

**RYSZARD GANOWICZ**

**PASMO PŁYTOWE Z ŻEBRAMI JEDNOSTRONNYMI**

**ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE  
CLVII**

**TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960**

Praca niniejsza ma na celu wykazanie, że wszystkie wielkości statyczne dla pasma płytowego wolnopodpartego, wzmocnionego żebrami jednostronnymi można przedstawić w postaci wzorów zamkniętych.

Rozwiązanie powyższego problemu uzyskano przy następujących założeniach:

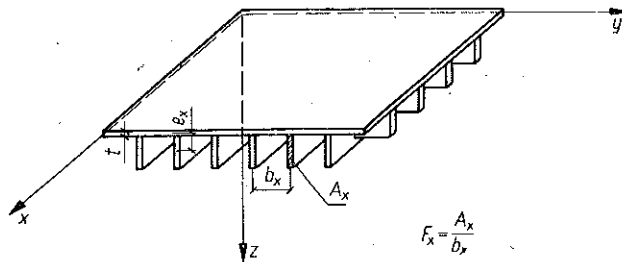
- (1) płyta spełnia wszystkie założenia teorii płyt cienkich,
- (2) żebra (traktowane jako pręty) są rozłożone w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach, z których jeden jest równoległy do osi pasma (rys. 1 i 3),
- (3) rozstaw i przekrój żeber w danym kierunku jest jednakowy,
- (4) żebra są symetryczne i nie posiadają sztywności na skręcanie oraz sztywności na zginanie w kierunku poziomym,
- (5) rozstaw żeber jest mały w porównaniu z szerokością pasma (model ciągły),
- (6) płyta i żebro w miejscu styku mają jednakowe przemieszczenia.

Przybliżone rozwiązanie tego problemu bez uwzględnienia niesymetrycznego rozmieszczenia żeber względem powierzchni środkowej płyty otrzymać można traktując płytę z żebrami jednostronnymi jako płytę ortotropową, [1]. Zadanie sprowadza się wtedy do znalezienia stałych występujących w równaniu płyty ortotropowej, [2]. Wielkości statyczne dla pasma wolnopodpartego otrzymać można w postaci wzorów zamkniętych korzystając z rozwiązań podanych przez W. NOWACKIEGO, [3].

Zagadnienie płyt wzmocnionych żebrami jednostronnymi przy przyjęciu modelu ciągłego było rozpatrywane przez PFLÜGERA, [4], i TRENKSA, [5]. PFLÜGER zajmował się zagadnieniem wybożenia. TRENKS korzystając z zależności podanych przez PFLÜGERA sprowadził układ trzech równań różniczkowych na przemieszczenia  $u$ ,  $v$ ,  $w$  punktu powierzchni środkowej płyty do jednego równania na przemieszczenia pionowe  $w$ . Rozwiązał on pasmo płytowe i płytę kwadratową przy obciążeniu siłą skupioną. Rozwiązanie uzyskał w postaci szeregów trygonometrycznych. Szeregi te jednak dla wielkości statycznych są wolnozbieżne w otoczeniu punktu działania siły skupionej.

Zagadnienie płyt z żebrami (model ciągły) było także tematem prac E. GIENECKEGO, [6], i P. WILDEGO, [7], nie podali oni jednak szczegółowych rozwiązań dotyczących płyt obciążonych siłą skupioną.

Praca niniejsza oparta jest na zależnościach podanych przez PFLÜGERA, [4]. Jednak w odróżnieniu od TRENKSA sprowadzono układ równań różniczkowych na przemieszczenia  $u$ ,  $v$ ,  $w$  nie do równania na przemieszczenia pionowe, lecz do równania na funkcję przemieszczeń. Po przyjęciu rozwiązania w postaci szeregu trygonometrycznego otrzymano funkcje, które można było przedstawić w postaci zamkniętej.



Rys. 1

1. Wychodząc układu równań różniczkowych podanych przez PFLÜGERA, ([4] [(10) s. 116]) i przyjmując oznaczenia (rys. 1):

$$(1.1) \quad \begin{cases} t_x = t + (1 - \nu^2)F_x, & t_y = t + (1 - \nu^2)F_y, & \bar{S}_x = (1 - \nu^2)S_x, \\ \bar{S}_y = (1 - \nu^2)S_y, & \bar{I}_x = I + (1 - \nu^2)I_x, & \bar{I}_y = I + (1 - \nu^2)I_y, & I = \frac{t^3}{12} \end{cases}$$

otrzymano następujący układ równań różniczkowych:

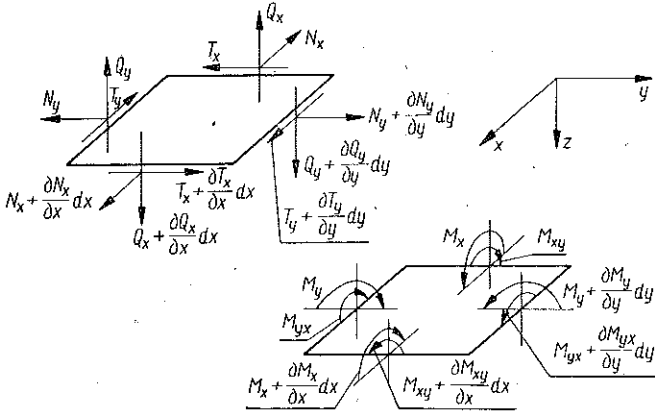
$$(1.2) \quad \begin{cases} \left( t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1 + \nu}{2} t \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \\ \frac{1 + \nu}{2} t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( t_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v - \bar{S}_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0, \\ -\bar{S}_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \bar{S}_y \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \left( \bar{I}_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{I}_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w = \frac{q(x, y)}{E}. \end{cases}$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

- $q(xy)$  obciążenie pionowe na jednostkę powierzchni,
- $t$  grubość płyty,
- $F_x, F_y$  pole powierzchni przekrojów żeber,
- $S_x, S_y$  momenty statyczne powierzchni przekrojów żeber względem osi przechodzących przez powierzchnię środkową płyty,
- $I_x, I_y$  momenty bezwładności powierzchni przekrojów żeber względem osi przechodzących przez powierzchnię środkową płyty,
- $u, v, w$  składowe przemieszczenia punktu powierzchni środkowej płyty w kierunku osi  $x, y, z$ .

