ZBYSZKO STOJEK

O ZASTOSOWANIU ZASADY HAMILTONA DO WYPROWADZANIA RÓWNAŃ DRGAŃ GIĘTNYCH BELKI Z UWZGLĘDNIENIEM ŚCINANIA

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
CLI
TOM VIII · ZESZYT 2 · ROK 1960

Zasadę wariacyjną HAMILTONA można zastosować do wyprowadzenia równań różniczkowych dla drgań giętnych pręta. Dla układów zachowawczych, z jakimi mamy do czynienia w przypadku swobodnych drgań nietłumionych, zasadę tę, [2], wyraża wzór:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E-U)\,dt = 0, \tag{1}$$

gdzie E jest energią kinetyczną układu oraz U jest energią potencjalną (sprężystą).

Na ogół nie stosowano zasady HAMILTONA do samego wyprowadzania równań różniczkowych ruchu. Nieliczne prace (np. [3]) stosują tę metodę przy zagadnieniu drgań giętnych prętów bez uwzględnienia wpływu ścinania. Ostatnio D. RASKOVIČ poświęcił część swojej pracy, [4], wyprowadzeniu z zasady HAMILTONA równania różniczkowego drgań poprzecznych belki o stałym przekroju z uwzględnieniem ścinania uzyskując jako wynik poprawne równanie różniczkowe. Równanie to było uprzednio wyprowadzone na innej drodze przez TIMOSZENKĘ, [5]. W pracy [4] jednak przy obliczaniu energii potencjalnej sprężystej nie uwzględniono sił poprzecznych, a wyprowadzając równanie EULERA-LAGRANGE'A nie wzięto pod uwagę, że mamy do czynienia z funkcjonałem dwóch funkcji będących między sobą w pewnym związku.

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie równania różniczkowego swobodnych nietłumionych drgań giętnych pręta w ogólnym przypadku korzystając z zasady HAMILTONA.

Rozpatrzmy zagadnienie drgań swobodnych pręta o zmiennym przekroju, poddanego działaniu statycznej siły podłużnej zmiennej na długości oraz oddziaływaniu sprężystego podłoża WINKLERA. W obliczeniach uwzględnimy wpływ ścinania i bezwładności obrotowej przekroju. Zakładamy, że drgania są małe i odbywają się w głównej płaszczyźnie zginania, zaś pręt jest prostoliniowy, wykonany z materiału jednorodnego i izotropowego.

Całkowite ugięcie belki może być przedstawione w postaci sumy

$$w = w_1 + w_2, \tag{2}$$

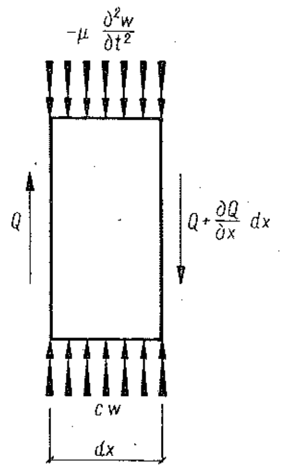
gdzie w_1 oznacza ugięcie wywołane tylko zginaniem, w_2 ugięcie wywołane siłą poprzeczną Q^* prostopadłą do osi pręta. W przypadku gdy pręt poddany jest działaniu siły podłużnej, rzeczywista siła poprzeczna wynosi

$$Q^* = Q - N\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3}$$

gdzie Q oznacza siłę poprzeczną przy $N = 0$, N siłę podłużną. Związek między ugięciem w_2 a siłą poprzeczną jest następujący:

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\varkappa}{GF}\left(Q - N\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{4}$$

gdzie F jest polem powierzchni przekroju, G modułem odkształcenia postaciowego, $\varkappa$ bezwymiarowym współczynnikiem charakteryzującym w pewien sposób przekrój (dla prostokąta $\varkappa = 1{,}2$).



Rys. 1

Z równania ruchu postępowego elementu belki (rys. 1)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dx - cw\,dx = 0 \tag{5}$$

otrzymujemy, że pochodna siły poprzecznej w przypadku drgań swobodnych jest równa sumie intensywności siły bezwładności d'Alemberta ze znakiem przeciwnym i intensywności oddziaływania podłoża:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + cw, \tag{6}$$

gdzie μ oznacza intensywność masy belki oraz c współczynnik proporcjonalności oddziaływania podłoża.

Z (4) i (6) otrzymujemy równanie różniczkowe określające związek między funkcją w a w_2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GF}{\varkappa}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + cw - \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{7}$$

W dalszym ciągu operować będziemy tylko funkcjami w i w_2.

