

Ju. N. RABOTNOW

PEŁZANIE METALI I OBLICZANIE PEŁZANIA

**ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLVIII**

TOM VIII • ZESZYT 3 • ROK 1960

1911

1911

1911

1. Ogólne pojęcie «pełzania» obejmuje zespół zjawisk, obserwowanych przy badaniu większości konkretnych materiałów, przy czym ich wspólną cechą jest wpływ czasu na zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Procesy fizyczne, zachodzące u podstaw tego zjawiska, mogą być bardzo rozmaite u różnych materiałów, chociaż ich zewnętrzny przebieg jest mniej lub bardziej podobny. Fenomenologiczne teorie pełzania, które będą rozpatrzone w niniejszej pracy, mają za zadanie właśnie przedstawienie strony zewnętrznej tych zjawisk, dlatego te same równania można stosować do badania różnorodnych materiałów w rozmaitych warunkach ich użytkowania, z drugiej jednak strony każda z tych teorii fenomenologicznych może być stosowana tylko dla tych warunków, dla których została sprawdzona doświadczalnie. Jakiegokolwiek przeniesienie wyników z jednych materiałów i warunków na inne materiały i warunki powinno być dokonywane z dużą ostrożnością.

W pracy niniejszej będziemy się zajmowali tylko pełzaniem metali. Pełzanie betonu i innych materiałów budowlanych, mas plastycznych i wszelkiego rodzaju materiałów pochodzenia organicznego stanowi odrębną dziedzinę. Tym zagadnieniom poświęcono wiele badań, jednak nie będziemy ich tutaj omawiali.

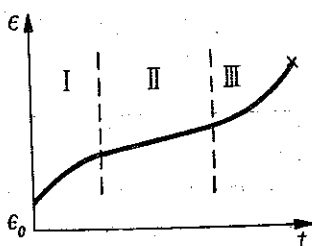
W metalach i stopach, stosowanych w technice, pełzanie bywa zwykle nieznaczne w temperaturach pokojowych i należy się liczyć z nim w rzadkich tylko stosunkowo przypadkach (np. dla ołowiu), jednak w temperaturach wysokich po prostu nie można uniknąć uwzględnienia zjawiska pełzania. Tak np. pod działaniem stałego obciążenia w wysokiej temperaturze metal odkształca się z biegiem czasu, przy czym prędkość odkształcenia z początku stopniowo się zmniejsza, a następnie, w określonych warunkach, może zacząć wzrastać doprowadzając wreszcie do zniszczenia konstrukcji metalowej.

Ze zjawiskiem pełzania można się spotkać w budownictwie turbin, w konstrukcjach lotniczych i w innych dziedzinach budowy maszyn. W celu zaspokojenia wzrastających wymagań w związku ze zwiększeniem temperatur roboczych i obciążeń metalurgowie pracują nad wynalezieniem specjalnych stopów żaroodpornych.

Podstawowe charakterystyki liczbowe zjawiska pełzania otrzymuje się w wyniku doświadczenia nad pełzaniem przy rozciąganiu pod działaniem stałego obciążenia. Doświadczenia jednak w pewnym tylko stopniu oddają rzeczy-

wiste warunki pracy konstrukcji i z tego względu mają ograniczone znaczenie. Mierząc odkształcenie i przedstawiając graficznie jego zależność od czasu otrzymuje się krzywą pełzania, podobną do przedstawionej na rys. 1. Wartość ϵ przedstawia natychmiastowe odkształcenie sprężyste albo plastyczne w zależności od wielkości użytego obciążenia. Jeżeli mamy do czynienia z odkształceniem sprężystym, to należy pamiętać o tym, że moduł sprężystości zmniejsza się ze wzrostem temperatury. To zmniejszenie modułu jest nieznaczne; przy temperaturze 600° moduł sprężystości stali jest na przykład o 30% mniejszy niż przy temperaturze pokojowej. Zmiany właściwości plastycznych pod wpływem wzrostu temperatury są znacznie większe.

Krzywą pełzania można podzielić umownie na trzy odcinki (rys. 1). Na odcinku pierwszym prędkość pełzania się zmniejsza i osiąga najmniejszą wartość, która utrzymuje się jako stała na odcinku drugim, a następnie poczynając od pewnego momentu prędkość znowu się powiększa aż wreszcie następuje zniszczenie.



Rys. 1

W większości istniejących maszyn doświadczalnych utrzymuje się przy badaniu próbki siłę stałą, a nie stałe naprężenie. Zwężenie poprzecznego przekroju w procesie zniekształcenia prowadzi do zwiększenia działającego naprężenia. W ten sposób

można wytłumaczyć trzeci odcinek krzywej pełzania. Dawniej badacze budowali pomysłowe konstrukcje w celu utrzymania stałego naprężenia w przebiegu doświadczenia, jednak i przy stałym naprężeniu krzywa pełzania może mieć także trzeci odcinek. Dla współczesnych stopów żaroodpornych zagadnienie utrzymania stałego naprężenia nie jest istotne; zniszczenie takich stopów w warunkach pełzania dokonuje się przy małych odkształceniach i trzeci odcinek można wytłumaczyć tym, że pole powierzchni przekroju próbki zmniejsza się nie z powodu zmiany jego rozmiarów, ale wskutek powstawania niewidocznych rys i szczelin. Z tego względu rzadko kiedy dopuszcza się w konstrukcjach do powstawania odkształceń spowodowanych pełzaniem większym niż jeden procent. To jest też przyczyną, dla której przy zastosowaniach technicznych jest rzeczą ważną poznanie krzywych pełzania przy małych odkształceniach, kiedy wpływ zmiany pola powierzchni przekrojów jest mały.

W ostatnich latach poczęto się interesować krótkotrwałym (kilkugodzinnym) pełzaniem metali nieżaroodpornych. Bada się więc pełzanie stopów aluminiowych, mających zastosowanie w lotnictwie ze względu na nagrzewanie aerodynamiczne. W takich materiałach przy wysokich wartościach naprężeń możliwe są znaczne odkształcenia, toteż zmiana wymiarów próbki odgrywa pewną rolę w przebiegu doświadczeń.

W zależności od materiału, wielkości naprężeń i temperatury czas zniszczenia może wynosić od kilku minut a nawet sekund do setek tysięcy godzin.

Dlatego doświadczenia nad pełzaniem odbywają się w bardzo rozmaitych czasach w zależności od celu tych eksperymentów. Tak więc materiały stosowane w lotnictwie wykorzystuje się w konstrukcjach obliczonych na krótki okres trwania; czasokres ich badań jest zwykle niewielki i wynosi kilkadziesiąt godzin. Materiały na stałe turbiny parowe są badane w ciągu możliwie długiego czasu, przez kilka tysięcy godzin, przy czym czas doświadczeń bywa zawsze znacznie krótszy od czasu «życia» turbin.

Materiały stosowane w turbinach parowych przy stosunkowo niewielkich naprężeniach i długim okresie trwania wykazują, jak być powinno, bardzo długi okres (drugiego) pełzania; wykres na rys. 1 będzie dla przykładu wyglądał tak, jak to przedstawiono na rys. 2. Duża część odkształcenia odbywa się ze stałą prędkością

$$[\dot{\epsilon}]_{min} = v(\sigma).$$

Dla wyrażenia zależności najmniejszej prędkości pełzania od naprężenia przy danej temperaturze różni autorzy proponowali rozmaite wzory empiryczne, jak np.

$$v = A\sigma^n, \quad v = B \exp(k\sigma), \quad v = B \operatorname{sh}(k\sigma), \\ v = B\sigma \exp(k\sigma), \quad v = B[\exp(k\sigma) - 1].$$

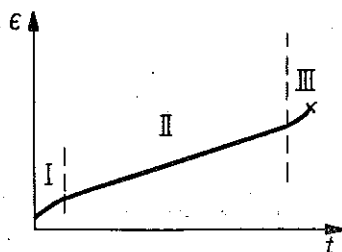
Trzy ostatnie wzory podają wyniki mało różniące się od wyników otrzymywanych na podstawie wzoru drugiego, jeśli $k\sigma \gg 1$; przy małych naprężeniach prawo eksponencjalne, podane przez drugi wzór, jest mało przydatne, ponieważ wynika z niego, że $v \neq 0$ przy $\sigma = 0$.

Do niedawna konstruktorzy przy obliczeniach brali pod uwagę pełzanie z dużymi zastrzeżeniami. Zasadniczym celem badania materiału na pełzanie było określenie tak zwanej «granicy pełzania». Przez granicę pełzania należy rozumieć naprężenie, przy którym w danym czasie t otrzymuje się wydłużenie ϵ^* . Wielkość ϵ^* zwykle przyjmuje się równą jednemu procent, czas dla materiałów do budowy turbin stałych może wynosić 100000 godzin, dla materiałów stosowanych w lotnictwie zwykle przyjmuje się 100 godzin. Przy niedużym czasie τ granica pełzania σ_n określa się bezpośrednio z krzywych pełzania, jeśli jednak czas badania jest mniejszy niż τ , trzeba się uciec do ekstrapolacji. Jeśli krzywa pełzania podobna jest do krzywej przedstawionej na rys. 2, to w przybliżeniu

$$\epsilon^* = v\tau.$$

Znając zależność minimalnej prędkości od naprężenia można określić granicę pełzania dla dowolnych wartości τ i ϵ^* .

Takie określenie przedziału pełzania opiera się na przypuszczeniu, że stała szybkość pełzania utrzymuje się w bardzo długim okresie czasu. Czas trwania badań należy tak dobierać, aby otrzymać dostatecznie pewny początek odcinka



Rys. 2

prostej i określić jej nachylenie. Doświadczenie uczy, że dla tego celu konieczne są badania w czasie od 2000 do 5000 godzin.

Należy zauważyć, że taka prostoliniowa ekstrapolacja krzywych pełzania w czasie rzędu 50000-100000 godzin jest przybliżona, a jej wartość bardzo względna. Dlatego też konieczne są badania w czasie takiego samego rzędu. Dotychczasowe dane co do długości czasu badań, opublikowane w literaturze, są bardzo nieliczne. W stopach, znajdujących się przez długi czas w wysokich temperaturach, zwykle zachodzą różnego rodzaju zmiany strukturalne — sferoidyzacja cementytu, wypadanie nowych faz itd. Te zmiany mogą odbić się na przebiegu krzywych pełzania i doprowadzić do całkiem nieoczekiwanych wyników. Okazuje się więc, że przy badaniu długotrwałego pełzania nie wystarcza czysto fenomenologiczny punkt widzenia, właściwy mechanikom.

2. Jeśli w danej temperaturze wykonana jest seria krzywych pełzania dla różnych naprężeń, to można napisać równanie tych krzywych:

$$(2.1) \quad \epsilon = f(\sigma, t).$$

Oczywiście równanie powyższe nie wyraża prawa fizycznego, interpretuje tylko wyniki badań, przeprowadzonych w całkowicie określonych warunkach, mianowicie przy stałej wartości naprężenia. Mając serię krzywych pełzania albo jakiegokolwiek empiryczne wyrażenie dla zależności (2.1) nie możemy jeszcze nic powiedzieć o tym, w jaki sposób będzie przebiegał proces pełzania przy naprężeniu zmiennym. Aby odpowiedzieć na powyższe pytanie, trzeba koniecznie znać mechaniczną teorię pełzania; to jest prawo, wiążące naprężenie, odkształcenie i czas, słuszne dla dowolnego przebiegu odkształcenia i obciążenia.

Poniżej podajemy podstawowe teorie pełzania, stosowane przy obliczeniach.

A. Teoria starzenia. Zgodnie z tą teorią równanie (2.1) posiada znaczenie uniwersalne, wyraża prawo fizyczne, słuszne również dla obciążeń zmiennych. Można wykazać zasadniczą bezpodstawność tej teorii, która daje wyniki jaszkrawo sprzeczne z doświadczeniem wtedy, gdy obciążenie zmienia się nagle. Jednakże przy łagodnie zmieniających się obciążeniach przewidywania oparte na tej teorii są bliskie rzeczywistości. Znalazła też ona szerokie zastosowanie w praktyce z powodu swej prostoty i wygody stosowania w obliczeniach.

B. Teoria płynięcia. Ta teoria podobnie jak poprzednia wprowadza zależność od czasu w wyraźnej postaci

$$(2.2) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + f_1(\sigma, t).$$

W taki sposób przypuszcza się, że w materiale zachodzą pewne procesy doprowadzające do zmiany prędkości pełzania i przebiegające niezależnie od rodzaju odkształcania. Takie domniemanie nie odpowiada rzeczywistości;

nie zmieniający swej struktury materiał może się znajdować w temperaturze badania bez obciążenia nieskończenie długo i krzywa pełzania z jej charakterystycznymi osobliwościami nie zależy od długotrwałości uprzedniego obciążenia. Metody obliczeń na podstawie tej teorii zostały rozwinięte głównie dzięki pracom Ł. M. KACZANOWA. Z naszego punktu widzenia teoria płynięcia nie jest zasadniczo lepsza od teorii starzenia, a w zastosowaniach praktycznych jest niepomiarowo bardziej skomplikowana.

C. Teoria N. M. Bielajewa. Teoria BIELAJEWA została sformułowana w 1943 r., [2]. Niewiele różni się ona od teorii płynięcia. Podstawowa idea teorii BIELAJEWA polega na tym, że fizyczną i doświadczalną pewność posiada tylko zależność między naprężeniami i odkształceniami, a nie między naprężeniami i prędkościami odkształcenia. Zgodnie z tym podstawowe równanie teorii BIELAJEWA ma następującą postać:

$$(2.3) \quad \epsilon = \sigma \left[\frac{1}{E} + \int_0^t \frac{f_1(\sigma, t)}{\sigma} dt \right].$$

Przy stałym naprężeniu prowadzi ono do tej samej zależności prędkości pełzania od naprężenia i czasu co teoria płynięcia i starzenia (polegająca na tym, że odpowiednie równania nie są niezmiennicze odnośnie zmiany początku odczytywania czasu); związki te utrzymują się w mocy również tutaj. Teoria N. M. BIELAJEWA została następnie rozwinięta w pracach N. N. MALININA, [3], któremu udało się przy jej zastosowaniu rozwiązać szereg zagadnień.

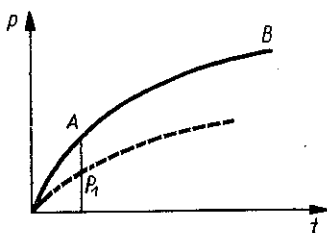
D. Teoria wzmocnienia. Hipoteza o istnieniu równania stanu, wiążącego naprężenie, odkształcenie i prędkość odkształcenia, była opracowana najpierw przez LUDWIGA a następnie rozwinięta przez NÁDAIA. Tutaj podamy nieco dokładniejsze sformułowanie tej hipotezy. Niech $\epsilon = \psi(\sigma)$ będzie równaniem krzywej odkształcenia natychmiastowego (doraźnego). W obszarze sprężystym $\psi(\sigma) = \sigma/E$. Ścisłe biorąc dla obszaru plastycznego nie można otrzymać krzywej $\epsilon = \psi(\sigma)$. Odkształcenie zawsze dokonuje się z końcową prędkością, a więc towarzysząc pełzaniu. Jednakże dla zwykłych materiałów i niezbyt wysokich temperatur ta krzywa tylko nieznacznie różni się od krzywej rozciągania statycznego, otrzymanej na maszynie typu zwykłego. Odkształcenie pełzania $p = \epsilon - \psi(\sigma)$. Hipotezę wzmocnienia formułuje się w sposób następujący:

$$(2.4) \quad \Phi(p, \dot{p}, \sigma, T) = 0.$$

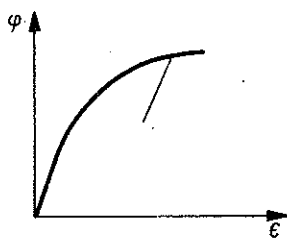
Tutaj T oznacza temperaturę.

