

ANDRZEJ CHUDZIKIEWICZ

GIĘTNE I GIĘTNO-SKRĘTNE WYBOCZENIE PRĘTA CEOWEGO
O ODKSZTAŁCALNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLV

TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960

SPIS TREŚCI

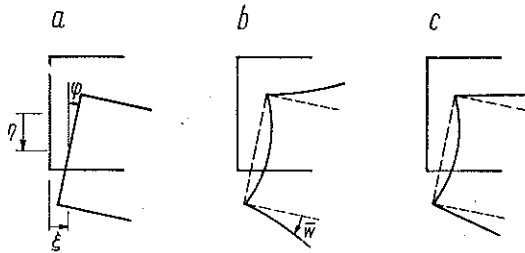
1. Uwagi wstępne	255
2. Równania równowagi ścianek pręta	256
3. Zadanie pomocnicze — reakcje płyty ściskanej o danych przemieszczeniach brzegowych	259
4. Wyboczenie giętne	261
5. Wyboczenie giętno-skrętne	265

1. Uwagi wstępne

Artykuł niniejszy jest kontynuacją prac [1] i [2], w których rozpatrzono elementarne przypadki wybożenia giętnego i skrętnego pręta dwuteowego z uwzględnieniem odkształcalności przekroju poprzecznego. Rozwiązania uzyskano w nich na drodze stosunkowo prostej, ponieważ zagadnienia nie wymagały nawiązania do teorii prętów cienkościennych. W przypadku pręta ceowego, będącego przedmiotem tej pracy, zwłaszcza dla jego wybożenia giętno-skrętnego, konieczne jest wykorzystanie teorii prętów cienkościennych; dlatego metoda podana tutaj ma charakter ogólny i daje możliwość uzyskania rozwiązania dla wszelkiego rodzaju przekrojów poprzecznych w granicach określonych niżej wymienionymi założeniami.

Rozważamy pręt wykonany z materiału sprężystego, podparty na obu końcach przegubowo i w sposób dopuszczający swobodne spaczenie przekrojów skrajnych. Założymy, że przekroje te zaopatrzone są w niepodatne w swej płaszczyźnie przepony poprzeczne, dzięki którym nie mogą ulec odkształceniu. Dla uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że półki są nieodkształcalne w płaszczyźnie przekroju poprzecznego; w praktycznie ważnych przypadkach półki są na ogół wąskie, a grubość ich przekracza znacznie grubość środnika; wówczas założenie to nie powinno budzić zastrzeżeń. Natomiast w przypadku półek szerokich lub cienkich traktowanie ich jako prętów może prowadzić do poważniejszych błędów i wymaga uwzględnienia ich odkształceń płytowych, co będzie przedmiotem oddzielnego opracowania.

Przemieszczenia punktów przekroju poprzecznego w jego płaszczyźnie dadzą się opisać w ogólności czterema wielkościami: trzema składowymi (por. rys. 1a), odnoszącymi się do odkształceń prętowych [dwoma składowymi przemieszczenia $\xi(x)$, $\eta(x)$ i kątem obrotu $\varphi(x)$], oraz dodatkowym ugięciem płytowym $\bar{w}(x,y)$ (rys. 1b), określającym zniekształcenie przekroju. Ugięcie to jest skierowane w każdym punkcie prostopadle do ścianki pręta (ponieważ roz-



Rys. 1

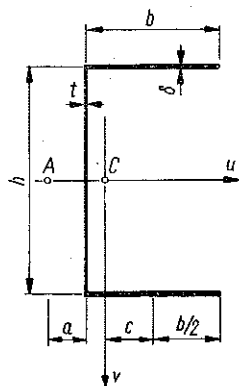
patrujemy zagadnienia stateczności) i jest nieskończenie małe. Jeżeli zatem przyjmiemy wszystkie założenia teorii prętów cienkościennych z wyjątkiem założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego, to dojdziemy do wniosku, że zniekształcenie przekroju nie wpływa tu bezpośrednio na rozkład naprężeń normalnych σ i stycznych τ pochodzących od zginania i skrępowanego skręcania, które podlegają przeto ogólnym prawom teorii prętów cienkościennych. Wniosek ten stanowiąc będzie w dalszym ciągu podstawę naszych rozważań. Wskutek wzmiankowanego poprzednio założenia nieodkształcalności pólek zachowujemy jako niewiadome tylko zniekształcenie środka, wyznacza ono bowiem zniekształcenie przekroju w obrębie pólki (rys. 1c).

Ograniczymy się do zbadania wpływu zniekształcenia przekroju poprzecznego na znane postacie wybożenia pręta przy ściskaniu siłą osiową: giętne wybożenie EULERA i wybożenie giętno-skrętne. Pierwszą z wymienionych form utraty stateczności cechuje symetria odkształceń prętowych, drugą ich antysymetria. W związku z tym również zniekształcenie przekroju należy w pierwszym przypadku przyjąć symetrycznie, w drugim zaś antysymetrycznie.

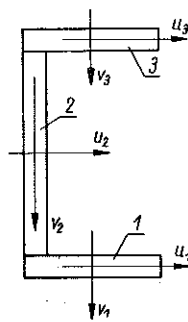
Otrzymane wyniki liczbowe będą miarodajne oczywiście tylko wtedy, gdy naprężenia krytyczne rozpatrywanej postaci wybożenia nie przekroczą naprężeń krytycznych wybożenia płytowego ścianek pręta.

2. Równania równowagi ścianek pręta

Rozpatrywany symetryczny przekrój poprzeczny przedstawia rys. 2. Litera C oznacza środek ciężkości, zaś A środek zginania, niewidoczna na rysunku oś x pokrywa się z osią pręta i tworzy z osiami u, v układ lewoskrętny;



Rys. 2

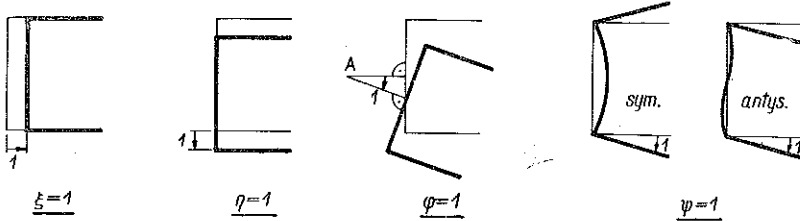


Rys. 3

długość pręta oznaczona jest przez l , punkty $x = 0, x = l$ wyznaczają końce pręta. Rysunek 3 przedstawia podział pręta na elementy — ścianki oznaczone numerami 1, 2, 3. Przez środek ciężkości każdego z tych elementów prze-

prowadzono osie równoległe do osi u , v , których oznaczenia zaopatrzoneo odpowiednimi indeksami.