Powyżej podane charakterystyki przekrojów żeber odnoszą się do jednostki długości. Indeks  $x$  lub  $y$  oznacza kierunek, do jakiego jest równoległe dane żebro.

W płycie posiadającej żebra jednostronne istnieją naprężenia w jej płaszczyźnie środkowej w związku z tym powstaną dodatkowo, oprócz momentów



Rys. 2

i sił poprzecznych, siły normalne i siły tnące poziome. Wszystkie wielkości statyczne odniesione do płaszczyzny środkowej płyty wyznaczyć można z następujących zależności:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( t_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu t \frac{\partial v}{\partial y} - \bar{S}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ N_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left( t_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu t \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{S}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ T_x = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = T_y, \\ M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( -\bar{I}_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \bar{S}_x \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ M_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left( -\bar{I}_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{S}_y \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ M_{xy} = -\frac{E}{1+\nu} I \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M_{yx}, \\ Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{array} \right.$$

Dodatnie kierunki wielkości statycznych zaznaczono na rys. 2.

Wprowadzając oznaczenia na następujące operatory:

$$(1.4) \quad \begin{cases} L_{11} = t_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{13} = L_{31} = -\bar{S}_x \frac{\partial^3}{\partial x^3}, & L_{22} = t_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_{23} = L_{32} = -\bar{S}_y \frac{\partial^3}{\partial y^3}, & L_{33} = \bar{I}_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{I}_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{cases}$$

można układ równań (1.2) zapisać symbolicznie w postaci

$$(1.5) \quad \begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = 0, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = \frac{q(xy)}{E}. \end{cases}$$

Przez wprowadzenie funkcji przemieszczeń ([8], s. 27-31) układ równań (1.5) można sprowadzić do jednego równania różniczkowego. Składowe przemieszczenia określone zostaną za pomocą następujących operacji różniczkowych na funkcji przemieszczeń:

$$(1.6) \quad u = \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \end{vmatrix} F, \quad v = - \begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} \\ L_{21} & L_{23} \end{vmatrix} F, \quad w = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} F.$$

Łatwo sprawdzić, że przez powyższe określenie składowych przemieszczeń spełnione zostały dwa pierwsze równania (1.5), a równanie ostatnie przedstawia poszukiwane równanie różniczkowe na funkcję przemieszczeń. Można je zapisać za pomocą wyznacznika operatorowego w następujący sposób:

$$(1.7) \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} F = \frac{q(xy)}{E}.$$

Po wykonaniu operacji różniczkowych (1.6) otrzymano określenie składowych przemieszczeń:

$$(1.8) \quad \begin{cases} u = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_y \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + \bar{S}_x t_y \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + \bar{S}_x \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^5}{\partial x^5} \right) F, \\ v = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + \bar{S}_y t_x \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \bar{S}_y \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) F, \\ w = \left[ \frac{1-\nu}{2} t t_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (t_x t_y - \nu t^2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} t t_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] F. \end{cases}$$

Równanie różniczkowe (1.7) po wykonaniu operacji różniczkowych można napisać w postaci:

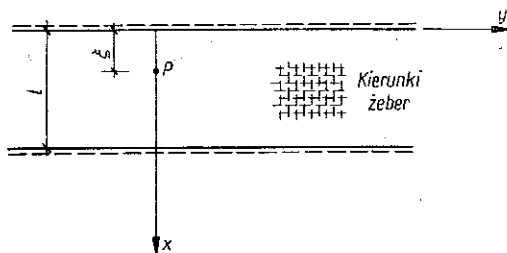
$$(1.9) \quad \frac{\partial^8 F}{\partial y^8} + a \frac{\partial^8 F}{\partial y^6 \partial x^2} + b \frac{\partial^8 F}{\partial y^4 \partial x^4} + c \frac{\partial^8 F}{\partial y^2 \partial x^6} + d \frac{\partial^8 F}{\partial x^8} = \frac{[2q(x, y)]}{Et(1-\nu)(I_y t_y - \bar{S}_y^2)},$$

gdzie współczynniki  $a, b, c, d$  są zależne tylko od charakterystyk przekroju zębra i płyty. Obliczyć je można z następujących zależności:

$$(1.10) \quad \begin{cases} a = \frac{2}{t(1-\nu)} \frac{\bar{I}_y(t_x t_y - \nu t^2) + t t_y (1-\nu) I - t_x \bar{S}_y^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}, \\ b = \frac{2}{t(1-\nu)} \frac{2I(t_x t_y - \nu t^2) + \frac{t t_x}{2} (1-\nu) \bar{I}_y + \frac{t t_y}{2} (1-\nu) \bar{I}_x + t(1+\nu) \bar{S}_x \bar{S}_y}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}, \\ c = \frac{2}{t(1-\nu)} \frac{\bar{I}_x(t_x t_y - \nu t^2) + t t_x (1-\nu) I - t_y \bar{S}_x^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}, \\ d = \frac{\bar{I}_x t_x - \bar{S}_x^2}{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}. \end{cases}$$

2. Dla przypadku pasma płytowego wolnopodpartego należy przedstawić obciążenie w postaci szeregu (rys. 3):

$$(2.1) \quad q(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \sin a_n x, \quad a = \frac{n\pi}{l}$$



Rys. 3

i przyjąć rozwiązanie równania różniczkowego (1.9) w postaci:

$$(2.2) \quad F(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin a_n x.$$

Spełnione zostaną w ten sposób warunki wolnego podparcia na krawędziach podłużnych pasma z zastrzeżeniem, że istnieją wzdłuż tych krawędzi

przepony nieskończenie sztywne w swojej płaszczyźnie i doskonale giętke na zginanie. Przepony te przeniosą obciążenie sił tnących poziomych:

$$[T_{xy}]_{x=0} \neq 0, \quad [T_{xy}]_{x=l} \neq 0.$$

W dalszym ciągu rozpatrywane będzie pasmo obciążone siłą skupioną w punkcie  $(\xi, 0)$ , stąd  $q(xy) = 0$ .

