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$(8) \quad v = g(uR_k) - p_k \quad \text{dla} \quad z = h, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$(9) \quad v = 0 \quad \text{dla} \quad u = 1, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Zagadnienie to rozwiążemy, stosując przekształcenie całkowe HANKELA [1],

$$(10) \quad \bar{v}(\alpha, z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 u J_0(\alpha u) v(u, z) du,$$

gdzie α są pierwiastkami funkcji BESSELA $J_0(\alpha)$.

Przekształcenie odwrotne wyraża się szeregiem

$$(11) \quad v(u, z) = 2 \sum_{\alpha} \frac{J_0(\alpha u)}{J_1^2(\alpha)} \bar{v}(\alpha, z).$$

Mnożąc równanie (6) przez $uJ_0(\alpha u)$ i całkując w przedziale (0,1), po wykorzystaniu warunku brzegowego (9), otrzymamy równanie

$$(12) \quad \frac{d^2 \bar{v}(\alpha, z)}{dz^2} - \frac{\alpha^2}{R_k^2} \bar{v}(\alpha, z) = 0,$$

gdzie $\bar{v}(\alpha, z)$ jest transformatą HANKELA funkcji $v(u, z)$. Równanie (12) rozwiążemy przy następujących warunkach:

$$(13) \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad \text{dla} \quad z = 0,$$

$$(14) \quad \bar{v} = \int_0^1 u J_0(\alpha u) [g(uR_k) - p_k] du \quad \text{dla} \quad z = h.$$

Ogólnym rozwiązaniem równania (12) jest funkcja

$$(15) \quad \bar{v}(\alpha, z) = A(\alpha) e^{\frac{\alpha}{R_k} z} + B(\alpha) e^{-\frac{\alpha}{R_k} z}.$$

Korzystając z warunku (13) dla $z = 0$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = A(\alpha) \frac{\alpha}{R_k} - B(\alpha) \frac{\alpha}{R_k} = 0.$$

otrzymamy

$$(16) \quad A(\alpha) = B(\alpha).$$

Stąd

$$(17) \quad \bar{v}(\alpha, z) = 2A(\alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} z\right).$$

Dla wyznaczenia $A(\alpha)$ korzystamy z warunku (14):

$$2A(\alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right) = \int_0^1 u J_0(\alpha u) [g(uR_k) - p_k] du,$$

czyli

$$(18) \quad A(\alpha) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right)} \int_0^1 u J_0(\alpha u) [g(uR_k) - p_k] du.$$

Rozwiązaniem równania (12) przy warunkach (13) i (14) jest funkcja

$$(19) \quad \bar{v}(\alpha, z) = \int_0^1 u J_0(\alpha u) [g(uR_k) - p_k] du \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} z\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right)}.$$

Podstawiając (19) do (11) otrzymamy

$$(20) \quad v(u, z) = 2 \sum_{\alpha} \frac{F(\alpha)}{J_1^2(\alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} z\right) J_0(\alpha u),$$

gdzie

$$(21) \quad F(\alpha) = \int_0^1 u J_0(\alpha u) [g(uR_k) - p_k] du.$$

Wobec tego rozwiązaniem równania (2) przy warunkach (3), (4) i (5) jest funkcja

$$(22) \quad p(r, z) = 2 \sum_{\alpha} \frac{F(\alpha)}{J_1^2(\alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{R_k} z\right) J_0\left(\frac{\alpha}{R_k} r\right) + p_k.$$

Obliczmy pochodną cząstkową tej funkcji względem zmiennej z dla $z = h$:

$$(23) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{2}{R_k} \sum_{\alpha} \frac{\alpha F(\alpha)}{J_1^2(\alpha)} \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right) J_0\left(\frac{\alpha}{R_k} r\right).$$

Wobec tego wydatek przez szczelinę wynosi

$$(24) \quad Q = -\frac{2\pi k}{\mu} \int_0^{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} r dr = \frac{k \cdot 4\pi}{\mu R_k} \sum_{\alpha} \frac{\alpha F(\alpha)}{J_1^2(\alpha)} \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{R_k} h\right) \int_0^{\varrho} r J_0\left(\frac{\alpha}{R_k} r\right) dr.$$