Różnica pomiędzy uzasadnianym tutaj punktem widzenia, a punktem widzenia ogólnie przyjętym polega na tym, że wartość p , uwidoczniiona w równaniu stanu, przedstawia nie pełne odkształcenie plastyczne, a tylko odkształcenie pełzania. Fizyczne podstawy do takiego wyłączenia natychmiastowego odkształcenia plastycznego polegają na tym, że przy odkształceniu plastycznym

posunięcie jest umiejscowione w układzie płaszczyzn poślizgu, wtedy gdy tymczasem pełzanie przebiega bardziej lub mniej równomiernie w całym ciele. Ten punkt widzenia uzasadnia się następującym doświadczeniem. Wyobraźmy sobie badanie pełzania przy stosunkowo niewielkich naprężeniach, kiedy początkowe odkształcenia można uważać za sprężyste (rys. 3). Odkładamy na osi współrzędnych tylko odkształcenie plastyczne p . Kiedy odkształcenie osiągnie pewną wartość p' , przerwiemy badanie, odciążymy model, a następnie wznowimy je przykładając ponownie takie samo naprężenie. Krzywa pełzania materiału wzmocnionego takim sposobem przedstawia przedłużenie początkowej krzywej pełzania; otrzymamy ją, jeśli część krzywej AB przeniesiemy równolegle obok, tak żeby punkt A połączyć z początkiem współrzędnych (na rys. 3 przedłużenie powyższe przedstawia linia przerywana). Wynika to z równania stanu i jest potwierdzone doświadczeniem. Weźmy teraz pod uwagę nową próbkę i wytwórzmy w niej szybkim rozciąganiem odkształcenie pla-



Rys. 3



Rys. 4

styczne równe p' , po czym pozostawmy próbkę w takich samych warunkach pełzania jak w pierwszym doświadczeniu. Okazuje się, że krzywa pełzania próbki odkształconej pokrywa się z krzywą pełzania modelu nieodkształconego, a nie przedłuża krzywej przerywanej, jakby to wynikało z teorii wzmocnienia, jeśli przez p rozumieć w podstawowym równaniu tej teorii odkształcenie plastyczne bez względu na to, w jaki sposób ono powstało. Tym sposobem krótkotrwałe odkształcenie plastyczne nie wzmacnia materiału z punktu widzenia pełzania.

Liczne doświadczenia zarówno naszego laboratorium, jak również innych (por. np. [4]) wykazują, że teoria wzmocnienia prawidłowo przedstawia proces pełzania w tych przypadkach, gdy stosować ją do materiałów o stałej strukturze dla niezbyt długich czasów.

E. Teoria plastycznej dziedziczności. Ta teoria jest rozwinięciem znanej sprężystej teorii dziedziczności V. VOLTERRI, [5], [6]. Podobnie jak sprężysta teoria dziedziczności bada liniowo odwracalny proces następstwa na podstawie liniowego wykresu zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem przy natychmiastowym odkształceniu, tak teoria plastycznej dziedziczności przyjmuje za podstawę krzywą doświadczalną odkształcenia natychmiastowego

$\sigma = \varphi(\epsilon)$, jeśli odkształcenie wzrasta. Przy odkształceniu, które się zmniejsza, słuszne jest prawo liniowego odciążenia, mianowicie

$$\sigma = \varphi' - (\epsilon' - \epsilon)E = \bar{\varphi}(\epsilon).$$

Tutaj φ' i ϵ' są współrzędnymi punktów na krzywej odkształcenia natychmiastowego, od której rozpoczyna się odciążenie (rys. 4).

Podstawowe równanie teorii ma następującą postać:

$$(2.5) \quad \varphi(\epsilon) = \sigma + \int_0^t k(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

W przypadku odciążenia, to jest zmniejszenia się odkształcenia, funkcję φ należy zastąpić przez $\bar{\varphi}$.

Jądro dziedziczności $k(t-\tau)$ określa się na podstawie doświadczenia. Jeśli przyjmując jądro w postaci

$$k(t-\tau) = c(1+a)(t-\tau)^a,$$

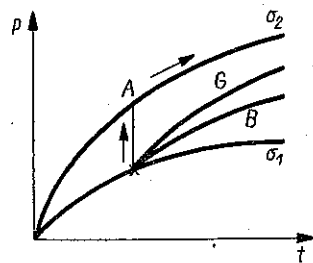
to przy stałym naprężeniu otrzymamy

$$(2.6) \quad \varphi(\epsilon) = \sigma(1+ct^{1+a}).$$

Krzywa natychmiastowego odkształcenia ze znanym przybliżeniem może być utożsamiona z krzywą rozciągania na zwykłej maszynie do badań; dla określenia stałych c i a wystarczy jedna krzywa przy dowolnym naprężeniu. Następnie według równania (2.6) można zbudować pełną serię krzywych pełzania. Sprawdzenie tej możliwości zostało przeprowadzone w pracy [7]. Pewne dane wynikające z kontroli równania (2.6), dokonanej przez innych autorów na materiale doświadczalnym, zostały podane w pracy [8].

W celu porównania różnych teorii pełzania rozpatrzmy schemat prostego doświadczenia, polegającego na tym, że badanie pełzania odbywa się na początku przy naprężeniu σ_1 , a następnie w pewnej chwili naprężenie zwiększa się do σ_2 . Krzywe pełzania przy naprężeniach σ_1 i σ_2 uważa się za znane (rys. 5). Chwila, w której naprężenie zwiększa się do wartości σ_2 , jest oznaczona krzyżykiem na krzywej pełzania dla naprężenia σ_1 . Zgodnie z teorią starzenia (A) przy zwiększeniu naprężenia powinniśmy z początku przejść na drugą krzywą; w chwili przyłożenia dodatkowego obciążenia następuje natychmiastowe odkształcenie tym większe, im później zmieniamy obciążenie, a zatem im bardziej rozchodzą się krzywe. Jest to oczywiście niemożliwe i łatwe do wykazania na podstawie doświadczenia.

Zgodnie z teorią płynięcia (B) przy zwiększeniu obciążenia w pierwszej chwili odkształcenie nie zmienia się, tylko prędkość staje się taka, jaka odpowiada drugiej krzywej dla danej chwili. Żeby otrzymać przedłużenie krzywej



Rys. 5

pełzania, należy po prostu przenieść drugą krzywą pionowo w dół tak, aby przeszła przez punkt oznaczony krzyżykiem.

Według teorii pełzania N. M. BIELAJEWA otrzymuje się wynik pośredni; przy zmianie obciążenia następuje natychmiastowy wzrost odkształcenia w stosunku równym stosunkowi naprężeń. Dalszy przebieg krzywej przedstawia się tak samo jak przy teorii płynięcia.

Zgodnie z teorią wzmocnienia przedłużeniem krzywej pełzania po zwiększeniu obciążenia jest druga krzywa poczynając od punktu odpowiadającego punktowi osiągniętemu w chwili dociążenia. Następnie drugą krzywą należy przemieścić poziomo tak, żeby przeszła przez punkt oznaczony krzyżykiem.

Teoria dziedziczności w tym przypadku nie doprowadza do prostych i naocznych wyników; przebieg krzywej pełzania po zwiększeniu obciążenia należy obliczać wykorzystując analityczną aproksymację funkcji φ i $k(t-\tau)$.

Doświadczenia przeprowadzone przez nas na próbkach miedzianych, a także inne doświadczenia, [9], wykazują, że przewidywania dwu ostatnich teorii dają wyniki wystarczająco zgodne z eksperymentem.

Jednym z przejawów pełzania jest tak zwana relaksacja, tj. spadek naprężenia z upływem czasu w próbce, której długość pozostaje stała. Nie można znaleźć przykładu takiego zagadnienia technicznego, w którym relaksacja obserwowana jest w postaci czystej, toteż doświadczenie w zakresie relaksacji czystej jest w zasadzie niemożliwe. Jednakże warunki zbliżone do warunków czystej relaksacji można spotkać dość często i istnieją schematy doświadczeń odtwarzające te warunki z większą lub mniejszą dokładnością. Każda z rozpatrzonych teorii pełzania stwarza możliwość obliczania krzywej relaksacji, jeśli istnieje seria krzywych pełzania dla stałego obciążenia. Teoria wzmocnienia daje przy tym wyniki bardzo zbliżone do wyników rzeczywistych dla procesów niezbyt długotrwałych i dla materiałów o stałej strukturze. Z uwagi na trudności obliczeniowe nie próbowaliśmy zastosować do zagadnienia relaksacji teorii dziedziczności.

Zatrzymamy się teraz na kilku aproksymacjach prawa pełzania, u których podstawy leży idea przyjęcia, poczynając od pewnej chwili, stałej prędkości pełzania. Zamieniając krzywą pełzania linią prostą przechodzącą przez początek współrzędnych otrzymamy

$$(2.7) \quad \dot{\epsilon} = v(\sigma).$$

Jeśli wziąć pod uwagę początkowe odkształcenie sprężyste, to równanie pełzania będzie miało następującą postać:

$$(2.8) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + v(\sigma).$$

Równanie (2.8) było stosowane przez wielu autorów przed kilku laty. Nie jest ono lepsze od równania (2.7), ponieważ odkształcenie sprężyste jest nieznaczne w porównaniu z odkształceniem pierwszego okresu pełzania. W od-

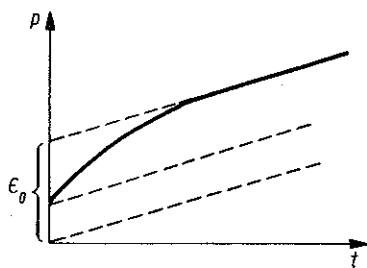
różnieniu od równania (2.7) równanie (2.8) pozwala na otrzymanie krzywej relaksacji, ale rozbieżność pomiędzy krzywą otrzymaną w ten sposób a krzywą doświadczalną jest bardzo duża.

Stosunkowo niedawno ODQUIST, [10], zaproponował przedłużenie prostoliniowej części krzywej pełzania do przecięcia z osią rzędnych i zapisywanie podstawowego prawa pełzania w następującej postaci:

$$(2.9) \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0(\sigma) + v(\sigma).$$

Wielkość ϵ_0 określająca odkształcenie pierwszego okresu pełzania jest jakby natychmiastowym odkształceniem. Praktycznie rzecz biorąc funkcję ϵ_0 podobnie jak i v należy traktować jako potęgi naprężeń z różnymi wykładnikami.

Nasze prace poświęcone były głównie doświadczalnemu sprawdzeniu, rozwinięciu i zastosowaniu teorii wzmocnienia, dlatego zatrzymamy się na pewnych zjawiskach, które nie mieszczą się w ramach tej teorii. Przede wszystkim



Rys. 6

kim więc wspomniemy o wznowieniu pełzania. W próbce odciążonej po okresie pełzania najpierw następuje odkształcenie sprężyste, potem zaś powolne skracanie. Ten efekt jest nieznaczny i nie ma większego znaczenia praktycznego, jednak nie można go przewidzieć opierając się na zasadach teorii wzmocnienia. Teoria dziedziczności daje dla tego zjawiska przynajmniej objaśnienie jakościowe, [8]. Drugi efekt wtórny, to czasowe powstrzymanie pełzania przy niewielkim zmniejszeniu obciążenia. Dla zagadnień stateczności może on nie być istotny, mieści się całkowicie w ramach teorii dziedziczności pełzania i można go obliczyć za pomocą równania stanu przy doborze pewnego szczególnego prawa wzmocnienia, [10]. Otrzymanie tym sposobem zadowalających wyników liczbowych wydaje się rzeczą trudną. Przy obliczeniach naprężeń i odkształceń w elementach konstrukcyjnych przy łagodnie zmieniających się obciążeniach (jak to bywa np. w elementach turbin) wspomnianych wyżej efektów można nie brać pod uwagę.

W celu opisanego okresu pełzania nieustalonego, to jest pierwszego odcinka krzywej pełzania, dogodna jest następująca aproksymacja prawa wzmocnienia:

$$(2.10) \quad \dot{p}p^a = f(\sigma).$$

Co się tyczy funkcji $f(\sigma)$, to można ją przyjąć jako funkcję potęgową lub jako funkcję wykładniczą:

$$(2.11) \quad f(\sigma) = B\sigma^k,$$

$$(2.12) \quad f(\sigma) = k \exp \frac{\sigma}{A}.$$

Wolimy korzystać ze wzoru (2.12) nie zamieniając funkcji wykładniczej sinusem hiperbolicznym ani inną funkcją, chociaż z góry wiadomo, że dla małych wartości σ wzór (2.12) jest nieodpowiedni. Można wykazać, że funkcja $f(\sigma)$ przy małych wartościach argumentu powinna zachować się jak σ^m , przy czym $m \gg 1+a$, [12]. Na przykład w zagadnieniach związanych z obliczaniem elementów turbin naprężenia są wszędzie dostatecznie duże, dlatego wykładnicze wyrażenie dla funkcji można niewątpliwie stosować. Jeśli naprężenie zmienia znak, to w cieple istnieje obszar małych naprężeń, jak np. w pobliżu warstwy obojętnej przy zginaniu. Jednakże dokładna znajomość wartości tych naprężeń zgoła nie jest potrzebna, ponieważ w zagadnieniu zginania w znikomym stopniu wpływają one na wartość momentu zginającego. Rozpatrywania tych naprężeń można uniknąć za pomocą pewnego sztucznego założenia, o którym będzie mowa w dalszej części pracy. Przytoczone wyżej równania teorii wzmocnienia są stosowane nie tylko do rozciągania, ale także do ściskania, jeśli rozumieć przez p i σ bezwzględne wartości odkształcenia pełzania i odpowiednio naprężenia. Zwykle przy obliczeniach pełzania przewiduje się, że własności materiału przy rozciąganiu i ściskaniu są jednakowe, co zresztą potwierdzają nieliczne stosunkowo doświadczenia. W ogóle danych o pełzaniu przy ściskaniu jest niewiele i w tym zakresie konieczne są dalsze dodatkowe badania.

Stałe pełzania a , B i h albo a , k i A zmieniają się w zależności od temperatury, przy czym, jeśli korzystać z równania (2.12), wartość k szczególnie silnie zależy od temperatury. Jeśli zgodzić się na pewne nieznaczne odstępstwo od danych doświadczalnych, to w określonej skali temperatur wartości a i A można uważać za stałe. To pozwala na wprowadzenie do rozważań wspomnianego już wcześniej czasu, określonego w następujący sposób:

$$\theta = \int_0^t \frac{k}{k_0} dt.$$

Przy tym założeniu równanie (2.10) po uwzględnieniu (2.12) można napisać w postaci:

$$(2.13) \quad p'p^a = k_0 \exp \frac{\sigma}{A}.$$

Tutaj kresciczka przy symbolu p oznacza różniczkowanie względem θ , stałe natomiast nie zależą od temperatury i równanie (2.13) jest słuszne dla tempe-

ratur zmiennych. DOORN opierając się na doświadczeniach z metalami czystymi przyjął

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right).$$

Tutaj ΔH jest energią aktywności, R stałą gazową, T temperaturą w skali KELVINA. Wykonane przez nas doświadczenia wykazały, że podobna zależność jest słuszna tylko dla określonego zakresu temperatur, wykładnik α i współczynnik A zależą od temperatury.

Jeśli pełzanie odbywa się w zakresie sprężystych odkształceń natychmiastowych, to $p = \epsilon - \sigma/E$. Wprowadźmy wartości bezwymiarowe:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{A}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{E\epsilon}{A}, \quad \bar{p} = \frac{Ep}{A}, \quad \tau = k\left(\frac{E}{A}\right)^{1+\alpha} t.$$

Przyjmijmy też $1/(1+\alpha) = m$. Wtedy podstawowe prawo pełzania ma postać:

$$\dot{\bar{p}} \bar{p}^{\alpha} = \exp \bar{\sigma}.$$

Równanie krzywych pełzania przy obciążeniu stałym przedstawia się w sposób następujący:

$$\bar{p} \left(\frac{\tau}{m} \exp \bar{\sigma} \right)^m,$$

a równanie relaksacji

$$(2.14) \quad \bar{\sigma} = \bar{\epsilon}_0 - \chi^{-1} [\chi(\bar{p}_0) + \tau \exp \bar{\epsilon}_0],$$

gdzie

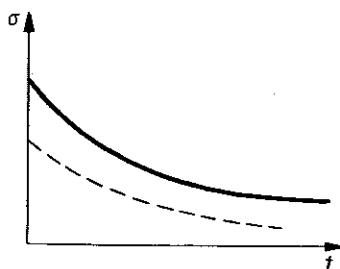
$$\chi(u) = \int_0^u u^{\alpha} \exp u \, du.$$

W równaniu relaksacji została uwzględniona możliwość tego, że relaksację poprzedzało pełzanie; wielkość p_0 wchodząca do równania jest odkształceniem pełzania, jakie powstało w ciele do chwili rozpoczęcia się relaksacji. Wzór (2.14) również w tym przypadku ma dobre potwierdzenie doświadczalne. Jeśli w wyniku krótkotrwałego rozciągania wywołać takie samo początkowe odkształcenie plastyczne \bar{p}_0 , to krzywa relaksacji jest taka sama jak przy $\bar{p}_0 = 0$, [4]. To dodatkowo potwierdza nasze przekonanie o konieczności oddzielenia natychmiastowego odkształcenia plastycznego od odkształcenia pełzania.