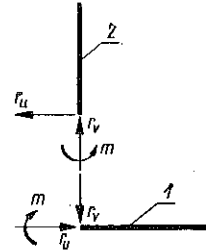
Poszczególne stany jednostkowych odkształceń pokazano na rys. 4 zgodnie z ich dodatnimi kierunkami. Są to przemieszczenia $\xi(x)$, $\eta(x)$ w kierunkach osi u , v , kąt obrotu przekroju poprzecznego $\varphi(x)$ (dodatni zwrot na rys. 4c widziany jest od dodatniej strony osi x), wreszcie zniekształcenie przekroju



Rys. 4

poprzecznego określone jednoznacznie kątem obrotu $\psi(x)$ naroża ceownika i działającymi aktualnie naprężeniami ściskającymi. Przemieszczenia środków ciężkości poszczególnych elementów pręta w kierunkach równoległych do osi u , v oznaczymy odpowiednio $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, $\eta_3(x)$, zaś ich kąty obrotu przez $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Ze względu na symetrię lub antysymetrię odkształceń wystarczy rozpatrywać środkik (element 2) i jedną z półek (np. półkę dolną — element 1). Ich przemieszczenia są związane prostymi zależnościami z czterema opisanymi powyżej wielkościami:

$$(2.1) \begin{cases} \xi_1 = \xi - \frac{1}{2} h\varphi, & \eta_1 = \eta + \left(a + \frac{1}{2} b\right)\varphi + \frac{1}{2} b\psi, \\ \varphi_1 = \varphi + \psi, & \eta_2 = \eta + a\varphi. \end{cases}$$



Rys. 5

Rysunek 5 przedstawia oddziaływania wewnętrzne pomiędzy elementami 1 i 2 zgodnie z ich dodatnimi kierunkami. Są to składowe reakcje $r_u(x)$, $r_v(x)$ oraz moment $m(x)$. Oddziaływania pomiędzy elementami 2 i 3 są takie same i skierowane symetrycznie lub antysymetrycznie do przedstawionych na rysunku w zależności od symetrii lub antysymetrii odkształceń.

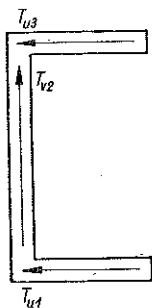
Półka dolna jest płaskownikiem o sztywnościach na zginanie EI_{v1} i EI_{u1} oraz sztywności na skręcanie GI_{s1} , ściskany siłą osiową $P_1 = b\delta\sigma$, gdzie σ przedstawia naprężenia osiowego ściskania pręta. Równania równowagi odkształconej półki, uwzględniające działanie siły P_1 i obciążeń rozłożonych $p_{u1}(x)$, $p_{v1}(x)$ oraz momentu rozłożonego $m_1(x)$ przedstawiają się jak następuje:

$$(2.2) \begin{cases} EI_{v1} \xi_1^{IV} + P_1 \xi_1'' - p_{u1}(x) = 0, \\ EI_{u1} \eta_1^{IV} + P_1 \eta_1'' - p_{v1}(x) = 0, \\ (P_1 r_{01}^2 - GI_{s1}) \varphi'' - m_1(x) = 0. \end{cases}$$

Pierwsze z tych równań wymaga jednak uzupełnienia, ponieważ półka jako element pręta biorący udział w jego pracy jest obciążona siłami ścinającymi, działającymi w narożu, (wzdłuż krawędzi podłużnej) zależącymi od odkształceń pręta ξ , η , φ zgodnie z teorią prętów cienkościennych (por. np. [3]):

$$(2.3) \quad t_{12} = E(\xi''' S_{v1} + \eta''' S_{u1} + \varphi''' S_{\omega1}).$$

Symbole S_{v1} , S_{u1} przedstawiają tu momenty statyczne półki względem osi v oraz u , zaś $S_{\omega1}$ jej moment statyczno-wycinkowy (wykres pola powierzchni wycinkowych ω_A pokazano na rys. 10). Obciążenie półki tymi siłami rozwarstwiającymi powoduje powstanie sił ścinających, rozłożonych trójkątnie w jej przekroju poprzecznym, których suma daje dodatkową, nieuwzględnioną w pierwszym z równań (2.2) siłę tnącą $T_{u1} = (1/2)bt_{12}$ (por. rys. 6); zatem



Rys. 6

$$(2.4) \quad T_{u1} = \frac{1}{2}Eb(\xi''' S_{v1} + \eta''' S_{u1} + \varphi''' S_{\omega1}).$$

Tę dodatkową siłę tnącą należy dodać do siły tnącej $EI_{v1}\xi''''$, której pochodną występuje w pierwszym równaniu (2.2). Biorąc to pod uwagę oraz podstawiając $p_{u1} = r_u$, $p_{v1} = -r_v$, $m_1 = m - (1/2)br_v$, otrzymamy ostatecznie układ trzech równań:

$$(2.5) \quad \begin{cases} EI_{v1}\xi_1^{IV} + P_1\xi_1'' + T'_{u1} - r_u(x) = 0, \\ EI_{u1}\eta_1^{IV} + P_1\eta_1'' - r_v(x) = 0, \\ (P_1r_{01}^2 - GI_{s1})\varphi_1'' - m(x) + \frac{1}{2}br_v(x) = 0, \end{cases}$$

gdzie r_{01}^2 jest biegunowym promieniem bezwładności półki, związanym z jej biegunowym momentem bezwładności I_{01} zależnością $I_{01} = b\delta r_{01}^2$, zaś

$$T'_{u1} = \frac{1}{2}Eb(\xi^{IV} S_{v1} + \eta^{IV} S_{u1} + \varphi^{IV} S_{\omega1}).$$