Ponieważ

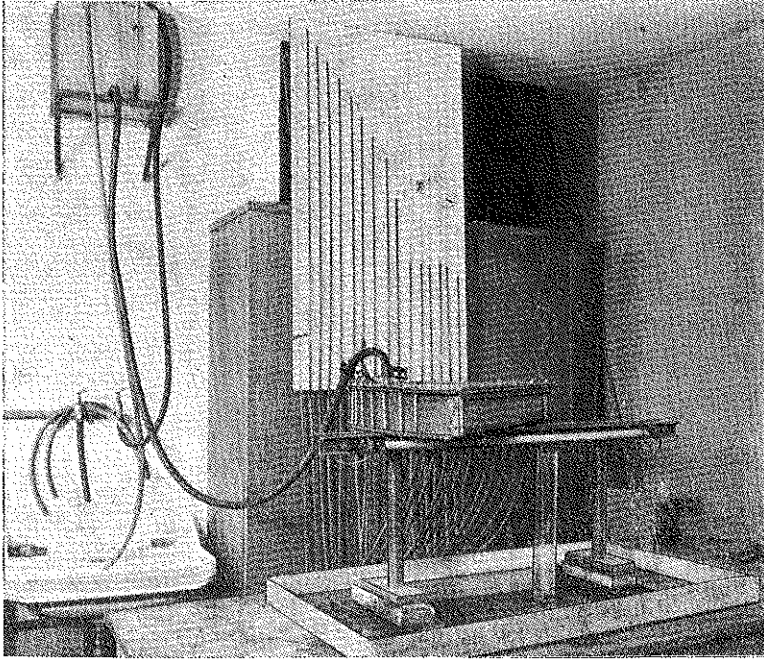
$$\int_0^{\varrho} r J_0\left(\frac{\alpha}{R_k} r\right) dr = \varrho^2 \int_0^{\pi/2} J_0\left(\frac{\alpha}{R_k} \varrho \sin x\right) \sin x \cos x dx = \frac{R_k \varrho}{\alpha} J_1\left(\frac{\alpha \varrho}{R_k}\right),$$

przeto otrzymujemy ostatecznie

$$(25) \quad Q = -\frac{k \cdot 4\pi\varrho}{\mu} \sum_{\alpha} \frac{F(\alpha)}{J_1^2(\alpha)} \operatorname{th} \left(\frac{\alpha}{R_k} h \right) J_1 \left(\frac{\alpha\varrho}{R_k} \right).$$

W celu doświadczalnego sprawdzenia wyniku równania (25) wykonano z pleksiglasu model przepływowy (rys. 2) w kształcie wycinka walca, wypełniony przesianym piaskiem jednorodnym o średnicy ziarn 0,48 mm.

Przestrzeń wodną modelu, zasiloną ze zbiornika z przelewem, oddzielono od piasku siatką miedzianą. W modelu umieszczono pustą wewnątrz szczelinę