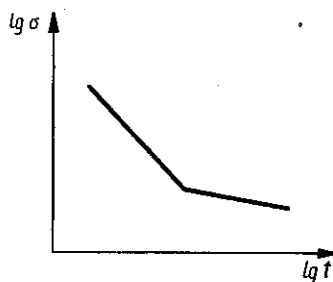
W Instytucie Mechaniki Akademii Nauk ZSRR sprawdzano również doświadczalnie możliwość przewidywania wpływu zmiany temperatury na podstawie teorii wzmocnienia, [13]. Zostało skonstruowane specjalne urządzenie, zmieniające temperaturę według prawa sinusoidalnego z okresem około jednej godziny i z amplitudą 25° . W przedziale temperatury 50° wartości α i A można uważać za stałe. Zmiana współczynnika k wraz z temperaturą

zachodzi z dostateczną dokładnością według prawa przedstawionego przez DOORNA, zatem równanie (2.13) jest równaniem prawdziwym. Obliczenie krzywej pełzania przy danym prawie zmiany temperatury za pomocą tego równania nie przedstawia trudności. Obliczona krzywa dokładnie pokrywa się z krzywą doświadczalną.

3. W procesie pełzania wewnątrz metalu powstają mikroskopijne rysy, które rosną łącząc się z sobą i doprowadzają do zniszczenia. Przy małych naprężeniach i co za tym idzie po dłuższym czasie zniszczenie nie towarzyszy odkształceniu plastycznemu, możliwemu do zauważenia, i ma charakter zewnętrzznego zniszczenia kruchej. Badania wzmocnienia długotrwałego (trwałego) są realizowane podobnie jak badania pełzania, nie ma przy tym jednak konieczności mierzenia odkształceń w przebiegu badania, dlatego jego organizacja jest prostsza. Wyniki tych doświadczeń przedstawia się w postaci krzywych wzmocnienia długotrwałego (rys. 7). Na osi rzędnych odkłada się



Rys. 7



Rys. 8

naprężenia, na osi odciętych czas do chwili zniszczenia. Jeśli równocześnie zrobimy wykres zależności odkształcenia (przy którym następuje zniszczenie) od czasu, to charakter zależności jest taki sam: przez zwiększenie czasu do chwili zniszczenia odkształcenie zmniejsza się w chwili zniszczenia (odpowiedni wykres na rys. 7 przedstawiono linią przerywaną). We współrzędnych logarytmicznych krzywa wzmocnienia długotrwałego składa się z dwu linii prostych, przecięcie ich odpowiada przejściu od zniszczenia wewnątrz krystalicznego do zniszczenia między krystalicznego. Za pomocą tego wykresu przeprowadza się (rys. 8) ekstrapolację danych parametrów wzmocnienia długotrwałego. Żeby ekstrapolację uczynić dokładną, trzeba koniecznie mieć dane na podstawie dostatecznie długich badań, aby [drugi prostoliniowy odcinek był dostatecznie wyraźny. Mając krzywe wzmocnienia długotrwałego można przewidzieć okres trwałości obiektu, [znajdującego się pod działaniem naprężenia stałego. W wyniku badań określa się zwykle tzw. granicę wzmocnienia długotrwałego, σ_{dw} , to jest naprężenia, przy którym zniszczenie następuje po upływie danego czasu τ . W zależności od czasu τ granicę długotrwałego wzmocnienia znajdujemy albo bezpośrednio według krzywej doświadczalnej,

albo na podstawie ekstrapolacji tej krzywej. Jednakże krzywa wzmocnienia długotrwałego, otrzymana w wyniku badań przy naprężeniach stałych, nie pozwala odpowiedzieć na pytanie w sprawie okresu trwałości obiektu, na który działają obciążenia zmienne albo też, co bywa zwykle w warunkach pełzania, przy obciążeniu stałym naprężenia rozkładają się z biegiem czasu. Dlatego jest rzeczą konieczną sformułowanie pewnej zasady sumowania działania obciążeń zmiennych. Najpierw rozpatrzmy przypadek, kiedy obciążenia są duże, prędkość pełzania również duża i proces odkształcenia postępuje znacznie szybciej aniżeli proces zwiększania się rysy. Wtedy zniszczenie ma charakter plastyczny, towarzyszy mu znaczne wydłużenie i podstawowy czynnik, określający czas zniszczenia, to zmniejszenie przekroju poprzecznego i wzrost naprężeń prowadzący do zwiększenia szybkości pełzania. Elementarną analizę zniszczenia tego rodzaju przeprowadził HOFF, [14]. Pomijając odkształcenie sprężyste i odkształcenie pierwszej części odcinka krzywej pełzania możemy uważać, że przy stałym naprężeniu prędkość pełzania jest stała:

$$\dot{\epsilon} = v(\sigma).$$

Jednak przy odkształceniu skończonym $\dot{\epsilon} = \dot{x}/x$, gdzie x jest bieżącą długością pręta. Dlatego jako miarę odkształcenia należy przyjąć odkształcenie logarytmiczne $\epsilon = \ln x/x_0$. Z warunku stałej objętości mamy

$$Fx = F_0x_0.$$

Stąd

$$F = F_0 \frac{x_0}{x}, \quad \sigma = \frac{p}{F} = \sigma_0 \exp \epsilon;$$

tutaj σ_0 jest naprężeniem odniesionym do początkowego pola przekroju poprzecznego. W ten sposób otrzymujemy równanie:

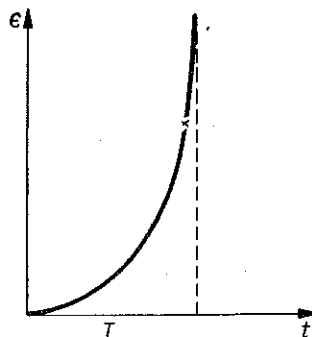
$$(3.1) \quad \dot{\epsilon} = v(\sigma_0 \exp \epsilon).$$

Jeśli przyjąć $v(\sigma) = A\sigma^n$, to zmienne rozdzielają się i otrzymujemy

$$\exp(-n\epsilon)d\epsilon = A\sigma_0^n.$$

Całka lewej części, wzięta w przedziałach od $\epsilon = 0$ do $\epsilon = \infty$ ma wartość skończoną, równą $1/n$, w ten sposób w czasie końcowym pręt wyciągnie się do nieskończoności, a więc ulegnie zniszczeniu. Równanie krzywej długotrwałego wzmocnienia jest następujące:

$$T = \frac{1}{nA\sigma_0^n}.$$



Rys. 9

Krzywa pełzania, określona równaniem (3.1), będzie dla przykładu wyglądała tak, jak to przedstawiono na rys. 9. Faktyczne zniszczenie wskutek rozerwania następuje w punkcie tej krzywej, oznaczonym krzyżykiem, jednak

z powodu szybkiego podniesienia się tej krzywej na odcinku końcowym czas rozerwania będzie bardzo mało różnił się od czasu T , odpowiadającego nieskończenie dużej wartości odkształcenia. Przyjmijmy teraz, że do próbki zostało przyłożone obciążenie zmienne w ten sposób, że σ_0 jest funkcją czasu. Zniszczenie nastąpi wtedy, kiedy będzie

$$(3.2) \quad \int nA\sigma_0^n dt = 1.$$

Ale $nA\sigma_0^n = 1/T(\sigma_0)$, gdzie $T(\sigma_0)$ jest czasem przed zniszczeniem, odpowiadającym danej wartości σ_0 . Powyższy wzór można napisać w następującej postaci:

$$(3.3) \quad \int \frac{dt}{T(\sigma_0)} = 1.$$

Równanie (3.3) przedstawia tzw. zasadę liniowego sumowania osłabienia. Niech będzie dana krzywa długotrwałego wzmocnienia materiału; jeśli do próbki z tego materiału przykładać w dowolnej kolejności takie obciążenia, że dla każdego z nich naprężenie umowne, odniesione do początkowej płaszczyzny przekroju wyniesie σ_{0i} , a czas działania t_i , to dla każdego z tych naprężeń według wykresu długotrwałego wzmocnienia można znaleźć czas potrzebny do zniszczenia T_i , odpowiadający danemu naprężeniu. Otrzymuje się przy tym następujący warunek zniszczenia:

$$\sum \frac{t_i}{T_i} = 1.$$

Rozpatrzony sposób oceny wzmocnienia długotrwałego jest stosowany tylko do dużych obciążeń i dla materiałów plastycznych. Inny krańcowy przypadek — to niszczenie długotrwałe, któremu towarzyszy kruszenie, powstające kosztem rozwoju rys bez zauważalnego odkształcenia plastycznego. Przyjmijmy, że w poprzecznym przekroju próbki powstały i powiększają się mikro-rysy tak, że w danej chwili odpowiednim polem ich powierzchni jest ω (na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego). Wtedy rzeczywiste naprężenie $\sigma = \sigma_0/(1-\omega)$. Będziemy przyjmować, że prędkość brzegu rysy u jest funkcją rzeczywistego naprężenia σ oraz że wszystkie rysy mają postać kołową. Wtedy $\omega = \pi \rho^2$, gdzie ρ jest promieniem rysy (wniosek jest niezależny od tego, czy rozpatrujemy jedną, czy wiele rys). Szybkością zmiany pola powierzchni rysy jest $d\omega/dt = \omega^{1/2}u$ (stały czynnik łączymy z wielkością u ; ponieważ wielkości tej nie możemy określić na podstawie zwykłych pomiarów, znajdujemy ją drogą pośrednią w wyniku opracowania danych długotrwałego wzmocnienia). W ten sposób otrzymujemy następujące równanie, określające zmianę względną pola powierzchni rysy:

$$\dot{\omega} = \omega^{1/2}u \left(\frac{\sigma_0}{1-\omega} \right).$$

Jeśli $u(\sigma)B\sigma^m$, to zmienne rozdzielają się i otrzymujemy

$$(1 - \omega)^m \omega^{-1/2} d\omega = B\sigma_0^m dt.$$

Lewą część należy całkować od $\omega = 0$ do $\omega = 1$, kiedy rysy znajdują się na całym przecięciu. Ta całka będzie zawsze skończona, oznaczymy ją przez $1/k$. Wtedy warunek zniszczenia w ogólnym przypadku ma postać

$$\int k B \sigma^m dt = 1.$$

Ten warunek różni się od wzoru (3.2) wartościami stałymi. Wynika z niego zasada liniowego sumowania uszkodzeń pomimo tego, że w obu rozpatrzonych przypadkach przewidywano istotnie różne mechanizmy zniszczenia. Zarówno w jednym jak i w drugim przypadku oczywiście podejście jest jednostronne, nie uwzględniliśmy bowiem wpływu pełzania na tworzenie się rys i na odwrót wpływu rys na pełzanie. Przy drugim podejściu przyjmowano, że pierwotne mikrorysy istniały od samego początku, natomiast nie liczone się z możliwością powstawania nowych rys w przebiegu pełzania.

4. Przy formułowaniu równań przedstawiających proces pełzania w złożonym stanie naprężenia jest rzeczą słuszną przyjąć za punkt wyjścia równania teorii plastyczności. W teorii plastyczności istnieją dwa zasadnicze punkty widzenia na sformułowanie podstawowych równań; pierwszy punkt widzenia prowadzi do równań typu odkształceniowego, drugi leży u podstaw tak zwanej teorii płynięcia.

Rozpatrzmy najpierw odkształceniową teorię plastyczności. Wyjdziemy z zależności między naprężeniami i odkształceniami dla sprężystego ciała izotropowego, które opiera się na prawie HOOKE'A. Dla ogólnego stanu naprężenia mamy:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], & \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}. \end{cases}$$

Z powyższych równań wynika:

$$(4.2) \quad \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

W teorii sprężystości wartości E i ν , moduł sprężystości i współczynnik POISSONA, są traktowane jako wartości stałe. W odkształceniowej teorii plastyczności symbole E i ν występują jako wartości zmienne, zależne od stopnia odkształcenia. Lewa część równania (4.2) jest względną zmianą objętości.

Dane doświadczalne upewniają o tym, że również przy odkształceniu plastycznym zmiana objętości ma charakter sprężysty, zatem wyrażenie $(1-2\nu)/E$ przedstawia stałą. Oznaczmy tę stałą przez $1/k$ i przyjmiemy

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\epsilon, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma.$$

Wtedy równość

$$\epsilon = \frac{\sigma}{k},$$

mającą zastosowanie zarówno dla sprężystych jak i dla plastycznych odkształceń, przedstawia prawo HOOKE'A dla odkształcenia objętościowego.

Obliczmy teraz z lewej części pierwszego równania (4.1) wartość ϵ , a z prawej równą jej wartość σ/k . Otrzymamy po uporząkowaniu

$$\epsilon_x - \epsilon = \frac{1}{2\sigma} (\sigma_x - \sigma).$$

Tutaj $G = E/2(1+\nu)$ jest modułem KIRCHHOFFA. Wartości $\sigma_x - \sigma$, $\sigma_y - \sigma$, $\sigma_z - \sigma$, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} są składowymi tensora, zwanego dewiatorem tensora naprężenia. Analogicznie wartości

$$\epsilon_x - \epsilon, \quad \epsilon_y - \epsilon, \quad \epsilon_z - \epsilon, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{zx}$$

są składowymi dewiatora odkształcenia. W dalszym ciągu będziemy posługiwali się oznaczeniami w postaci indeksów dla składowych tensorów i będziemy oznaczali dewiator tymi samymi literami co i tensor podstawowy, dodając tylko kreseczkę nad literą.

Zależności (4.1) przyjmują teraz następującą postać:

$$(4.3) \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}.$$

W obszarze sprężystym $G = G_0$ jest wartością stałą, w obszarze plastycznym jest wartością zmienną. Przy wzmocnieniu izotropowym może ona zależeć tylko od niezmienników tensora $\bar{\sigma}_{ij}$ albo $\bar{\epsilon}_{ij}$. W teorii plastyczności przyjmuje się, że G zależy tylko od kwadratowego niezmiennika tensora $\bar{\sigma}_{ij}$ lub $\bar{\epsilon}_{ij}$. Te niezmienniki kwadratowe określa się w następujący sposób:

$$\Sigma = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{ij}, \quad E = \bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}.$$

Z równań (4.3) wynika

$$(4.4) \quad E = \frac{1}{4G} \Sigma.$$

Zamiast drugich niezmienników dewiatorów korzystnie jest rozpatrywać tak zwane intensywności naprężeń i odkształceń, wprowadzone najpierw przez NÁDAIA i określone następującymi wzorami:

$$\Sigma = \frac{2}{3} \sigma_i^2, \quad E = \frac{3}{2} \epsilon_i^2.$$

Współczynniki liczbowe są dobrane z takim wyliczeniem, żeby przy prostym rozciąganiu σ_i równało się naprężeniu rozciągającemu, a ϵ_i odkształceniu osiowemu w kierunku rozciągania przy warunku nieściśliwości materiału. Z równania (4.4) otrzymujemy

$$(4.5) \quad \epsilon_i = \frac{1}{3G} \sigma_i.$$

Dla materiału nieściśliwego w obszarze sprężystym $E = 3G$, co oznacza, że intensywności naprężeń i odkształceń są tak samo związane z sobą jak naprężenie i odkształcenie przy prostym rozciąganiu. Podstawowa hipoteza odkształceniowej teorii plastyczności polega na tym, że wykres zależności pomiędzy σ_i i ϵ_i ma charakter uniwersalny i wiąże te wartości przy dowolnych stosunkach między naprężeniami. Jeśli pominąć nieznaczną poprawkę na ściśliwość, to wykres $\sigma_i - \epsilon_i$ pokrywa się z wykresem $\sigma - \epsilon$, otrzymanym na podstawie próby na rozciąganie. Dlatego moduł plastyczny posunięcia jest albo funkcją σ_i , albo ϵ_i . Nie będziemy tutaj rozpatrywali w szczególach zagadnienia stosowalności odkształceniowej teorii plastyczności. Liczne badania teoretyczne i doświadczalne lat ostatnich wykazały jej ograniczony zakres. Jednak w tych przypadkach, kiedy stosunki między naprężeniami zmieniają się w przebiegu odkształcenia niezbyt silnie, przewidywania oparte na tej teorii są zadowalające, a metody obliczeniowe skonstruowane na jej podstawie są dostatecznie proste.

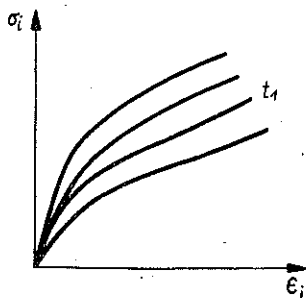
Odształceniową teorię plastyczności łatwo jest uogólnić na przypadek pełzania. W dalszym ciągu rozważań będziemy uważali, że materiał jest nieściśliwy, to jest przyjmujemy stałą k równą nieskończoności i odpowiednio współczynnik POISSONA równy połowie. To założenie jest uzasadnione zwłaszcza w przypadku pełzania, ponieważ współczynnik POISSONA zwiększa się wraz ze wzrostem temperatury, zbliżając się do wartości równej 1/2, a odkształcenie pełzania nie towarzyszy zmianie objętości.