Po wstawieniu (2.2) do (1.9) otrzymano równanie różniczkowe zwyczajne przedstawione poniżej:

$$(2.3) \quad F_n^{VI} - a\alpha_n^2 F_n^{IV} + b\alpha_n^4 F_n^{IV} - c\alpha_n^6 F_n^{II} + d\alpha_n^8 F_n = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania będzie funkcja

$$(2.4) \quad F_n(y) = A_n e^{-r_1 \alpha_n y} + B_n e^{-r_2 \alpha_n y} + C_n e^{-r_3 \alpha_n y} + D_n e^{-r_4 \alpha_n y} + \\ + E_n e^{r_1 \alpha_n y} + F_n e^{r_2 \alpha_n y} + G_n e^{r_3 \alpha_n y} + H_n e^{r_4 \alpha_n y},$$

gdzie  $r_1^2 = z_1$ ,  $r_2^2 = z_2$ ,  $r_3^2 = z_3$ ,  $r_4^2 = z_4$  są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$(2.5) \quad f(z) = z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0.$$

Do rozwiązań ogólnych przyjęto założenie, że pierwiastki równania są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi; w dalszym ciągu pracy będą rozpatrzone przypadki pierwiastków wielokrotnych i zespolonych.

Z warunków dla  $y \rightarrow \infty$  otrzymano  $E_n = F_n = G_n = H_n = 0$ . Pozostałe stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  należy wyznaczyć z warunków dla prostej  $y = 0$  (rys. 3).

Warunki te są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{cases} 1. \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, & 3. \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \\ 2. [T_{xy}]_{y=0} = 0, & 4. [\bar{Q}_y]_{y=0} = -\frac{P}{2}, \end{cases}$$

przy czym warunki 1, 2 i 3 wynikają z symetrii, a warunek 4 oznacza zrównoważenie siły skupionej  $P$  z siłą poprzeczną. Siłę poprzeczną  $\bar{Q}_y$  obliczyć należy analogicznie jak w teorii płyt przy uwzględnieniu zastępczych sił poprzecznych, które są wynikiem działania momentów skręcających, mianowicie:

$$(2.7) \quad \bar{Q}_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Po wzięciu pod uwagę zależności (1.3) i (1.8) oraz (2.7) warunki brzegowe (2.6) można przekształcić na warunki następujące:

$$(2.8) \quad \begin{cases} 1. \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, & 3. \left[ \frac{\partial^5 F}{\partial y^5} \right]_{y=0} = 0, \\ 2. \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right]_{y=0} = 0, & 4. \left[ \frac{Et(\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)}{2(1+\nu)} \frac{\partial^7 F}{\partial y^7} \right]_{y=0} = \frac{P}{2}. \end{cases}$$

Po rozwinięciu obciążenia siłą skupioną na szereg:

$$(2.9) \quad P(x) = \frac{2P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x$$

i rozpisaniu warunków (2.8) otrzymano następujący układ równań, z którego należy wyznaczyć stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$ :

$$(2.10) \quad \begin{cases} A_n r_1 + B_n r_2 + C_n r_3 + D_n r_4 = 0, \\ A_n r_1^3 + B_n r_2^3 + C_n r_3^3 + D_n r_4^3 = 0, \\ A_n r_1^5 + B_n r_2^5 + C_n r_3^5 + D_n r_4^5 = 0, \\ A_n r_1^7 + B_n r_2^7 + C_n r_3^7 + D_n r_4^7 = -\frac{2(1+\nu)P}{El t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymano

$$(2.11) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{2(1+\nu)P}{r_1(r_1^2-r_2^2)(r_1^2-r_3^2)(r_1^2-r_4^2)El t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}, \\ B_n = -\frac{2(1+\nu)P}{r_2(r_2^2-r_3^2)(r_2^2-r_4^2)(r_2^2-r_1^2)El t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}, \\ C_n = -\frac{2(1+\nu)P}{r_3(r_3^2-r_4^2)(r_3^2-r_1^2)(r_3^2-r_2^2)El t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}, \\ D_n = -\frac{2(1+\nu)P}{r_4(r_4^2-r_1^2)(r_4^2-r_2^2)(r_4^2-r_3^2)El t (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2)} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}. \end{cases}$$

We wzorach (2.11) wprowadzono oznaczenia

$$(2.12) \quad A_n = m_1 D_n, \quad B_n = m_2 D_n, \quad C_n = m_3 D_n, \quad D_n = -\frac{P}{El K_1} \frac{\sin \alpha_n \xi}{\alpha_n^7}.$$

Współczynniki  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  należy wyznaczyć z trzech pierwszych równań, a współczynnik  $K_1$  z ostatniego równania (2.10).