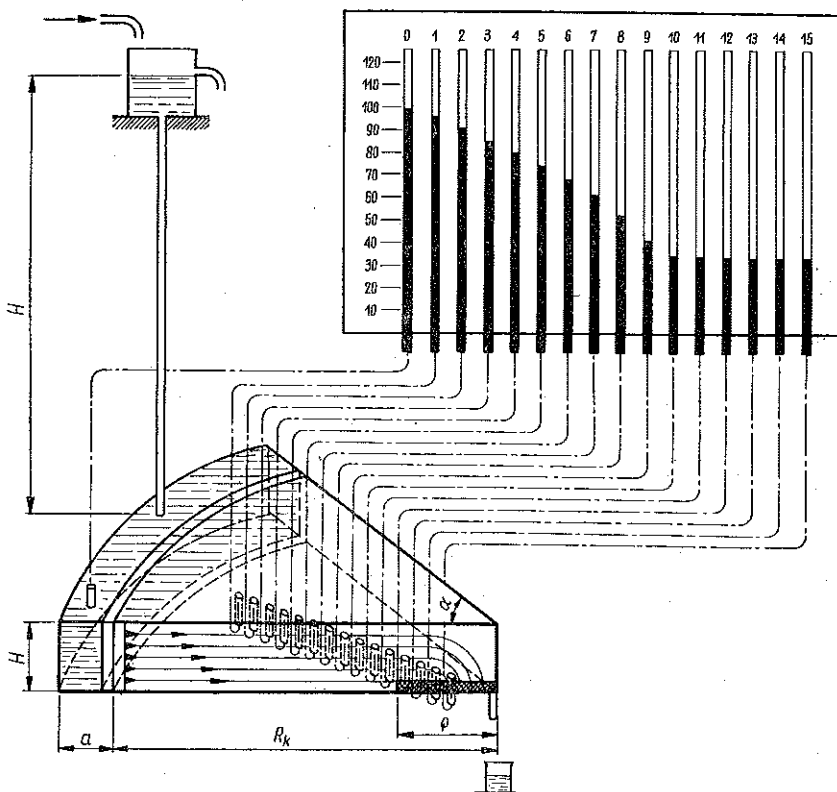


Rys. 2

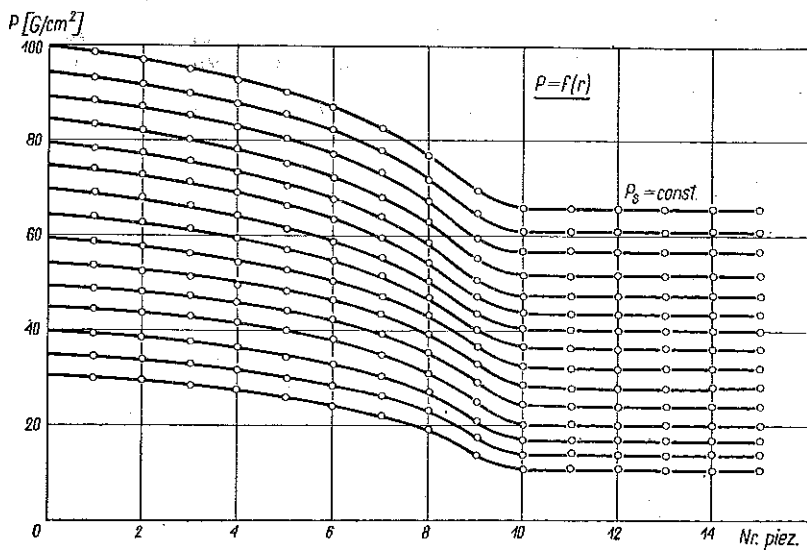
oddzieloną od piasku siatką. Woda pod ciśnieniem przepływała przez piasek i szczelinę do menzurki, za pomocą której mierzono wydatek cieczy. Do pomiaru rozkładu ciśnień wzdłuż promienia modelu zastosowano zespół piezometrów. Główne elementy modelu oraz ich wymiary geometryczne przedstawiono w schemacie filtracyjnym (rys. 3).

Wyniki pomiarów ciśnień i wydatków zestawiono w tablicy 1, na podstawie której wykreślono krzywe rozkładu ciśnień (rys. 4):

$$(26) \quad g(r) = \begin{cases} p_s, & \text{jeśli } 0 \leq r \leq \varrho, \\ \frac{p_s}{\sqrt{\varrho}} \sqrt{r}, & \text{jeśli } \varrho \leq r \leq R_k, \end{cases}$$



Rys. 3



Rys. 4

Tablica 1. Wyniki pomiarów rozkładu ciśnień w modelu (ze szczelnią)

L.p. metrów — ciśnienie G/cm^2	Nr piezometrów — ciśnienie G/cm^2															$\frac{P_k - P_s}{G/cm^2}$ $\frac{Q}{G/sek}$	
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}		
1	99,0	97,0	95,0	92,4	89,5	85,5	81,5	77,0	70,0	65,5	65,5	65,5	65,5	65,5	65,5	34,5	112,2
2	94,0	92,2	90,2	87,5	85,0	80,6	76,8	72,6	65,5	61,0	61,0	61,0	61,0	61,0	61,0	34,0	110
3	89,0	87,2	85,3	82,7	80,0	76,0	72,2	68,0	61,0	51,7	56,7	56,7	56,7	56,7	56,7	33,3	104,8
4	84,0	82,4	80,5	78,0	75,5	71,6	67,8	63,9	57,0	53,0	53,0	53,0	53,0	53,0	53,0	32,0	99,85
5	80,0	77,4	75,4	73,1	70,6	66,8	63,3	59,4	53,0	49,0	49,0	49,0	49,0	49,0	49,0	31,0	96,0
6	75,0	74,0	72,3	70,5	68,3	66,0	62,4	59,0	55,4	49,0	45,0	45,0	45,0	45,0	45,0	30,0	91,0
7	70,0	69,0	67,6	65,8	63,9	61,5	58,0	54,8	51,3	45,3	41,5	41,5	41,5	41,5	41,5	28,5	86,6
8	65,0	64,0	62,5	60,8	58,8	56,5	53,4	50,4	46,8	41,0	41,2	37,5	37,5	37,5	37,5	27,5	81,6
9	60,0	59,0	57,8	56,2	54,2	52,1	49,0	46,0	43,0	37,5	34,0	34,0	34,0	34,0	34,0	26,0	77,6
10	55,0	54,0	52,7	51,2	49,4	47,5	44,5	41,7	38,6	33,5	30,2	30,2	30,2	30,2	30,2	24,8	72,6
11	50,0	49,2	48,0	46,5	44,7	43,0	40,0	37,6	34,6	29,8	26,8	26,8	26,8	26,8	26,8	26,8	67,6
12	45,0	44,2	43,0	41,7	40,0	38,2	35,7	33,2	30,6	26,2	23,5	23,5	23,5	23,5	23,5	21,5	62,2
13	40,0	39,4	38,1	36,7	35,2	33,6	31,2	29,2	26,5	22,3	19,8	19,8	19,8	19,8	19,8	20,2	57,6
14	35,0	34,5	33,3	32,2	30,8	29,3	27,1	25,1	22,9	19,0	16,6	16,6	16,6	16,6	16,6	18,4	53,4
15	30,0	29,4	28,2	27,1	26,0	24,6	22,6	20,9	18,8	15,3	13,4	13,4	13,4	13,4	13,4	16,6	46,9