W myśl założeń omówionych w punkcie 1 uwzględniamy odkształcenia płytkowe środnika, dlatego z trzech równań typu (2.2) pozostanie tu do dyspozycji tylko jedno, mianowicie odnoszące się do zginania w płaszczyźnie osi v_2 . Stosując rozumowanie podobne do przedstawionego powyżej otrzymamy

$$(2.6) \quad EI_{u2}\eta_2^{IV} + P_2\eta_2'' + T'_{v2} - p_{v2}(x) = 0,$$

gdzie EI_{u2} jest sztywnością zginania środnika w płaszczyźnie osi v_2 , $P_2 = h\tau_0$ siłą ściskającą środnik, zaś T'_{v2} dodatkową siłą tnącą (por. rys. 6), powstałą wskutek obciążenia jego siłami rozwarstwiającymi:

$$(2.7) \quad \begin{cases} t_{12} = E(\xi''' S_{v1} + \eta''' S_{u1} + \varphi''' S_{\omega1}), \\ t_{23} = E(-\xi''' S_{v1} + \eta''' S_{u1} + \varphi''' S_{\omega1}). \end{cases}$$

Wielkość tej siły określa wzór

$$(2.8) \quad T_{v2} = \frac{1}{2} h(t_{12} + t_{23}) = Eh(\eta'''' S_{u1} + \varphi'''' S_{\omega 1}).$$

Przy wyboczeniu antysymetrycznym (giętno-skretnym) oddziaływania r_v z obu krawędzi środka nakładają się, otrzymamy zatem dla tej postaci wyboczenia równanie

$$(2.9) \quad EI_{u2} \eta_2^{IV} + P_2 \eta_2'' + T'_{v2} + 2r_v(x) = 0,$$

gdzie

$$T'_{v2} = Eh(\eta^{IV} S_{u1} + \varphi^{IV} S_{\omega 1}).$$

Przy wyboczeniu symetrycznym (giętnym) mamy $\eta = \varphi = 0$, zaś reakcje r_v z obu krawędzi znoszą się, zatem po uwzględnieniu wzoru (2.8) równanie (2.6) jest spełnione z założenia.

Powierzchnia gięcia środka pracującego jako jednokierunkowo ściskana płyta spełnia poza tym równanie

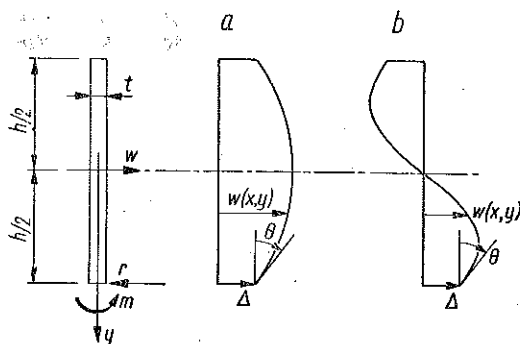
$$(2.10) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} \sigma l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

w którym σ przedstawia równomiernie rozłożone naprężenia osiowego ściskania płyty.

3. Zadanie pomocnicze — reakcje płyty ściskanej o danych przemieszczeniach brzegowych

Środek jest płytą znajdującą się pod działaniem równomiernie rozłożonych naprężeń ściskających $\sigma = kE$. Założymy, że dane są wartości brzegowych przemieszczeń $\Delta(x)$, $\theta(x)$ (por. rys. 7):

$$(3.1) \quad \Delta(x) = \Delta \sin \alpha_n x, \quad \theta(x) = \theta \sin \alpha_n(x), \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{l}.$$



Rys. 7

Przyjmujemy wolne podparcie środka na przeponach poprzecznych $x = 0$, $x = l$. Wobec tego ogólne rozwiązanie równania (2.10) przedstawia się, jak następuje (por. np. [4]):

$$(3.2) \quad w(x, y) = f(y) \sin \alpha_n x,$$

gdzie

$$f(y) = C_1 \operatorname{sh} py + C_2 \operatorname{ch} py + C_3 \sin qy + C_4 \cos qy,$$

$$p = a_n \gamma_1, \quad q = a_n \gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k} + 1}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{n\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k} - 1}.$$

Rozważymy dwa przypadki, mianowicie symetrię (rys. 7a) i antysymetrię (rys. 7b) odkształcenia środnika. Dla symetrii należy przyjąć $C_1 = C_3 = 0$, dla antysymetrii $C_2 = C_4 = 0$. Dalsze dwie stałe obliczamy w obu przypadkach z warunków:

$$w = \Delta(x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta(x) \quad \text{dla } y = 1/2h.$$

Podstawiając dalej obliczone stałe do wzorów

$$r(x) = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=h/2},$$

$$m(x) = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=h/2},$$

otrzymamy ostatecznie dla przypadku symetrii

$$(3.3) \quad \begin{cases} r(x) = D[\alpha_n^3 R_{\Delta s} \Delta(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta s} \Theta(x)], \\ m(x) = D[\alpha_n^2 M_{\Delta s} \Delta(x) + \alpha_n M_{\Theta s} \Theta(x)], \end{cases}$$

gdzie

$$(3.4) \quad \begin{cases} R_{\Delta s} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{th} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} + \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q}}, \\ R_{\Theta s} = M_{\Delta s} = \frac{\gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{tg} \bar{q} - \gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{th} \bar{p}}{\gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} + \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q}}, \\ M_{\Theta s} = -\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} + \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q}}; \end{cases}$$

dla przypadku antysymetrii otrzymamy

$$(3.5) \quad \begin{cases} r(x) = D[\alpha_n^3 R_{\Delta a} \Delta(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta a} \Theta(x)], \\ m(x) = D[\alpha_n^2 M_{\Delta a} \Delta(x) + \alpha_n M_{\Theta a} \Theta(x)], \end{cases}$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{cases} R_{\Delta a} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}{\gamma_2 \operatorname{th} \bar{p} - \gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q}}, \\ R_{\Theta a} = M_{\Delta a} = \frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 + \nu) \operatorname{tg} \bar{q} + \gamma_2 (\gamma_1^2 - \nu) \operatorname{th} \bar{p}}{\gamma_2 \operatorname{th} \bar{p} - \gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q}}, \\ M_{\Theta a} = \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \operatorname{tg} \bar{q} \operatorname{th} \bar{p}}{\gamma_2 \operatorname{th} \bar{p} - \gamma_1 \operatorname{tg} \bar{q}}. \end{cases}$$

We wzorach powyższych wprowadzono oznaczenia

$$\bar{p} = \frac{n\pi h}{2} \frac{1}{l} \gamma_1, \quad \bar{q} = \frac{n\pi h}{2} \frac{1}{l} \gamma_2.$$

4. Wyboczenie giętkie

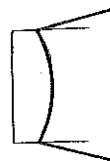
Wyboczenie giętkie daje odkształcenia symetryczne względem osi u , zatem należy przyjąć $\eta = \varphi = 0$, oraz symetryczne zniekształcenie środnika (rys. 8). Pozostają więc dwie niewiadome funkcje: $\xi(x)$ oraz $\psi(x)$.