W ten sposób otrzymano rozwiązanie

$$(2.13) \quad F(xy) = -\frac{P}{El K_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + m_3 e^{-r_3 \alpha_n y} + e^{-r_4 \alpha_n y}) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x,$$

gdzie

$$(2.14) \quad K_1 = (m_1 r_1^7 + m_2 r_2^7 + m_3 r_3^7 + r_4^7) \frac{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}{2(1+\nu)} t.$$

3. W celu obliczenia wielkości statycznych zgodnie z zależnościami (1.3) należy wyznaczyć następujące pochodne składowych przemieszczeń:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$



Po wykorzystaniu zależności (1.8) można powyższe pochodne przedstawić za pomocą funkcji przemieszczeń w sposób następujący:

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_y \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \bar{S}_x t_y \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \bar{S}_x \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right) F, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_y \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} + \bar{S}_x t_y \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \bar{S}_x \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} \right) F, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \bar{S}_y t_x \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \bar{S}_y \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right) F, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \left( -\frac{1+\nu}{2} t \bar{S}_x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \bar{S}_y t_x \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \bar{S}_y \frac{1-\nu}{2} t \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) F, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left[ \frac{1-\nu}{2} t t_x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + (t_x t_y - \nu t^2) \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} t t_y \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right] F, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left[ \frac{1-\nu}{2} t t_x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + (t_x t_y - \nu t^2) \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{1-\nu}{2} t t_y \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right] F, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left[ \frac{1-\nu}{2} t t_x \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + (t_x t_y - \nu t^2) \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{1-\nu}{2} t t_y \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} \right] F. \end{array} \right.$$

Widać stąd, że wszystkie wielkości statyczne wyznaczyć można za pomocą pochodnych szóstego rzędu funkcji przemieszczeń.

Ażeby wykazać, że wszystkie wielkości statyczne można przedstawić w postaci wzorów zamkniętych, wystarczy więc pokazać, iż wszystkie pochodne szóstego rzędu względem  $x$  i  $y$  funkcji przemieszczeń można zapisać w postaci wzorów zamkniętych.

Łatwo można zauważyć, że pochodne szóstego rzędu względem  $x$  lub  $y$  i pochodne mieszane szóstego rzędu funkcji przemieszczeń (2.13) będą kombinacją liniową szeregów typu:

$$(3.2) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-r_k a_n y} \frac{1}{n} \sin a_n \xi \sin a_n x, \\ \psi_k = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-r_k a_n y} \frac{1}{n} \sin a_n \xi \cos a_n x. \end{array} \right.$$

Ostatnie związki można przedstawić w postaci zamkniętej po wykorzystaniu tablic, [9] i prostych przekształceniach, mianowicie:

$$(3.3) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} r_k y - \cos \frac{\pi}{l} (x + \xi)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} r_k y - \cos \frac{\pi}{l} (x - \xi)}, \\ \psi_k = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} r_k y} \sin \frac{\pi}{l} (x + \xi)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} r_k y} \cos \frac{\pi}{l} (x + \xi)} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} r_k y} \sin \frac{\pi}{l} (\xi - x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} r_k y} \cos \frac{\pi}{l} (\xi - x)} \right]. \end{array} \right.$$

Po obliczeniu pochodnych szóstego rzędu funkcji przemieszczeń (2.13), wykorzystaniu zależności (3.2) i (3.3) otrzymano następujące wyrażenia na pochodne szóstego rzędu funkcji przemieszczeń:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + m_3 \varphi_3 + \varphi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1^2 \varphi_1 + m_2 r_2^2 \varphi_2 + m_3 r_3^2 \varphi_3 + r_4^2 \varphi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1^4 \varphi_1 + m_2 r_2^4 \varphi_2 + m_3 r_3^4 \varphi_3 + r_4^4 \varphi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial y^6} = -\frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1^6 \varphi_1 + m_2 r_2^6 \varphi_2 + m_3 r_3^6 \varphi_3 + r_4^6 \varphi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^5 \partial y} = \frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1 \psi_1 + m_2 r_2 \psi_2 + m_3 r_3 \psi_3 + r_4 \psi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y^3} = -\frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1^3 \psi_1 + m_2 r_2^3 \psi_2 + m_3 r_3^3 \psi_3 + r_4^3 \psi_4), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x \partial y^5} = \frac{P}{EK_1 \pi} (m_1 r_1^5 \psi_1 + m_2 r_2^5 \psi_2 + m_3 r_3^5 \psi_3 + r_4^5 \psi_4). \end{array} \right.$$

Powyższe wzory pozwalają na przedstawienie wielkości statycznych w postaci zamkniętej.

4. Poniżej przeprowadzono dyskusję nad współczynnikami (1.10) i równaniem (2.5) w celu ograniczenia możliwych rozwiązań tego równania.

Analizując współczynniki (1.10) zauważyć można, że wszystkie one są stale nieujemne (tzn. dla dowolnych przekrojów żeber).

Ażeby tego dowieść, wystarczy wykazać, że prawdziwe są nierówności

$$(4.1) \quad \bar{I}_y (t_x t_y - \nu l^2) - t_x \bar{S}_y^2 > 0, \quad \bar{I}_x (t_x t_y - \nu l^2) - t_y \bar{S}_x^2 > 0.$$

Jeżeli prawdziwe będą nierówności (4.1), to spełnione także będą nierówności następujące:

$$(4.2) \quad \bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2 > 0, \quad \bar{I}_x t_x - \bar{S}_x^2 > 0.$$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_x = (1 - \nu^2) F_x e_x, \quad \bar{I}_x = I + (1 - \nu^2) I_{x1} + (1 - \nu^2) F_x e_x^2, \\ \bar{S}_y = (1 - \nu^2) F_y e_y, \quad \bar{I}_y = I + (1 - \nu^2) I_{y1} + (1 - \nu^2) F_y e_y^2, \end{array} \right.$$

gdzie  $I_{x1}$  i  $I_{y1}$  są momentami bezwładności przekrojów żeber względem ich głównych osi bezwładności na jednostkę długości oraz  $e_x$  i  $e_y$  są odległoś-

ciami środków ciężkości żeber od powierzchni środkowej płyty (rys. 1). Po wykorzystaniu (1.1) nierówność (4.1) można przekształcić następująco:

$$(4.4) \quad \bar{I}_y t_x \left( t_y - \nu \frac{t^2}{t_x} \right) - t_x \bar{S}_y^2 = t_x \left( \bar{I}_y t_y - \nu \frac{t^2}{t_x} \bar{I}_y - \bar{S}_y^2 \right) \geq \\ \geq t_x (\bar{I}_y t_y - \nu \bar{I}_y t - \bar{S}_y^2) = t_x [It(1-\nu) + I_{y1}t(1-\nu^2)(1-\nu) + \\ + F_y e_y^2 t(1-\nu^2)(1-\nu) + IF_y(1-\nu^2) + I_{y1}F_y(1-\nu^2)^2] > 0.$$