Podana przez N. M. BIELAJEWA idea opracowania przestrzennej teorii pełzania polega na tym, że przyjmuje się, iż zależności (4.3) są słuszne również dla pełzania, jednak zależności między niezmiennikami (4.5) zastępuje się tym równaniem, które przedstawia prawo pełzania jednowymiarowego, jeśli zastąpić w nim σ i ϵ odpowiednio przez σ_i i ϵ_i . Tak więc przyjmując za podstawę hipotezę starzenia należy uzupełnić zależności (4.3) następującym równaniem:

$$(4.6) \quad \epsilon_i = f(\sigma_i, t).$$

Jeżeli bierze się pod uwagę materiał nieściśliwy, wtedy $\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}$. Postać funkcji $f(\sigma_i, t)$ określa się za pomocą układu krzywych pełzania przy rozciąganiu obciążeniem stałym, chociaż w zasadzie można w tym celu wykorzystać wyniki doświadczeń, przeprowadzonych wedle jakiegokolwiek innego schematu.

Równania teorii starzenia w takiej postaci stosuje się obecnie szeroko w obliczeniach dokonywanych w zakładach i biurach konstrukcyjnych, ponieważ w porównaniu z innymi są prostsze; na podstawie tych równań zostały opracowane dostatecznie wygodne i efektywne metody rachunkowe dla ważniejszych elementów, jak np. tarcz i łopatek turbin. Układy krzywych pełzania przedstawia graficznie obraz zależności (4.6) między trzema zmiennymi σ_i , ϵ_i i t , przy czym ϵ_i i t odkłada się na osiach, a wartości σ_i są oznaczeniami oddzielnych krzywych. Te krzywe można tak przerysować, że na osiach współrzędnych odkłada się ϵ_i i σ_i , przy czym każda z krzywych odpowiada określonej wartości czasu t . Otrzymane w ten sposób wykresy przypominają wykresy rozciągania (rys. 10).



Rys. 10

Dlatego żeby wnioskować o zachowaniu się obiektu w chwili czasu t , należy wybrać na wykresie rys. 10 krzywą odpowiadającą tej chwili i wykonać obliczenie według zwykłej teorii plastyczności korzystając z tej krzywej zamiast z krzywej odkształcenia.

Zupełnie analogicznie można wprowadzić do rozważań zależności między niezmiennikami, otrzymane na podstawie dowolnej z rozpatrzonych powyżej teorii pełzania jednowymiarowego.

Jeśli przy stałym naprężeniu materiał zachowuje się tak, że duża część odkształcenia dokonuje się ze stałą prędkością i drugi odcinek krzywej pełzania jest podstawowy, to prawo pełzania można przedstawić w następującej postaci:

$$\dot{\epsilon} = v(\sigma).$$

Pełzanie przy złożonym stanie naprężenia można także rozpatrywać jako pewien proces podobny do lepkiego płynięcia cieczy ze zmiennymi współczynnikami lepkości. Podobnie jak dla cieczy lepkiej można przyjąć, że tensor prędkości odkształcenia jest proporcjonalny do dewiatora tensora naprężenia:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2\lambda} \bar{\sigma}_{ij}.$$

Tutaj $\eta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$, jeśli odkształcenia są małe. Określając intensywność prędkości odkształcenia wyrażeniem analogicznym do wyrażenia na intensywność odkształceń znajdziemy

$$\eta_i = \frac{1}{3\lambda} \sigma_i.$$

Jednak przy prostym rozciąganiu $\eta_i = \dot{\epsilon}$, zatem

$$\frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_i)}{\sigma_i}$$

prawo pełzania przestrzennego przybiera postać

$$(4.7) \quad \eta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{v(\sigma_i)}{\sigma_i} \bar{\sigma}_{ij}.$$

Wykorzystując związek (4.7) i jakąkolwiek aproksymację funkcji $v(\sigma_i)$ można znajdować w elementach konstrukcyjnych rozkład naprężeń i szybkości odkształceń. Ten rozkład nie zależy od czasu, dlatego przedstawioną teorię nazywają zwykle teorią ustalonego pełzania. Odkształcenie w dowolnym punkcie znajduje się mnożąc odpowiednią prędkość przez czas, jeśli, oczywiście, ograniczymy się do dostatecznie małych odkształceń. Jest rzeczą jasną, że teoria ustalonego pełzania nie może być stosowana do rozwiązywania takich zagadnień, w których na przemieszczenia są nałożone warunki graniczne. Na przykład zagadnienie zmiany naprężeń tarczy osadzonej na wale nie może być rozwiązane w ramach powyższej teorii. Jednak według teorii ustalonego pełzania można znaleźć taki stan graniczny, do którego zbliża się rozkład naprężeń, jeśli tylko rzeczywiście prędkość pełzania można uważać od pewnego czasu za stałą dla danego naprężenia. W zagadnieniu relaksacji napięć w tarczy, osadzonej na wale, powyższa teoria daje wyniki tylko trywialne, polegające na tym, że napięcie prowadzi do całkowitego zniszczenia. Dla licznych elementów pracujących w czasie stosunkowo krótkim przy dużych naprężeniach pierwszy odcinek krzywej pełzania prawie od razu przechodzi w trzeci i teoria ustalonego pełzania nie ma tutaj zastosowania.

Hipoteza o proporcjonalności dewiatora naprężenia do tensora prędkości odkształcenia plastycznego we współczesnej teorii plastyczności jest zastępowana bardziej ogólną hipotezą o istnieniu potencjału plastycznego. Przez potencjał plastyczny należy rozumieć pewną funkcję naprężeń $F(\sigma_{ij})$, taką że

$$(4.8) \quad \eta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Jeśli potencjał plastyczny zależy tylko od drugiego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia Σ , wtedy otrzymujemy stąd znowu równania (4.7).

Prostsze równania otrzymuje się w tym przypadku, jeśli zagadnienie rozważać w układzie współrzędnych, będących głównymi osiami tensora naprężenia; wtedy potencjał plastyczny uważa się za funkcję naprężeń stycznych, co jest zgodne z teorią plastyczności SAINT-VENANTA. Umówimy się, że główne naprężenia będziemy tak oznaczali, aby spełniona była relacja $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Przyjmiemy $s = \sigma_1 - \sigma_3$. Wartość s przedstawia podwojone największe naprężenie styczne. Przyjmiemy, że $F = F(s)$. Wtedy ze wzoru (4.8) wynika:

$$\eta_1 = \frac{dF}{ds}, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = -\frac{dF}{ds}.$$

Przy prostym jednoosiowym rozciąganiu, w którym pozostaje naprężenie σ , $s = \sigma$ i $\eta = v(\sigma)$, wobec czego powinniśmy przyjąć w powyższych wzorach $dF/ds = v(s)$. Otrzymujemy następujące prawo płynięcia:

$$(4.9) \quad \eta_1 = -\eta_3 = v(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \eta_2 = 0.$$

Specjalnego rozpatrzenia wymaga przypadek, kiedy dwa główne naprężenia są sobie równe, np. $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Wtedy prędkości odkształceń η_1 i η_2 są nieokreślone, ale suma ich

$$\eta_1 + \eta_2 = v(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Odształcenie w trzecim kierunku jest następujące:

$$\eta_3 = -v(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Wykorzystanie prawa pełzania w postaci wzoru (4.9) prowadzi do prostszych wyników niż obliczenie według równań (4.7), jednak ta zaleta znika, jeśli rozważania prowadzi się przy dowolnych osiach współrzędnych, nie będących osiami głównymi. Jednakże w większości zagadnień o charakterze praktycznym główne osie są zwykle znane z góry.

Nie będziemy dłużej zatrzymywali się na licznych odmianach teorii plastycznego płynięcia, uwzględniających sprężyste lub początkowo plastyczne odkształcenie. Aby przyjąć rzeczywistą postać krzywych pełzania, najprościej jest wprowadzić do równań teorii płynięcia zmienioną skalę czasu, to jest określić szybkości jako pochodne odkształceń według pewnego parametru, będącego funkcją czasu. Taka odmiana teorii płynięcia odpowiada wariantowi B teorii jednowymiarowej. Trzeba zauważyć, że przy tym równania stają się niezmiennicze w stosunku do zmiany początku liczenia czasu, a podane wyżej uwagi o tej teorii nabierają znaczenia.

Przejdziemy teraz do równań, które uogólniają rozpatrzoną poprzednio dla jednowymiarowego przypadku teorię wzmocnienia — na przypadek złożonego stanu naprężenia. Wystarczające ogólne założenie również z tego punktu widzenia polega na tym, że dla prędkości pełzania postuluje się istnienie potencjału płynięcia, mianowicie

$$(4.10) \quad \eta_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Jednak w teorii wzmocnienia powinniśmy przyjąć, że prędkości odkształcenia η_{ij} są prędkościami odkształcenia pełzania. Jeżeli wprowadzimy tensor odkształcenia pełzania \dot{p}_{ij} , wtedy $\eta_{ij} = \dot{p}_{ij}$. Funkcja F zależy teraz nie tylko od naprężeń, ale także od składowych tensora odkształcenia pełzania. Założenie izotropii płynięcia i izotropii wzmocnienia oznacza, że potencjał płynięcia zależy od niezmienników tensora odkształcenia plastycznego pełzania i dwiatora naprężenia. W przypadku bardziej prostym można uważać, że potencjał jest funkcją tylko intensywności naprężeń i pewnej wielkości, będącej miarą

nagromadzonego odkształcenia plastycznego. W takim sensie przyjmujemy za ODQUISTEM

$$\dot{p} = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij} \right]^{1/2} dt.$$

Przyjmując $F = F(\sigma_i, p)$ i uważając że początkowe odkształcenie jest sprężyste, ze wzoru (4.10) otrzymujemy

$$\dot{p}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\sigma_i}.$$

Dobierzmy teraz funkcję F w ten sposób, aby otrzymać przy jednoosiowym rozciąganiu prawo wzmocnienia

$$\dot{p} p^a = k \exp \frac{\sigma}{A}.$$

W wyniku otrzymamy następujące zależności:

$$(4.11) \quad \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} k p^{-a} \exp \left(\frac{\sigma_i}{A} \right) \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\sigma_i}.$$

W niektórych przypadkach zamiast intensywności naprężeń lepiej jest wziąć największe naprężenie styczne, a zamiast intensywności prędkości pełzania — prędkość największego poślizgu. Uważając jak poprzednio, że $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, przyjmujemy $s = \sigma_1 - \sigma_3$, $2p = p_1 - p_3$. Wtedy ze wzoru (4.10) otrzymujemy:

$$\dot{p}_1 = -\dot{p}_3 = \dot{p}, \quad \dot{p}_2 = 0.$$

Wartości p i s związane są z sobą prawem wzmocnienia:

$$\Phi(p, \dot{p}, s) = 0.$$

Otrzymane równania teorii wzmocnienia nie uwzględniają natychmiastowego odkształcenia plastycznego. Dla rozwiązania zadań typu relaksacyjnego, kiedy w tej części ciała, gdzie istnieją początkowe odkształcenia plastyczne, naprężenia nie wzrastają, można zalecić następujący schemat obliczenia. Najpierw znajduje się rozkład naprężeń i odkształceń na podstawie którejkolwiek teorii plastyczności. Przy rozpatrywaniu kolejnego procesu pełzania znalezione wartości naprężeń przyjmuje się za wartości początkowe, początkową wartość odkształcenia przyjmuje się równą zeru.

Stosunkowo nieliczne prace doświadczalne dla sprawdzenia równań pełzania przestrzennego ujawniają dla większości materiałów systematyczne odchylenia od przewidywań teoretycznych. W. S. NAMIESTNIKOW w pracach swych, [15], zajmował się badaniem próbek ze stali austenicznej na rozciąganie, skręcanie i równoczesne działanie rozciągania i skręcania. Próbkę przygotowywano w postaci cienkościennych rurek; przy doświadczeniach zacho-

wano proporcjonalność przyłożonego obciążenia rozciągającego i skręcającego w procesie obciążenia, co jest rzeczą istotną dla początkowych odcinków krzywej pełzania. Doświadczenia nad pełzaniem wykonywano przy różnych stosunkach naprężenia normalnego i stycznego; jednak przy stałej intensywności naprężeń. Za miarę odkształcenia została przyjęta intensywność odkształceń. Okazało się, że krzywe pełzania są podobne, ale nie pokrywają się z sobą, krzywe rozciągania idą wyżej niż krzywe skręcania. Jak należało oczekiwać, krzywe dla obciążeń złożonych znajdują się pomiędzy krzywymi rozciągania i skręcania.

Przypadek jednoczesnego działania rozciągania i skręcania jest przypadkiem najbardziej kontrastowym. Tutaj główne naprężenia mają różne znaki i odchylenia od teorii są najłatwiejsze do zauważenia. Przy dwukierunkowym rozciąganiu dane teoretyczne są bliższe danym doświadczalnym. Do takiego wniosku upoważniają zarówno dane opublikowane na podstawie doświadczeń, wykonanych na rurkach pod działaniem siły rozciągającej i ciśnienia wewnętrznego, jak również licznych doświadczeń wykonanych na próbkach, w czasie których realizowano złożony i nierównomierny stan mierząc albo odkształcenia sumaryczne, albo rozkład pozostałych naprężeń. O niektórych doświadczeniach tego rodzaju powiemy dalej.

Druga seria doświadczeń W. S. NAMIESTNIKOWA, [16], odnosiła się do zagadnienia, czy wzmocnienie można uważać za izotropowe, jak to przewiduje każda teoria, przyjmująca za miarę wzmocnienia skalarny niezmiennik tensora odkształcenia. Cienkościenna rurka była badana jako próbka na pełzanie przy rozciąganiu, po czym obciążenie rozciągające odejmowano i do próbki przykładano moment skręcający, który wytwarzał w niej naprężenia styczne o takiej samej intensywności jak i poprzednio naprężenia normalne. Jeżeli za punkt wyjścia przyjąć wzmocnienie izotropowe w tej postaci, w jakiej było ono sformułowane wyżej, to wstępne pełzanie przy rozciąganiu powinno przejawiać działanie wzmacniające na pełzanie przy skręcaniu i krzywa pełzania przy skręcaniu powinna pójść znacznie niżej niż krzywa pełzania dla materiału nie poddanego uprzedniemu rozciąganiu. W rzeczywistości to nie występuje, gdyż wstępne pełzanie w istocie rzeczy nie wpływa na przebieg krzywej pełzania przy skręcaniu. Ten wynik można tłumaczyć tym, że przy zmianie typu stanu naprężenia, związanego ze znacznym skretem osi głównych, pełzanie dokonuje się kosztem odkształcenia innych ziarn krystalicznych i kosztem posunięć po innych płaszczyznach poślizgu, wówczas gdy wcześniej wzmocnione systemy poślizgu pozostają nieczynne.

Przy obliczaniu części maszyn rzadko kiedy spotykamy się z takimi jaskrawymi zmianami stanu naprężenia, zwykle osie główne pozostają nieruchome i tylko zależności pomiędzy wartościami głównych naprężeń nieco zmieniają się w przebiegu pełzania. Dla takich przypadków hipoteza wzmocnienia izotropowego daje należyte wyniki.

Zagadnienie długotrwałego wzmocnienia w warunkach złożonego stanu naprężenia było systematycznie badane przez JOHNSONA, [17], i przez W. P. SDOBYRIEWA, [18]. JOHNSON na podstawie własnych doświadczeń doszedł do wniosku, że kryterium zniszczenia przy złożonym stanie naprężenia stanowi wartość największego naprężenia rozciągającego; tę wartość należy porównać z granicą długotrwałego wzmocnienia, określonego przy rozciąganiu próbek. W. P. SDOBYRIEW otrzymał znacznie bogatszy materiał doświadczalny i ujawnił systematyczne odchylenia od kryterium największego naprężenia rozciągającego. SDOBYRIEW porównywał najbardziej kontrastowe przypadki rozciągania i skręcania, a także pośrednie typy stanów naprężenia i otrzymał kryterium empiryczne w następującej postaci:

$$(4.12) \quad \sigma_{zast} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_i).$$

Jednakże dla tych rodzajów stanu naprężenia, które występują np. w tarczach turbin, poprawka W. P. SDOBYRIEWA jest bardzo mała i można ją pominąć. Tym sposobem jako praktyczne kryterium długotrwałego wzmocnienia przy złożonym stanie naprężenia można przyjąć kryterium największego naprężenia normalnego.