Ze wzorów (2.1) będziemy mieli

$$\xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \frac{1}{2} b\psi, \quad \varphi_1 = \psi, \quad \eta_2 = 0,$$

zaś równanie (2.4) daje

$$T_{u1} = \frac{1}{2} EbS_{v1} \xi''''.$$



Rys. 8

Podstawiając powyższe wielkości do układu (2.5) otrzymamy

$$(4.1) \quad \begin{cases} EI_{u1} \xi'''' + P_1 \xi'' + \frac{1}{2} bES_{v1} \xi'''' - r_u(x) = 0, \\ \frac{1}{2} bEI_{u1} \psi'''' + \frac{1}{2} bP_1 \psi'' - r_v(x) = 0, \\ (P_1 r_{01}^2 - GI_{s1}) \psi'' - m(x) + \frac{1}{2} br_v(x) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania układu (4.1) wyznaczyć można reakcję $r_v(x)$:

$$(4.2) \quad r_v(x) = \frac{1}{2} bEI_{u1} \psi'''' + \frac{1}{2} bP_1 \psi''.$$

Reakcja $r_u(x)$ oraz moment $m(x)$ określone są przez przemieszczenia brzegowe środnika oraz naprężenia ściskające $\sigma = kE$ za pomocą wzorów (3.3), w których należy przyjąć

$$(4.3) \quad \Delta(x) = \xi(x), \quad \Theta(x) = \psi(x).$$

Będziemy zatem mieli

$$(4.4) \quad \begin{cases} r_u(x) = D[\alpha_n^3 R_{\Delta s} \xi(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta s} \psi(x)], \\ m(x) = D[\alpha_n^2 M_{\Delta s} \xi(x) + \alpha_n M_{\Theta s} \psi(x)]. \end{cases}$$

Podstawiając (3.2) oraz (4.4) do pierwszego i ostatniego równania układu (4.1) otrzymamy

$$(4.5) \quad \begin{cases} \left(EI_{u1} + \frac{1}{2} bES_{v1} \right) \xi'''' + P_1 \xi'' - D\alpha_n^3 R_{\Delta s} \xi - D\alpha_n^2 R_{\Theta s} \psi = 0, \\ -D\alpha_n^2 M_{\Delta s} \xi + \frac{1}{4} b^2 EI_{u1} \psi'''' + \left(P_1 r_{01}^2 - GI_{s1} + \frac{1}{4} P_1 b^2 \right) \psi'' - D\alpha_n M_{\Theta s} \psi = 0. \end{cases}$$

Warunki brzegowe zagadnienia, mianowicie dla

$$(4.6) \quad x = 0, \quad x = l, \quad \xi = 0, \quad \xi'' = 0, \quad \psi = 0,$$

będą spełnione przy założeniu

$$(4.7) \quad \xi = Al \sin \alpha_n x, \quad \psi = B \sin \alpha_n x.$$

Podstawiając (4.7) do (4.5) dochodzimy do układu dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe A , B :

$$Al \left[\alpha_n^4 \left(EI_{v1} + \frac{1}{2} bES_{v1} \right) - \alpha_n^2 P_1 - \alpha_n^3 DR_{\Delta s} \right] - B \alpha_n^2 DR_{\Theta s} = 0,$$

$$-Al \alpha_n^2 DM_{\Delta s} + B \left[\alpha_n^4 \frac{1}{4} b^2 EI_{u1} - \alpha_n^2 \left(P_1 r_{01}^2 - GI_{s1} + \frac{1}{4} P_1 b^2 \right) - \alpha_n DM_{\Theta s} \right] = 0.$$

Podstawiając dalej

$$P_1 = \sigma b \delta = kEb\delta, \quad I_{v1} = \frac{1}{12} b^3 \delta,$$

$$I_{u1} = \frac{1}{12} \delta^3 b, \quad r_{01}^2 = \frac{1}{12} (b^2 + \delta^2), \quad I_{s1} = \frac{1}{3} \delta^3 b,$$

$$S_{v1} = b\delta c, \quad D = \frac{1}{12} \frac{Et^3}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

otrzymamy po prostych przekształceniach:

$$A \left[n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{12} \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \frac{c}{l} \right) - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k - \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\Delta s} \right] -$$

$$- B \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\Theta s} = 0,$$

$$A \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Delta s} - B \left\{ \frac{b}{l} \left[\frac{n^3 \pi^3}{48} \left(\frac{b}{l} \right)^2 + \frac{n\pi}{6(1+\nu)} - n\pi \left(\frac{1}{3} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{12} \right) k \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta s} \right\} = 0.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu równań daje równanie przestępne, w którym niewiadomą jest bezwymiarowy współczynnik $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$:

$$(4.8) \quad \left[n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{12} \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \frac{c}{l} \right) - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k_{kr} - \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\Delta s} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{b}{l} \left[\frac{n^3 \pi^3}{48} \left(\frac{b}{l} \right)^2 + \frac{n\pi}{6(1+\nu)} - n\pi \left(\frac{1}{3} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{12} \right) k_{kr} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta s} \right\} - \frac{n\pi}{144(1-\nu^2)^2} \left(\frac{t}{\delta} \right)^6 R_{\Theta s} M_{\Delta s} = 0,$$

przy czym

$$c = \frac{b}{4 \frac{b}{h} \frac{\delta}{t} + 2}$$

Siła krytyczna wyboczenia EULERA wynosi

$$(4.9) \quad P_E = \frac{\pi^2 EI_v}{l^2},$$

i odpowiada jej współczynnik:

$$(4.10) \quad k_E = \pi^2 \frac{2 \frac{\delta}{b} + 24 \frac{\delta}{b} \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \frac{h}{b} \left(\frac{t}{b}\right)^3 + 12 \frac{h}{b} \frac{t}{b} \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{b}\right)}{12 \left(\frac{l}{b}\right)^2 \left(2 \frac{\delta}{b} + \frac{h}{b} \frac{t}{b}\right)}$$

Badając wpływ zniekształcenia przekroju poprzecznego pręta na wyboczenia EULERA należy w równaniu (4.8) przyjąć $n = 1$, a współczynnik k_{kr} otrzymany z jego rozwiązania porównywać ze współczynnikiem k_E .