Analogicznie można wykazać prawdziwość drugiej nierówności (4.1). Tym samym udowodniono, że współczynniki (1.10) są stale nieujemne.

Wobec przemienności znaków równania charakterystycznego (2.5) pierwiastki jego rzeczywiste, o ile istnieją, są nieujemne (zgodnie ze znanym w algebrze twierdzeniem DESCARTESA, [10]).

Z powyższego wynika, że  $r_1, r_2, r_3$  i  $r_4$  nie mogą być liczbami urojonymi.

Dalej zauważyć można, że wielomian (2.5) dla  $z = 0$  przyjmuje wartość  $f(0) = d \geq 0$ , gdzie znak równości odpowiada przypadkowi nieskończenie dużych przekrojów żeber równoległych do osi  $y$ .

Poniżej udowodniono także, że:

$$(4.5) \quad f(1) = 1 - a + b - c + d \leq 0.$$

Mianowicie wykorzystując zależności (1.1) i (4.3) równość (4.5) przekształcić można do postaci

$$(4.6) \quad (\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2) f(1) = -(1+\nu)^2(1-\nu) \left\{ (I_{x1} + I_{y1}) \left[ F_x + F_y + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{F_x F_y}{t} (1-\nu) \right] + F_x F_y (e_x - e_y)^2 \right\} \leq 0,$$

gdzie znak równości odpowiada płycie bez żeber. Wynika stąd, że wobec udowodnienia prawdziwości nierówności (4.1) stale jest spełniony warunek  $f(1) \leq 0$  (tzn. dla dowolnych charakterystyk przekroju żebra i płyty).

Powyższe rozważania pozwalają stwierdzić, że istnieją co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste równania charakterystycznego (2.5), z których jeden zawarty jest w przedziale  $[0,1]$ .

W związku z powyższym ilość rozwiązań możliwych ze względu na pierwiastki równania charakterystycznego (2.5) można ograniczyć do następujących (pierwiastki są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi):

1.  $r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2$ .
2.  $r_1^2, r_2^2, r_3^2 = r_4^2$ .
3.  $r_1^2, r_2^2 = r_3^2 = r_4^2$ .

dwa pierwiastki są zespolone sprzężone

4.  $r_1^2, r_2^2, r_3^2 = \alpha + \beta i, r_4^2 = \alpha - \beta i$ ,

Przypadek czterech pierwiastków rzeczywistych jednakowych, jak wynika z poprzednich rozważań, oznaczałby, że  $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = r_4^2 = 1$ , co odpowiada płycie izotropowej, gdy  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  $c = 4$ ,  $d = 1$ .

Rozwiązanie dla przypadku 1 uzyskano w pierwszej części pracy, rozwiązania następnych przypadków można otrzymać przez przejście do granicy korzystając z obliczonych stałych w postaci (2.11). Wygodniej jednak, wobec złożonej budowy wyrażeń, korzystać z rozwiązań równania (2.3), odpowiednich dla każdego przypadku.

I tak dla przypadku 2 po wykorzystaniu warunków dla  $y \rightarrow \infty$  rozwiązanie jest następujące:

$$(4.7) \quad F(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-r_1 \alpha_n y} + B_n e^{-r_2 \alpha_n y} + C_n e^{-r_3 \alpha_n y} + D_n \alpha_n y e^{-r_3 \alpha_n y}) \sin \alpha_n x,$$

gdzie stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  należy wyznaczyć z warunków (2.8).

Postępując analogicznie jak dla przypadku 1 oznaczono

$$A_n = m_1 D_n, \quad B_n = m_2 D_n, \quad C_n = m_3 D_n.$$

Po rozwiązaniu układu równań wynikających z warunków (2.8) otrzymano

$$(4.8) \quad F(xy) = -\frac{P}{EIK_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + m_3 e^{-r_3 \alpha_n y} + \alpha_n y e^{-r_3 \alpha_n y}) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x,$$

gdzie

$$K_2 = (m_1 r_1^7 + m_2 r_2^7 + m_3 r_3^7 - 7r_3^6) \frac{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}{2(1+\nu)} t.$$

Analogiczne postępowanie dla przypadków następnych pozwoliło na wyznaczenie funkcji przemieszczeń; otrzymano

dla przypadku 3

$$(4.9) \quad F(xy) = -\frac{P}{EIK_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} (m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + m_3 \alpha_n y e^{-r_2 \alpha_n y} + \alpha_n^2 y^2 e^{-r_2 \alpha_n y}) \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x,$$

gdzie

$$K_3 = (m_1 r_1^7 + m_2 r_2^7 - 7m_3 r_2^6 + 42r_2^5) \frac{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2}{2(1+\nu)} t.$$