5. Istnieją dwie teorie pozwalające najprościej obliczać pełzanie części maszyn: teoria ustalonego pełzania, wywodząca się ze znajomości stałej prędkości pełzania przy stałym naprężeniu, oraz teoria starzenia. Mimo dużej zasadniczej różnicy między tymi teoriami w pewnych przypadkach prowadzą one do jednakowych wyników. Jeżeli pominąć sprężyste i natychmiastowe odkształcenie plastyczne, krzywe pełzania można często aproksymować następującą zależnością:

$$\epsilon = \varphi(\sigma) T(t).$$

Ta zależność zakłada podobieństwo krzywych pełzania. Jeśli nie zmieniają się obciążenia działające na ciało z biegiem czasu i warunki brzegowe nie nakładają ograniczeń na przemieszczenia, to w ciele powstaje wtedy stan ustalonego pełzania, kiedy stan naprężenia nie zmienia się z czasem. Różne teorie pełzania prowadzą w tym przypadku do jednakowego wyniku, który z tego względu można uważać za pewny. Weźmy dla przykładu równania teorii starzenia

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \bar{\sigma}_{ij}, \quad \epsilon_i = \frac{1}{2G} \sigma_i = \varphi(\sigma_i) T(t).$$

Te równania można przedstawić w następującej postaci:

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varphi(\sigma_i)}{\sigma_i} \bar{\sigma}_{ij}.$$

Jeśli przyjąć $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 T$, to funkcja czasu T zostanie wyrugowana i otrzymamy

$$(5.1) \quad \epsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \frac{\varphi(\sigma_i)}{\sigma_i} \bar{\sigma}_{ij}.$$

Do tych zależności nie wchodzi czas; w wyniku liniowości równań nierozdzielności ϵ_{ij}^0 czyni zadość tym równaniom co ϵ_{ij} ; warunki brzegowe nakładane na naprężenia także nie zawierają czasu. Dlatego naprężenia są niezależne od czasu; znalezienie ich sprowadza się do rozwiązania zwykłego zadania z teorii plastyczności.

Analogiczny wynik można otrzymać na podstawie teorii wzmocnienia, jednak przy nieco silniejszym ograniczeniu postaci krzywych pełzania, mianowicie wtedy, kiedy $T(t) = t^m$. Jeśli ten warunek zostanie spełniony, to prawo pełzania ma następującą postać:

$$\dot{\epsilon} \epsilon^a = f(\sigma).$$

Tutaj zamiast p wstawiono ϵ , ponieważ umówiliśmy się pomijać odkształcenie sprężyste. Równanie teorii wzmocnienia dla trójwymiarowego zagadnienia ma postać:

$$(5.2) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \epsilon_i^{-a} \varphi(\sigma_i) \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\sigma_i}.$$

Załóżmy $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 t^m$, wtedy $\epsilon_i = \epsilon_i^0 t^m$. Wstawmy to wyrażenie do równania (5.2); otrzymamy

$$(5.3) \quad \epsilon_{ij}^0 m t^{-1} = \frac{3}{2} (\sigma_i^0)^{-a} t^{m-a} \varphi(\sigma_i) \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\sigma_i}.$$

W wyniku zależności między m i a skracają się czynniki zawierające czas. W lewej części równania (5.3) na równi z intensywnością naprężeń występuje intensywność odkształceń, łatwo ją jednak wyłączyć, tworząc drugie niezmienniki w lewej i prawej części otrzymujemy końcową zależność między ϵ_i^0 i σ_i . W rezultacie otrzymuje się równania, które w rzeczywistości pokrywają się z równaniami (5.1).

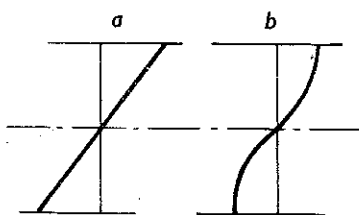
Wartości ϵ_{ij}^0 mogą być rozpatrywane jako swego rodzaju prędkości pełzania, jeśli umówimy się, że czas będzie mierzony nie jego skalą naturalną, a wielkością $T(t)$. Dlatego równanie (5.1) można rozpatrywać tak jak równanie teorii płynięcia.

Tak więc stan pełzania ustalonego realizuje się w elemencie albo wtedy, kiedy obciążenia są duże, odkształcenia sprężyste bardzo małe, prędkość pełzania jest zależna od czasu i krzywe pełzania dostatecznie dobrze aproksymują się funkcjami potęgowymi czasu, albo kiedy element konstrukcyjny znajduje się w warunkach długotrwałego pełzania i duża część odkształcenia towarzyszy drugiemu odcinkowi krzywej pełzania.

Zadanie o charakterze praktycznym, które trzeba rozwiązać przy obliczaniu pełzania obiektów, znajdujących się w warunkach długotrwałej eksploatacji,

składa się z dwu części. Najpierw należy znaleźć wartość odkształcenia, odpowiadającą danej chwili, umownemu momentowi życia elementu. Następnie należy znaleźć naprężenia jako funkcję czasu. Stosując teorię ustalonego pełzania możemy znaleźć tylko niedokładne wartości odkształcenia. Co się zaś tyczy rozkładu naprężeń, to teoria ustalonego pełzania daje tylko ich rozkład końcowy. Zagadnienie przejścia od stanu sprężystego [do stanu pełzania ustalonego] pozostaje otwarte.

Dla przykładu rozpatrzmy zagadnienie zgięcia pręta o przekroju prostokątnym, którego szerokość równa się b , a wysokość h . Przypuśćmy, że początkowe odkształcenie jest sprężyste i że prędkość pełzania ustalonego $v = A\sigma^n$. Zaraz po przyłożeniu momentu zginającego w przekroju pręta naprężenia rozkładają się według prawa liniowego, jak to przedstawiono na rys. 11a. Największe naprężenie $\sigma_{max} = 6M/bh^2$. W stanie pełzania ustalonego będziemy uważali, że przekroje pozostają płaskimi, a prędkością zmiany krzywizny jest κ , tak że $\eta = \kappa y$. Wtedy $\sigma = (\kappa y/A)^{1/n}$; obliczając moment zginający w przekroju i przyrównując go do momentu sił zewnętrznych znajdujemy, że



Rys. 11

$$\left(\frac{\kappa}{A}\right)^{1/n} = \frac{1+2n}{2n} M \left(\frac{h}{2}\right)^{-(1/n)-2}$$

a naprężenie w skrajnym punkcie przekroju

$$(5.4) \quad \sigma_{max} = 2 \frac{1+2n}{n} \frac{M}{bh^2}.$$

Wykres rozkładu naprężeń w stanie pełzania ustalonego jest przedstawiony na rys. 11b. Zauważmy, że przy dużych wielkościach n wartość maksymalnego naprężenia nieznacznie różni się od wartości $4M/bh^2$, która odpowiada stanowi plastycznemu bez wzmocnienia. Ta uwaga może być wykorzystana przy obliczaniu pełzania przy zgięciu prętów o profilu niesymetrycznym; zasadnicza trudność polega tutaj na znalezieniu położenia osi obojętnej. Dla rozwiązania przybliżonego tego rodzaju zadania można znaleźć oś obojętną tak, jakby pręt był wykonany z materiału idealnie plastycznego.

Wracając do przypadku ogólnego zauważmy, że wykorzystując teorię pełzania ustalonego zagadnienie przechodzenia od stanu a do stanu b pozostaje otwarte. Oznaczając wartości największego naprężenia w tych dwu stanach odpowiednio przez σ_0 i σ_∞ powinniśmy znaleźć taką funkcję $\sigma(t)$, żeby $\sigma(0) = \sigma_0$, $\sigma(\infty) = \sigma_\infty$. Do tego celu trzeba wykorzystać jedną z bardziej dokładnych teorii pełzania. Obliczenia wykazują, że prawo ponownego rozkładu naprężeń w czasie według różnych teorii jest mniej więcej jednakowe, dlatego niedokładna i zasadniczo niedoskonała teoria starzenia prowadzi do takich samych prawie

wyników jak i dokładniejsza, ale niepomiernie bardziej skomplikowana w zastosowaniu teoria wzmocnienia.

Jeśli naprężenie znaleziono jako funkcję czasu, to określenie długotrwałości można przeprowadzić w sposób następujący. Warunek (3.3) przedstawiający zasadę liniowego sumowania uszkodzeń pozwala na wprowadzenie wartości naprężenia zastępczego, które wyrównuje się bezpośrednio z krzywą długotrwałego wzmocnienia przy naprężeniu stałym. Jeśli jest znane równanie krzywej $T = T(\sigma)$, to naprężenie równoważne określa się następującą zależnością:

$$\frac{1}{T(\sigma_{zast})} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt}{T(\sigma)}$$

Krzywa wzmocnienia długotrwałego zwykle jest aproksymowana funkcją będącą potęgą argumentu i wzór powyższy można przekształcić w następującą równość dla naprężenia zastępczego:

$$(5.5) \quad \sigma_{zast} = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \sigma^m dt \right)^{1/m}$$

Wartości wykładnika m dla różnych stali przy rozmaitych temperaturach wahają się w granicach od $m = 5$ do $m = 9$.

Obliczanie pełzania według teorii starzenia zilustrujemy na dwu przykładach: jeden z nich dotyczy przypadku płaskiego odkształcenia, drugi płaskiego stanu naprężenia.

W pierwszym przykładzie zajmujemy się rurą pod działaniem ciśnienia wewnętrznego. Wskutek nieściśliwości materiału odkształcenie obwodowe i promieniowe są równe co do wartości bezwzględnej, ale różnego znaku, $\epsilon_r = -\epsilon_\theta$. Ale $\epsilon_r = du/dr$, $\epsilon_\theta = u/r$; tutaj symbol u oznacza przemieszczenie promieniowe, r jest promieniem. Zatem $u = c/r$ i $\epsilon_t = c/r^2$. Z równań teorii plastyczności i z warunków równości zeru odkształcenia osiowego wynika, że $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$. Obliczając intensywność naprężeń znajdujemy, że $\sigma_t = \sigma_\theta - \sigma_r$. Tutaj znak został dobrany zgodnie z fizykalnym sensem zadania przy ciśnieniu wewnętrznym $\sigma_\theta > \sigma_r$. Jako konsekwencję podstawowej zależności teorii starzenia otrzymujemy

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \psi \left(\frac{c}{r^2}, t \right)$$

Czas t występuje tutaj jako parametr, dla każdej chwili funkcja ψ jest jedną z krzywych przedstawionych na rys. 10. Równanie równowagi elementu we współrzędnych biegunowych zapisuje się w następujący sposób:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

gdy $r = a$, to $\sigma_r = -q$, oraz gdy $r = b$, to $\sigma_r = 0$. Przepiszmy teraz równanie równowagi wykorzystując zależności różnicy $\sigma_\theta - \sigma_r$ od intensywności odkształceń:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{2} \Psi \left(\frac{c}{r^2} \right).$$

Scałkujemy powyższe równanie przyjmując $c/r^2 = \xi$. Otrzymamy

$$\sigma_r = -q - \frac{1}{2} \int_{\xi_a}^{\xi} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Jeśli przyjąć

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} d\xi = \Psi(\xi),$$

to z drugiego warunku brzegowego znajdziemy

$$(5.6) \quad q = \Psi \left(\frac{c}{b^2} \right) - \Psi \left(\frac{c}{a^2} \right).$$

Wykres funkcji Ψ można zrobić w wyniku graficznego lub liczbowego całkowania, a z równania (5.6) znajduje się stałą c . W celu jej znalezienia można wykorzystać nomogram, [10]. Niezwykłą łatwością rozwiązania zagadnienia o odkształceniu płaskim tłumaczy się tym, że wykorzystaliśmy warunek nieściśliwości materiału. Zagadnienie obracającego się cylindra, rury albo obrotowego cylindra ze swobodnymi końcami, kiedy odkształcenie osiowe nie równa się zeru, również rozwiązuje się przez kwadratury, jednak wtedy otrzymuje się skomplikowane wzory, a otrzymanie wyników liczbowych jest dość żmudne.

Zagadnienie płaskiego stanu naprężenia, który występuje np. w tarczach turbin, jest dużo bardziej złożone. Do niedawna przy rozwiązywaniu podobnych zagadnień była stosowana prawie wyłącznie metoda kolejnych przybliżeń. Opracowano wiele odmian tej metody. W wyniku jej udoskonaleń, dokonywanych przez różnych autorów, uzyskano bardzo dobrą zbieżność i prostotę obliczeń, [19].

Obecnie dla obliczania tarcz o złożonym profilu przy nierównomiernym polu stosuje się szybkie maszyny do liczenia. Na przykład dla maszyny «Striela» opracował odpowiednią metodę A. W. AMELJAŃCZYK, [20]. Idea metody polega na tym, że tarcza jest rozpatrywana jak tarcza sprężysta, ale parametry sprężystości są zmienne i uprzednio nie są znane. Jeśli naprężenia przedstawić za pomocą przemieszczeń i wprowadzić je do równań równowagi, wtedy otrzymamy

$$(5.7) \quad \varphi \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{h} \frac{dh}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) + u \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\Psi}{hr} \frac{dh}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} \right) + \int \omega^2 r = 0.$$

Tutaj r jest promieniem, u przemieszczeniem promieniowym, $h = h(r)$ grubością tarczy, $\varphi = E/(1-\nu^2)$, $\psi = \nu E/(1-\nu^2)$, ρ jest gęstością materiału oraz ω prędkością kątową. Promień tarczy dzieli się na odcinki. Przyjmuje się, że zmienne φ , ψ i h są dane na środkach odcinków i zmieniają się liniowo między tymi odcinkami. W ten sposób równanie (5.7) zastępuje się równaniem różnicowym, którego rozwiązanie prowadzi do układu równań algebraicznych. Ustalono, że podział promienia na 10-20 odcinków (przedziałów) jest wystarczający. Przede wszystkim odzyskuje się stan sprężysty tarczy, przy czym φ i ψ są znanymi kombinacjami stałych sprężystych, zmiennych wzdłuż promienia, o ile zmienna jest temperatura. Przy obliczaniu pełzania powinniśmy wybrać krzywą $\sigma - \epsilon$, odpowiadającą interesującemu nas czasowi. Rozkład naprężeń i odkształceń w stanie sprężystym przyjmuje się za przybliżenie pierwsze. Na podstawie tego pierwszego przybliżenia oblicza się intensywność odkształceń w każdym punkcie; za pomocą krzywej $\sigma - \epsilon$ dla danej intensywności odkształceń znajduje się wartości próbki plastycznej i współczynnika POISSONA w zakresie plastycznym. Obliczenie sprężystej ściśliwości nie nastrocza przy tym poważniejszych trudności. Obliczenie powtarza się przy nowych wartościach stałych «sprężystych», ponownie znajduje się intensywność odkształceń w każdym punkcie i nowe wartości parametrów plastyczności dopóty, dopóki dwa kolejne przybliżenia nie dadzą jednakowych wyników. W przypadku mniej pomyślnym, jak to wykazuje autor, potrzeba było około 20 przybliżeń, co zajęło mniej więcej 10 minut czasu.

Powyższy sposób obliczania jest uzasadniony przy możliwości wykorzystania szybkich maszyn do liczenia, kiedy liczba przybliżeń nie ma istotnego znaczenia. Metody kolejnych przybliżeń, które stosuje się przy obliczaniu bez pomocy maszyn, powinny zapewniać dostatecznie szybką zbieżność; ich myśl przewodnia polega na tym, żeby równania równowagi i nierozdzielności były w postaci całkowitej. Z równania równowagi najpierw otrzymuje się wyrażenie dla naprężenia promieniowego w postaci pewnego operatora całkowitego zastosowanego do naprężenia obwodowego. Zupełnie podobnym sposobem można scałkować równanie nierozdzielności przedstawiając w nim uprzednio odkształcenia przez naprężenia. Naprężenie obwodowe będzie także przedstawione w postaci pewnego operatora całkowitego, ale już zastosowanego nie tylko do naprężenia promieniowego, lecz do pewnej nieliniowej i dość skomplikowanej kombinacji obu naprężeń. Taką postać równania można otrzymać różnymi sposobami, toteż różni autorzy przyjmują rozmaite równania wyjściowe dla zastosowania metody kolejnych przybliżeń. Umiejętny wybór tych równań zapewnia szybką zbieżność.

Podobny sposób stosujemy nie tylko do tarcz, lecz również do innych części maszyn, np. do przepon turbin parowych.

Przed kilku laty Moskiewski Oddział Centralnego Instytutu Kotłów i Turbin zorganizował szeroką akcję kontroli doświadczalnej w sprawie obliczania

pełzania elementów maszyn o złożonej postaci. Za podstawę badań przyjęto teorię starzenia. Doświadczenia były dokonywane zarówno na próbkach z materiałów ujawniających pełzanie w niewysokich temperaturach, jak i na próbkach stalowych w temperaturach wysokich. Zestawienie danych obliczeniowych i doświadczalnych wykazało ich dostateczną zgodność, [21]. Przy tych badaniach występuje również inne zagadnienie, mianowicie zagadnienie modelowania. Wyobraźmy sobie, że interesuje nas obliczenie elementu stalowego, przeznaczanego na długi okres pracy. Odpowiednia krzywa $\sigma-\epsilon$ jest znana. Jeśli uda się dobrać materiał, dla którego podobna krzywa $\sigma-\epsilon$ odpowiada temperaturze normalnej i niezbyt dużemu okresowi czasu, możemy wykonać z tego materiału próbkę i określić czas trwania realnego elementu drogą stosunkowo prostego i krótkotrwałego badania próbki. Doświadczenia wykazały, że długotrwałe pełzanie niektórych gatunków stali w wysokiej temperaturze może być z pożytkiem modelowane za pomocą krótkotrwałych badań ołowiu w temperaturze pokojowej.