Rozważymy pewien przypadek graniczny, mianowicie gdy $t/\delta \rightarrow 0$ (zatem również $c \rightarrow 0$); wówczas równanie (4.8) przechodzi przy wykorzystaniu wzorów (3.4) do postaci

$$(4.11) \quad \left[\frac{n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{\delta}\right)^2 b}{12} \frac{b}{l} - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k_{kr} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{n^2 \pi^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2}{48} + \frac{1}{6(1+\nu)} - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{12} \right] k_{kr} \right\} (\gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} + \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q}) = 0.$$

Równanie to posiada trzy pierwiastki. Pierwszy z nich odpowiada wyboczeniu giętnemu półki w płaszczyźnie osi u_1 i wynosi (przy $n = 1$)

$$(4.12) \quad k_{kr} = \frac{\pi^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2}{12}.$$

Drugi pierwiastek odpowiada wyboczeniu skrętnemu półki przy narzuconej osi obrotu pokrywającej się z narożem ceownika:

$$(4.13) \quad k_{kr} = \frac{\frac{\pi^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2}{4} + \frac{2}{1+\nu}}{4 \left(\frac{b}{\delta}\right)^2 + 1}.$$

Trzeci pierwiastek jest rozwiązaniem równania przestępnego $\gamma_1 \operatorname{th} \bar{p} + \gamma_2 \operatorname{tg} \bar{q} = 0$ i przedstawia naprężenia krytyczne wyboczenia płytowego środka w założeniu zupełnego utwierdzenia w półkach.

Jak widać, zmniejszenie naprężeń krytycznych skutkiem odkształcalności przekroju jest w tym granicznym przypadku bardzo duże, zwłaszcza w prętach o szerokich i grubych półkach, przy cienkim jednocześnie środniku, dla których miarodajne mogą być wielkości współczynnika k_{kr} zbliżone do podanych wzorem (4.13).

Wyniki liczbowe uzyskane z obliczeń wykonanych dla czterech przekrojów różniących się szerokością półki zestawione są w tablicy 1.

Tablica 1

	$\frac{l}{h} = 10$	$\frac{h}{t} = 50$	$\frac{\delta}{t} = 3$	
h/b	2,5	1,5	1,25	1
$k_E \cdot 10^3$	1,749	4,68	6,61	10,07
$k_{kr} \cdot 10^3$	1,737	4,48	3,53	2,12
$\chi = k_{kr}/k_E$	0,9931	0,957	0,534	0,211
$\Delta P_{kr} \% = 100(1-\chi)$	0,69	4,3	46,6	78,9

Widoczny jest wyraźny wzrost wpływu odkształcalności przekroju na siłę krytyczną w miarę poszerzania półki. Wzrost ten początkowo wolny staje się później gwałtowny i przy szerokości półki równej wysokości środnika powoduje pięciokrotnie zmniejszenie siły krytycznej. Natomiast przy proporcjach h/b , zbliżonych do stosowanych w praktyce, to znaczy $(h/b) > 1,5$, zmniejszenie siły krytycznej nie przekracza kilku procent. Należy przy tym pamiętać, że przyjęty do obliczeń przekrój ma bardzo cienki środnik. Dlatego w prętach ceowych walcowanych, w których środnik jest znacznie bardziej sztywny, omawiany wpływ można ocenić na ułamek procentu.

Gwałtowne zmniejszenie współczynnika χ dla małych wartości parametru h/b spowodowane jest jakościową zmianą przebiegu zjawiska. Mianowicie przy dużych wartościach tego parametru niestateczność ogólna pręta jest pierwotna, zaś zniekształcenie jego przekroju poprzecznego jest zjawiskiem wtórnym wywołanym nierównoważeniem poszczególnych elementów pręta. Na odwrót, przy małych wartościach h/b pierwotna jest niestateczność skrętna półek, to znaczy zniekształcenie przekroju, zaś odkształcenie giętne całego pręta jest zjawiskiem wtórnym.

Interesujące jest zastosowanie metody iteracyjnej podobnej do podanej w pracach [1] i [2]. Iteracyjne obliczanie naprężeń krytycznych polega na rozwiązywaniu kolejnych równań kwadratowych, w których niewiadomymi

są kolejne przybliżenia $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ współczynnika k_{kr} . Równania te mają budowę identyczną z równaniem (4.8):

$$(4.14) \quad \left[\pi^2 \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{12} \frac{b}{l} + \frac{1}{2} \frac{c}{l} \right) - \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} k_n - \frac{\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{ds} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{b}{l} \left[\frac{\pi^3}{48} \left(\frac{b}{l} \right)^2 + \frac{\pi}{6(1+\nu)} - \pi \left(\frac{1}{3} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{12} \right) k_n \right] - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta s} \right\} - \\ - \frac{\pi}{144(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^6 R_{\Theta s} M_{ds} = 0,$$

przy czym wielkości R_{ds} , $R_{\Theta s}$, M_{ds} i $M_{\Theta s}$ potrzebne do obliczenia n -tego przybliżenia k_{kn} współczynnika k_{kr} dane są wzorami (3.4) i (3.6), do których należy podstawić $n-1$ przybliżenie tego współczynnika, zatem w których

$$(4.15) \quad \begin{cases} \bar{p} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_1, & \bar{q} = \frac{\pi}{2} \frac{h}{l} \gamma_2, \\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1}} + 1}, & \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \frac{l}{t} \sqrt{12(1-\nu^2)k_{n-1}} - 1}. \end{cases}$$

Jako pierwsze przybliżenie należy przyjmować $k_1 = k_B$, tzn. naprężenia krytyczne wybożenia EULERA.

W tablicy 2 zestawione są kolejne przybliżenia dla dwu przekrojów poprzecznych oraz wyniki bezpośredniego rozwiązania równania przestępnego.