Dla przypadku 4

$$(4.10) \quad F(xy) = -\frac{P}{EIK_4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^7} [m_1 e^{-r_1 \alpha_n y} + m_2 e^{-r_2 \alpha_n y} + e^{-r_1 \alpha_n y} (m_3 \sin \nu_2 \alpha_n y + \cos \nu_2 \alpha_n y)] \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x,$$

gdzie

$$K_4 = [m_1 r_1^7 + m_2 r_2^7 - m_3 (7v_1^6 v_2 - 35v_1^4 v_2^2 + 21v_1^2 v_2^3 - v_2^4) + \\ + v_1^7 - 21v_1^5 v_2^2 + 35v_1^3 v_2^4 - 7v_1 v_2^6] \frac{\bar{I}_y t_y - \bar{S}_y^2 t}{2(1+\nu)},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Oczywiście przy wyznaczeniu funkcji przemieszczeń należy pamiętać, że współczynniki  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  występujące w wyrażeniach (4.8)–(4.10) trzeba wyznaczyć z trzech pierwszych równań, odpowiadających warunkom (2.8) przy wykorzystaniu znanych rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego (2.3), odpowiadających danym pierwiastkom równania charakterystycznego.

Okazuje się, że pochodne szóstego rzędu funkcji przemieszczeń dla przypadków 2, 3 i 4 też można przedstawić w postaci zamkniętej. Mianowicie dla przypadku 2 wykorzystując zależności (3.2) i (3.3) otrzymano przykładowo

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_2 \pi} \left( m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + m_3 \varphi_3 - y \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} = \frac{-P}{EK_2 \pi} \left[ m_1 r_1^2 \varphi_1 + m_2 r_2^2 \varphi_2 + (m_3 r_3^2 - 2r_3) \varphi_3 - y r_3^2 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_2 \pi} \left[ m_1 r_1^4 \varphi_1 + m_2 r_2^4 \varphi_2 + (m_3 r_3^4 - 4r_3^3) \varphi_3 + y r_3^4 \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^5 \partial y} = \frac{P}{EK_2 \pi} \left[ m_1 r_1 \psi_1 + m_2 r_2 \psi_2 + (m_3 r_3 - 1) \psi_3 - y \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right]. \end{cases}$$

Zależności powyższe można przekształcić korzystając z zależności

$$(4.12) \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = r_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad r_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = - \frac{\partial \psi_k}{\partial y}.$$

Dla przypadku 3 otrzymano przykładowo

$$(4.13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_3 \pi} \left( (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 - m_3 y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}) \right), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} = - \frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 r_1^2 \varphi_1 + (m_2 r_2^2 - 2m_3 r_2 + 2) \varphi_2 - \right. \\ \left. - (m_3 r_2^2 - 4r_2) y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - y^2 r_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 r_1^4 \varphi_1 + (m_2 r_2^4 - 4m_3 r_2^3 + 12r_2^2) \varphi_2 - \right. \\ \left. - (m_3 r_2^4 - 8r_2^3) y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - r_2^4 y^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^5 \partial y} = \frac{P}{EK_3 \pi} \left[ m_1 r_1 \psi_1 + (m_2 r_2 - m_3) \psi_2 + (m_3 r_2 - 2) y \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right]. \end{cases}$$

Zależności powyższe można przekształcić korzystając ze związków (4.12) oraz z warunku

$$(4.14) \quad r_k^2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2}.$$

Chcąc wyznaczyć pochodne szóstego rzędu funkcji przemieszczeń w postaci zamkniętej dla przypadku 4 należy wykorzystać zależności.

$$(4.15) \quad R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_1 \alpha_n y}}{n} \sin \nu_2 \alpha_n y \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (\nu_2 y - \xi + x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y - \xi + x)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y - x - \xi)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y - x - \xi)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x)} \right],$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_1 \alpha_n y}}{n} \cos \nu_2 \alpha_n y \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_n x =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi + x) \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x) \right]}{\left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x) \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi - x) \right]},$$

$$R_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_1 \alpha_n y}}{n} \cos \nu_2 \alpha_n y \sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n x =$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi + x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi + x)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x)} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x)} + \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \sin \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi - x)}{1 - e^{-\frac{\pi}{l} \nu_1 y} \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi - x)} \right],$$

$$R_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\nu_1 \alpha_n y}}{n} \sin \nu_2 \alpha_n y \sin \alpha_n \xi \cos \alpha_n x =$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi + x) \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (\nu_2 y + \xi - x) \right]}{\left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi + x) \right] \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \nu_1 y - \cos \frac{\pi}{l} (-\nu_2 y + \xi - x) \right]}.$$

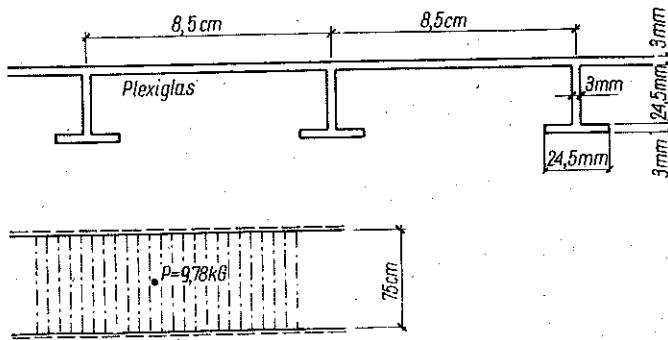
Powyższe wzory otrzymano po wykorzystaniu związków (3.2) i (3.3) oraz po prostych przekształceniach.