Inny przykład wykorzystania teorii starzenia przedstawia badanie wzmocnienia pewnych połączeń turbiny, przeprowadzone przez B. P. SOKOŁOWA, [22]. W celu doświadczalnego określenia odkształceń w procesie pełzania SOKOŁOW zastosował metodę drobnych siatek. Na powierzchnię elementu nanosi się drobną siatkę (50-100 linii na milimetr); siatkę tę chromuje się, aby zabezpieczyć ją w wysokiej temperaturze badania. Przy odkształceniu obiektu odkształca się również siatka. W czasie badania siatka jest fotografowana w periodycznych odstępach czasu i na fotografię siatki odkształconej nakłada się siatkę wzorcową naniesioną na przezroczystą błonę. Otrzymuje się w ten sposób rysunek mory, ciemne i jasne pasy na przemian. Ten rysunek odczytuje się według ustalonych zasad i określa odkształcenie. Według pomierzonych odkształceń obliczano na podstawie teorii starzenia naprężenia i największe naprężenie zestawiano z krzywą długotrwałego pełzania, otrzymaną w wyniku badania elementów z tego samego materiału. Obliczony w ten sposób początek powstawania rys dość dobrze zgadzał się z czasem obserwowanym.

Zatrzymamy się teraz nieco dłużej nad badaniami doświadczalnymi pełzania długotrwałego wzmocnienia tarcz; badania te były dokonane w CNIIT-MASZ na specjalnie uruchomionym stanowisku, [23]. Opis takiego stanowiska podano w pracy [24]. Zbadano 25 tarcz wykonanych z czterech różnych materiałów w temperaturach charakterystycznych dla eksploatacji tych materiałów. Badania trwały od kilku do dwóch tysięcy godzin. Część badań doprowadzono aż do zniszczenia tarcz. Do badań wybrano następujące materiały: stal perlityczną P-3 przy standartowej obróbce cieplnej w stanie kruchości, stal austeniczną EI-405, stal austeniczną EI-572, stop chromoniklowy EI-4376. Dla każdej tarczy przeprowadzono pełne obliczenie pełzania za pomocą maszyny elektronowej do liczenia typu «Striefa» sposobem, o którym mówiliśmy wyżej. Dla każdej tarczy określano największe naprężenie zastępcze według wzoru

(5.5). Bez względu na różnorodność materiałów we wszystkich przypadkach otrzymano zadowalający ponowny rozkład naprężeń na drodze rachunkowej i naprężenie zastępcze różniło się od naprężenia stwierdzonego w stopniu nie większym niż o 3-4%, chociaż wszystkie badane tarcze miały w środku otwór w tym celu, aby wytworzyć jak najbardziej nierównomierny rozkład naprężeń.

Niektóre tarcze nie zostały doprowadzone do stanu zniszczenia. W tych tarczach określano końcowe naprężenia drogą kolejnych nawierceń i porównywano z obliczeniami; nieznaczne odchylenia punktów doświadczalnych od krzywej teoretycznej miały charakter rozrzutu przypadkowego.

Do niedawna w praktyce budowy turbin stosowany był zwykle sposób obliczania wytrzymałości tarcz, oparty na wykorzystaniu wzorów teorii sprężystości. Znaleziono według tych wzorów największe naprężenie równało się granicy pełzania albo granicy wzmocnienia długotrwałego. Taki sposób oczywiście jest umowny, rozkład naprężeń w warunkach pełzania różni się bardzo od rozkładu naprężeń w stanie sprężystym. Inny sposób rozpowszechniony w ostatnich latach polega na tym, że stan naprężenia określa się tak, jak w teorii idealnej plastyczności. Dla tarczy przyjmuje się przy tym po prostu, że obwodowe naprężenie jest stałe. Warto było pokusić się o ocenę, na ile te dwie metody pozwalają sądzić o długotrwałości tarcz. Trzeci sposób polega na tym, że stanu naprężenia poszukuje się za pomocą teorii pełzania. W tabelicy 1 podane są wartości stosunku największego naprężenia w tarczy, obliczonego według każdego z trzech sposobów, do tego naprężenia, które odpowiada na krzywej długotrwałego wzmocnienia czasowi zniszczenia tarczy. Dwie liczby w każdej działce przedstawiają krańcowe wartości tego stosunku; otrzymano je i opracowano na podstawie przeprowadzonych badań. W ostatniej działce podano liczby tarcz zbadanych w każdej serii.

Tablica 1

Materiał				
R-3 obróbka standartowa	1,67-1,73	0,89-0,92	0,95-1,00	2
R-3 stan kruchości	1,32-1,35	0,72-0,74	0,96-0,98	4
EI-572	1,52	0,81	0,95	1
EI-405	1,83-1,92	0,93-0,96	1,03-1,06	5
EI-437b	1,52-1,58	0,82-0,89	0,97-1,02	3

Z tabelicy 1 widać, że przy ocenie naprężenia niszczącego według proponowanej metody błąd we wszystkich przypadkach nie przewyższa 6%, wtedy gdy przy stosowaniu innych metod otrzymuje się wyniki niemożliwe do przyjęcia. Pewien wyjątek stanowi stal EI-405, ponieważ błąd obliczenia dla niej na

podstawie teorii pełzania jest większy niż dla innych, a przyjęcie idealnej plastyczności daje nie gorsze wyniki; tutaj jednak trzeba mieć na widoku, że zniszczenie tarcz wykonanych z tej stali nastąpiło przy odkształceniu rzędu 12%, kiedy to trzeba brać pod uwagę zmianę rozmiarów tarczy, ponieważ przyjęta metoda opiera się na superpozycji bardzo małych odkształceń.

6. Teoria starzenia w powyższym ujęciu daje wyniki możliwe do przyjęcia w praktyce wtedy, kiedy element rozważany znajduje się w stałej temperaturze i jest pod działaniem stałego obciążenia, kiedy stan naprężenia dąży do stanu pełzania ustalonego; wtedy już nie jest tak ważne, za pomocą jakich równań przedstawia się proces ponownego rozkładu naprężeń. Jednakże dla współczesnych konstrukcji są szczególnie interesujące zagadnienia, gdy na element działa temperatura zmienna oraz zmienne obciążenie, zwłaszcza w związku z badaniem procesu uruchamiania obiektu, kiedy niestabilny rozkład temperatury prowadzi do powstawania w pierwszych chwilach znacznych naprężeń termicznych. W wielu przypadkach obliczanie naprężeń termicznych według wzorów teorii sprężystości daje wartości znacznie przewyższające nawet granicę krótkotrwałego wzmocnienia materiału. W tych przypadkach rola pełzania jest pożądana, pełzanie bowiem zmniejsza naprężenia a ich prawidłowe określenie jest nadzwyczaj ważne dla wydania sądu o wzmocnieniu. Dla badania procesów pełzania niestabilnego trzeba koniecznie posługiwać się teoriami bardziej doskonałymi, np. teorią wzmocnienia.

Niestety, zastosowanie teorii wzmocnienia do obliczeń prowadzi do bardzo skomplikowanego rachunku, tak że nawet dla prostszych elementów maszyn, np. tarcz wirujących i walców, na razie nie można zalecić nic innego, jak tylko żmudny proces całkowania liczbowego, powtarzanego dla kolejnych chwil. Przyjmijmy równania prawa wzmocnienia w następującej postaci:

$$\dot{p}_1 = -\dot{p}_3 = \dot{p}, \quad \dot{p}_2 = 0, \quad s = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \dot{p}p^a = \exp(s - \beta).$$

Tutaj β jest znaną funkcją temperatury, p i s oznaczają bezwymiarowe odkształcenie i naprężenie. Przypuśćmy, że stan naprężenia tarczy jest taki, że $\sigma_\theta > 0 > \sigma_2$. Oznacza to, że nie ma pełzania w kierunku grubości, $\sigma_\theta = \sigma_1$, $\sigma_r = \sigma_3$, $s = \sigma_\theta - \sigma_r$.

Równanie równowagi ma postać

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\xi} + m\xi = 0.$$

Tutaj ξ jest promieniem bezwymiarowym, m wartością zależną od gęstości materiału i prędkości kątowej.

Równanie równowagi spełnione jest tożsamościowo, jeśli przyjąć

$$\sigma_r = z - \frac{1}{2} m \xi^2, \quad \sigma_\theta = \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + z - \frac{1}{2} m \xi^2.$$

Odształcenie obwodowe i promieniowe można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{u}{\xi} = \sigma_{\theta} - \nu \sigma_r - (\sigma_{\theta}^0 - \nu \sigma_r^0) + (p - p_0) + (\varphi - \varphi_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sigma_r - \nu \sigma_{\theta} - (\sigma_r^0 - \nu \sigma_{\theta}^0) - (p - p_0) + (\varphi - \varphi_0).$$

Te wyrażenia są przedstawione w postaci bezwymiarowej, σ_r^0 i σ_{θ}^0 przedstawiają początkowe naprężenia, φ jest bezwymiarową temperaturą, p_0 początkowym odkształceniem pełzania. Jak podano poprzednio, jeśli w materiale dokonano wstępnego krótkotrwałego odkształcenia plastycznego, to następstwem jego są naprężenia początkowe σ_r^0 i σ_{θ}^0 , ale p_0 należy uważać za równe zero. Jeśli materiał był poddany uprzednio pełzaniu, wartość p_0 nie będzie równa zero. Wprowadźmy do wzorów na odkształcenia wartości naprężeń za pomocą funkcji pomocniczej z i wyrugujmy u . Otrzymamy następujące równanie różniczkowe dla funkcji z :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} = m(1-\nu) - \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{2p^*}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial (\varphi - \varphi_0)}{\partial \xi}.$$

Tutaj $p^* = p - p_0(\sigma_{\theta}^0 - \sigma_r^0)$.

W wyniku całkowania otrzymamy

$$z = \frac{m(1-\nu)}{8} \xi^2 - \int \frac{p^* d\xi}{\xi} - \frac{1}{\xi} \int \xi (\varphi - \varphi_0) d\xi + A - \frac{B}{\xi^2}.$$

Stąd otrzymujemy następujące równanie dla naprężeń:

$$\sigma_r = \sigma_r^0 - p(\xi) - \frac{3+\nu}{8} m \xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \int \xi (\varphi - \varphi_0) d\xi + A - \frac{B}{\xi^2},$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^0 - p - P(\xi) - \frac{1+3\nu}{8} m \xi^2 - (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\xi^2} \int \xi (\varphi - \varphi_0) d\xi + A + \frac{B}{\xi^2}.$$

W tych wzorach przyjęto

$$P(\xi) = \int \frac{p - p_0}{\xi} d\xi.$$

Dla wartości s otrzymujemy bardzo prosty wzór, mianowicie

$$s = s_0 - p + \frac{2B}{\xi^2},$$

przy czym

$$s_0 = \sigma_{\theta}^0 - \sigma_r^0 + p - (\varphi - \varphi_0) + \frac{2}{\xi^2} \int \xi (\varphi - \varphi_0) d\xi + \frac{m(1-\nu)}{4} \xi^2.$$

Za pomocą otrzymanych wzorów można np. obliczać relaksację napięcia tarczy o stałej grubości, osadzonej na sztywnym wale. Stałe A i B określa się z warunków brzegowych i otrzymuje się następujące wzory:

$$B = \left[-P(1) - \frac{3+\nu}{8} m - \int_a^1 \xi(\varphi - \varphi_0) d\xi + \frac{1+\nu}{8} ma^2 \right] : \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{a} \right),$$

$$A = B + P(1) + \frac{3+\nu}{8} m + \int_a^1 \xi(\varphi - \varphi_0) d\xi;$$

a oznacza tutaj bezwymiarowy promień walca.

Wprowadzając wyrażenie dla s do podstawowego prawa pełzania zauważymy, że zmienna p oddziela się, mianowicie otrzymujemy

$$\dot{p} p^a \exp(p) = \exp\left(s_0 + \frac{2B}{\xi^2} - \beta\right).$$

Lewą stronę wzoru całkujemy; prawą stronę będziemy uważali za stałą dla małego przedziału czasu; w ten sposób mamy

$$\chi = (p_{k+1}) - \chi(p_k) = \exp\left(s_0 + \frac{2B_k}{\xi^2} - \beta\right).$$

Na podstawie tego wzoru stopniowo oblicza się dla różnych wartości czasu rozkład odkształcenia plastycznego p i na podstawie odpowiednich wzorów znajduje się naprężenie.

Nieco bardziej złożone wzory otrzymuje się wtedy, gdy $\sigma_0 > \sigma_r > 0$. Zupełnie podobnie rozwiązuje się zadanie o wirującym walcu, w którym są różne od zera wszystkie trzy główne naprężenia i wobec tego jest więcej różnych możliwości, [25].

Specjalna postać prawa wzmocnienia, przyjęta przez nas do obliczeń, odpowiada zależności odkształcenia pełzania od czasu, w ten sposób okres pełzania ustalonego nie podlega rozpatrywaniu i cała teoria staje się przydatna tylko dla niewielkich długości. Jednakże można tę teorię zastosować również do innego prawa wzmocnienia przyjmując np.

$$\dot{p} \omega(p) = \exp(s - \beta);$$

funkcja $\omega(p)$ może być dobrana w ten sposób, że przy wzroście p będzie dążyła do stałej wartości przy danym naprężeniu.

B. F. SZORR, [26], proponuje dobrą funkcję w następujący sposób:

$$\omega(p) = p^a (p < p_c)$$

$$\omega(p) = p_c^a = \text{const} \quad (p = p_c).$$

Krzywe pełzania przy takim doborze funkcji $\omega(p)$ składają się z łuków parabolicznych i związanych z nimi odcinków prostoliniowych. Wielkość p_c , okre-

śląca granicę przy przejściu z pierwszej fazy pełzania do drugiej, jest funkcją naprężenia. We wspomnianej pracy została rozwinięta metoda obliczania pełzania przy ugięciu nierównomiernie nagranych prętów o dowolnym przekroju poprzecznym.

Przedstawione powyżej przykłady wyczerpują prawie całkowicie te zastosowania teorii wzmocnienia, które zostały dotychczas opracowane. Trzeba tylko jeszcze wspomnieć o pracy F. S. CZURIKOWA, [27], ogłoszonej w roku 1949. W pracy tej równania teorii wzmocnienia dla przypadku przestrzennego są podane w nieco innej postaci. Zamiast zestawiania zależności pomiędzy składowymi prędkości odkształcenia plastycznego i składowymi naprężenia F. S. CZURIKOW wykorzystuje równania odkształceniowej teorii plastyczności. Wartość p , określająca nagromadzone odkształcenie pełzania i będąca miarą wzmocnienia, wyprowadza się za pomocą następującego wzoru:

$$p = \epsilon_t - \frac{\sigma_t}{3G}.$$

Wartość powyższa jest związana z intensywnością naprężeń prawem wzmocnienia:

$$\Phi(p, \dot{p}, \sigma) = 0.$$

Następnie CZURIKOW rozwija metodę kolejnych przybliżeń dla rozwiązania zadania o rurze z materiału nieściśliwego pod ciśnieniem wewnętrznym w warunkach odkształcenia płaskiego. CZURIKOW rozpatruje też przypadek, kiedy można pominąć odkształcenie sprężyste i kiedy obciążenia zewnętrzne są stałe. Za pomocą innych równań wykazaliśmy już, że przy tym otrzymuje się stan pełzania ustalonego.