Energia kinetyczna pręta wynosi

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + i^2\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial t}\right)^2\right]dx, \tag{8}$$

gdzie i oznacza promień bezwładności przekroju.

Obliczając energię sprężystą należy uwzględnić jeszcze wpływ sił poprzecznych, siły podłużnej oraz oddziaływanie podłoża. Przy pominięciu odkształceń czystego ściskania wpływ siły podłużnej możemy zastąpić momentem rozłożonym o intensywności

$$m = -N\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{9}$$

Energia sprężysta ustroju wynosi zatem

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\left[EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)^2+\frac{GF}{\varkappa}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2+N\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+cw^2\right]dx, \tag{10}$$

gdzie EJ oznacza sztywność na zginanie.

Stosując zasadę HAMILTONA mamy do czynienia z funkcjonałem

$$\begin{aligned}v(w,w_2)=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\frac{1}{2}\Bigg[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+i^2\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial t}\right)^2-EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)^2-\\ -\frac{GF}{\varkappa}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2-N\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-cw^2\Bigg]\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Ogólnie można funkcjonał tego typu zapisać w sposób następujący:

$$v(w,w_2)=\iint_D F(x,t,w,w_2,p,p_2,q,q_2,r,r_2,s,s_2,u,u_2)\,dx\,dt, \tag{12}$$

gdzie

$$p=\frac{\partial w}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial w}{\partial t},\qquad r=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad s=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t},\qquad u=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Na funkcje p_2, q_2, r_2, s_2, u_2 znajdziemy podobne wyrażenia.

Pierwsza wariacja tego funkcjonału, [1], ma postać

$$\begin{aligned}\delta v=\iint_D\Bigg\{\Bigg[F'_w-\frac{\partial}{\partial x}(F'_p)-\frac{\partial}{\partial t}(F'_q)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(F'_r)+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(F'_s)+\\ +\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F'_u)\Bigg]\delta w+\Bigg[F'_{w_2}-\frac{\partial}{\partial x}(F'_{p_2})-\frac{\partial}{\partial t}(F'_{q_2})+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(F'_{r_2})+\\ +\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(F'_{s_2})+\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F'_{u_2})\Bigg]\delta w_2\Bigg\}\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{13}$$

W naszym przypadku po obliczeniu i wstawieniu do (1) otrzymamy

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\Bigg\{\Bigg[-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left\langle i^2\mu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}-\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)\right\rangle-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right\rangle+\\ +\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)-cw\Bigg]\delta w+\Bigg[-\frac{\partial}{\partial x}\left\langle i^2\mu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}-\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)\right\rangle+\\ +\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right\rangle+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GF}{\varkappa}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\Bigg]\delta w_2\Bigg\}\,dx\,dt=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Tutaj δw i δw_2 nie są od siebie niezależne.

Zastępując

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{GF}{\varkappa}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)$$

wyrażeniem (7) otrzymamy

$$(15)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left\{-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[i^2\mu\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}-\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)-cw\right\}(\delta w-\delta w_2)\,dx\,dt=0.$$

Wobec dowolności $(\delta w-\delta w_2)$ otrzymamy z (15) dla naszego zagadnienia po dołączeniu równania (7) następujący układ równań różniczkowych cząstkowych:

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)\right]-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[i^2\mu\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}-\dfrac{\partial^3 w_2}{\partial x\,\partial t^2}\right)\right]- \\ \qquad\qquad -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(N\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+cw+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{GF}{\varkappa}\dfrac{\partial w_2}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(N\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)-cw-\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym (przekrój stały oraz $N\equiv C\equiv 0$), którym zajmowano się w pracy [4], warunek dodatkowy (7) ma postać:

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=\frac{\varkappa\mu}{GF}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Postępując podobnie jak wyżej z zasady Hamiltona otrzymamy

$$(18)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left\{\left[-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+i^2\mu\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}-\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\,\partial t^2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-EJ\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}\right)\right]\delta w+\left[-i^2\mu\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}-\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2\,\partial t^2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+EJ\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}\right)+\frac{GF}{\varkappa}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right]\delta w_2\right\}dx\,dt=0.$$

Uwzględniając warunek (17) otrzymujemy

$$(19)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left[EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\mu\left(\frac{\varkappa EJ}{GF}+i^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}+\right.$$

$$\left.+i^2\frac{\varkappa\mu^2}{GF}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right](\delta w-\delta w_2)\,dx\,dt=0.$$