Dla przypadku 4 otrzymano przykładowo następujące wyrażenia na pochodne szóstego rzędu funkcji przemieszczeń:

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} = \frac{P}{EK_4 \pi} (m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + m_3 R_1 + R_2), \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} = -\frac{P}{EK_4 \pi} [m_1 f r_1^2 \varphi_1 + m_2 r_2^2 \varphi_2 + (m_3 v_1^2 - m_3 v_2^2 + 2v_1 v_2) R_1 + \\ \quad + (-2m_3 v_1 v_2 + v_1^2 - v_2^2) R_2], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{P}{EK_4 \pi} [m_1 r_1^4 \varphi_1 + m_2 r_2^4 \varphi_2 + (m_3 v_1^4 - 6m_3 v_1^2 v_2^2 + m_3 v_2^4 + \\ \quad + 4v_1^3 v_2 - 4v_1 v_2^3) R_1 + (4m_3 v_1 v_2^3 - 4m_3 v_1^3 v_2 + v_1^4 - 6v_1^2 v_2^2 + v_2^4) R_2], \\ \frac{\partial^6 F}{\partial x^5 \partial y} = \frac{P}{EK_4 \pi} [m_1 r_1 \psi_1 + m_2 r_2 \psi_2 + (v_1 m_2 + v_2) R_4 + (v_1 - m_3 v_2) R_3]. \end{array} \right.$$

Podane powyżej wyrażenia na pochodne szóstego rzędu funkcji przemieszczeń pozwalają na wyznaczenie wielkości statycznych w postaci wzorów zamkniętych.

5. *Przykład.* Dane liczbowe do tego przykładu wzięto z badań modelowych opisanych w pracy [11]. Obliczono wydłużenia jednostkowe na górnej powierzchni płyty dla obciążenia siłą skupioną ustawiono w środku szerokości pasma (rys. 4). Obliczenia przeprowadzono przy założeniu upraszczającym,  $\nu = 0$ .



Rys. 4

Charakterystyki przekroju

$$\begin{array}{lll} t = 0,300 \text{ cm}, & \bar{S}_x = 0,3566 \text{ cm}^2, & \bar{I}_x = 0,8636 \text{ cm}^3, \\ t_x = 0,473 \text{ cm}, & \bar{S}_y = 0, & \bar{I}_y = I = 0,0023 \text{ cm}^3, \\ t_y = t = 0,300 \text{ cm}, & I = 0,0023 \text{ cm}^3, & E = 35000 \text{ kG/cm}^2. \end{array}$$

Współczynniki stałe równania (1.9)

$$a = 5,1536, \quad b = 383,3614, \quad c = 818,5710, \quad d = 407,7092.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (2.5) (przypadek 4)

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 0,781695, & r_3^2 &= 1,4920 + 19,32813 i, \\ r_2^2 &= 1,387885, & r_4^2 &= 1,4920 - 19,32813 i, \\ r_1 &= 0,8841, & r_3 &= 3,2309, \\ r_2 &= 1,1781, & r_4 &= 2,9911. \end{aligned}$$

Stałe rozwiązania (4.10):

$$m_1 = -244,89, \quad m_2 = 184,02, \quad m_3 = 1,18, \quad K_4 = 24610,7298 It^2.$$

Wydłużenia jednostkowe w odległości  $z$  od powierzchni środkowej płyty wyrażają się wzorem:

$$(5.1) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z.$$

Po wzięciu pod uwagę (3.1) otrzymano (dla  $\bar{S}_y = 0$ ,  $t_y = t$ ,  $\bar{I}_y = I$ ,  $\nu = 0$ )

$$(5.2) \quad \varepsilon_x = t^2 \left[ \left( \frac{\bar{S}_x}{t} - z \frac{t_x}{t} \right) \frac{\partial^6 F}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{S}_x}{t} - z \frac{t_x}{t} \right) \frac{\partial^6 F}{\partial x^6} - \frac{1}{2} z \frac{\partial^6 F}{\partial x^2 \partial y^4} \right].$$

Skorzystawszy z zależności (4.16) i obliczonych powyżej wartości liczbowych otrzymano dla siły  $P = 9,78 \text{ kG}$  wydłużenia jednostkowe na powierzchni górnej płyty:

$$(5.3) \quad [\varepsilon_x]_{z=-0,15 \text{ cm}} = -15,7121 \cdot 10^{-7} (-109,5350 \varphi_1 + 259,4530 \varphi_2 + 0,6779 R_1 - 64,0477 R_2).$$

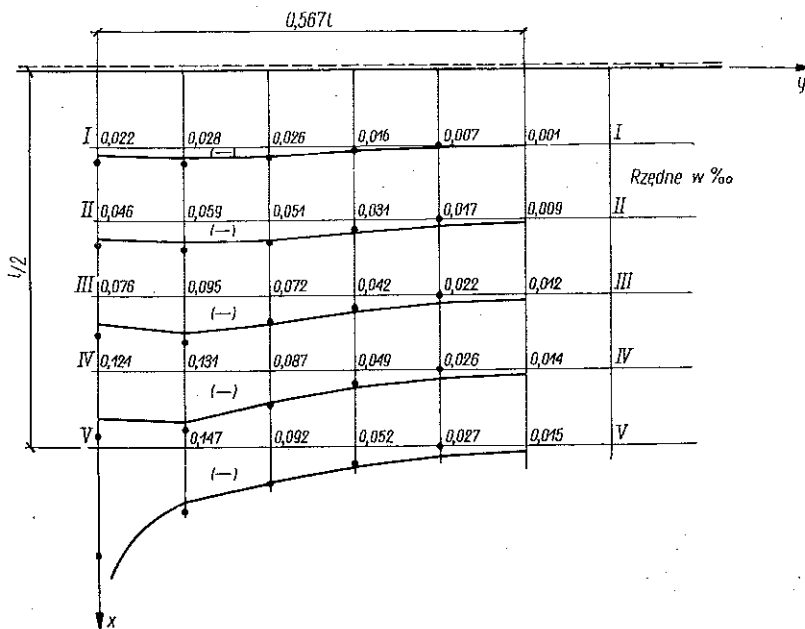
Zauważyć można, że wielkości  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $R_1$  i  $R_2$  nie ulegną zmianie, gdy zamieni się w nich między sobą wielkości  $x$  i  $\xi$ , wystarczy to do wyciągnięcia wniosku, że wykres  $\varepsilon_x$  od siły skupionej  $P = 1$  będzie przedstawiał powierzchnię wpływową dla punktu przyłożenia tej siły. Zależność ta dotyczy i innych wielkości<sup>1</sup>.