Widoczne jest, że w przekroju o szerokiej półce, gdzie decyduje jej niestateczność skrętna, zbieżność jest bardzo szybka, natomiast w przekroju o wąskiej półce, gdzie zniekształcenie przekroju jest znikome, zbieżność jest powolna. Zastosowanie metody iteracyjnej ułatwia

w dużym stopniu rozwiązanie równania przestępnego (4.8) w tych przypadkach, w których zmniejszenie siły krytycznej jest duże, ponieważ już pierwsze przybliżenie daje dobrą orientację o wielkości badanego wpływu i wskazuje, gdzie należy szukać rozwiązania, a tym samym zmniejsza liczbę pracochłonnych prób.

Tablica 2

	$\frac{l}{h} = 10$	$\frac{l}{t} = 500$	$\frac{\delta}{t} = 3$
h/b		2,5	1
$k_1 \cdot 10^8$		1,7495	10,07
$k_2 \cdot 10^8$		1,7321	1,953
$k_3 \cdot 10^8$		1,7395	2,126
$k_4 \cdot 10^8$		1,7355	2,123
$k_{kr} \cdot 10^8$		1,737	2,123

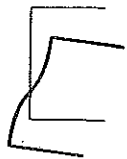
5. Wyboczenie giętno-skrętne

Wyboczenie giętno-skrętne jest antysymetryczne względem osi u , zatem należy przyjąć $\xi = 0$ z jednoczesnym antysymetrycznym zniekształceniem środnika (rys. 9).

Wobec tego ze wzorów (2.1) otrzymamy

$$(5.1) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{2}h\varphi, & \eta_1 = \eta + \left(a + \frac{1}{2}b\right)\varphi + \frac{1}{2}b\psi, \\ \varphi_1 = \varphi + \psi, & \eta_2 = \eta + a\varphi, \end{cases}$$

zaś ze wzoru (2.4)



Rys. 9

$$(5.2) \quad T_{u1} = \frac{1}{2}Eb(\eta'''S_{u1} + \varphi'''S_{\omega 1}).$$

We wzorach (3.5) należy przyjąć

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2}h\varphi(x), \quad \Theta(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Będziemy zatem mieli

$$(5.3) \quad \begin{cases} r_u(x) = D \left\{ -\frac{1}{2}h\alpha_n^3 R_{\Delta a} \varphi(x) + \alpha_n^2 R_{\Theta a} [\varphi(x) + \psi(x)] \right\}, \\ m(x) = D \left\{ -\frac{1}{2}h\alpha_n^2 M_{\Delta a} \varphi(x) + \alpha_n M_{\Theta a} [\varphi(x) + \psi(x)] \right\}. \end{cases}$$

Podstawiamy w dalszym ciągu wielkości (5.1)-(5.3) do układu równań (2.5) oraz do równania (2.9). Eliminujemy reakcje r_v i podstawiamy funkcje spełniające odpowiednie warunki brzegowe (dla $x = 0$ oraz $x = l$ musi być $\varphi = 0$, $\eta = 0$, $\varphi'' = 0$, $\psi = 0$, $\eta'' = 0$):

$$\varphi = A \sin \alpha_n x, \quad \psi = B \sin \alpha_n x, \quad \eta = Ch \sin \alpha_n x.$$

Po tych przekształceniach otrzymamy następujący układ trzech równań jednorodnych ze względu na stałe A , B i C :

$$(5.4) \quad \begin{cases} A \left[\alpha_n^4 \left(\frac{1}{2} b S_{\omega 1} - \frac{1}{2} h I_{\omega 1} \right) E + \alpha_n^2 \frac{1}{2} h P_1 + \alpha_n^2 D \frac{1}{2} h R_{\Delta a} - D \alpha_n^2 R_{\Theta a} \right] - \\ \quad - B \alpha_n^2 D R_{\Theta a} + C \alpha_n^4 \frac{1}{2} b h S_{u1} E = 0, \\ A \left\{ \alpha_n^4 \frac{1}{2} b \left(a + \frac{1}{2} b \right) E I_{u1} - \alpha_n^2 P_1 \left[\frac{1}{2} b \left(a + \frac{1}{2} b \right) + r_{01}^2 \right] + \alpha_n^2 G I_{s1} + \right. \\ \quad \left. + \alpha_n^2 D \frac{1}{2} h M_{\Delta a} - \alpha_n D M_{\Theta a} \right\} + B \left[\alpha_n^4 \frac{1}{4} b^2 E I_{u1} - \alpha_n^2 P_1 \left(\frac{1}{4} b^2 + r_{01}^2 \right) + \right. \\ \quad \left. + \alpha_n^2 G I_{s1} - \alpha_n D M_{\Theta a} \right] + Ch \left(\alpha_n^4 \frac{1}{2} b E I_{u1} - \alpha_n^2 P_1 \frac{1}{2} b \right) = 0, \\ A \left\{ \alpha_n^4 E \left[I_{u2} a + h S_{\omega 1} + 2 I_{u1} \left(a + \frac{1}{2} b \right) \right] - \alpha_n^2 [P_1 (2a + b) + P_2 a] \right\} + \\ \quad + B (\alpha_n^4 b E I_{u1} - \alpha_n^2 P_1 b) + Ch [\alpha_n^4 E (I_{u2} + h S_{u1} + 2 I_{u1}) - \alpha_n^2 (2P_1 + P_2)] = 0. \end{cases}$$

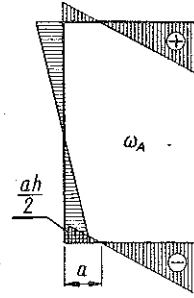
Podstawiając dalej (por. rys. 10):

$$S_{\omega 1} = -\frac{1}{4} b \delta h (b-2a), \quad S_{u 1} = \frac{1}{2} b \delta h, \quad I_{v 1} = \frac{1}{12} b^3 \delta,$$

$$I_{u 1} = \frac{1}{12} b \delta^3, \quad r_{\omega 1}^2 = \frac{1}{12} (b^2 + \delta^2), \quad I_{s 1} = \frac{1}{3} b \delta^3,$$

$$I_{u 2} = \frac{1}{12} t h^3, \quad a = \frac{3b^2 \delta}{ht + 6b\delta}, \quad P_1 = kEb\delta,$$