Odległość między piezometrami wynosiła 2,5 cm.

dla $z = h$, przy czym $p_s = \text{const}$ oznacza ciśnienie w szczelinie.

Podstawiając dane wzoru (26) do (21) otrzymamy

$$(27) \quad F(a) = \frac{\varrho}{R_k a} J_1\left(\frac{a}{R_k} \varrho\right) p_s - \frac{J_1(a)}{a} p_k + \frac{p_s}{\sqrt{\varrho} R_k^2} \int_0^{R_k} r \sqrt{r} J_0\left(\frac{a}{R_k} r\right) dr.$$

Biorąc sumę czterech pierwszych wyrazów szeregu (25) i wstawiając wartości podane w tablicy 2 otrzymamy wydatek $Q = f(p_s, p_k)$.

Tablica 2

Numer pierw.	Wartość pierwiastka	$J_1(a)$	$\text{th}\left(\frac{a}{R_k} h\right)$	$J_1\left(\frac{a}{R_k} \varrho\right)$	$F(a)$
α_1	2,40	0,519	0,4460	0,4059	$0,35p_s - 0,17p_k$
α_2	5,52	-0,340	0,8683	0,5683	$0,06p_k - 0,1p_s$
α_3	8,65	0,271	0,9400	0,2600	$0,03p_s - 0,31p_k$
α_4	11,79	-0,232	0,9800	0,2028	$0,02p_k - 0,006p_s$

$$(28) \quad Q = \frac{4k\pi}{\mu} \varrho [0,78p_k + 0,08p_s].$$

Przyjmując $\varrho = 15$ cm, $R_k = 40$ cm, $h = 8$ cm oraz $k/\mu = 0,01$ cm/sek, można porównać wydatek obliczony ze wzoru (28) z wydatkiem otrzymanym na drodze doświadczalnej (tablica 1). Zestawienie wyników podane zostało w tablicy 3. W tablicy tej Q' oznacza wydatek otrzymany z pomiaru, a Q wydatek obliczony ze wzoru (28).

Tablica 3

Nr pomiaru	1	3	6	9	12	15
Q' [G/sek]	112,2	104,8	91,0	77,6	62,2	46,9
Q [G/sek]	156,4	139,1	116,7	93,1	69,6	46,2
% błędu	39	33,0	28,2	20,0	11,8	1,4

Zestawienie wyników wykazuje, że rozbieżność między wydatkiem obliczonym na drodze teoretycznej, a wydatkiem otrzymanym doświadczalnie wyraża się w granicach od 1,4 do 39% błędu.

Literatura cytowana w tekście

[1] C.J. TRANTER, *Integral Transforms in Mathematical Physics* (tłum. na jęz. ros.), Moskwa 1956.

[2] ПИСКУНОВ, *Разрыв пласта и влияние разрыва на процесс эксплуатации месторождения*, Шруды В.Н.И.И. в 16, Moskwa 1958.

Резюме

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается вопрос осесимметрической фильтрации в однородном пласте с горизонтальной трещиной. Исчисление расхода в скважину сводится к решению уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями.

Применяя интегральное преобразование Ганкеля получается решение в виде ряда суммированного по корням функции Бесселя $J_0(\alpha)$. С целью экспериментальной проверки результата на фильтрационной модели проводится ряд измерений параметров давления и расхода.

Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов показывает допускаемое в проблемах фильтрации расхождение в пределах от 1,4 до 39 %.

Summary

THE FILTRATION OF LIQUID IN A HORIZONTAL SLOT

The problem of symmetric filtration in a horizontal slot is considered. The computation of the rate of the outflow from the slot is reduced to the solution of LAPLACE's equation with mixed boundary conditions. Using HANKEL's integral transformation, solution is obtained in the form of a series in the roots of the BESSEL function. To verify experimentally the result, a number of measurements of pressure and flow rate have been performed on a filtration model. A confrontation of the theoretical and experimental results shows a discrepancy of 1,4 to 39% which is admissible for filtration problems.

PRACOWNIA FILTRACJI
ZAKŁADU MECHANIKI CIECZY I GAZÓW PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 stycznia 1960 r.