Wobec dowolności $(\delta w-\delta w_2)$ otrzymujemy z (19) następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$(20)\qquad EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\mu\left(\frac{\varkappa EJ}{GF}+i^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}+i^2\frac{\varkappa\mu^2}{GF}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Stosując do układu równań (16) metodę FOURIERA rozdzielenia zmiennych, tzn. szukając szczegółowych rozwiązań wśród funkcji $w(x,t) = y(x)\cos\omega t$, $w_2(x_0t,) = y_2(x)\cos\omega t$, otrzymamy dla funkcji własnych naszego zagadnienia następujący układ zwyczajnych równań różniczkowych liniowych jednorodnych:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[EJ\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{d^2y_2}{dx^2}\right)\right]+\dfrac{d}{dx}\left[\omega^2 i^2\mu\left(\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy_2}{dx}\right)-N\dfrac{dy}{dx}\right]+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(c-\mu w^2)y = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{GF}{\varkappa}\dfrac{dy_2}{dx}+N\dfrac{dy}{dx}\right)+(\mu\omega^2-c)y = 0, \end{cases}$$

gdzie ω oznacza częstość drgań.

Dla konkretnych przykładów układ ten można rozwiązać numerycznie. Dla ilustracji podano następujący przykład.

Przykład. Obliczyć podstawową częstość drgań własnych słupa przegubowo podpartego (rys. 2).

Dane:

$E = 2\,100\,000$ [KG/cm²], $\quad G = 810\,000$ [KG/cm²], $\quad \gamma = 0{,}00785$ [KG/cm³],

$l = 400$ [cm], $\quad r(x) = 9\sqrt{1-\dfrac{x}{800}}$ [cm],

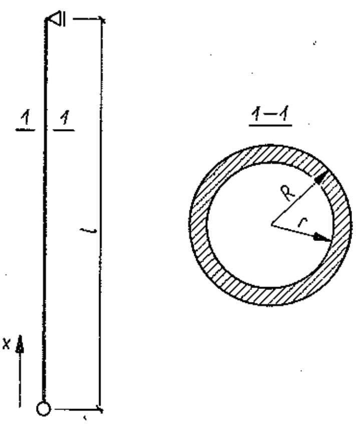
$$R(x) = 10\sqrt{1-\frac{x}{800}}\ \text{[cm]},$$

dla $\quad \dfrac{r}{R} = 0{,}9 \qquad \varkappa = 17{,}66,$

$$F(x) = 59{,}7\left(1-\frac{x}{800}\right)\ [\text{cm}^2],$$

$$J(x) = 2700\left(1-\frac{x}{800}\right)^2\ [\text{cm}^4],$$

$$i^2(x)\mu(x) = 0{,}02161\left(1-\frac{x}{800}\right)^2\ [\text{kG sek}^2],$$



Rys. 2

$$N(x) = 187{,}46\left[0{,}25-\left(1-\frac{x}{800}\right)^2\right]\ [\text{kG}], \qquad c(x) \equiv 0.$$

Warunki brzegowe w naszym przykładzie mają postać:

$$(22)\qquad \begin{cases} y(0) = 0, & y(l) = 0, \\ y_2(0) = 0, & y_2(l) = 0, \\ y''(0)-y_2''(0) = 0, & y''(l)-y_2''(l) = 0. \end{cases}$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia zastosujemy metodę ortogonalizacyjną Galerkina. Całki układu (21) aproksymować będziemy ciągiem funkcji ortogonalnych i spełniających warunki brzegowe (22):

$$
(23) \qquad \begin{cases} y = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin \dfrac{k\pi x}{l}, \\ y_2 = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin \dfrac{k\pi x}{l}. \end{cases}
$$

Po podstawieniu (23) do układu (21) otrzymamy:

$$
(24) \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \Bigg[\left(EJ \dfrac{k^4\pi^4}{l^4} \sin \dfrac{k\pi x}{l} - 2EJ' \dfrac{k^3\pi^3}{l^3} \cos \dfrac{k\pi x}{l} - EJ'' \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \sin \dfrac{k\pi x}{l} + \right. \\ \qquad \left. + \omega^2 (\mu i^2)' \dfrac{k\pi}{l} \cos \dfrac{k\pi x}{l} - \omega^2 (\mu i^2) \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \sin \dfrac{k\pi x}{l} \right) (a_k - b_k) + \\ \qquad + \left(N \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \sin \dfrac{k\pi x}{l} - N' \dfrac{k\pi}{l} \cos \dfrac{k\pi x}{l} - \mu\omega^2 \sin \dfrac{k\pi x}{l} \right) a_k \Bigg] = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \Bigg[\left(\left(\dfrac{GF}{\varkappa} \right)' \dfrac{k\pi}{l} \cos \dfrac{k\pi x}{l} - \dfrac{GF}{\varkappa} \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \sin \dfrac{k\pi x}{l} \right) b_k + \\ \qquad + \left(N' \dfrac{k\pi}{l} \cos \dfrac{k\pi x}{l} - N \dfrac{k^2\pi^2}{l^2} \sin \dfrac{k\pi x}{l} + \mu\omega^2 \sin \dfrac{k\pi x}{l} \right) a_k \Bigg] = 0. \end{cases}
$$