$$P_2 = kEht, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Rys. 10

oraz mnożąc pierwsze równanie przez $-(1/n^2\pi^2)(l^3/\delta^4)(1/E)$, drugie przez $(1/n\pi)(l^3/\delta^5)(1/E)$ oraz trzecie przez $(1/n^2\pi^2)(l^3/\delta^4)(1/E)$ otrzymamy

$$(5.5) \left\{ \begin{aligned} & A \left[n^2 \pi^2 \frac{h}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \frac{a}{b} \right) - \frac{1}{2} \frac{l}{\delta} \frac{b}{\delta} \frac{h}{\delta} k - \frac{n\pi}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 \frac{h}{\delta} R_{\Delta a} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{l}{\delta} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\Theta a} \right] + B \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{l}{\delta} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 R_{\Theta a} - \\ & \quad - C \frac{n^2 \pi^2 h}{4} \frac{b}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \frac{h}{\delta} = 0, \\ & A \left\{ \frac{n^3 \pi^3 b}{24} \frac{b}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \right) - n\pi \frac{l}{\delta} \left(\frac{b}{\delta} \right)^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{a}{b} + \frac{1}{12} \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \right] k + \right. \\ & \quad \left. + \frac{n\pi}{6(1+\nu)} \frac{b}{\delta} \frac{l}{\delta} + \frac{n\pi}{24(1-\nu^2)} \frac{l}{\delta} \frac{h}{\delta} \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Delta a} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta a} \right\} + B \left\{ \frac{n^3 \pi^3 b}{48} \frac{b}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 - n\pi \frac{l}{\delta} \left(\frac{b}{\delta} \right)^3 \left[\frac{1}{3} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{12} \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \right] k + \frac{n\pi}{6(1+\nu)} \frac{l}{\delta} \frac{b}{\delta} - \frac{n\pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 \left(\frac{t}{\delta} \right)^3 M_{\Theta a} \right\} + \\ & \quad \left. + C \left[\frac{n^3 \pi^3 h}{24} \frac{b}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 - n\pi \frac{1}{2} \frac{l}{\delta} \frac{h}{\delta} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 k \right] = 0, \\ & A \left\{ n^2 \pi^2 \left[\frac{1}{12} \frac{a}{l} \frac{t}{\delta} \left(\frac{h}{\delta} \right)^3 - \frac{1}{4} \frac{\delta}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{h}{\delta} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{a}{b} \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{6} \frac{\delta}{l} \left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b} \right) \right] - \frac{l}{\delta} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) + \frac{h}{\delta} \frac{t}{\delta} \frac{a}{\delta} \right] k \right\} + \\ & \quad \left. + B \left\{ \frac{n^2 \pi^2 b}{12} \frac{b}{l} \frac{b}{\delta} - \frac{l}{\delta} \left[\left(\frac{b}{\delta} \right)^2 + 2 \frac{h}{\delta} \frac{t}{\delta} \right] k \right\} + C \frac{h}{l} \left\{ n^2 \pi^2 \left[\frac{1}{12} \frac{t}{\delta} \left(\frac{h}{\delta} \right)^3 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{b}{\delta} \left(\frac{h}{\delta} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{b}{\delta} \right] - \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 \left(2 \frac{b}{\delta} + \frac{h}{\delta} \frac{t}{\delta} \right) k \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika tego układu daje nader skomplikowane równanie przestępne, w którym niewiadomą jest współczynnik $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$.

Obliczoną w ten sposób (przy $n = 1$) siłę krytyczną należy porównywać z siłą krytyczną wyoboczenia giętno-skrętnego pręta o przekroju nieodkształcalnym, która została określona wzorem (por. np. [3] lub [5]):

$$(5.6) \quad \begin{cases} P_{kr} = \frac{r^2(P_u + P_w) - \sqrt{r^4(P_u + P_w)^2 - 4r^2(r^2 - a_u^2)P_u P_w}}{2(r^2 - a_u^2)}, \\ P_u = \frac{\pi^2 EI_u}{l^2}, \quad P_w = \frac{1}{r^2} \left(\frac{EI_w \pi^2}{l^2} + GI_s \right), \quad r^2 = \frac{I_u + I_v}{A} - a_u^2, \\ I_w = \frac{1}{6} (b - 3a) h^2 b^2 \delta + a^2 \left(\frac{1}{12} h^3 t + \frac{1}{2} b \delta h^2 \right), \quad a_u = a + \frac{b}{2} - c. \end{cases}$$

Możliwe jest też stosowanie metody iteracyjnej identycznej z omówioną w p. 4, otrzymamy jednak do obliczenia kolejnych przybliżeń współczynnika k_{kr} równania stopnia trzeciego, dlatego użyteczność praktyczna iteracji będzie tu znacznie mniejsza niż w przypadku wyoboczenia EULERA.

Przykład liczbowy. Obliczymy współczynnik k_{kr} dla jednego z przekrojów zestawionych w tabl. 1, mianowicie dla pręta określonego parametrami: $l/h = 10$, $h/t = 50$, $\delta/t = 3$, $h/b = 1,25$. Układ równań (5.5) przybiera tu postać:

$$(5.7) \quad \begin{cases} A(116,468 - 18518,5k - 0,0887938R_{\Delta a} + 0,565278R_{\Theta a}) + \\ \quad \quad \quad + B \cdot 0,565278R_{\Theta a} - C \cdot 731,082 = 0, \\ A(912,818 - 704\,420k + 14,7990M_{\Delta a} - 94,2133M_{\Theta a}) + \\ \quad \quad \quad + B(904,227 - 414\,288k - 94,2133M_{\Theta a}) + C(22,9676 - 775699k) = 0, \\ A(1,69762 - 63107,2k) + B(0,877297 - 29629,6k) + \\ \quad \quad \quad + C(1956,82 - 89506,2k) = 0. \end{cases}$$

Drogą kolejnych prób otrzymano wynik $k_{kr} = 1,90 \cdot 10^{-3}$. Współczynnik k odpowiadający naprężeniom krytycznym wyoboczenia giętno-skrętnego wynosi według wzoru (5.6): $k_w = 2,02 \cdot 10^{-3}$, zatem mamy tu $\chi = k_{kr}/k_w = 0,941$, zaś zmniejszenie siły krytycznej wynosi $\Delta P_{kr} = 5,94\%$, czyli jest znacznie mniejsze niż wartość otrzymana dla wyoboczenia EULERA. Fakt ten należy tłumaczyć tym, że sztywność antysymetrycznego zginania środka jest większa niż sztywność zginania symetrycznego, miarodajna przy wyoboczeniu EULERA.