Zgodnie ze wzorem (5.3), po obliczeniu wartości funkcji  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $R_1$  i  $R_2$ , otrzymano wykresy  $\varepsilon_x$  w poszczególnych przekrojach. Wyniki przedstawiono na rys. 5, gdzie też zaznaczano punktami wartości otrzymane doświadczalnie. Traktując wykresy na rys. 5 jako powierzchnię wpływową (mnożnik  $1/9,78 \text{ kG}^{-1}$ ), można obliczyć wielkość  $[\varepsilon_x]_{z=-0,15 \text{ cm}}$  w środku rozpiętości pasma dla dowolnego obciążenia.

<sup>1</sup> Zagadnienie powierzchni wpływowych i rozwiązań osobliwych dla płyt z żebrami jednostronnymi będzie tematem oddzielnej pracy.



Przykładowo obliczono  $\varepsilon_x$  od obciążenia równomiernego wzdłuż prostej pokrywającej się z przekrojem IV — IV na rys. 5. W obliczeniach przyjęto, że obciążenie znajduje się w odległości większej od  $0,567 l$ , od prostej  $y = 0$ ,



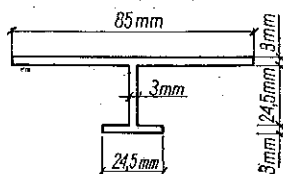
Rys. 5

nie wpływa na wielkość  $\varepsilon_x$ . Powierzchnie przekroju IV — IV wykresu na rys. 5 obliczono według metody trapezów. Otrzymano:

według obliczeń teoretycznych  $\varepsilon_x = 0,64 \cdot 10^{-3} q$ ,

według doświadczenia  $\varepsilon_x = 0,66 \cdot 10^{-3} q$  ( $q$  w  $\text{kG/cm}$ ).

Po wzięciu pod uwagę, że dla rozważonego powyżej obciążenia powierzchnia ugięcia będzie tworzyć powierzchnię walca,  $\varepsilon_x$  obliczyć można jak dla belki o przekroju dwuteowym (rys. 6) obciążonej obciążeniem  $Q = 8,50q$  ( $\nu = 0$ ). Obliczając w ten sposób otrzymano:



Rys. 6

$$\varepsilon_x = 0,67 \cdot 10^{-3} q \quad (q \text{ w } \text{kG/cm}).$$

Wyniki doświadczenia potwierdzają prawidłowość rozwiązania teoretycznego. Różnice między rozwiązaniem teoretycznym i wartościami otrzymanymi doświadczalnie występujące w rzędnych wykresu  $\varepsilon_x$  (rys. 5) dla żebra obciążonego i sąsiedniego wynikają z zastąpienia płyty z żebrami modelem ciągłym.

#### Literatura cytowana w tekście

- [1] M.T. HUBER, *Teoria płyt prostokątne różnokierunkowych*, Lwów 1921.  
[2] M. SOKOŁOWSKI, *Obliczanie stałych sprężystości dla płyt o ortotropii technicznej*, Arch. Inżyn. lądow., 4,3 (1957).  
[3] W. NOWACKI, *Pasma płytowe ortotropowe*, Arch. Mech. stos., 3-4, 3 (1951).  
[4] A. PFLÜGER, *Zum Baulproblem der anisotropen Rechteckplatte*, Ing. Archv., 1947, s. 111.  
[5] K. TRENKS, *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten*, Bauing., 29 (1954).  
[6] E. GIENECKE, *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau 6 (1955).  
[7] P. WILDE, *Płyta ortotropowa z cienkościnnymi żebrami niesymetrycznymi*, Rozpr. inżyn., 1959.  
[8] S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych* Warszawa 1957 r.  
[9] И. М. РЫЖИК. И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 1951.  
[10] H. WEBER, *Podręcznik algebry wyższej*, Warszawa 1925.  
[11] R. GANOWICZ, H. MIKOŁAJCZAK, P. WILDE, M. WIZMUR, *Badania modelowe lekkiej jezdni mostowej*, Arch. Inżyn. lądow. 1,5 (1959).

#### Резюме

#### ПЛАСТИНЧАТАЯ ПОЛОСА С ОДНОСТОРОННИМИ РЕБРАМИ

В работе доказывается, что все статические величины для изотропной пластинчатой полосы, подкрепленной односторонними ребрами можно представить в замкнутом виде. Решение было получено при предположении и основываясь на зависимостях данных Флюгером, [4]. Система трех уравнений в перемещениях точки серединной поверхности пластинки  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , вытекающая из работы [4], сводится к одному уравнению для функции перемещений. Принимая решение в виде тригонометрического ряда, получено выражение, которое можно представить в замкнутом виде.

Дается численный пример, результаты которого сравниваются со значениями, полученными при модельных исследованиях. Эти исследования согласны с теоретическим решением.

#### Summary

#### A PLATE STRIP HAVING RIBS ON ONE SIDE

It is shown that all the mechanical quantities of an isotropic plate strip having ribs on one side may be represented in the form of closed expressions. The solution is obtained with the assumptions and on the basis of the relations obtained by PFLÜGER, [4]. A system of three equations for the displacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  of a point of the middle surface obtained on the basis of the Ref. [4] is reduced to one equation for the displacement function. Assuming the solution

in the form of a trigonometric series, expressions are obtained which can be written in a closed form.

A numerical example is given of which the results are confronted with the values obtained from model tests, which are found to be in agreement with the theoretical solution.

**ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI  
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 stycznia 1960 r.*

---