Następnie mnożymy równania układu (24) przez $\sin(p\pi x/l)$ i całkujemy po długości pręta ($p = 1, 2, \ldots, n$). Jako wynik otrzymamy układ równań liniowych jednorodnych o $2n$ niewiadomych:

$$
(25) \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} [(A_{kp} + B_{kp}) a_k - B_{kp} b_k] = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} [A_{kp} a_k + C_{kp} b_k] = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}
$$

gdzie

$$
A_{kp} = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \int_0^l N \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} dx - \frac{k\pi}{l} \int_0^l N' \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} dx - \\ - \omega^2 \int_0^l \mu \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{p\pi x}{l} dx,
$$

$$B_{kp} = \frac{k^4\pi^4}{l^4}\int_0^l EJ\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx - 2\frac{k^3\pi^3}{l^3}\int_0^l EJ'\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx -$$

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\int_0^l EJ''\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx + \omega^2\frac{k\pi}{l}\int_0^l (\mu i^2)'\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx -$$

$$-\omega^2\frac{k^2\pi^2}{l^2}\int_0^l (\mu i^2)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx,$$

$$C_{kp} = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\int_0^l \frac{GF}{\varkappa}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx - \frac{k\pi}{l}\int_0^l \left(\frac{GF}{\varkappa}\right)'\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx.$$

W rozpatrywanym przez nas przykładzie przy przyjęciu $n = 1$ otrzymamy układ

$$\left\{\begin{array}{l} (2408-0{,}0718\,\omega^2)a-(2408{,}6-0{,}0001556\,\omega^2)b = 0, \\ -(0{,}66033+0{,}07164\,\omega^2)a+25336\,b = 0. \end{array}\right. \tag{26}$$

Aby układ (26) miał niezerowe rozwiązanie, wyznacznik układu musi być równy zeru:

$$\begin{vmatrix} 2408-0{,}0718\,\omega^2 & -2408{,}6+0{,}0001556\,\omega^2 \\ -0{,}66033-0{,}07164\,\omega^2 & 25336 \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Warunek (27) jest równaniem częstości. Równanie to po rozwinięciu ma postać:

$$0{,}000011147\,\omega^4-1991{,}68\,\omega^2+61007498 = 0. \tag{28}$$

Z równania (28) otrzymujemy następującą wartość na częstość podstawową:

$$\omega_1 = 174\ [\text{sek}^{-1}]. \tag{29}$$

Literatura cytowana w tekście

[1] Л. Э. Эльсгольц, *Вариационное исчисление*, Москва 1958.

[2] M.T. Huber, *Mechanika ogólna i techniczna*, Warszawa 1956.

[3] M.T. Huber, *Teoria sprężystości*, t. 2, PAU, 1950.

[4] D. Rasković, *Własności funkcji własnych dla drgań poprzecznych belek jednorodnych z uwzględnieniem wpływu ścinania i bezwładności obrotowej*, Rozpr. inżyn., 2, 6(1958).

[5] S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, New York 1953.

Резюме

О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ВЫВЕДЕНИЯ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА БАЛКИ С УЧЕТОМ СРЕЗА

При работе применяется принцип Гамильтона для выведения дифференциальных уравнений свободных, недемпфированных, изгибных колебаний в общем случае (учитывая, между прочим, влияние среза). В каче-

стве результата получается система двух дифференциальных уравнений (21) для собственных функций. Для иллюстрации дается пример решения системы (21) методом Галеркина.

Summary

ON THE APPLICATION OF THE HAMILTON PRINCIPLE TO THE DERIVATION OF THE BENDING EQUATIONS OF BEAMS TAKING INTO ACCOUNT SHEARS

The paper deals with derivation by means of the Hamilton principle of the differential equations of free bending vibrations of a beam in the general case (taking into account the influence of shears). The result is a system of two differential equations (21) for eigenfunctions. As an illustration the system (21) is solved by the Galerkin method.

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lipca 1959 r.