Literatura cytowana w tekście

- [1] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego na siłę krytyczną Eulera*, Rozpr. inżyn., 1, 8 (1960).
- [2] A. CHUDZIKIEWICZ, *Wpływ odkształcalności przekroju poprzecznego na siłę krytyczną wyoboczenia skrętnego pręta dwuteowego*, Rozpr. inżyn., 2, 8 (1960).
- [3] В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
- [4] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, New York 1936.
- [5] J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Warszawa 1957.

ИЗГИБНОЕ И ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ШВЕЛЛЕРА С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В работе исследуется влияние деформируемости поперечного сечения швеллера на критическую силу изгибного и изгибно-крутильного выпучивания.

В рассуждениях принимается упругий материал, шарнирные опоры швеллера, допускающие свободную деформацию крайних сечений, жесточенных поперечными диафрагмами, которые препятствуют деформации этих сечений. Кроме того принимается недеформируемость полки в плоскости поперечного сечения.

Перемещения точек поперечного сечения определяются четырьмя величинами (рис. 4), а именно: двумя составляющими ξ, η перемещения поперечного сечения, углом его оборота φ , а также деформацией сечения, характеризующейся углом ψ и действующими в данный момент сжимающими напряжениями σ . Независимо рассматриваются отдельные стенки швеллера (рис. 3), перемещения которых даются формулами (2.1). Формулы (2.4) и (2.8) представляют поперечные силы (рис. 6), которые действуют в полке и стенке в следствие деформации всего стержня; эти силы зависят только от величины ξ, η и φ , так как угол ψ не влияет непосредственно на распределение напряжений σ и τ . Они входят вместе с реакциями внутреннего воздействия r_u, r_v и m (рис. 3) в уравнения равновесия полки (2.5) и стенки (2.9).

В разделе 3 определяются реакции r и m пластинки сжимаемой напряжениями $\sigma = kE$, в зависимости от краевых перемещений Δ, Θ (рис. 7).

В разделе 4 рассматривается изгибное выпучивание. Ввиду симметрии принимается что $\eta = \varphi = 0$, а также симметричную деформацию стенки (рис. 7a). Подставляя реакцию (4.4) в уравнения (4.1) и предполагая решение в виде (4.7) получаем трансцендентное уравнение (4.8), в котором неизвестной является безразмерный коэффициент $k_{kr} = \sigma_{kr} / E$. Результаты расчетов приводятся на табл. 1. Уменьшение критической силы по сравнению с Эйлеровой силой составляет от 0,69 до 78,90% и резко повышается с ростом ширины полки. Затем рассматривается некоторый итерационный метод по формулам (4.14) и (4.15). Последовательные приближения коэффициента k даются на табл. 2.

В разделе 5 рассматривается изгибно-крутильное выпучивание. Принимается $\xi = 0$ и антисимметричная деформация стенки (рис. 7b) и получено трансцендентное уравнение из системы (5.5). Определено для $h/b = 1,25$ коэффициент $k_{kr} = 1,90 \cdot 10^{-3}$, тогда как по известной формуле (5.6) получено $k_{kr} = 2,02 \cdot 10^{-3}$, т.е. уменьшение критической силы составляет 5,94% и является значительно меньшим чем для Эйлеровой критической силы.

Численные результаты приводят к заключению, что в типичных случаях обсуждаемое влияние является небольшим, однако в сечениях с очень крепкими полками, по сравнению со стенками, может иметь практическое значение.

Summary

BENDING AND FLEXURAL-TORSIONAL BUCKLING OF A CHANNEL WITH DEFORMABLE CROSS-SECTION

The object of this paper is to investigate the influence of the deformability of the cross-section of a channel on the critical force for flexural and flexural-torsional buckling.

It is assumed that the material is elastic, the end supports hinged and enabling free warping of the end cross-sections which are stiffened by means of transversal diaphragms preventing the deformation of the cross-section. It is further assumed that the flanges are indeformable in the plane of the cross-section.

The displacements of points of a cross-section are determined by four quantities (Fig. 4): two displacement components ξ , η of the cross-section, its rotation φ and its deformation characterized by the angle ψ , and by the real compressive stress σ . Each wall of the bar is considered separately (Fig. 3). The displacements are expressed by the Eqs. (2.1). The Eqs. (2.4) and (2.8) represent the shearing forces (Fig. 6) acting in the flanges and the web of the channel cross-section due to the deformation of the bar as a whole. These forces depend only on the quantities ξ , η , φ , because the angle ψ does not influence directly the distribution of the stresses σ and τ . They enter, together with the reactions r_w , r_v , m , (Fig. 3), the equations of equilibrium of the flange (2.5) and the web (2.9).

In Sec. 3, the reactions r , m are computed for a plate compressed by the stresses $\sigma = kE$ depending on the edge displacements Δ , Θ (Fig. 7).

In Sec. 4, the flexural buckling is considered. In view of the symmetry, it is assumed that $\eta = \varphi = 0$ and that the deformation of the web is symmetric (Fig. 7a). On substituting the reaction (4.4) in the Eqs. (4.1), and assuming the solution in the form (4.7), we obtain the transcendental equation (4.8), in which the dimensionless coefficient $k_{kr} = \sigma_{kr}/E$ is unknown. The results are collated in Table 1. The decrease of the critical force in relation to the Eulerian force is from 0.69% to 78.9% and increases violently with increasing width of the amount web. Next, an iteration procedure is considered according to the Eqs. (4.14) and (4.15). The successive approximations of the coefficient k are collated in Table 2.

In Sec. 5, combined flexural-torsional buckling is considered. We assume $\xi = 0$ and antisymmetric deformation of the web (Fig. 7b). The transcendental

equation is obtained from (5.5). For $k/b = 1,25$ the coefficient $k_{kr} = 1,90 \cdot 10^{-3}$ is computed while from the familiar equation (5.6) we obtain $k_w = 2,02 \cdot 10^{-3}$, therefore the decrease of the critical force amounts to 5,94% and is considerably smaller than for the Eulerian buckling.

The numerical results lead to the conclusion that in typical cases the influence under consideration is small, but in cross-sections having flanges very rigid in comparison to the «vertical» element, it may be of practical meaning.

ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1959 r.