Aby pokazać, w jaki sposób należy korzystać z wykładniczego prawa w przypadku, kiedy w materiale są obszary z małymi naprężeniami, zanalizujemy zagadnienie zgięcia pręta, mającego dwie osie symetrii, przy stałym momencie zginającym. Niech w początkowym stanie pręta będzie $\sigma = \sigma_0(z)$ oraz $p = 0$. Ten początkowy rozkład naprężeń może być następstwem odkształcenia plastycznego. Przyjmijmy, że po przyłożeniu momentu zginającego m nie zachodzą wtórne odkształcenia plastyczne. Według prawa płaskich przekrojów $\sigma = \kappa z$, zatem

$$\sigma = \kappa z + \sigma_0 - p.$$

Wprowadzając wartość σ do podstawowego równania pełzania i rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$(6.1) \quad \dot{p} p^\alpha \exp(p) = \exp(\kappa z + \sigma_0).$$

Porównując moment sił zewnętrznych z momentem sił wewnętrznych przekroju znajdziemy

$$(6.2) \quad m = \kappa \int z^2 d\omega - \int p z d\omega.$$

Całki należy obliczać nie na całej powierzchni przekroju, a tylko na tej jej części, dla której $z > z_0$. Jeśli $\dot{p}p^\alpha = 1$, to $\sigma = 0$, przy mniejszych wartościach $\dot{p}p^\alpha$ otrzymuje się wartości ujemne, co jest następstwem nieprzydatności obranego prawa pełzania dla małych naprężeń. Umówmy się, że przy $\dot{p}p^\alpha < 1$, $\sigma = 0$. Wartość z_0 znajdziemy z warunku

$$\kappa z_0 + \sigma_0 - p = 0.$$

Całkujemy (6.1) przyjmując, że w niedużym przedziale czasu κ jest stałe. Otrzymujemy

$$(6.3) \quad \chi(p_{k+1}) - \chi(p_k) = \exp(\kappa_k z + \sigma_0)(\tau_{k+1} - \tau_k).$$

W pierwszej chwili κ określa się ze wzoru (6.2) przy $p = 0$, co odpowiada sprężystemu stanowi pręta. Na podstawie wzoru (6.3) obliczamy rozkład odkształceń plastycznych po upływie niewielkiego okresu czasu τ_1 , czyli znajdujemy funkcję $p_1(z)$, określamy z_0 , obliczamy nową wartość κ według wzoru (6.2) i tak dalej.

7. Zagadnienie stateczności prętów i cienkościennych elementów konstrukcji w warunkach pełzania wyrosło całkiem niedawno w związku z rozwojem lotnictwa szybkościowego i koniecznością badania wpływu nagrzewania na wytrzymałość konstrukcji. Najpierw zagadnieniem stateczności w warunkach pełzania zajmował się A. R. RŻANICYN, [18]. Rozpatrywał on pręt ze sprężysto-lepkiego materiału, podlegającego prawu liniowemu, łączącemu naprężenie, odkształcenie i ich pierwsze pochodne względem czasu. Poczynając od 1946-1947 roku ukazuje się duża liczba amerykańskich publikacji na temat zagadnienia prętów metalowych w wysokich temperaturach. W tych pracach autorzy zajmują się badaniem zachowania się pręta ściskanego, mającego początkową krzywiznę, a nie problemem stateczności w zwykłym znaczeniu tego słowa. W latach 1948-1949 w naszych pracach dotychczas nieopublikowanych inaczej stawialiśmy zagadnienie stateczności i analizowaliśmy niektóre szczególne przypadki.

Dla wyjaśnienia istoty sprawy rozpatrzmy najpierw zagadnienie stateczności pręta w aspekcie, który jest rozwijany przez badaczy amerykańskich. Liczni autorzy wychodzą przy tym z założenia o stałości pełzania przy stałym naprężeniu. Obliczenie poszczególnych stadiów pełzania nieustalonego można przy tym tak przeprowadzić, jak to zrobił ODQUIST, [10]. Jak już wyżej powiedzieliśmy, prostoliniowy odcinek krzywej pełzania przedłuża się do przecięcia z osią rzędnych i rzeczywista krzywa pełzania zamienia się na łamaną. Początkowe odkształcenie składa się przypuszczalnie z dwu części: odkształcenia sprężystego, równego σ/E , i odkształcenia plastycznego, proporcjonalnego w pewnym stopniu do naprężenia.

Prawo pełzania według ODQUISTA ma następującą postać:

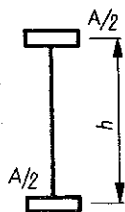
$$(7.1) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k_1 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^m \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + k_2 \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^n.$$

Współczynniki k_1 i k_2 dobiera się w taki sposób, żeby równanie (7.1) było przydatne dla rozciągania i ściskania a także dla zniszczenia. W ostatnim przypadku można przyjąć $k = 0$. W zależności od tego, czy wykładniki m i n są parzyste lub nieparzyste oraz jaki jest znak naprężenia σ , współczynniki k_1 i k_2 mogą przyjmować wartość $+1$ lub -1 .

HOFF w pracy [29] za pomocą równania (7.1) badał następujące zagadnienie. Kolumna o idealnym przekroju dwuteowym i długości l swobodnie oparta na dwóch końcach jest ściskana siłą P . Oś kolumny w stanie początkowym przedstawia sinusoidę

$$w_0 = a_0 \sin \pi x.$$

Tutaj x jest współrzędną bezwymiarową, a w bezwymiarowym ugięciem. Idealny przekrój dwuteowy przedstawiono schematycznie na rys. 12. Przyjmuje się, że ścianka przekazuje naprężenia styczne, ale pole jej powierzchni równa się zero. Każde pole powierzchni półki równe jest $A/2$, ale ich rozmiary w porównaniu z h są tak małe, że można je pominąć.



Rys. 12

Jeśli bezwymiarowym ugięciem (odniesionym do wartości $h/2$) jest w , to naprężenia w półkach są równo odpowiednio $(p/A)(1+w)$ dla wklęsłej strony i $(p/A)(1-w)$ dla strony wypukłej. Jeśli $w < 1$, to w obu półkach mamy ściskanie, ale po stronie wypukłej następuje zniszczenie i trzeba przyjąć, że współczynnik k_1 jest równy zero.

Nie zatrzymujemy się dłużej na wywodzie nieliniowego równania cząstkowego dla ugięcia w . Rozwiązania tego równania poszukuje się sposobem przybliżonym przyjmując, że $w = a \sin \pi x$, gdzie a jest funkcją czasu. Wyrzamy nieliniowe w równaniu rozkładamy w szereg FOURIERA (sinusów), przy czym wszędzie zatrzymujemy tylko pierwszy składnik. Analiza jest doprowadzona do końca w tym szczególnym przypadku, gdy $m = 1$, $n = 3$. Otrzymuje się przy tym równanie różniczkowe dla funkcji czasu a w następującej postaci:

$$(7.2) \quad \dot{a} \left[2\epsilon_E + 2\frac{\sigma}{E} - \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \left(1 + \frac{8}{3\pi} a\right) \right] = -\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^3 \left(6a + \frac{3}{2} a^3\right).$$

Tutaj $\epsilon_E = (\pi^2/4)(l/h)^2$ jest odkształceniem, odpowiadającym krytycznemu obciążeniu EULERA.

Kiedy współczynnik przy \dot{a} przyjmuje wartość zera, prędkość staje się nieskończenie wielka. Wartość ugięcia w pośrodku kolumny, odpowiadająca temu momentowi, przyjmuje się za wartość krytyczną. Określa się ją wzorem:

$$(7.3) \quad a_k = \frac{3\pi}{8} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \left[\epsilon_E + \frac{\sigma}{E} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \right].$$

Równanie (7.2) całkuje się i w wyniku otrzymuje się następującą zależność pomiędzy czasem i wielkością ugięcia:

$$(7.4) \quad t = \frac{8}{g\pi} \frac{\lambda^3}{\mu^2 \sigma} \left[\text{arc tg} \frac{2(a-a_0)}{4+aa_0} - \frac{a_k}{4} \ln \frac{a^2(a_0^2+4)}{a_0^2(a^2+4)} \right].$$

Podstawiając wartość krytyczną ugięcia, znalezionej według wzoru (7.3), do wzoru (7.4) znajdziemy krytyczną wartość czasu, przy której szybkość ugięcia staje się nieskończenie duża. Zauważmy, że czas krytyczny zależy od logarytmu ugięcia początkowego a_0 ; dzięki temu powyższa zależność jest dość słaba i i w praktyce do obliczania kolumn trzeba znać tylko rząd możliwych wartości początkowego ugięcia.

Przytoczone powyżej rozumowanie jest słuszne wtedy, kiedy wartość a_k , podana we wzorze (7.3), jest mniejsza od jedności. Istotnie, tylko przy zachowaniu tego warunku naprężenia po stronie wypukłej pozostają naprężeniami ściskającymi, tak jak to przewidywano przy wyprowadzeniu równania (7.2). W przeciwnym przypadku trzeba przede wszystkim znaleźć tę wartość czasu, kiedy naprężenie w półce zmienia znak. Oznaczmy teraz odpowiednią wartość t przez t' . Dla jej określenia należy przyjąć we wzorze (7.4) $a = 1$. Przy $t > t'$ w części półki przytkającej do środka kolumny naprężenia są rozciągające, w pozostałych częściach ściskające. Zagadnienie określenia krytycznego czasu staje się przy tym znacznie bardziej złożone. HOFF unika dokładniejszego rozwiązania, otrzymuje jednak dla czasu krytycznego górną i dolną wartość. Górną granicę znajduje się za pomocą równań (7.3) i (7.4); stosuje się te równania nie zważając na to, że w części kolumny naprężenie zmieniło znak. W celu określenia dolnej granicy przyjmuje się, że równanie dla przypadku, kiedy w jednej z półek działa naprężenie rozciągające, jest słuszne dla całej kolumny, a nie tylko dla jej części środkowej. Nie zatrzymując się na szczegółach obliczeń zauważmy, że w przytoczonym przez HOFFA przykładzie otrzymano

$$16,3 > t_{kr} > 15,35 \text{ [minut].}$$

Jak widać, wartości powyższe są bliskie.

W podanym przykładzie HOFFA opuściliśmy niektóre szczegóły, odnoszące się do obliczania początkowego odkształcenia plastycznego, zachodzącego w procesie obciążenia. Jest to konieczne dla znalezienia wartości a_0 , która nie przedstawia początkowego odchylenia od prostoliniowej postaci pręta, nadanej prętowi przy jego wykonaniu, lecz początkowe ugięcie w pierwszym momencie po przyłożeniu obciążenia.

Zauważmy, że ugięcie krytyczne, odpowiadające nieskończenie dużej szybkości odkształcenia, może być dowolnie duże. Tak więc, jeśli naprężenie w jednej z półek zmienia znak, ugięcie jest większe niż połowa wysokości dwuteownika i ścisła analiza odnosząca się do tego przypadku nie jest dla celów

praktycznych uzasadniona. Można wtedy po prostu podstawić do wzoru (7.4) dla określenia czasu krytycznego pewną umownie przyjętą wielkość a , którą uważa się za krańcowo dopuszczalną. Przy dużych ugięciach może być istotna także nieliniowość geometryczna. W każdym przypadku czas krytyczny, znaleziony zgodnie z przedstawioną metodą, należy rozpatrywać jako górną granicę dopuszczalnego przedłużenia działań obciążenia na kolumnę.

Nieskończenie dużą szybkość ugięcia w analizie HOFFA otrzymuje się przy pewnej określonej końcowej jego wartości i przedłużenie rozwiązania równania różniczkowego poza punkt krytyczny jest pozbawione sensu, zatem zagadnienie dalszej zmiany ugięcia pozostaje otwarte. Z drugiej strony w wielu pracach, opartych na prostych założeniach wyjściowych, jako krytyczny przyjmuje się czas, w którym ugięcie zdąży do nieskończoności, czyli w istocie rzeczy inaczej ujmuje się zagadnienie stateczności.

Najprostsze rozwiązanie tego rodzaju podane przez KEMPNERA przytoczymy w tym celu, aby zilustrować myśl przewodnią tej metody. Przypuśćmy, że materiał podlega prawu pełzania ustalonego, zatem

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^n.$$

Dla ugięcia pręta o idealnym przekroju dwuteowym, ściskanego siłą podłużną, otrzymamy następujące równanie:

$$\dot{\epsilon}_0 [(1-w)^n - (1+w)^n] = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon_E}{\epsilon_0} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}.$$

Tutaj $\dot{\epsilon}_0$ jest szybkością pełzania pręta przy ściskaniu osiowym. Przyjmując jak poprzednio, że pręt zgina się według sinusoidy, możemy rozwiązać to równanie różnymi metodami przybliżonymi. Najprostszy sposób polega na tym, aby uczynić zadość temu równaniu tylko w środkowym przekroju pręta. Przy $n = 3$ dla ugięcia w pośrodku otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{a} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_E} (3a + a^3).$$

Całkując je znajdujemy

$$t = \frac{\epsilon_E}{\epsilon_0} \int_{a_0}^a \frac{da}{3a + a^3}.$$

Tę całkę łatwo jest obliczyć przy a dążącym do nieskończoności; jej wielkość dąży do wartości skończonej, a czas krytyczny określa się w następujący sposób:

$$t_{kr} = \frac{1}{6} \frac{\epsilon_E}{\dot{\epsilon}_0} \ln \frac{3 + a_0^2}{3a_0^2}.$$

Zupełnie podobnie można określić czas krytyczny uwzględniając fazę pełzania nieustalonego na podstawie teorii płynięcia, biorącej pod uwagę zmianę prędkości pełzania, [31].

Liczne prace amerykańskie, szwedzkie i innych autorów w gruncie rzeczy rozwijają te same idee. Uwzględniają one odkształcenie sprężyste, nieustalone stadium pełzania na podstawie różnych teorii pełzania, konstruują rozwiązania dla materiałów z różnorodnymi charakterystykami, badają pręty o pełnym przekroju różnorodnych kształtów zamiast idealnego dwuteownika.

Zagadnienie stateczności elementów konstrukcji w warunkach pełzania może być także rozpatrywane w ujęciu do pewnego stopnia analogicznym do klasycznego ujęcia zagadnienia stateczności sprężystej. Wracając do przypadku pręta przypuścmy, że jest on idealnie prosty i ściskany siłą osiową. W pewnej chwili nadano mu małe odchylenie. Zagadnienie polega na tym, czy to małe odchylenie będzie z biegiem czasu rosło, czy się zmniejszało. W pracy [32] zagadnienie postawione w podobny sposób rozwiązuje się na podstawie założenia o słuszności mechanicznego równania stanu, to jest za pomocą teorii wzmocnienia. Początkowo będziemy uważali, że w równaniu

$$\Phi(\sigma, p, \dot{p}) = 0$$

$p = \epsilon - (\sigma/E)$, czyli że będziemy mieli do czynienia z natychmiastowym odkształceniem sprężystym. Dla małych zmian naprężeń i odkształceń otrzymamy metodą wariacji następujące równanie:

$$(7.5) \quad \lambda \delta\sigma + \mu \delta p + \nu \delta \dot{p} = 0.$$

Tutaj λ , μ i ν oznaczają poszczególne pochodne funkcji Φ względem σ , p i \dot{p} . Wielkości λ , μ i ν określa się na podstawie procesu ruchu; w ten sposób stają się one znanymi funkcjami czasu.

Na mocy zależności (7.5) można ułożyć równanie różniczkowe drgań poprzecznych pręta przy udziale siły podłużnej. Ma ono następującą postać:

$$\left[(\mu - E\lambda) + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} \right] = 0.$$

Dla pręta opartego na dwu końcach można przyjąć

$$w = T(t) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Dla funkcji $T(t)$ otrzymujemy następujące równanie:

$$\ddot{\tau} + \frac{\mu - E\lambda}{\nu} \dot{\tau} + \frac{\pi^2}{\gamma F} (P_e - P) \dot{\tau} + \frac{\pi^2}{\gamma F \nu} [E\lambda P + \mu (P_e - P) - \nu \dot{P}] \tau = 0.$$

Tutaj P_e jest krytyczną siłą EULERA. Warunkiem stateczności ruchu określonego równaniem różniczkowym jest warunek

$$(7.6) \quad \frac{P}{P_e} < \frac{1}{1 - EI\mu}.$$

We wzorze powyższym przyjęto $\dot{P} = 0$. Uproszczone ujęcie zagadnienia stateczności polega na tym, że w równaniu ugięcia odrzuca się części inercyjne. Wtedy dla funkcji τ otrzymuje się równanie pierwszego stopnia. Warunek stateczności w takim quasi-statycznym ujęciu jest tym samym warunkiem (7.6), jednak ujęcie zagadnienia jest przy tym niepoprawne w tym sensie, że przy początkowym ugięciu pręt nie będzie się znajdował w równowadze.

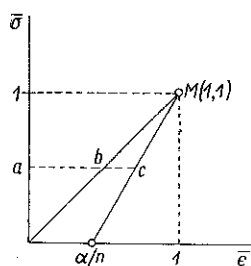
Jeśli przyjąć prawo pełzania w postaci

$$\dot{p}^a = A\sigma^n,$$

to warunek stateczności sprowadza się do następującej postaci:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\alpha}{n} + \bar{\sigma} \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right).$$

Tutaj $\bar{\epsilon}$ i $\bar{\sigma}$ oznaczają odpowiednio odkształcenia sprężyste i naprężenie w momencie utraty stateczności w sensie EULERA. Ten warunek jest uwidoczniiony w płaszczyźnie $\bar{\epsilon}-\bar{\sigma}$, przez prostą przechodzącą przez punkt (1.1) i odcinającą odcinek równy α/n na osi rzędnych. Przy danym $\bar{\sigma} < 1$ odcinek ab przedstawia natychmiastowe odkształcenie sprężyste, odcinek bc odkształcenie pełzania (rys. 13). W tym ujęciu była rozważana stateczność płyt zarówno z punktu



Rys. 13

widzenia teorii płynięcia jak i teorii typu odkształceniowego. Otrzymywano przy tym nieco odmienne wyniki, jednak we wszystkich przypadkach końcowy wzór pozwala na analogiczne wyjaśnienie zjawiska jak dla pręta. W płaszczyźnie $\bar{\sigma}-\bar{\epsilon}$ zawsze może być skonstruowana krzywa przechodząca przez punkt (1.1), oddzielająca obszar stanów statecznych od obszaru niestateczności.

Jeśli przy obciążeniu modelu powstaje natychmiastowe odkształcenie plastyczne, to quasi-statyczna analiza nie ulega zmianie, tylko zamiast siły krytycznej EULERA

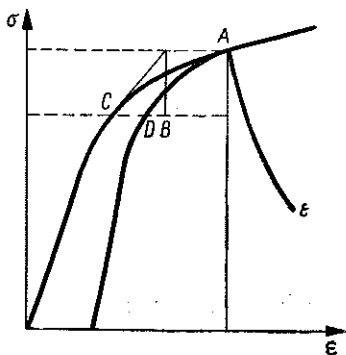
należy wziąć pod uwagę siłę krytyczną, odpowiadającą modułowi odkształcenia postaciowego na krzywej natychmiastowego odkształcenia, a zamiast E do warunku stateczności należy wprowadzić tenże moduł odkształcenia postaciowego $E' = 1/\Psi'(\sigma)$. Łatwo znaleźć w tym przypadku wzór na odkształcenie krytyczne:

$$\epsilon = \Psi(\sigma) + \frac{\alpha}{n} (\sigma_0 - \sigma) \frac{1}{E'}.$$

Tutaj σ_0 jest naprężeniem krytycznym przy odkształceniu natychmiastowym, określonym dla modułu odkształcenia postaciowego. Niech na krzywej odkształcenia natychmiastowego punkt A o rzędnej σ_0 odpowiada doraźnej utracie stateczności. Przeprowadźmy styczną do krzywej w punkcie c , odpowiadającym naprężeniu σ (rys. 14), przedłużmy tę styczną do przecięcia z linią poziomą, przeprowadzoną przez punkt A , zrzućmy otrzymany odcinek na linię

poziomą i zmniejszmy ten rzut CB w stosunku do a/n . Otrzymany punkt D będzie leżał na krzywej oddzielającej obszar stanów statecznych od obszaru stanów niestatecznych. Ta krzywa nie ma tak ogólnego znaczenia jak prosta na rys. 13 dla obszaru sprężystego, gdyż odnosi się do prętów określonych rozmiarów.

Dane doświadczalne świadczą o tym, że przedstawiona metoda daje wartości mniejsze dla czasu krytycznego. Z jednej strony zależy to od tego, że chwila utraty stateczności w podanym sensie jest chwilą możliwej bifurkacji form ruchu i przytoczona powyżej analiza nie upoważnia do sądu o charakterze dalszego ruchu. Równocześnie określany na podstawie doświadczenia stan krytyczny odpowiada chwili, kiedy zgięcie jest już dostatecznie duże. Z drugiej strony równanie stanu dla małych obciążeń i odciążenia jest oczywiście niedość dokładne i efekty wtórne, nie odgrywające roli przy określeniu naprężeń i odkształceń w konstrukcjach, są istotne przy rozwiązywaniu zagadnień stateczności.



Rys. 14

Niedostatkim przedstawionej teorii jest konieczność uciekania się do dynamicznego ujęcia zagadnienia wtedy, gdy zjawisko zgodnie ze swą istotą jest zjawiskiem statycznym. Dlatego robiono próby modyfikacji kryteriów stateczności w warunkach pełzania. Na przykład S. A. SZESTERNIKOW, [33], odchodząc od zlinearyzowanego równania (7.5) otrzymał równanie podłużnego ugięcia pręta z małą krzywizną początkową. Ugięcia takiego pręta rosną z chwilą przyłożenia obciążenia, ale prędkość ugięcia początkowo się zmniejsza, następnie jednak od pewnego momentu zaczyna wzrastać. Ten czas przyjmuje się też za czas krytyczny, przy czym okazuje się, że jest on większy od czasu, który znajduje się za pomocą równania (7.6).

GERARD, [34], przedstawił empiryczne kryterium stateczności w warunkach pełzania, polegające na tym, że wartość odkształcenia krytycznego nie zależy od długości działania obciążenia. Na rysunku 14 kryterium GERARDA odpowiada prosta pionowa, przechodząca przez punkt A .

Rozpatrzmy teraz rozwiązanie zagadnienia stateczności pręta ściskanego na podstawie teorii dziedziczności. Podstawowe równanie tej teorii jest następujące:

$$\varphi(\epsilon) = \sigma + \int_0^{\epsilon} k(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

Moment czasu $t = 0$ odpowiada początkowi działania obciążenia. Krzywa $\sigma = \varphi(t)$ przedstawia krzywą odkształcenia natychmiastowego. Wariacje naprężeń i odkształceń są związane ze sobą następującą zależnością:

$$\varphi'(\epsilon) \delta\epsilon = \delta\sigma + \int_0^{\epsilon} k(t-\tau) \delta\sigma(\tau) d\tau.$$

Przyjmujemy, że wariacje są nieskończenie małe w tym czasie, gdy odkształcenie pod wpływem ściskania odbywa się ze skończoną szybkością i nigdzie nie ma odciążenia. Oczywiście tym sposobem można określić chwilę początkową bifurkacji, ale na tej podstawie nie można wnioskować o dalszym przebiegu ugięcia. Jeśli przyjmiemy $\delta\varepsilon = \kappa z$, to stąd znajdziemy zależność między momentami gnącymi i krzywizną:

$$-\varphi' \kappa I = m + \int_0^t \kappa(t-\tau)m(\tau) d\tau.$$

Przyjmujemy $m = Pw$, $\kappa = \partial^2 w / \partial x^2$. Otrzymujemy następujące równanie całkowo-różniczkowe:

$$I\varphi' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P \left[w + \int_0^t k(t-\tau)w(\tau) d\tau \right].$$

Przedstawmy teraz w w postaci iloczynu dwu funkcji, funkcji czasu i funkcji współrzędnej:

$$w = v(x)\theta(t).$$

Zmienne rozdzielają się i otrzymujemy dwa następujące równania:

$$I\varphi' w'' + P\varepsilon w = 0,$$

$$\theta(1-c) + \int_0^t k(t-\tau)\theta(\tau) d\tau = 0.$$

Pierwsze równanie ma rozwiązanie nietrywialne, odpowiadające warunkom granicznym, jeśli $c = P_0/P$, gdzie P_0 jest siłą krytyczną określoną według modułu odkształcenia postaciowego na krzywej odkształcenia natychmiastowego. Drugie równanie można przedstawić w następującej postaci:

$$\theta \left(1 - \frac{P}{P_0} \right) + \int_0^t k(t-\tau)\theta(\tau) d\tau = 0.$$

To równanie całkowe należy do typu

$$(7.7) \quad f(t)u(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau = 0.$$

Jeśli jądro jest regularne i funkcja $f(t)$ jest tożsamościowo równa zero przy $t = t_1 > 0$, to można wykazać, że równanie (7.7) ma rozwiązanie nietrywialne:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_1), \\ c & (t - t_1)^\alpha + \dots \end{cases}$$

Tutaj c jest stałą dowolną, $\alpha = -1 + k(0)/f'(t_1)$. Takie rozwiązanie jest możliwe tylko w tym przypadku, kiedy wykładnik potęgi jest dodatni, a przy $t = t_1$ za-

chodzi bifurkacja rozwiązania z zachowaniem ciągłości. Jeśli a jest ujemne, to równanie niejednorodne

$$f(t)u(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau = h(t)$$

ma ciągle rozwiązanie przy $t < t_1$, które dąży do nieskończoności jak $(t_1 - t)^a$, gdy t zbliża się do t_1 .

Zilustrujemy te właściwości równania typu (7.7) i (7.8) na najprostszych przykładach. Weźmy zatem dla przykładu równanie

$$(t-1)u - 2 \int_0^t u(\tau) d\tau = 0.$$

Tutaj $t_1 = 1$, $f'(1) = 0$, $k = 2$, zatem $a = 1$. Łatwo można sprawdzić, że równanie ma rozwiązanie ciągłe

$$u = \begin{cases} 0 & (t < 1) \\ t-1 & (t > 1). \end{cases}$$

Rozpatrzmy teraz drugi przykład:

$$(t-1)u + 2 \int_0^t u(\tau) d\tau = 1.$$

W tym przypadku $a = -3$. Sprawdzając powyższe bezpośrednio upewniamy się, że to równanie ma następujące rozwiązanie:

$$u = \frac{1}{(t-1)^3} \quad \text{przy } t < 1.$$

Niejednorodne równanie całkowe typu (7.7) otrzymuje się wtedy, kiedy pręt ma krzywiznę początkową albo gdy siła przyłożona jest ekscentrycznie. W zagadnieniach z zakresu stateczności okazuje się, że wykładnik a jest ujemny czyli że utratę stateczności należy rozumieć nie w sensie bifurkacji, lecz w sensie dążenia do nieskończoności ugięcia przy małym odchyleniu początkowym. Przy tym wartość odkształcenia krytycznego określa się tylko krzywą natychmiastowego odkształcenia materiału niezależną od ugięcia początkowego. Na rysunku 14 krzywa stanów końcowych biegnie od punktu A w prawo (krzywa AE). W ten sposób dwie teorie, teoria wzmocnienia i teoria dziedziczenia, prowadzą do różnych zasadniczo określeń czasu krytycznego i dają bardzo różne wartości dla odkształcenia krytycznego. Wyniki otrzymane zgodnie z kryterium GERARDA znajdują się mniej więcej w pośrodku.

Literatura cytowana w tekście

- [1] Л. М. КАЧАНОВ, *Некоторые вопросы теории ползучести*, ГТТИ, 1949.
- [2] Н. М. БЕЛЯЕВ, *Применение теории пластических деформаций к расчетам на ползучесть деталей при высоких температурах*, Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1943.
- [3] *Расчеты на прочность в машиностроении*, т. 2, М., Машгиз, 1958.
- [4] В. И. ДАНИЛОВСКАЯ, Г. М. ИВАНОВА, Ю. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть и релаксация хромомolibденовой стали*, Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1955.
- [5] V. VOLTERRA, *Fonctions de ligne*, Paryż 1913.
- [6] Ю. Н. РАБОТНОВ, *Равновесие упругой среды с последствием*, Прикл. Мат. Мех., 1, 12 (1948).
- [7] F.H. TURNER, K.E. BLUMQUIST, *A Study of the Applicability of Rabotnov's Creep Parameter for Aluminium Alloy*, J. Aeronaut. Sci., 12, 23 (1956).
- [8] Ю. Н. РАБОТНОВ, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Вестн. Моск. Унив., № 10, 1948.
- [9] А. М. ЖУКОВ, Ю. Н. РАБОТНОВ, Ф. С. ЧУРИКОВ, *Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести*, Инж. сборн., т. 17, изд. АН СССР, 1953.
- [10] F.K.G. ODQUIST, *Influence of Primary Creep on Column Buckling*, J. appl. Mech., 3, 21(1954).
- [11] PAO ION-HAU, I. MARIN, *An Analytical Theory of the Creep Deformation of Materials*, J. appl. Mech., 2, 20, (1953).
- [12] С. А. ШВСТЕРИКОВ, *Об одном условии для законов ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1959.
- [13] Г. М. ИВАНОВА, *Ползучесть сплава ЭИ-437 б при переменных температурах*, Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1959.
- [14] N.I. HOFF, *The Necking and the Rupture of Rod Subjected to Constant Tensile Loads*, J. appl. Mech., 1, 20 (1953).
- [15] В. С. НАМЕСТНИКОВ, *О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния*, Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1957.
- [16] В. С. НАМЕСТНИКОВ, *О ползучести при переменных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния*, Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1957.
- [17] A.E. JOHNSON and N.E. FROST, *Note on the Fracture under Complex Stress Creep Conditions of an 0,5% Molybdenum Steel at 550° and a Commercially Pure Copper at 250° C*, NPL, 2, 31 (1954).
- [18] В. П. СДОВЫРЕВ, *Критерий длительности прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 5, 1959.
- [19] А. Г. КОСТЮК, *Напряжения во вращающемся диске при ползучести*, Инж. сборн., т. 15, изд. АН СССР, 1953.
- [20] А. В. АМЕЛЬЯНЧИК, *Расчет на прочность дисков турбомашин на математической машине*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 1, 1959.
- [21] П. Я. БОГУСЛАВСКИЙ, Д. П. ВАРШАВСКИЙ, И. Г. ПОЛУМОДВИНОВА, *Моделирование деформированного состояния деталей сложной формы в условиях ползучести*, Теплоэнергетика, № 5, 1955.
- [22] Б. П. СОКОЛОВ, *Определение напряжений и деформаций в плоских деталях с помощью мелких сеток*, Энергомашинностроение, № 11, 1956.
- [23] В. П. РАВИНОВИЧ, Ю. Н. РАБОТНОВ, *Прочность турбинных дисков в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 1. 1959.

- [24] Г. Н. МЕРИНОВ и В. П. РАВИНОВИЧ, *Разгонная установка ЦНИИТМАШ*, филиал ВИНТИ, № 59-102/5, 1959.
- [25] Ю. Н. РАБОТНОВ, *О некоторых возможностях хитисания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов*, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1957.
- [26] Б. Ф. ШОРР, *К расчету на неустановившуюся ползучесть неравномерно нагретых стержней произвольного поперечного сечения*, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 1, 1959.
- [27] Ф. С. ЧУРИКОВ, *К вопросу о напряжениях и деформациях при высокой температуре*, Вест. Моск. Унив., № 2, 1949.
- [28] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов*, Докл. АН СССР, 25, 52 (1946).
- [29] N.I. HOFF, *Creep Buckling*, Aeronaut. Quart., 7 (1956).
- [30] J. КЕМПNER, *Creep Bending and Buckling of Non-Linear Visco-Elastic Columns*, NASA TN 3137, January 1954.
- [31] В. М. РОЗЕНБЛУМ, *Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести*, Инж. сборн., т. 18, Изд. АН СССР, 1954.
- [32] Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. Мат. Мех., 3, 21 (1957).
- [33] С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *О критерии устойчивости при ползучести*, Прикл. Мат. Мех., 6, 23 (1959).
- [34] G. GERARD, *A Creep Buckling Hypothesis*, J. Aeronaut. Sci., 9, 23 (1956).

Резюме

ПОЛЗУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ И РАСЧЕТЫ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

Дается обзор различных теорий ползучести, находящих применение при расчете изделий, работающих при высоких температурах.

Анализируются условия, при которых осуществляется установившаяся ползучесть. Вводится понятие квазиустановившейся ползучести, когда напряжения неизвестны, но скорости деформации непостоянны. Показывается, что в ряде задач стационарного энергомашиностроения простейшие методы расчета приводят к достаточно точным результатам и могут служить основой для суждения о длительной прочности. Это положение иллюстрируется опытными данными по разрушению вращающихся дисков, расчет на основе теории ползучести позволяет довольно надежно предсказать разрушение.

Излагаются некоторые методы расчета дисков на основе теории упрочнения, учитывающей перераспределение напряжений, что особенно важно для анализа нестационарных режимов.

Рассматривается вопрос об устойчивости в условиях ползучести, потеря устойчивости сжатого стержня анализируется на основе предложенной ранее автором наследственной теории.

Summary

CREEP OF METALS AND CREEP COMPUTATION

The author gives a survey of various creep theories used for the computation of structures working at high temperatures.

The conditions are analyzed under which steady-state creep takes place. The notion of quasi-steady-state creep is introduced in which the stresses are unknown and the strain rates are not constant. It is seen that in a number of machine design problems the most simple computation methods lead to sufficiently accurate results and may constitute a basis for strength determination. This statement is illustrated by experimental data from the destruction tests of rotating discs. A computation based on the creep theory enables us to foretell in a comparatively accurate manner the destruction.

The author gives some computation methods of discs on the basis of the theory of strain-hardening taking the stress-distribution into consideration, which is particularly important for the analysis of non-steady states.

Also the stability problem under the conditions of creep is considered. The stability loss of a compressed bar is analyzed on the basis of the inheritance theory presented previously by the author.

INSTYTUT HYDRODYNAMIKI W NOWOSYBIRSKU
SO AN ZSRR

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 marca 1960 r.
